Die Kunst des Beweisens

Studieninformationstage

Lorenz Halbeisen

Was ist ein mathematischer Beweis?

Was ist ein mathematischer Beweis?

- Wo beginnen wir?
- Was sind die Voraussetzungen?
- Welche Argumente sind zugelassen?

Aristoteles
384–322 v. Chr.

David Hilbert
1862–1943

Axiomensystem für Bauernhöfe

- Jedes alte Schwein ist gefrässig.
- Jedes gesunde Schwein ist gefrässig.
- Es gibt sowohl gefrässige als auch nicht gefrässige Schweine.

Axiomensystem für Bauernhöfe

- Jedes alte Schwein ist gefrässig.
- Jedes gesunde Schwein ist gefrässig.
- Es gibt sowohl gefrässige als auch nicht gefrässige Schweine.

Welche Aussagen können wir beweisen?

- Es gibt alte und junge Schweine auf dem Hof.
- Alle nicht gefrässigen Schweine sind jung.
- Alle jungen Schweine auf dem Hof sind krank.

Axiomensystem für Bauernhöfe in der Sprache der Logik

- $\forall x\colon\ A(x) \to F(x)$
- $\forall x\colon\ G(x) \to F(x)$
- $\exists x\, \exists y\colon\ F(x) \land \neg F(y)$

Axiomensystem für Bauernhöfe in der Sprache der Logik

- $\forall x\colon\ A(x) \to F(x)$
- $\forall x\colon\ G(x) \to F(x)$
- $\exists x\, \exists y\colon\ F(x) \wedge \neg F(y)$

Welche Aussagen können wir beweisen?

- $\exists x\, \exists y\colon\ A(x) \wedge \neg A(y)$
- $\forall x\colon\ \neg F(x) \to \neg A(x)$
- $\forall x\colon\ \neg A(x) \to \neg G(x)$

Euklid
lebte im 3. Jh. v.Chr.

Axiomensystem der Geometrie

Die Objekte die wir betrachten sind **Punkte** und **Geraden**.

Für diese Objekte verlangen wir folgendes:

- Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.
- Auf einer Geraden gibt es mindestens zwei Punkte.
- Es gibt mindestens drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen.
- Zwei Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.
- ...

Axiomensystem der Geometrie

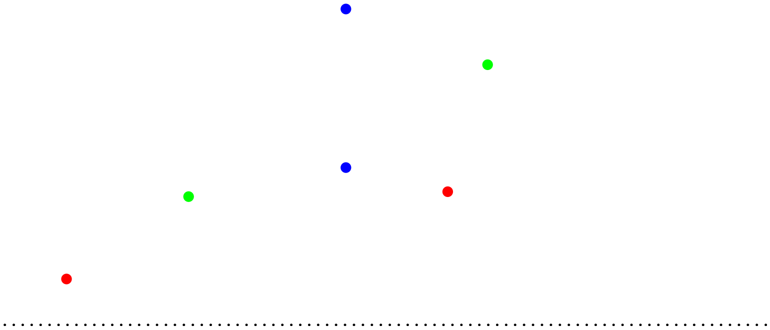
Die Objekte die wir betrachten sind **Punkte** und **Geraden**.

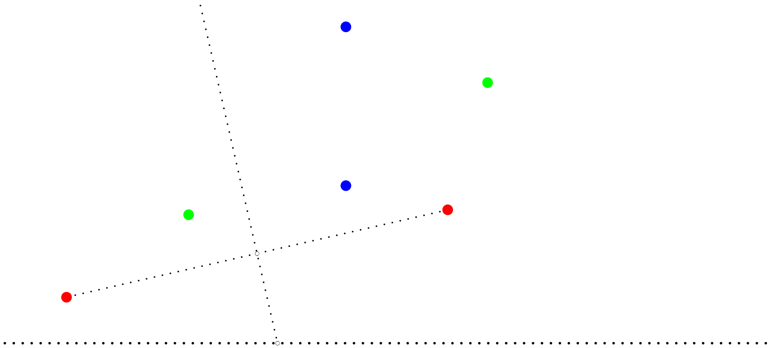
Für diese Objekte verlangen wir folgendes:

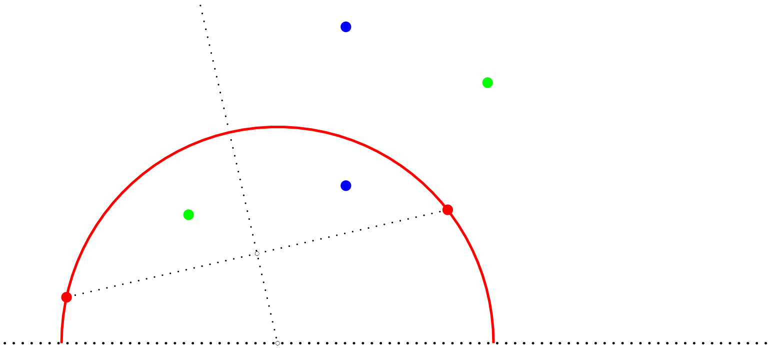
- Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.
- Auf einer Geraden gibt es mindestens zwei Punkte.
- Es gibt mindestens drei Punkte, welche nicht auf einer Geraden liegen.
- Zwei Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.
- ...

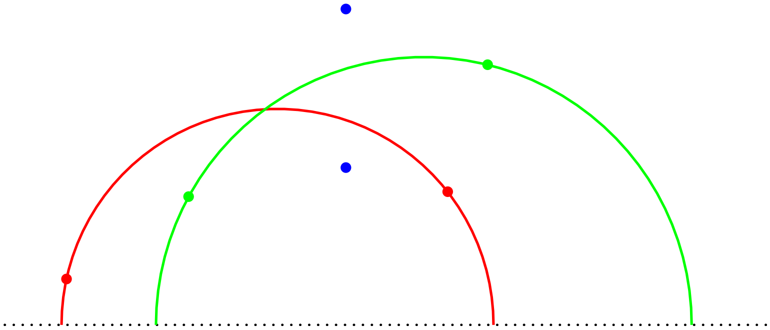
Winkelsumme im Dreieck

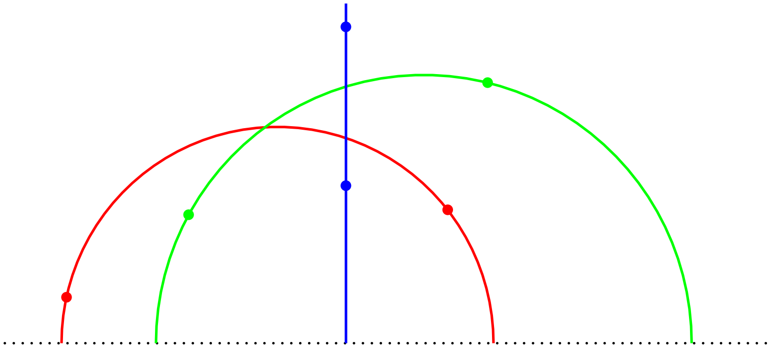
- Ist die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich gross?
- Wenn ja, wie lässt sich dies beweisen?

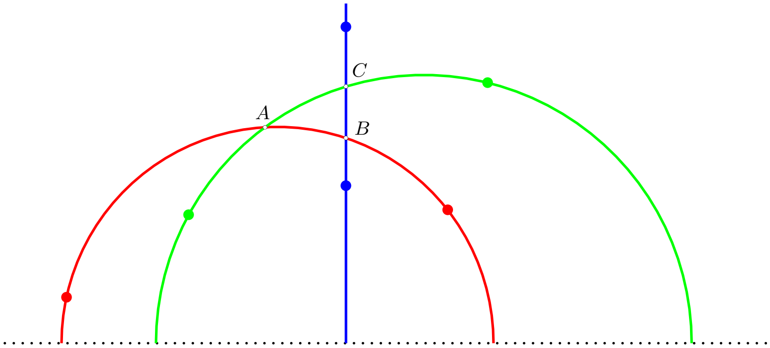


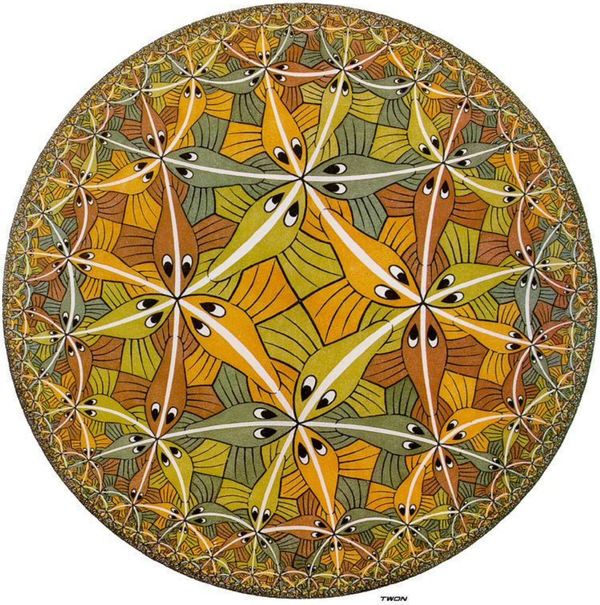









A
B
C


TWON

Axiomensystem der natürlichen Zahlen

Axiomensystem der natürlichen Zahlen

- 0 ist eine natürliche Zahl, und für jede natürliche Zahl n ist auch $n + 1$ eine natürliche Zahl.

Axiomensystem der natürlichen Zahlen

- 0 ist eine natürliche Zahl, und für jede natürliche Zahl n ist auch $n+1$ eine natürliche Zahl.

Axiome für die Nachfolgeroperation:

- $\neg\exists n: \; n+1=0$
- $\forall n \forall m: \; n+1=m+1 \rightarrow n=m$

Axiomensystem der natürlichen Zahlen

- 0 ist eine natürliche Zahl, und für jede natürliche Zahl n ist auch $n+1$ eine natürliche Zahl.

Axiome für die Nachfolgeroperation:

- $\neg \exists n: \; n+1=0$
- $\forall n \forall m: \; n+1=m+1 \rightarrow n=m$

Axiome für die Addition:

- $\forall n: \; n+0=n$
- $\forall n \forall m: \; n+(m+1)=(n+m)+1$

Axiomensystem der natürlichen Zahlen

- 0 ist eine natürliche Zahl, und für jede natürliche Zahl n ist auch $n + 1$ eine natürliche Zahl.

Axiome für die Nachfolgeroperation:

- $\neg\exists n: \; n + 1 = 0$
- $\forall n \forall m: \; n + 1 = m + 1 \rightarrow n = m$

Axiome für die Addition:

- $\forall n: \; n + 0 = n$
- $\forall n \forall m: \; n + (m + 1) = (n + m) + 1$

Axiome für die Multiplikation:

- $\forall n: \; n \cdot 0 = 0$
- $\forall n \forall m: \; n \cdot (m + 1) = (n \cdot m) + n$

Axiomensystem der natürlichen Zahlen

- 0 ist eine natürliche Zahl, und für jede natürliche Zahl n ist auch $n+1$ eine natürliche Zahl.

Axiome für die Nachfolgeroperation:

- $\neg\exists n: \ n+1=0$
- $\forall n \forall m: \ n+1=m+1 \rightarrow n=m$

Axiome für die Addition:

- $\forall n: \ n+0=n$
- $\forall n \forall m: \ n+(m+1)=(n+m)+1$

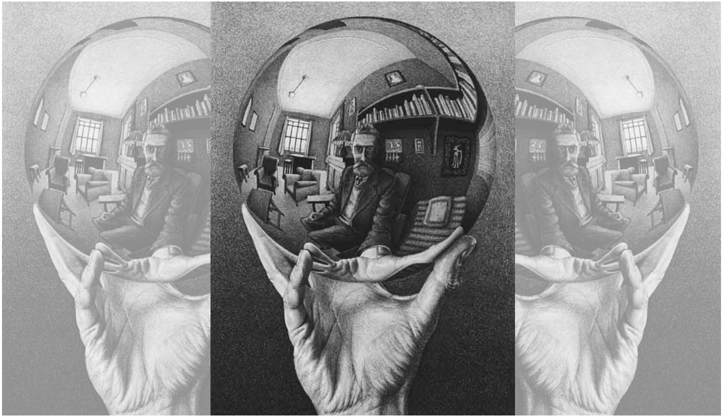
Axiome für die Multiplikation:

- $\forall n: \ n \cdot 0=0$
- $\forall n \forall m: \ n \cdot (m+1)=(n \cdot m)+n$

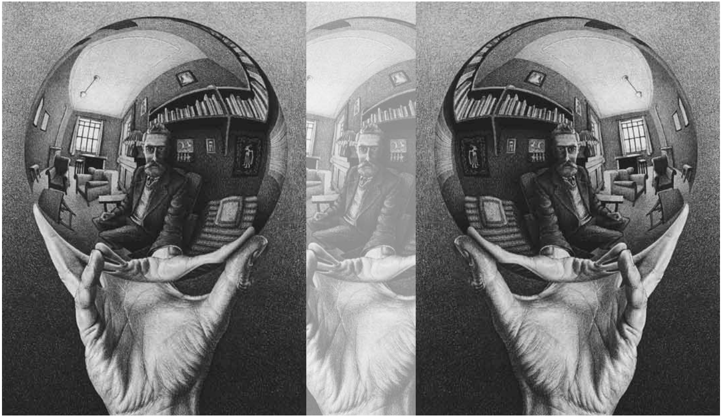
Axiom der Induktion für Aussagen $A(n)$:

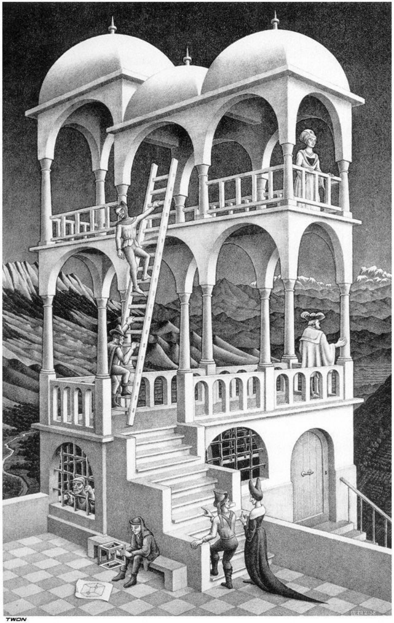
- $\big(A(0) \ \wedge \ \forall n: A(n) \rightarrow A(n+1)\big) \ \longrightarrow \ \forall n: A(n)$

Verdoppelung der Kugel



Verdoppelung der Kugel




TWON

Willkommen in der Welt der Mathematik