ETH-Aufnahmeprüfung Herbst 2016

Mathematik I (Analysis)

Aufgabe 1 [5 Punkte]
Bestimmen Sie den Definitionsbereich dieser Gleichung und lösen Sie diese in $\mathbb{C}$.

$$\frac{z+1}{z^2-4}=\frac{2z+3}{z^2+2z-8}$$

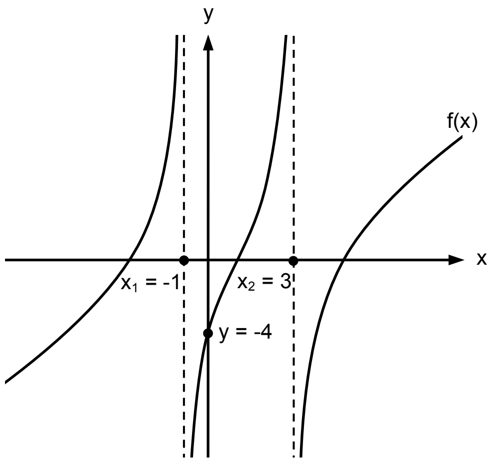
Aufgabe 2 [5 Punkte]
Von einem Trapez ABCD (AB ist die Grundseite) sind die Seiten $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=12$ und $\overline{DA}=11$, sowie der Winkel $\sphericalangle(ABC)=62°$ gegeben. Bestimmen Sie die Länge der Seite $\overline{CD}$.

Aufgabe 3 [14 Punkte]

a) Bestimmen Sie anhand der Angaben im Graphen die vollständige Funktionsgleichung von

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2-10x+12}{ax^2+bx+c}.$$

b) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}_{>3}$, so dass die Fläche zwischen der schiefen Asymptote und dem Graphen von f(x) im Intervall [k; k+4] den Wert 9 annimmt.



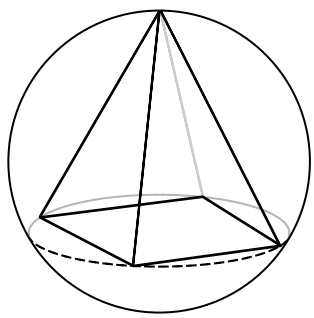
Falls Sie die Funktionsgleichung im Teil a nicht bestimmen konnten, können Sie im Teil b mit $\overline{f}(x)$ weiterrechnen: $\overline{f}(x)=\dfrac{x^3-3x^2-10x+12}{2x^2-4x-6}$.

Aufgabe 4 [10 Punkte]
Der Wirkstoff eines Medikamentes hat im Blut eine Halbwertszeit von 8 Stunden. Eine Tablette enthält 10 mg Wirkstoff. Man soll von der Annahme ausgehen, dass bei der Einnahme der Wirkstoff sofort zu 100% ins Blut aufgenommen wird.

a) Im Blut sollen immer mindestens 3 mg des Wirkstoffs vorhanden sein. Nach wie vielen Stunden muss spätestens die zweite Tablette eingenommen werden?

b) Das Medikament wird nun alle 6 Stunden während Jahren eingenommen. Nach dieser langen Zeit pendelt sich die Wirkstoffmenge im Blut zwischen zwei Grenzwerten ein. Bestimmen Sie diese.

Aufgabe 5 [12 Punkte]
Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche wird in einer Kugel mit Radius R eingeschrieben. Bestimmen Sie das maximale Volumen der Pyramide.



Lösungen Mathematik I (Analysis) – Herbst 2016

Die Note N berechnet sich für die Punktzahl p gemäss der Formel $N = 1 + \frac{p}{8}$, wobei auf halbe Noten zu runden ist (Viertelnote aufrunden).

Lösung 1

Zerlegung der Nenner: $\frac{z+1}{(z+2)(z-2)} = \frac{2z+3}{(z+4)(z-2)}$ **[1 pt]**

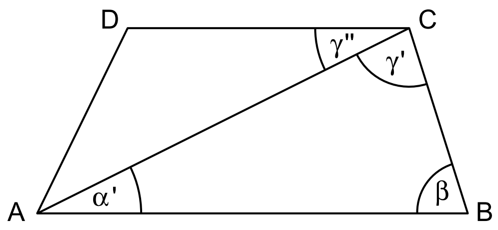
Definitionsbereich: $D = \mathbb{C} \setminus \{-4, -2, 2\}$ **[1 pt]**

Lösung der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} (z+1)(z+4) &= (2z+3)(z+2) \\ z^2 + 5z + 4 &= 2z^2 + 7z + 6 \\ 0 &= z^2 + 2z + 2 \end{aligned}\right\}$$ **[2 pt]**

Lösungsformel: $z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i \quad (\in D)$ **[1 pt]**

Lösung 2



Diagonale $\overline{AC}$: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\beta)} \approx 11.460$ **[1 pt]**

Winkel γ': $\frac{\overline{AC}}{\sin(\beta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\gamma')} \quad \Rightarrow \quad \gamma' = \sin^{-1}\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \sin(\beta)\right) \approx 50.395°$ **[1 pt]**

Die zweite Lösung für γ' (= 129.605°) ergibt keinen Sinn.

Winkel γ'': $\gamma'' = \gamma - \gamma' \approx 67.605°$

Seite $\overline{CD}$: $\overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CD} \cdot \cos(\gamma'')$ **[1 pt]**

$0 = \overline{CD}^2 - 8.732 \cdot \overline{CD} + 10.332$

Zwei Lösungen: $\overline{CD} \approx 1.411$ oder 7.321 **[2 pt]**

Lösung 3.a)

Nenner von f(x): $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=a\left(x^2-2x-3\right)$ **[2 pt]**

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)=-4 \quad \Rightarrow \quad \frac{12}{-3a}=-4 \quad \Rightarrow \quad a=1$ **[1 pt]**

Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{x^3-3x^2-10x+12}{x^2-2x-3}$

Lösung 3.b)

Allgemein gilt: $k>3$

Schiefe Asymptote: $\frac{x^3-3x^2-10x+12}{x^2-2x-3}=x-1+\frac{-9x+9}{x^2-2x-3}$ **[1 pt]**

$\Rightarrow \quad y=x-1$ **[1 pt]**

Fläche:

$$A=\int_k^{k+4}\left(x-1-\frac{x^3-3x^2-10x+12}{x^2-2x-3}\right)dx$$

$$=\int_k^{k+4}\frac{9x-9}{x^2-2x-3}dx$$ **[1 pt]**

$$=\frac{9}{2}\int_k^{k+4}\frac{2x-2}{x^2-2x-3}dx$$

Substitutionsmethode mit $g(z)=\frac{1}{z}\ ,\ z=u(x)=x^2-2x-3\ ,\ u'(x)=2x-2$ **[1 pt]**

$$A=\frac{9}{2}\int_{u(k)}^{u(k+4)}\frac{1}{z}dz$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\ln|z|\Big|_{u(k)}^{u(k+4)}$$ (für $k>3$ ist $u(k)>0$) **[1 pt]**

$$=\frac{9}{2}\cdot\left(\ln\left((k+4)^2-2(k+4)-3\right)-\ln\left(k^2-2k-3\right)\right)$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\ln\left(\frac{k^2+8k+16-2k-8-3}{k^2-2k-3}\right)$$ **[1 pt]**

$$=\frac{9}{2}\cdot\ln\left(\frac{k^2+6k+5}{k^2-2k-3}\right)$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\ln\left(\frac{(k+5)(k+1)}{(k-3)(k+1)}\right)$$ **[1 pt]**

$$=\frac{9}{2}\cdot\ln\left(\frac{k+5}{k-3}\right)$$ **[1 pt]**

Lösung: $9=\frac{9}{2}\cdot\ln\left(\frac{k+5}{k-3}\right) \quad\Rightarrow\quad 2=\ln\left(\frac{k+5}{k-3}\right)$ **[1 pt]**

$\Rightarrow\quad e^2=\frac{k+5}{k-3}$ **[1 pt]**

$\Rightarrow\quad e^2(k-3)=k+5$

$\Rightarrow\quad k=\frac{3e^2+5}{e^2-1}\approx 4.252$ **[1 pt]**

Lösung 3.b) mit $\overline{f}(x)$

Allgemein gilt: $k>3$

Schiefe Asymptote: $\frac{x^3-3x^2-10x+12}{2x^2-4x-6}=0.5x-0.5+\frac{-9x+9}{2x^2-4x-6}$ **[1 pt]**

$\Rightarrow\quad y=0.5x-0.5$ **[1 pt]**

Fläche:
$$A=\int_k^{k+4}\left(0.5x-0.5-\frac{x^3-3x^2-10x+12}{2x^2-4x-6}\right)dx$$
$$=\int_k^{k+4}\frac{9x-9}{2x^2-4x-6}dx$$ **[1 pt]**
$$=\frac{9}{4}\int_k^{k+4}\frac{2x-2}{x^2-2x-3}dx$$

Substitutionsmethode mit $g(z)=\frac{1}{z}$, $z=u(x)=x^2-2x-3$, $u'(x)=2x-2$ **[1 pt]**

$$A=\frac{9}{4}\int_{u(k)}^{u(k+4)}\frac{1}{z}dz$$
$=\ldots$ (siehe oben) **[3 pt]**
$$=\frac{9}{4}\cdot\ln\left(\frac{k+5}{k-3}\right)$$ **[1 pt]**

Lösung: $9=\frac{9}{4}\cdot\ln\left(\frac{k+5}{k-3}\right) \quad\Rightarrow\quad 4=\ln\left(\frac{k+5}{k-3}\right)$ **[1 pt]**

$\Rightarrow\quad e^4=\frac{k+5}{k-3}$ **[1 pt]**

$\Rightarrow\quad e^4(k-3)=k+5$

$\Rightarrow\quad k=\frac{3e^4+5}{e^4-1}\approx 3.149$ **[1 pt]**

Lösung 4.a

Die Punkte für die Variante mit B(t) sind entsprechend der Variante mit A(t) zu vergeben.

Zeitlicher Verlauf der Wirkstoffmenge im Blut (t: Zeit in Stunden):

$$A(t) = A_0 \cdot 0.5^{(t/8h)}$$ **[2 pt]**

oder $$B(t) = B_0 \cdot e^{(-\ln(2) \cdot t/8h)}$$

Zeitspanne bis zur Einnahme der zweiten Tablette: $A_0 = 10\,\text{mg}$, $A(t) = 3\,\text{mg}$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= 10 \cdot 0.5^{(t/8h)} \\ 0.3 &= 0.5^{(t/8h)} \\ \ln(0.3) &= \frac{t}{8\,h} \cdot \ln(0.5) \\ t &= 8\,h \cdot \frac{\ln(0.3)}{\ln(0.5)} \approx 13.896\,h \approx 13\,h\,54\,\text{min} \end{aligned}\right\}$$ **[3 pt]**

oder:

$$\begin{aligned} 3 &= 10 \cdot e^{(-\ln(2) \cdot t/8h)} \\ 0.3 &= e^{(-\ln(2) \cdot t/8h)} \\ \ln(0.3) &= -\ln(2) \cdot \frac{t}{8\,h} \\ t &= 8\,h \cdot \frac{\ln(0.3)}{-\ln(2)} \approx 13.896\,h \approx 13\,h\,54\,\text{min} \end{aligned}$$

Lösung 4.b

Wirkstoffmenge im Blut unmittelbar nach der Einnahme einer Tablette:

$$A(t \to \infty) = 10\,\text{mg} + 10\,\text{mg} \cdot 0.5^{(6/8)} + 10\,\text{mg} \cdot 0.5^{(12/8)} + 10\,\text{mg} \cdot 0.5^{(18/8)} + \ldots$$ **[2 pt]**

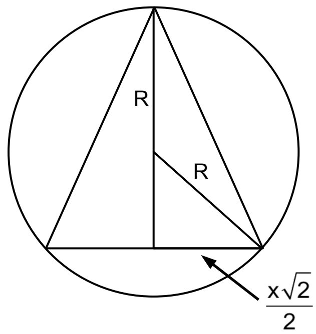
oder $$B(t \to \infty) = 10\,\text{mg} + 10\,\text{mg} \cdot e^{(-\ln(2) \cdot 6/8)} + 10\,\text{mg} \cdot e^{(-\ln(2) \cdot 12/8)} + 10\,\text{mg} \cdot e^{(-\ln(2) \cdot 18/8)} + \ldots$$

Geometrische Reihe mit Quotienten $q = 0.5^{(3/4)} \approx 0.5946$ bzw. $q = e^{-\ln(2) \cdot 3/4} \approx 0.5946$: **[1 pt]**

$$A(\infty) = B(\infty) = 10\,\text{mg} \cdot \frac{1}{1-q} \approx 24.667\,\text{mg}$$ **[1 pt]**

Intervall: $A(t) \in \left[14.667\,\text{mg}; 24.667\,\text{mg};\right]$ **[1 pt]**

Aufgabe 5.a)



Volumen: $V = \frac{1}{3}hx^2$ **[1 pt]**

wobei: x = Grundkante
h = Höhe

Es gilt: $h \geq R$, da sonst V nicht maximal.
$0 < x \leq R\sqrt{2}$

Nebenbedingung: $h = R + \sqrt{R^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ **[2 pt]**

Zielfunktion: $V = \frac{1}{3}x^2\left(R + \sqrt{R^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) = \frac{1}{3}Rx^2 + \frac{1}{3}\sqrt{R^2x^4 - \frac{x^6}{2}}$ **[1 pt]**

Lösung: $V'(x) = 0$

$$2Rx + \frac{4R^2x^3 - 3x^5}{2\sqrt{R^2x^4 - \frac{x^6}{2}}} = 0$$ **[2 pt]**

$$4Rx\sqrt{R^2x^4 - \frac{x^6}{2}} + 4R^2x^3 - 3x^5 = 0$$

$$4R\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{2}} + 4R^2 - 3x^2 = 0$$

$$4R\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{2}} = 3x^2 - 4R^2$$ **[1 pt]**

$$16R^2\left(R^2 - \frac{x^2}{2}\right) = 9x^4 - 24R^2x^2 + 16R^4$$ **[1 pt]**

$$0 = 9x^4 - 16R^2x^2$$

$$0 = x^2\left(9x^2 - 16R^2\right)$$ **[1 pt]**

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{16}{9}R^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}R$$ **[1 pt]**

Maximales Volumen: $h = R + \sqrt{R^2 - \left(\frac{4R\sqrt{2}}{6}\right)^2} = R + R\sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \frac{4}{3}R$

$$\Rightarrow \quad V_{max} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}R\right)^3 = \frac{64}{81}R^3$$ **[1 pt]**

Überprüfung des Maximums: $V\left(0\right) = 0$, $V\left(R\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}R^3 < V_{max}$ **[1 pt]**