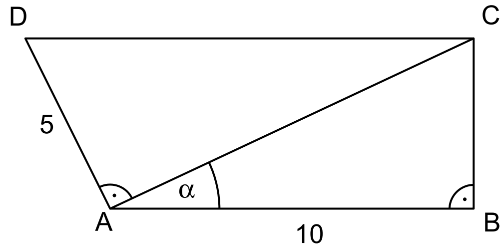
ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2018

Mathematik I (Analysis)



Aufgabe 1 [6 Punkte]
Bestimmen Sie den Winkel α im Trapez ABCD.

Aufgabe 2 [12 Punkte]
Geben Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen in $\mathbb{R}$ an.

a) $e^{2x} = 2e^{x} + 2$

b) $\dfrac{x+1}{x-x^{2}} = \dfrac{2x-12}{2x^{2}+x-3}$

c) $\ln\left(\sqrt{2x}+2\right) + \ln(x) = 2\ln\left(\sqrt{3x-1}\right)$

Aufgabe 3 [12 Punkte]

Sei $z_1, z_2, z_3, \ldots$ eine unendliche geometrische Folge in $\mathbb{C}$ und sei $q = \dfrac{z_{n+1}}{z_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bekannt sind die ersten zwei Folgenglieder: $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 1.5 + 2.5i$

a) Bestimmen Sie q.
b) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ ist der Abstand zwischen z_n und dem Ursprung in der Gauss'schen Zahlenebene kleiner als 0.001?
c) Ausgehend vom Ursprung werden die Strahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gezeichnet, die jeweils durch $z_1, z_2, z_3, \ldots$ gehen. Existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass die Strahlen a_n und a_{n+m} für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils aufeinander zu liegen kommen? Wenn ja: Bestimmen Sie m. Wenn nein: warum nicht?

Aufgabe 4 [12 Punkte]
An den Graphen der Funktion $f(x) = -x^{2} + 1$ wird im ersten und im zweiten Quadranten je eine Tangente gelegt. Das bezüglich der y-Achse symmetrische Dreieck, welches von den zwei Tangenten und von der x-Achse definiert wird, soll minimale Fläche haben. Bestimmen Sie diese kleinste Fläche.

Aufgabe 5 [16 Punkte]
Gegeben ist die Funktion $f_n(x) = x^{n} \cdot e^{x} \quad (n \in \mathbb{N})$.

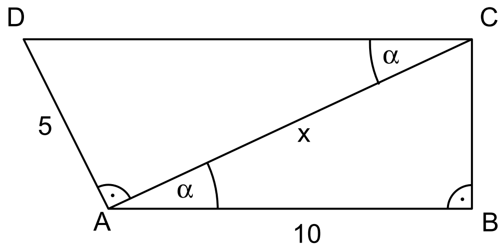
a) Setzen Sie zunächst n = 1.
Bestimmen Sie Nullstellen, Extrema und Wendepunkte von $f_1(x)$ und skizzieren Sie den Funktionsgraphen. Berechnen Sie anschliessend die Fläche im dritten Quadranten, welche vom Graphen von $f_1(x)$ und von der x-Achse eingeschlossen wird.
b) Sei nun n eine beliebige natürliche Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\left|\int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx\right| = n!$

Beachte! Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{n}}{e^{x}}\right) = 0$

Lösungen Mathematik I (Analysis) – Herbst 2018

Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss der Formel $N = 1 + \frac{p}{11}$, wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Lösung 1



Im Dreieck ABC:	$\cos(\alpha) = \frac{10}{x}$	**[1 pt]**
Im Dreieck ACD:	$\tan(\alpha) = \frac{5}{x}$	**[1 pt]**
Daraus folgt:	$\frac{10}{\cos(\alpha)} = \frac{5}{\tan(\alpha)}$	**[1 pt]**

$\Rightarrow \quad 10\tan(\alpha) = 5\cos(\alpha)$

$\Rightarrow \quad 2\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \cos(\alpha)$

$\Rightarrow \quad 2\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha)$ **[1 pt]**

$\Rightarrow \quad 2\sin(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$

$\Rightarrow \quad \sin^2(\alpha) + 2\sin(\alpha) - 1 = 0$ **[1 pt]**

$\Rightarrow \quad \sin(\alpha) = -1 - \sqrt{2} \approx -2.4142$

oder

$\sin(\alpha) = -1 + \sqrt{2} \approx 0.4142$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 24.47°$ **[1 pt]**

Lösung 2.a

$$e^{2x} = 2e^x + 2$$

$$\left(e^x\right)^2 = 2e^x + 2$$

Substitution: $e^x = y$ **[1 pt]**

$$y^2 - 2y - 2 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} y_1 = 1 + \sqrt{3} \approx 2.732... \\ \text{oder} \\ \Rightarrow \quad y_2 = 1 - \sqrt{3} \approx -0.732... \end{array}\right\}$$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad x_1 = \ln\left(y_1\right) \approx 1.005...$$

($\ln\left(y_2\right)$ ist nicht definiert.)

Lösungsmenge: $L = \left\{\ln\left(1+\sqrt{3}\right)\right\} = \left\{1.005...\right\}$ **[1 pt]**

Lösung 2.b

$$\frac{x+1}{x(1-x)} = \frac{2x-12}{(2x+3)(x-1)}$$ **[1 pt]**

Gemeinsamer Nenner: $GN = x(2x+3)(x-1)$

$$-(x+1)(2x+3) = x(2x-12)$$ **[1 pt]**

$$-2x^2 - 5x - 3 = 2x^2 - 12x$$

$$0 = 4x^2 - 7x + 3$$

$$0 = (4x-3)(x-1) \quad \Rightarrow \quad x = 0.75 \quad \text{oder} \quad x = 1$$ **[1 pt]**

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1.5\,;\,0\,;\,1\right\}$

Lösungsmenge: $L = \left\{0.75\right\}$ **[1 pt]**

Lösung 2.c

$$\ln\left(\sqrt{2x}+2\right)+\ln(x)=2\ln\left(\sqrt{3x-1}\right)$$

$$\ln\left(x\sqrt{2x}+2x\right)=\ln(3x-1)$$ **[1 pt]**

$$x\sqrt{2x}+2x=3x-1$$

$$\sqrt{2x^3}=x-1$$

$$2x^3=x^2-2x+1$$ **[1 pt]**

$$2x^3-x^2+2x-1=0$$

$$x^2(2x-1)+(2x-1)=0$$

$$\left(x^2+1\right)(2x-1)=0$$ **[1 pt]**

$$x=\frac{1}{2}$$ **[1 pt]**

Kontrolle:

$$\ln\left(\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}+2}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)\stackrel{?}{=}2\ln\left(\sqrt{3\cdot\frac{1}{2}-1}\right)$$

$$\ln(3)+\ln(0.5)\stackrel{?}{=}2\ln\left(\sqrt{0.5}\right)$$

$$\ln(1.5)\stackrel{f}{=}\ln(0.5)$$

Lösungsmenge: $L=\{\ \}$ **[1 pt]**

Lösung 3.a

Variante 1: $q = \frac{1.5+2.5i}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} = \frac{8.5+8.5i}{16+1} = 0.5+0.5i$ **[2 pt]**

Variante 2: Sei $q = a+bi \quad \Rightarrow \quad (4+i)(a+bi) = 1.5+2.5i$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4a-b=1.5 \\ 4b+a=2.5 \end{vmatrix}$$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad 4(4a-1.5)+a=2.5$$

$$\Rightarrow \quad 17a=8.5$$

$$\Rightarrow \quad a=0.5, b=0.5$$ **[1 pt]**

Lösung 3.b

Der Betrag eines Produkts zweier komplexer Zahlen entspricht dem Produkt der Beträge der zwei komplexen Zahlen:

$$|q| = \sqrt{0.5^2+0.5^2} = \sqrt{0.5}$$ **[0.5 pt]**

$$|z_1| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$$ **[0.5 pt]**

$$|z_2| = \sqrt{1.5^2+2.5^2} = \sqrt{8.5} = |z_1||q|$$

$$|z_3| = |z_2||q| = \sqrt{8.5\cdot 0.5} = \sqrt{4.25}$$

Allgemein: $|z_n| = |z_1||q|^{n-1} = \sqrt{17\cdot 0.5^{n-1}} = \sqrt{\frac{17}{2^{n-1}}}$ **[1 pt]**

Lösung: $\sqrt{\frac{17}{2^{n-1}}} < 0.001$

Sei m, so dass $\sqrt{\frac{17}{2^{m-1}}} = 0.001$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad \frac{17}{2^{m-1}} = 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{m-1} = 17\cdot 10^6$$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad m-1 = \log_2\left(17\cdot 10^6\right) = \frac{\ln\left(17\cdot 10^6\right)}{\ln(2)} \approx 24.019$$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad n=26$$ **[1 pt]**

Lösung 3.c

q in Exponentialform: $q = \sqrt{0.5} \cdot e^{i\rho}$, wobei $\rho = \arccos\left(\frac{0.5}{\sqrt{0.5}}\right) = \arccos\left(\sqrt{0.5}\right) = \frac{\pi}{4}$ **[2 pt]**

(oder $\rho = \arcsin\left(\frac{0.5}{\sqrt{0.5}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{0.5}\right) = \frac{\pi}{4}$)

$\rho = \frac{\pi}{4}$ entspricht einer Achteldrehung; somit ist die Antwort: ja, m = 8. **[2 pt]**

Lösung 4

Sei $y = mx + c$ die Tangente im ersten Quadranten und $P\left(x_0 \middle| y_0\right)$ der Berührungspunkt der Tangente.

Ableitung von f(x): $f'(x) = -2x$

Steigung der Tangente in $P\left(x_0 \middle| y_0\right)$: $m = -2x_0$ **[1 pt]**

Bestimmung von c: $-x_0^2 + 1 = y_0 = \left(-2x_0\right)x_0 + c$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad c = x_0^2 + 1$$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad y = \left(-2x_0\right)x + x_0^2 + 1$$

Schnittpunkt der Tangente mit den Koordinatenachsen:

Mit der y-Achse: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x_0^2 + 1$

Mit der x-Achse: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(-2x_0\right)x + x_0^2 + 1$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0}$$ **[1 pt]**

Fläche des Dreiecks: $A(x_0) = \left(\frac{x_0^2 + 1}{2x_0}\right)\left(x_0^2 + 1\right) = \frac{\left(x_0^2 + 1\right)^2}{2x_0}$ **[1 pt]**

Ableitung: $A'(x_0) = \frac{2\left(x_0^2 + 1\right) \cdot 2x_0 \cdot 2x_0 - \left(x_0^2 + 1\right)^2 \cdot 2}{\left(2x_0\right)^2}$ **[2 pt]**

Extrema: $A'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 8x_0^2\left(x_0^2 + 1\right) - 2\left(x_0^2 + 1\right)^2$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad 0 = 4x_0^2 - \left(x_0^2 + 1\right)$$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad 1 = 3x_0^2$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \pm\sqrt{0.\overline{3}} \approx \pm 0.577$$ **[1 pt]**

Minimale Fläche: $A\left(\sqrt{0.\overline{3}}\right) = \frac{\left(0.\overline{3} + 1\right)^2}{2\sqrt{0.\overline{3}}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \approx 1.5396$ **[1 pt]**

$x_0 = \sqrt{0.\overline{3}} \approx 0.577$ entspricht einem Minimum, da für $x_0 \to 0$ die Fläche des Dreiecks gegen unendlich geht; für $x_0 = 1$ ist die Fläche des Dreiecks $A(1) = 2 > 1.5396$. **[1 pt]**

Aufgabe 5.a

Nullstellen: $0 = x \cdot e^x \quad \Rightarrow \quad x = 0$ **[1 pt]**

Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} f_1'(x) &= (x \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x) \\ f_1''(x) &= ((1+x) \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x = e^x(2+x) \\ f_1'''(x) &= ((2+x) \cdot e^x)' = 1 \cdot e^x + (2+x) \cdot e^x = e^x(3+x) \end{aligned}\right\}$$ **[2 pt]**

Extrema: $f_1'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, y = -e^{-1} \approx -0.37...$

$f_1''(-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Min}(-1 | -0.37...)$ **[1 pt]**

Wendepunkte: $f_1''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2, y = -2e^{-2} \approx -0.27...$

$f_1'''(-2) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WP}(-2 | -0.27...)$ **[1 pt]**

[1 pt]

Partielle Integration: $\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + k$ **[2 pt]**

$$\left[\begin{array}{ccc} u(x) = x & \Rightarrow & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array}\right]$$

Mit Grenzwerten: $\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \, dx = \left[x \cdot e^x\right]_{-\infty}^{0} - \left[e^x\right]_{-\infty}^{0} = (0-0) - (1-0) = -1$

Fläche: $\left| \int_{-\infty}^{0} x \cdot e^x \, dx \right| = 1$ **[1 pt]**

Aufgabe 5.b

Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat die Funktion $f_n(x)$ eine Nullstelle im Ursprung und die Asymptote $y=0$ für $x \to -\infty$.

Induktionsanfang: $\left|\int_{-\infty}^{0} f_1(x)dx\right| = 1$ (siehe Teilaufgabe 5.a) **[1 pt]**

Induktionsschritt:

- Voraussetzung: $\left|\int_{-\infty}^{0} f_n(x)dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{0} x^n \cdot e^x\,dx\right| = n!$ (*)

- Behauptung: $\left|\int_{-\infty}^{0} f_{n+1}(x)dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{0} x^{n+1} \cdot e^x\,dx\right| = (n+1)!$

[1 pt]

- Beweis (part. Integr.): $\int x^{n+1} \cdot e^x\,dx = x^{n+1} \cdot e^x - (n+1)\int x^n \cdot e^x\,dx$ **[2 pt]**

$$\left[\begin{array}{ccc} u(x) = x^{n+1} & \Rightarrow & u'(x) = (n+1) \cdot x^n \\ v'(x) = e^x & \Rightarrow & v(x) = e^x \end{array}\right]$$

Mit Grenzwerten:

$$\int_{-\infty}^{0} x^{n+1} \cdot e^x\,dx = \left[x^{n+1} \cdot e^x\right]_{-\infty}^{0} - (n+1)\int_{-\infty}^{0} x^n \cdot e^x\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \left[x^{n+1} \cdot e^x\right]_{-\infty}^{0} - (n+1) \cdot n! = 0 - (n+1) \cdot n!$$

oder

$$\overset{(*)}{=} \left[x^{n+1} \cdot e^x\right]_{-\infty}^{0} + (n+1) \cdot n! = 0 + (n+1) \cdot n!$$

[2 pt]

Fläche: $\left|\int_{-\infty}^{0} f_{n+1}(x)dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{0} x^{n+1} \cdot e^x\,dx\right| = \left|\pm(n+1) \cdot n!\right| = (n+1)!$ **[1 pt]**