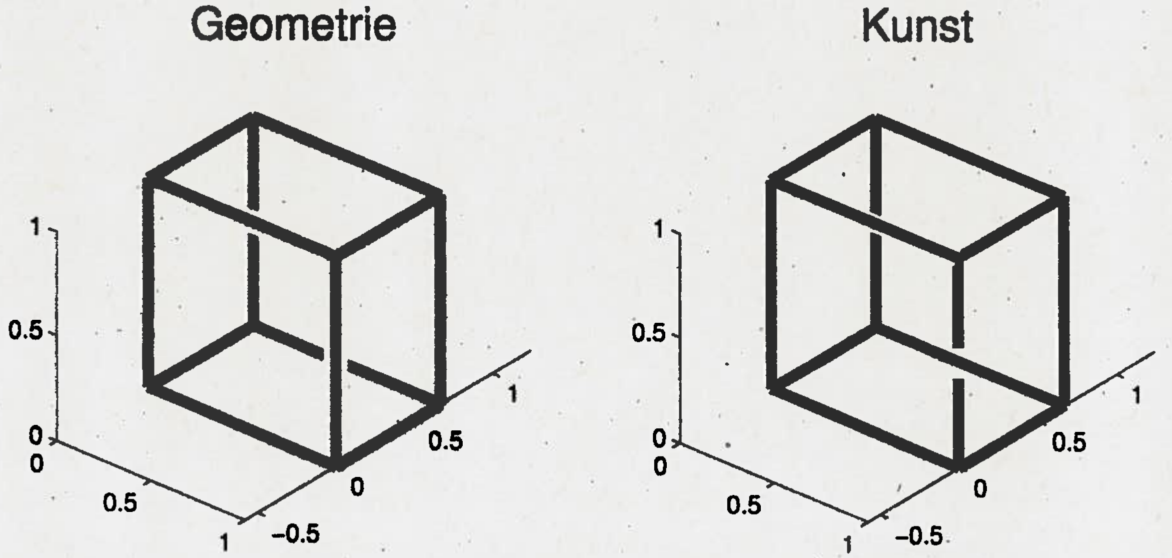
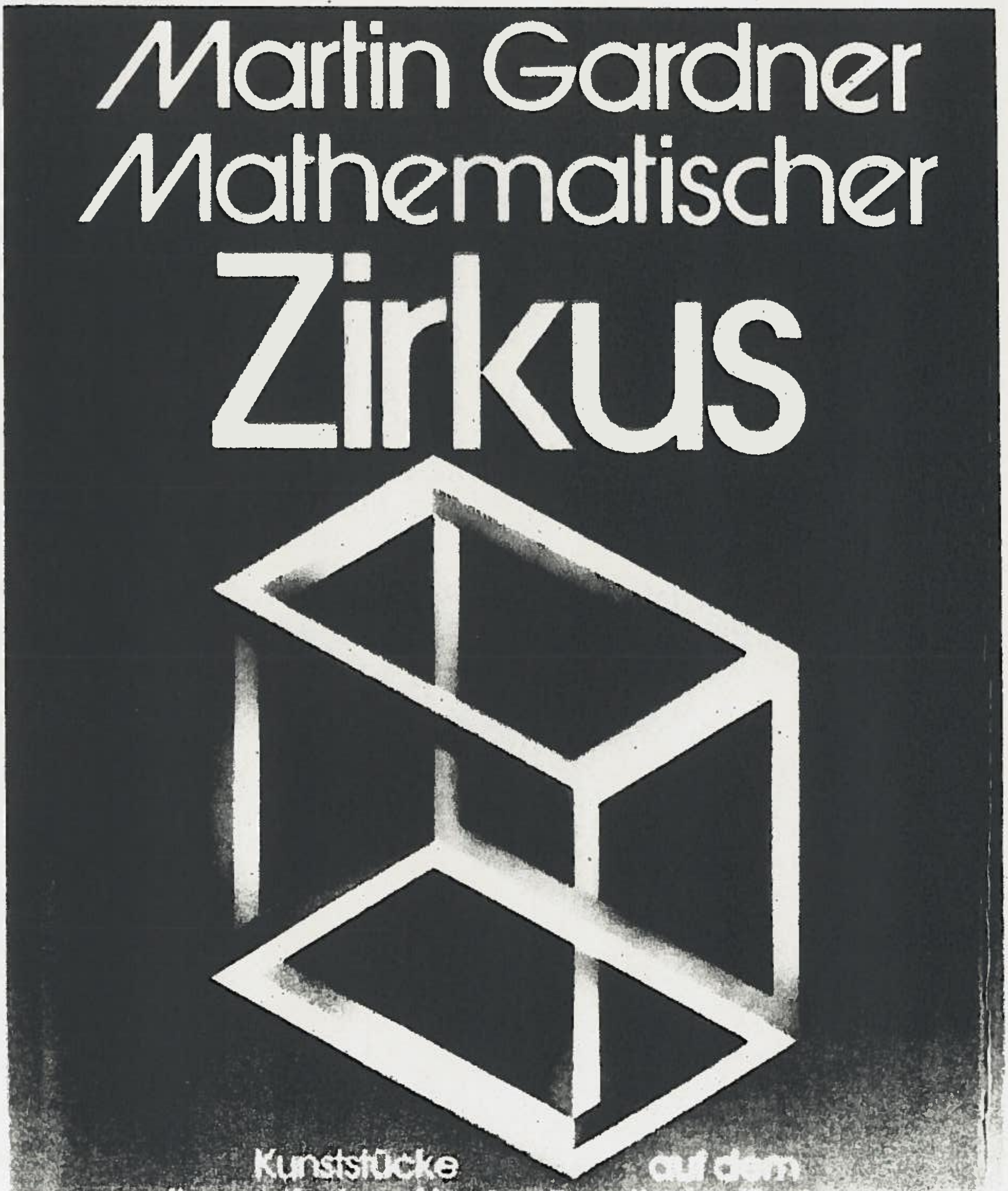
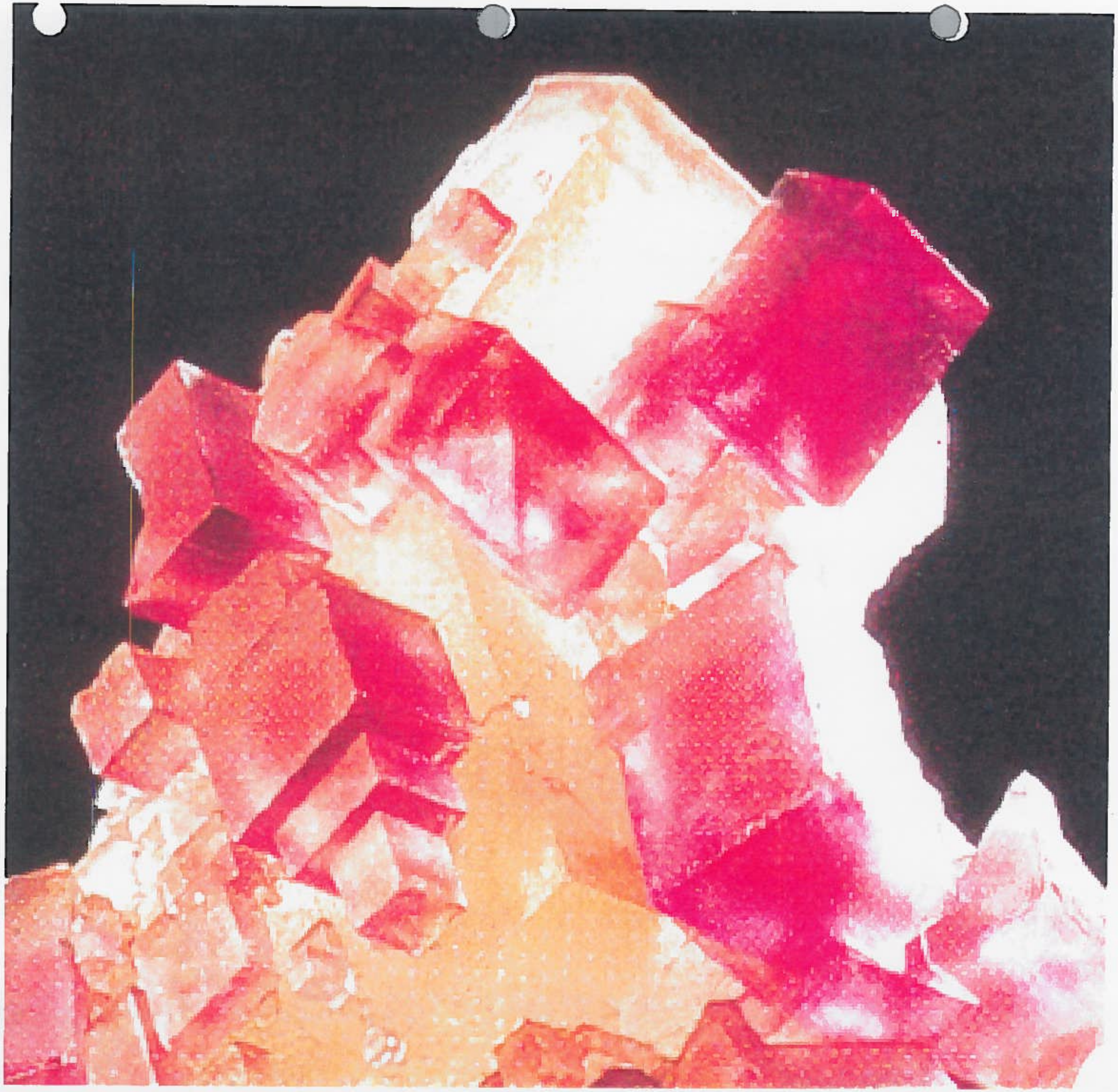
GEOMETRIE IN KUNST UND NATUR



Jörg Waldvogel

ETH-Emeritenstamm, 28. 10. 2013


Martin Gardner
Mathematischer
Zirkus
Kunststücke auf dem
mathematischen Hochseil



Fluorit

CaF_2

Kubisch

F als Zuschlagstoff bei der Metall-Gewinnung, erniedrigt den Schmelzpunkt; Giesserei

Etymologie

geo... (griechisch): Erde, Erdboden, Land

Geometrie: Feldmesskunst
(z. B. "Geometer" = Feldvermesser)

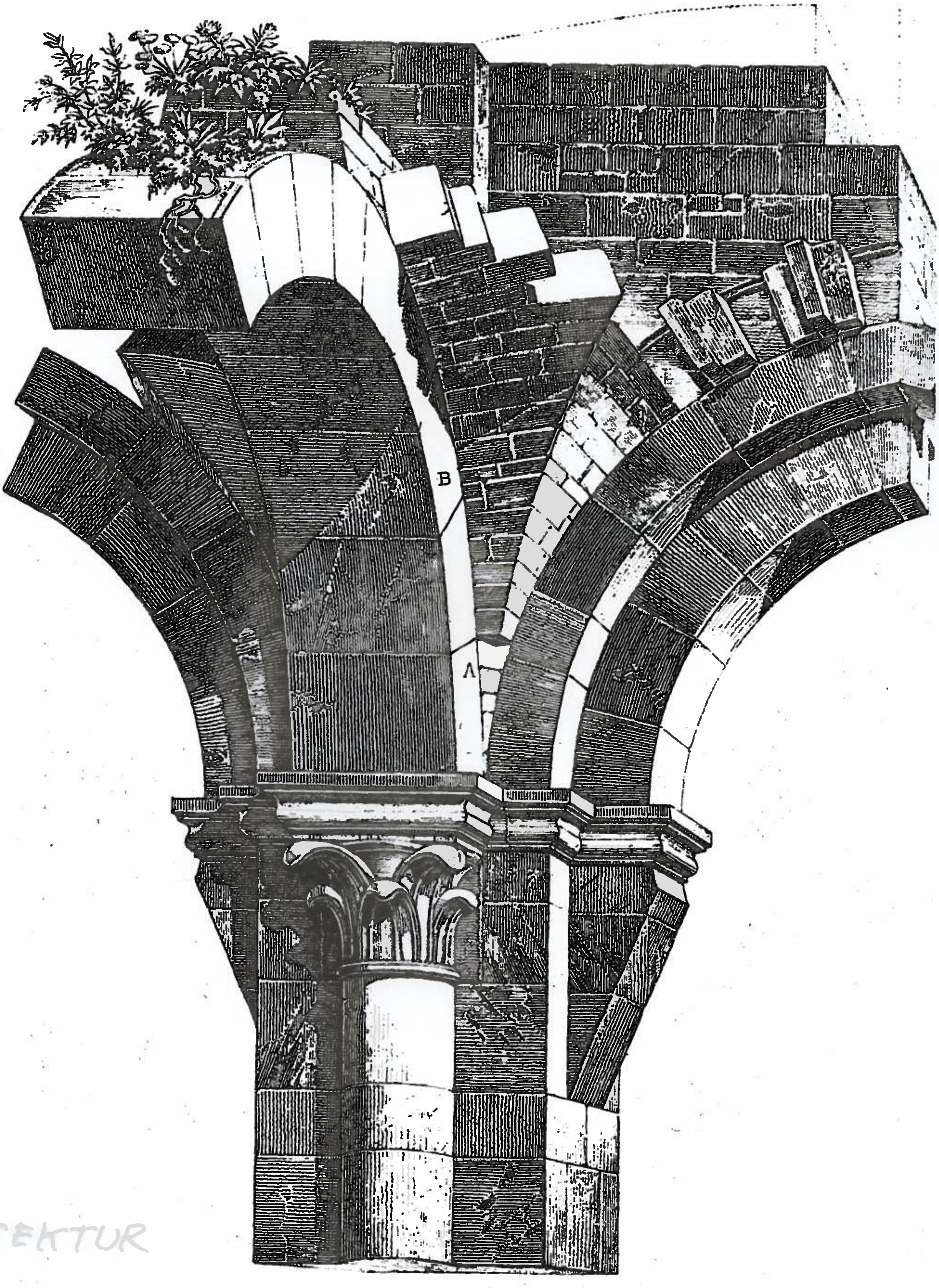
heute: Zweig der Mathematik, der sich mit der Darstellung von ebenen und räumlichen Objekten befasst

Kunst (von "können"):
Ursprünglich: Wissen, Kenntnis
(z. B "Kochkunst")

seit 18. Jh: Schöpferische Betätigung, Malerei, Dichtung, Musik, ...

Natur (latein.): Geburt, das Hervorbringen, Wesen

WER NUTZT DIE GEOMETRIE ?



ARCHITEKTUR

Nach einer Zeichnung von E. Gladbach

PERSPEKTIVE

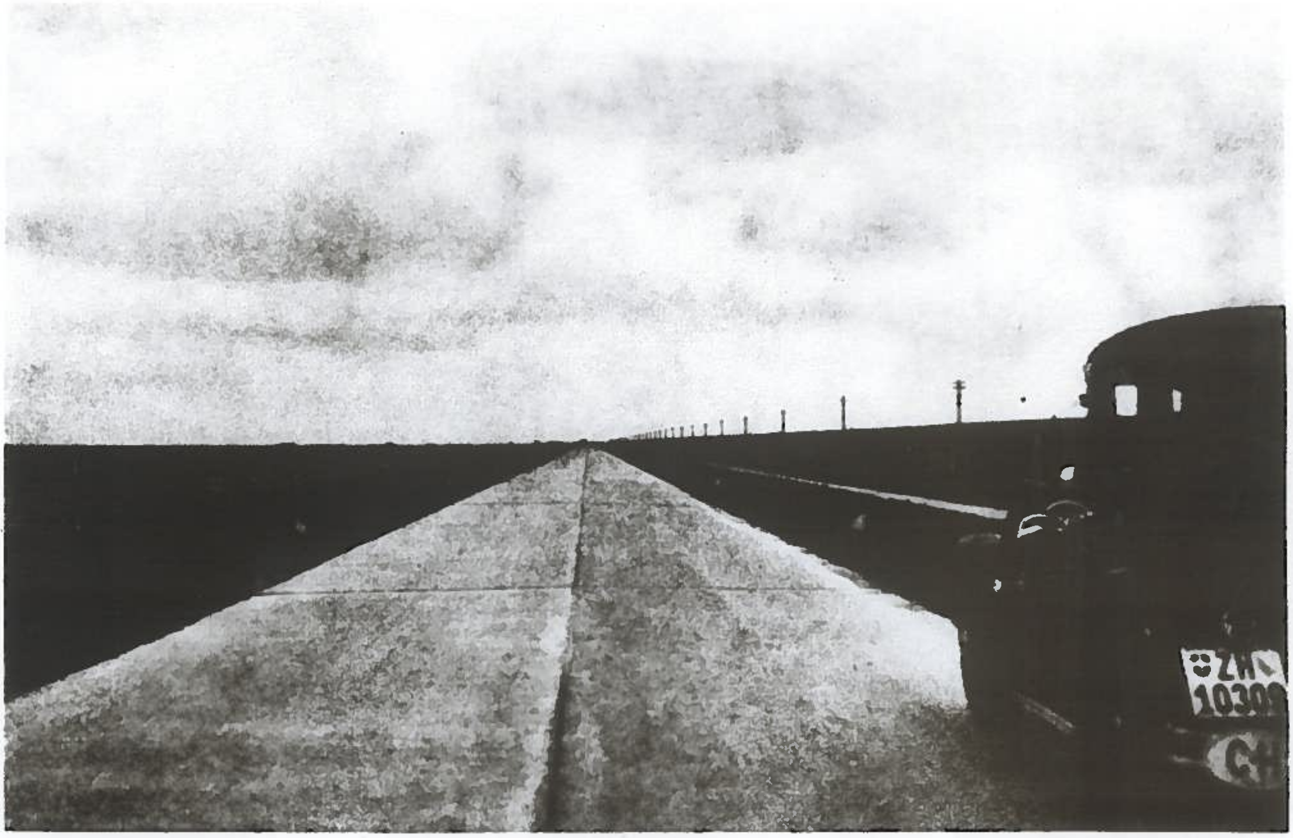


Fig. 13

E. Gull: Perspektivlehre, Verlag Arch. AG, 1946

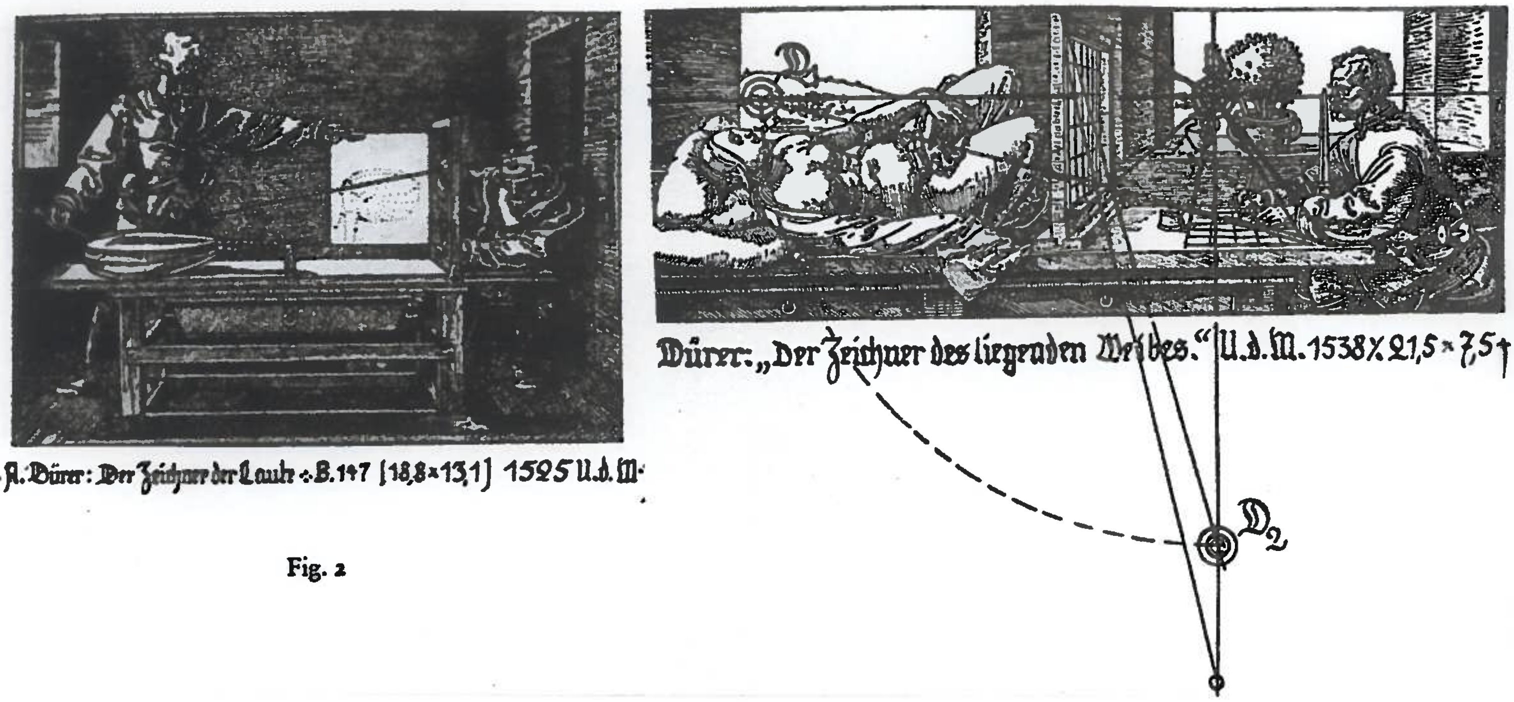
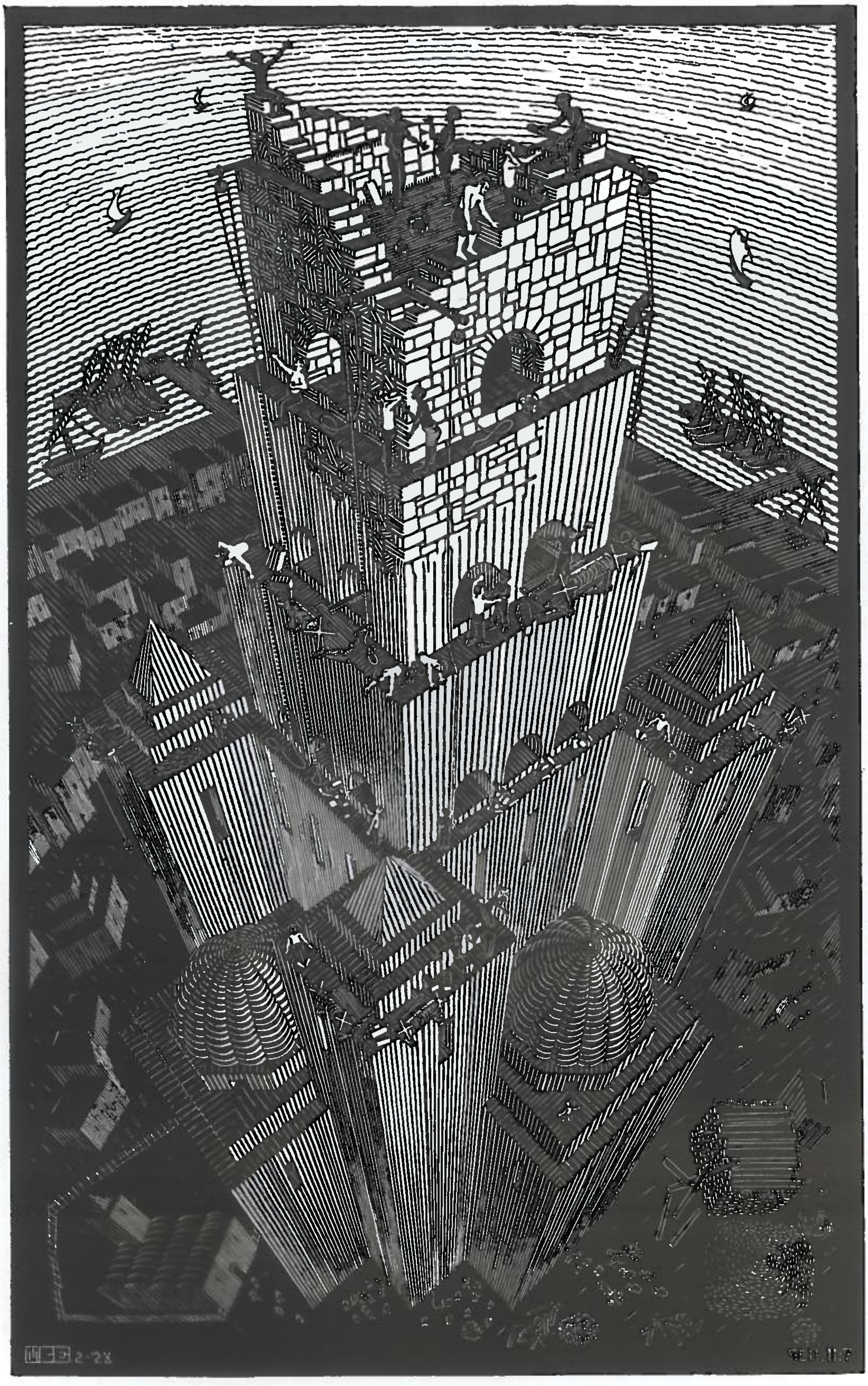

Dürer: „Der Zeichner des liegenden Weibes." U.d.M. 1538 X 21,5 × 7,5
A. Dürer: Der Zeichner der Laute · B. 147 [18,8 × 13,1] 1525 U.d.M.
D2

Fig. 2

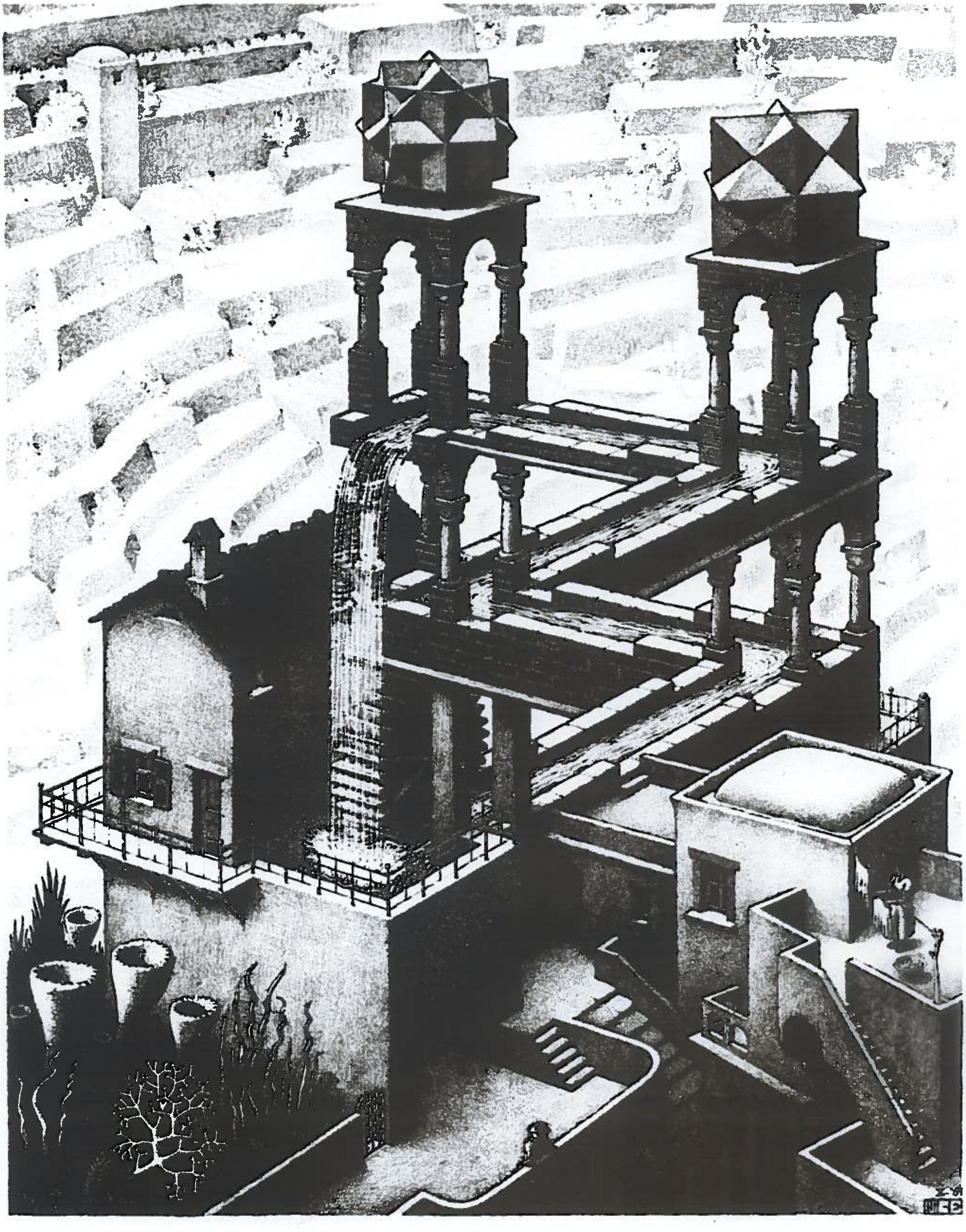

MASSE
2/3
MASSE
2/3
MASSVERTIKALE

Fig. 32



1. **Toren van Babel - Tower of Babel - Turm von Babel - Tour de Babel**

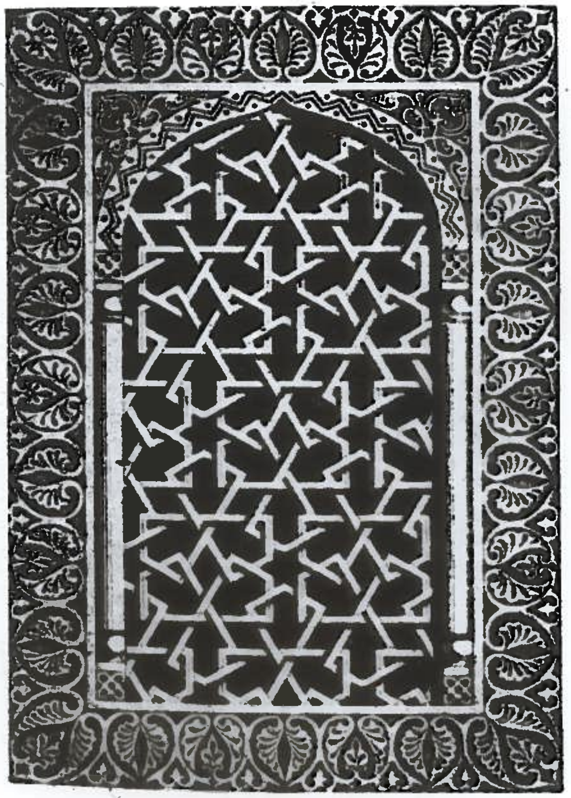
The Graphic Work of
M.C. Escher, *1898
Ballantine Books, NY 1971



76. **Waterval - Waterfall - Wasserfall - Cascade**

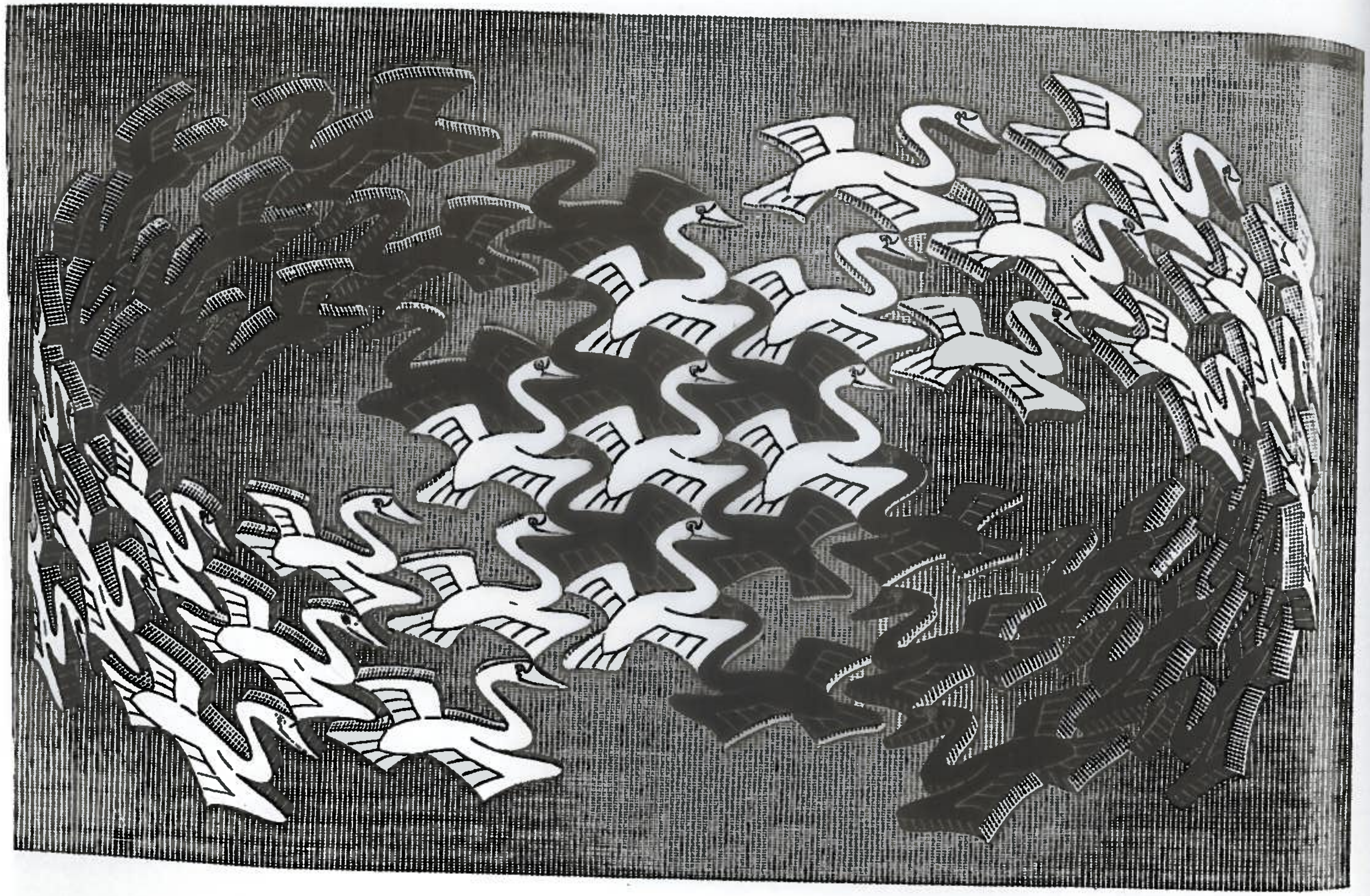
Trugbilder

Ornamente



Moschee, Kairo, 14. Jh

M. C. Escher



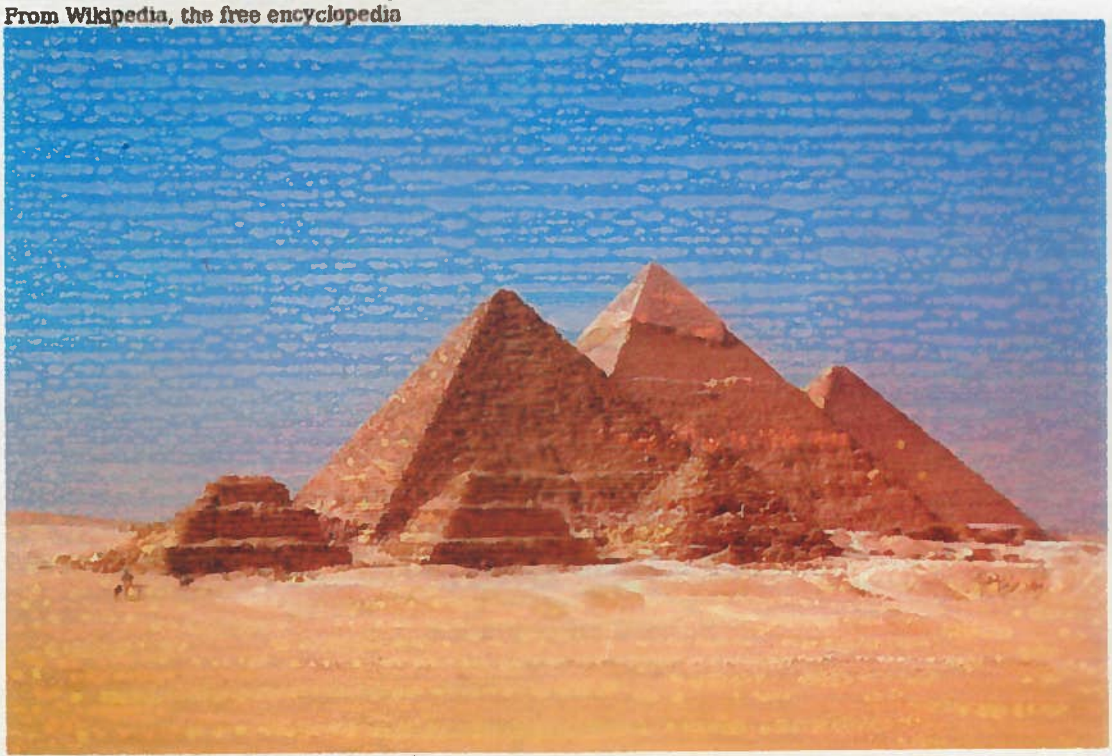
The Graphic Work of M.C. Escher
Ballantine Books, N.Y., 1971

Stonehenge,
Neolithikum
3000 –
2200 BC.

Size of this preview: 800 × 600 pixels.
Full resolution (2,816 × 2,112 pixels, file size: 1.36 MB, MIME type: image/jpeg)

File:All Gizah Pyramids.jpg

From Wikipedia, the free encyclopedia

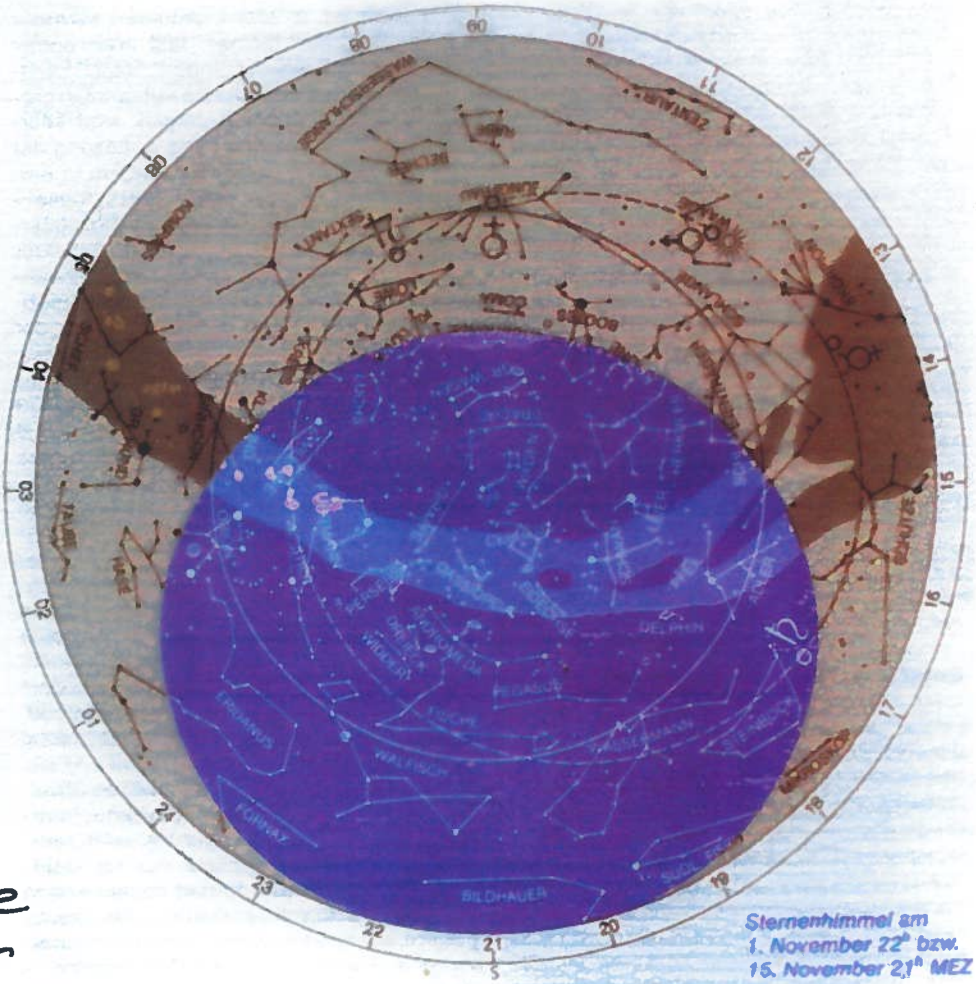


Size of this preview: 800 × 532 pixels.
Full resolution (4,372 × 2,906 pixels, file size: 5.78 MB, MIME type: image/jpeg)

This is a file from the Wikimedia Commons. Information from its desc
Commons is a freely licensed media file repository. Y

Ägypten
2686 ...
2181 BC

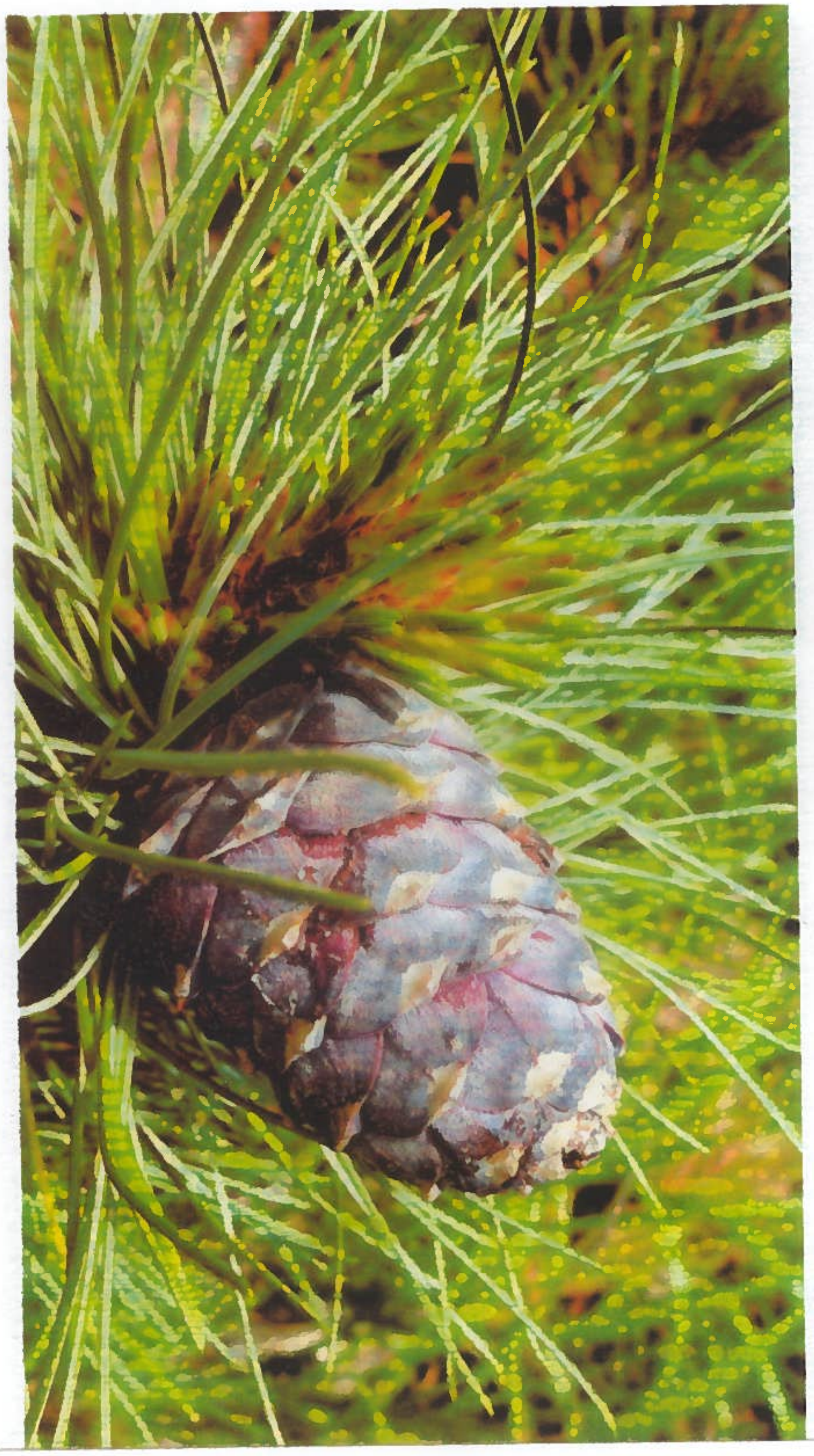
1991 November



Sternenhimmel am
1. November 22^h bzw.
15. November 21^h MEZ

Astronomie
Sternbilder

Wo sehen wir Geometrie ?



BLÜTEN

193

Trillium sessile. Dreiblatt. Wake-robin. Trille.
Natürliche Größe.

Karl Blossfeldt: Urformen der Kunst. Schirmer/Mosel 1994

72

Epimedium musschianum. Sockenblume. Barrenwort. Chapeau d'évêque.
Blüte in 24facher Vergrößerung.

Der Winter kommt n

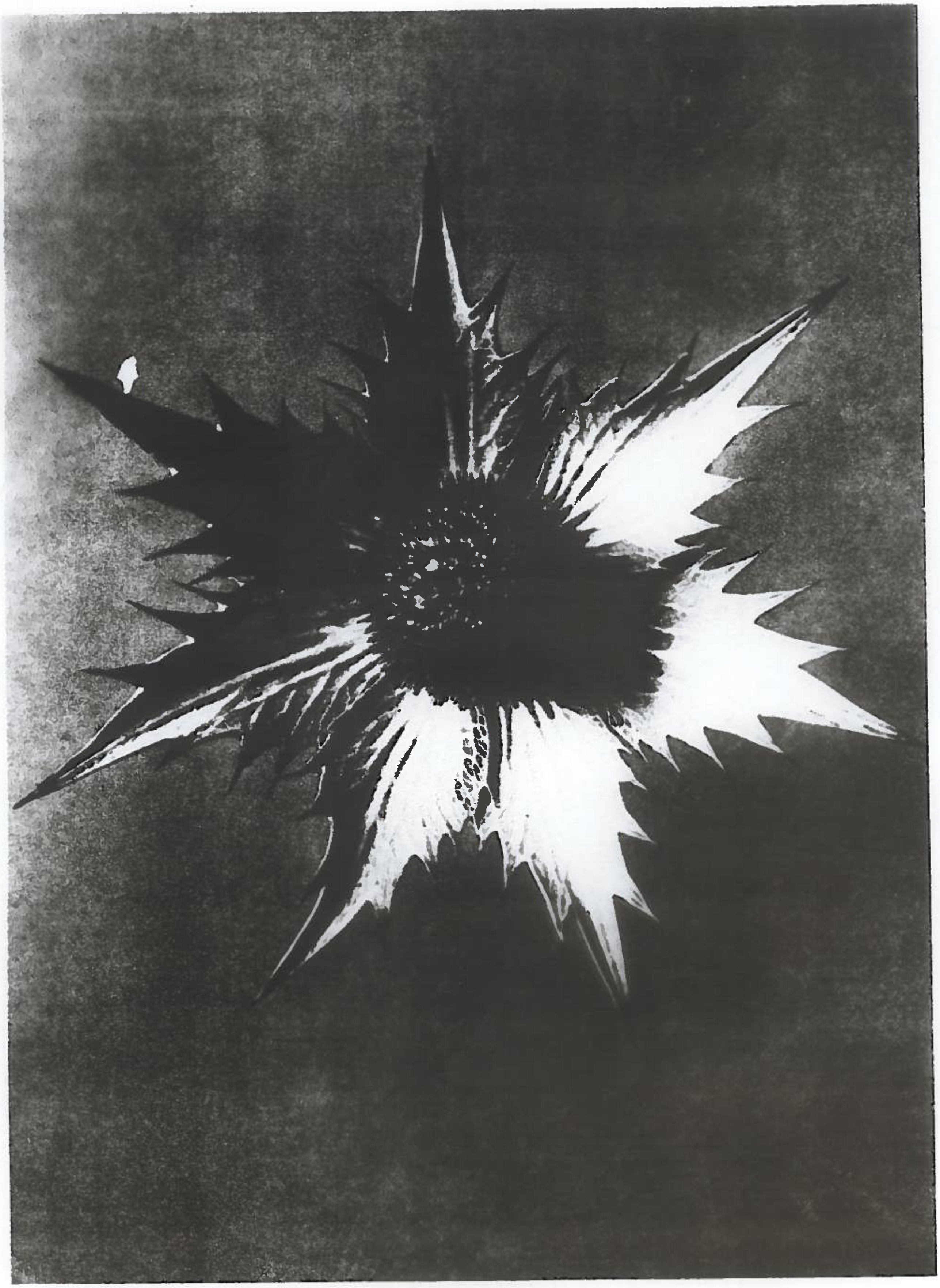
Die Winterreifen könnten für viele schon bald nützlich werden. KEY

74

Cobaea scandens. Rankende Cobaea. Calyx. Calice.
Blütenkelch in 4facher Vergrößerung.

130

Cajophora lateritia (Loasaceae). Ziegelrote Brennwinde. Bud. Bouton.
Blütenknospe in 15facher Vergrößerung.

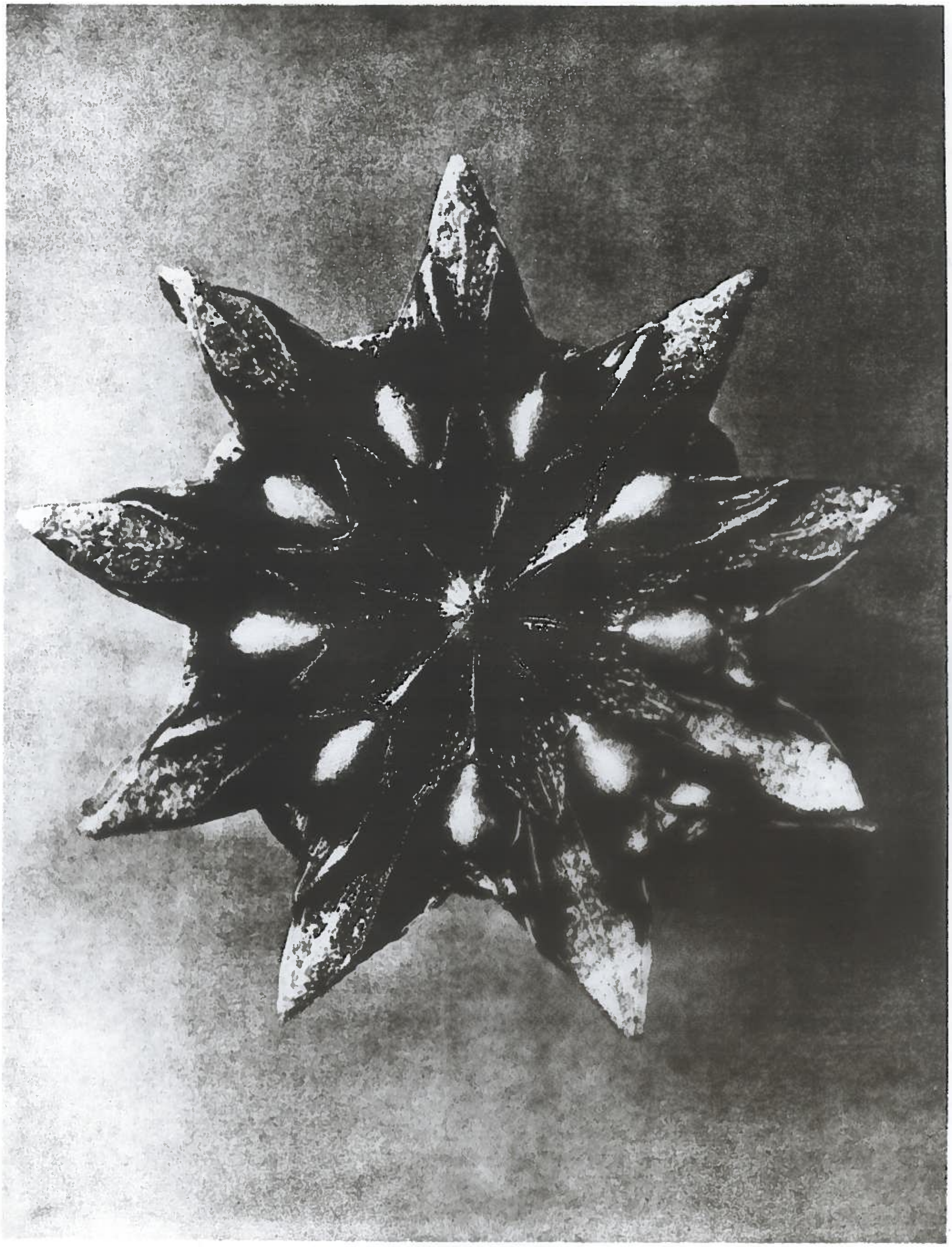


66

Eryngium giganteum. Mannstreu, Männertreu. Giant eryngo. Panicaut.
Blütenköpfchen mit Hüllblättern in 4facher Vergrößerung.

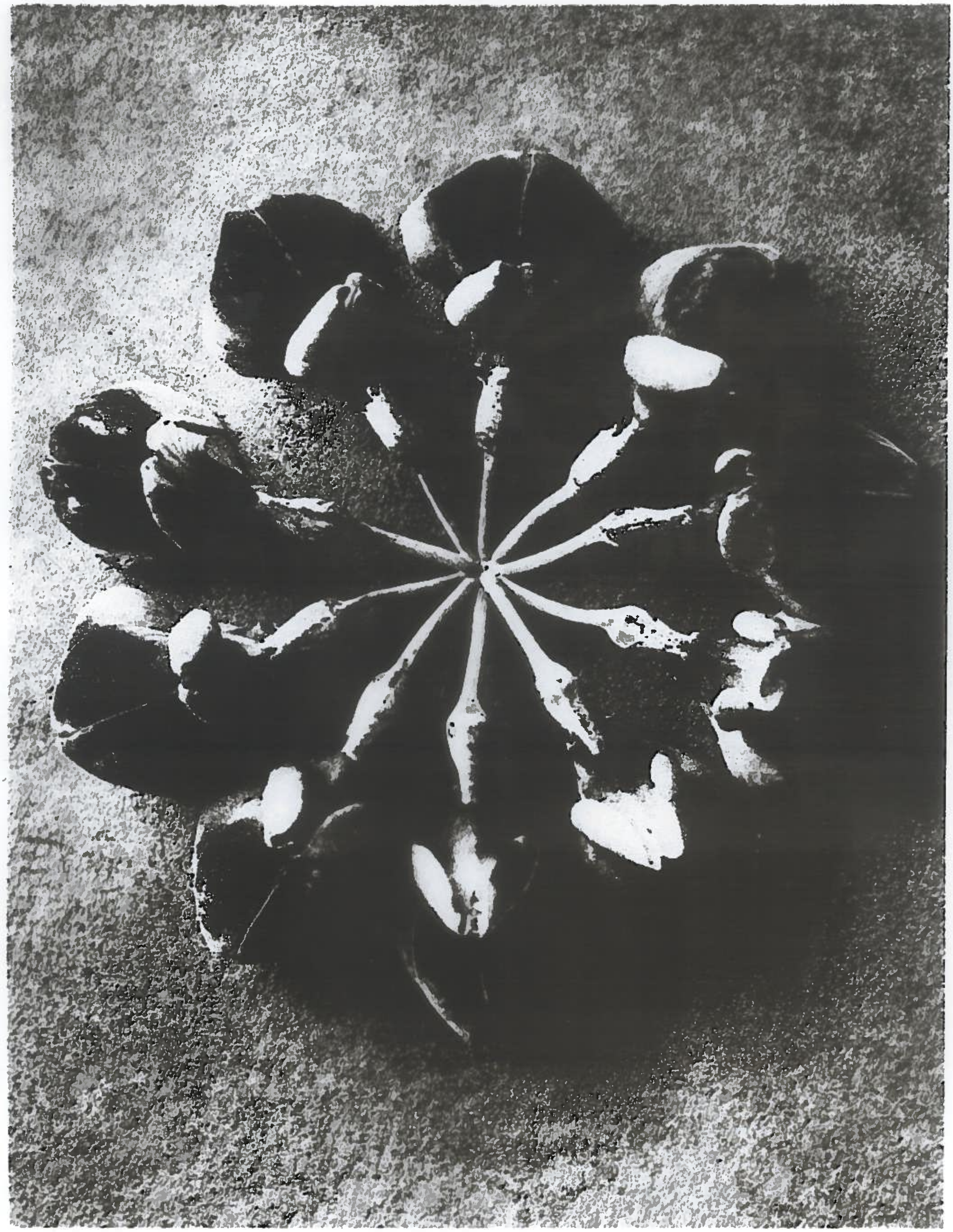
152

Cosmos bipinnatus (Compositae). Schmuckkörbchen, Mexiko-Aster. Bracts of the involucre. Sépales. Kelchblätter in 8facher Vergrößerung.



159

Mesembryanthemum linguiforme. (Eispflanze). Zaserblume. Mittagsblume. Ice plant. Ficoïde glaciale.
Samenkapsel in 9facher Vergrößerung.



178

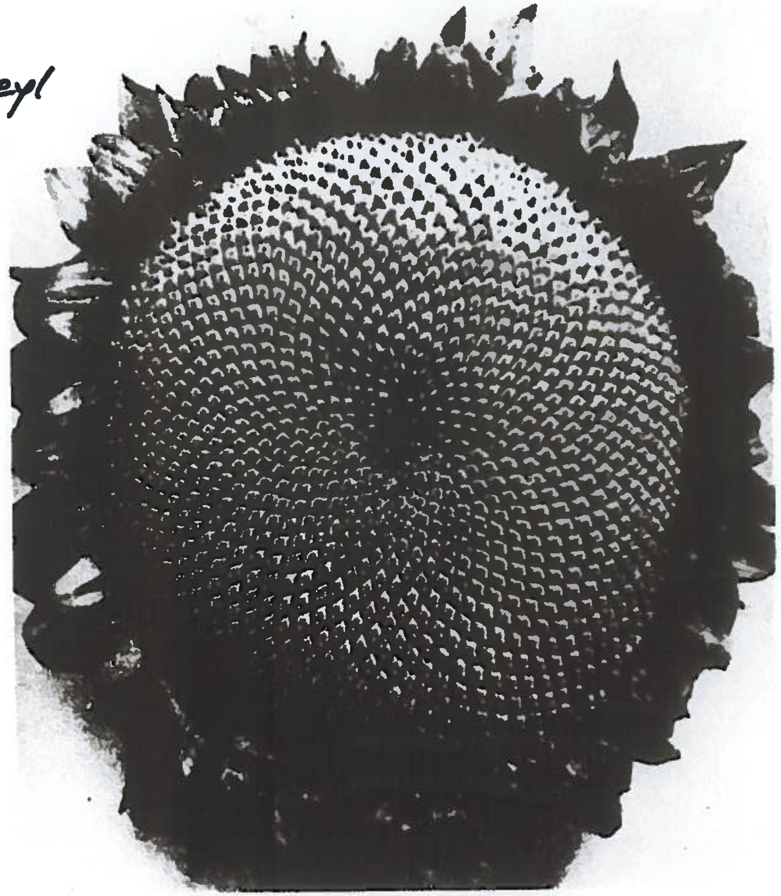
Coronilla coronata. Kronwicke. Crown vetch. Coronille.
Blütendolde in 8facher Vergrößerung.

13

Aesculus parviflora. Kleinblütige amerikanische Roßkastanie. Horse chestnut. Maronnier d'Inde à petites fleurs.
Zweigspitzen in 12facher Vergrößerung.

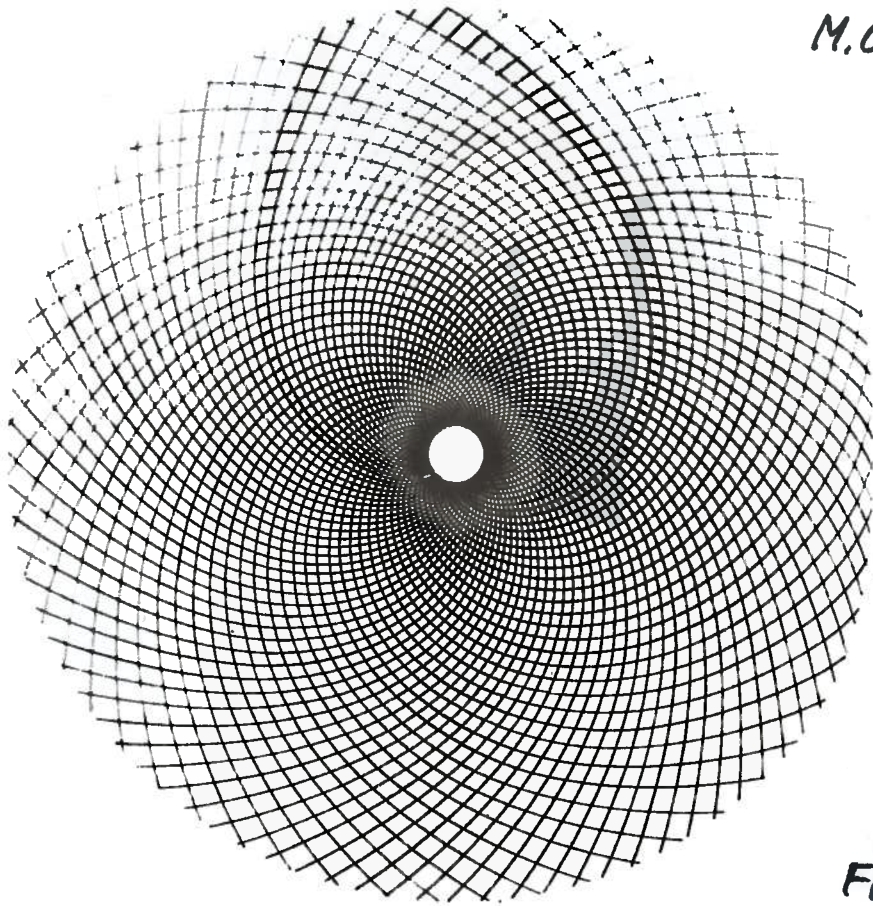
The most general rigid motion in three-dimensional space is a screw motion s, combination of a rotation around an axis with a translation along that axis. Under the influence of the corresponding continuous uniform motion any point not on the axis describes a screw-line or helix which, of course, could say of itself with the same right as the logarithmic spiral: *eadem resurgo*. The stages P_ν which the moving point reaches at the equi-

H. Weyl



Die Formel gibt die n-te Fibonacci-Zahl exakt an (die Wurzeln kürzen sich heraus), aber sie ist bei höheren F-Zahlen schwerfällig, obwohl man mit Logarithmen gute Näherungen erhält. Eine wesentlich einfachere Formel für die n-te F-Zahl erhält man, wenn man das Verhältnis des Goldenen Schnitts in die n-te Potenz erhebt und dann durch die Wurzel aus 5 dividiert. Wenn man das Ergebnis zu der dichtesten ganzen Zahl rundet, erhält man auch den genauen

M. Gardner: Zirkus



69 *Riesensonnenblume mit 55 Spiralen gegen den Uhrzeigersinn und 89 im Uhrzeigersinn*

Fibonacci-Zahlen

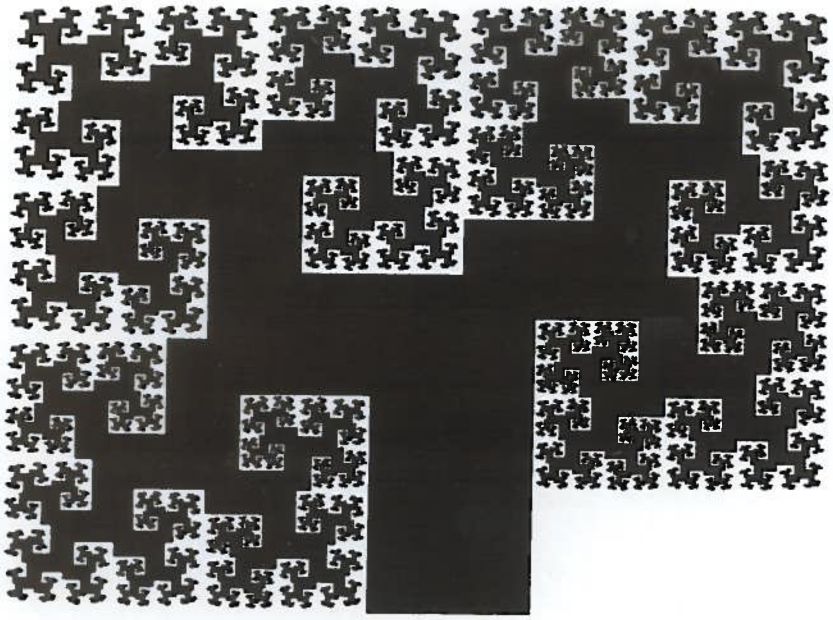
$\frac{55}{89} \doteq .6179$

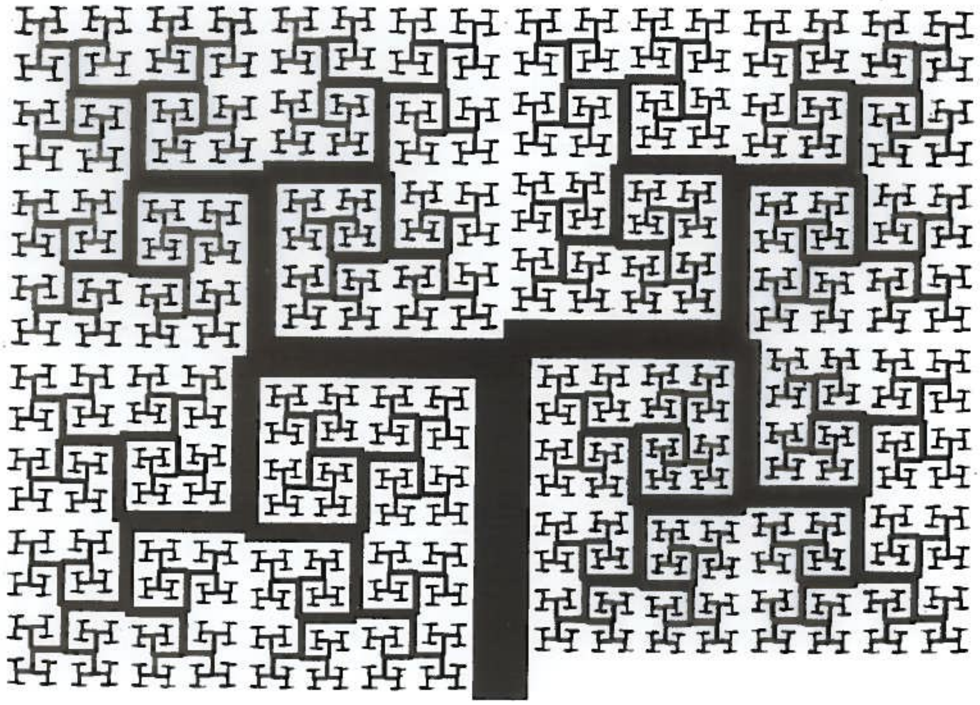
1 x

$\frac{x+1}{1} = \frac{1}{x}, \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \doteq .6180$

FARNE

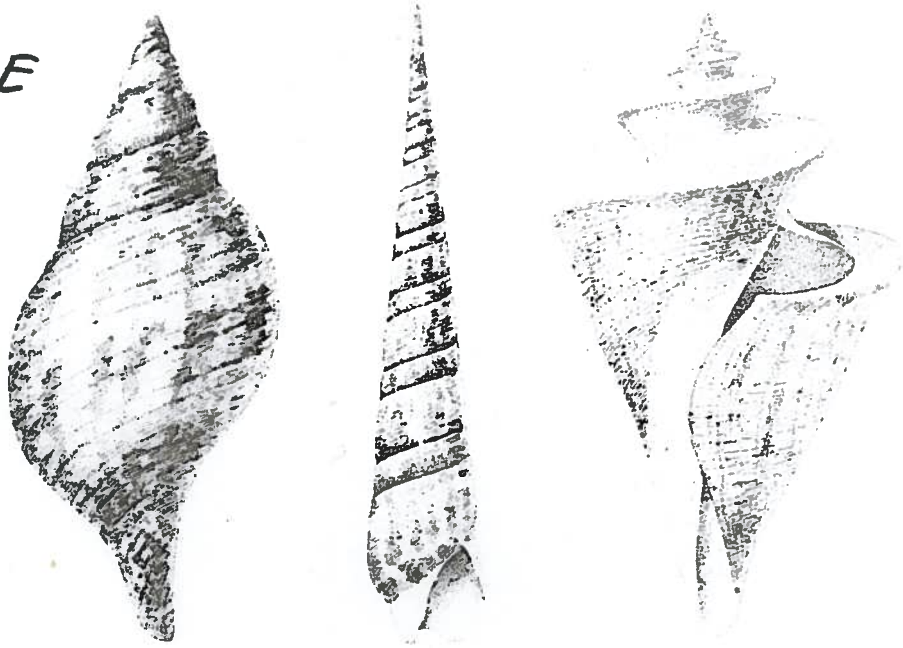
FRAKTALE





B. Mandelbrot
Die fraktale
Geometrie
der Natur
Birkhäuser 1987

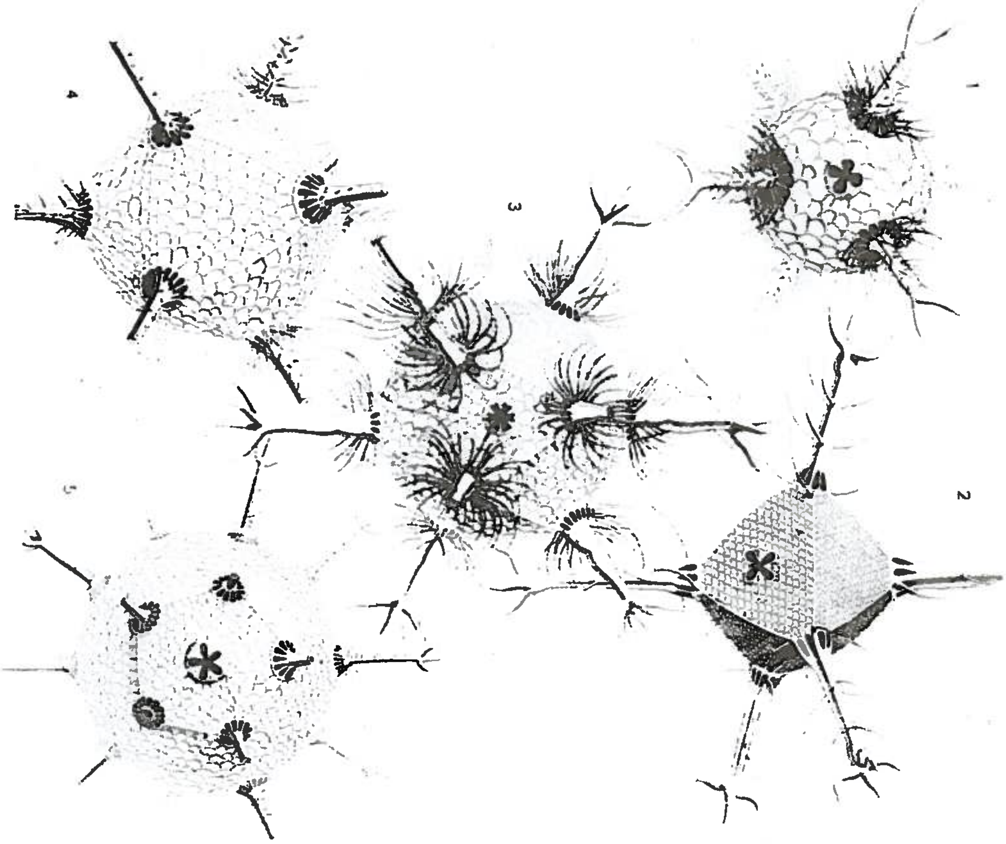
Urtiere



4. *Three molluscan shells that are right-handed conical helices*

M. Gardne
Sixth Book

Radiolarien

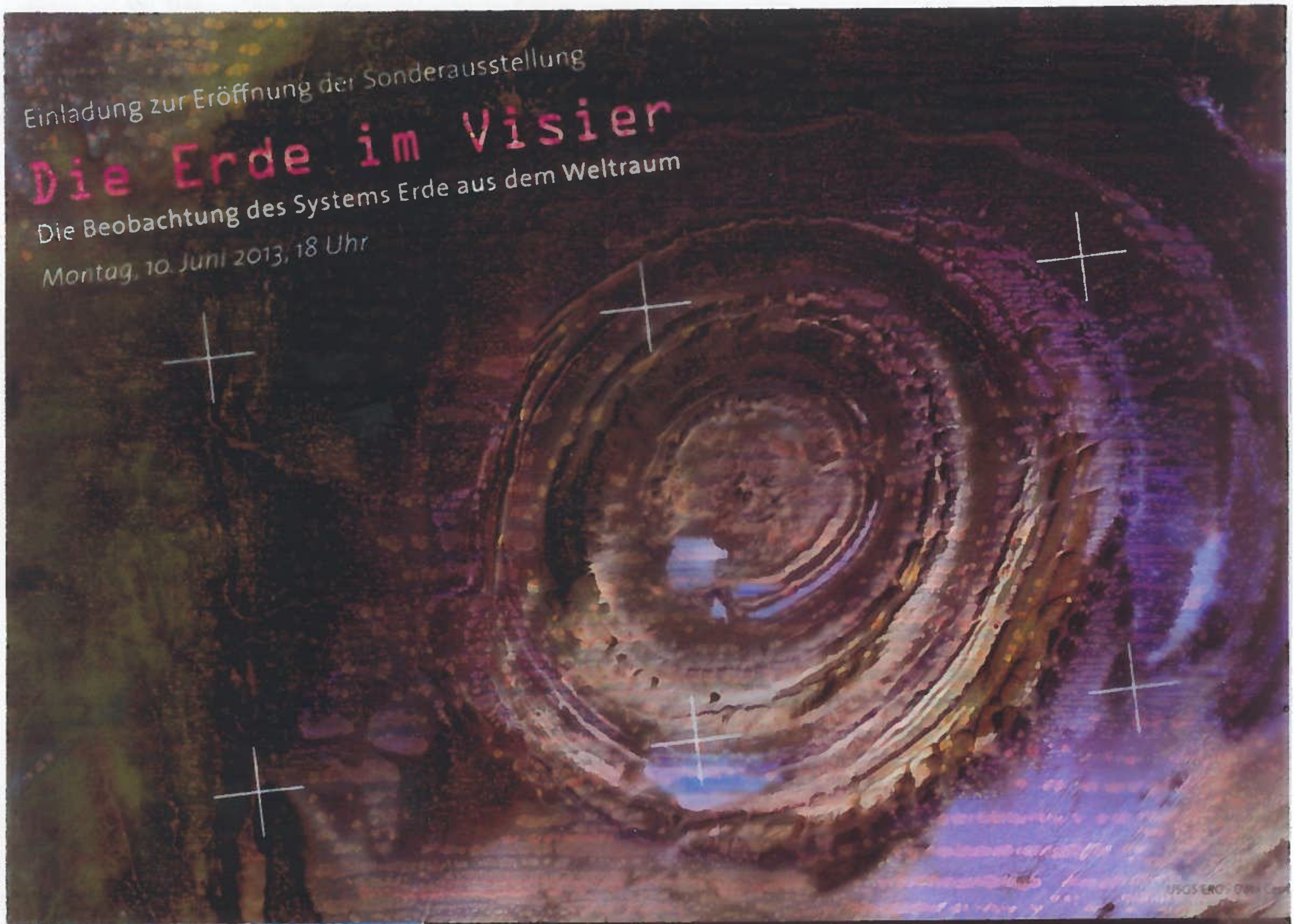


Ernst Haeckel: Challenger monograph, H.M.S.O., 1887

Ikosaeder

Dodekaeder

Oktaeder



Guelb er Richat
Mauretanien
Vulkanisch
100 Millionen J.
Durchmesser = 45km

Universum
$13 \cdot 10^9$ Jahre

Die Entdeckung des Erdalters

Vor hundert Jahren begründeten Arthur Holmes und Frederick Soddy die Geochronologie

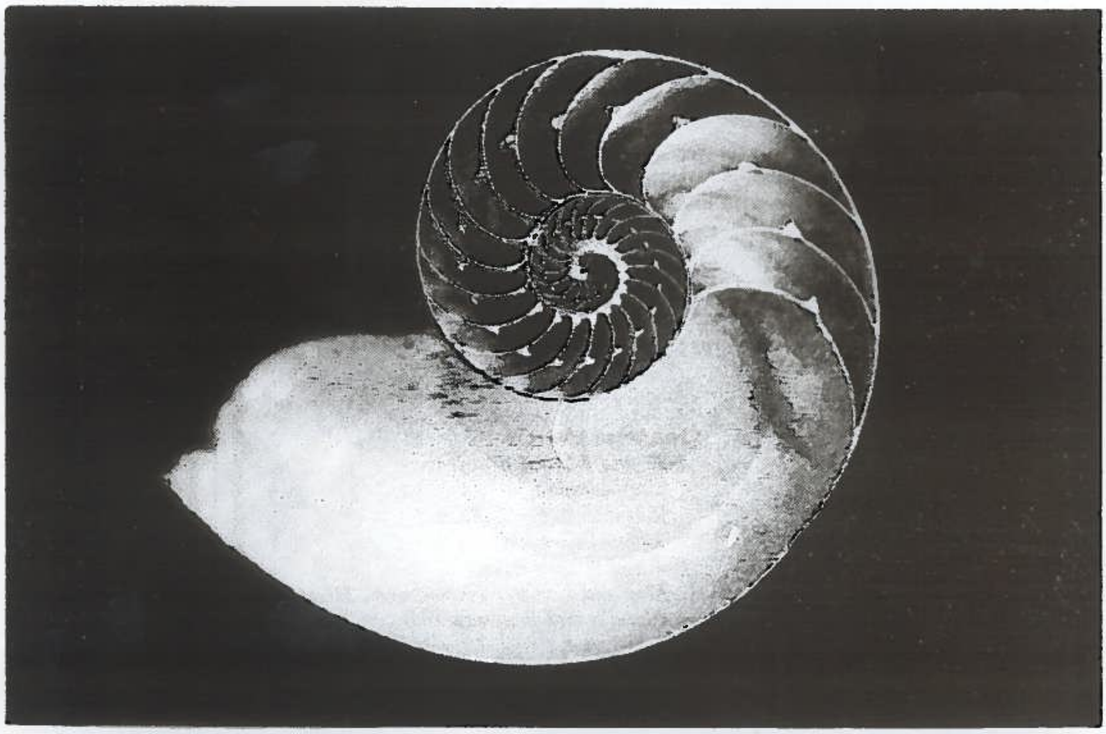
Geschichte unserer Erde ist
estein und Sedimentschich-
überliefert – ein Zeugnis,
Geologen vor hundert Jahren
nd von Radioisotopen zu
ffern lernten. Die neuen
hoden haben die Geologie
ier einschneidend verändert.

ne Ulmer

Diskussion um das Alter der Erde
ierte Arthur Holmes schon als
dlichen. Vor allem die Berechnun-
des anglikanischen Theologen
s Ussher aus dem 17. Jahrhundert
n seine Aufmerksamkeit erregt ha-
Ussher war zu dem Schluss gekom-
die Erde sei 4004 Jahre vor Chris-
ntstanden. «Warum keine schöne
und warum so ein junges Alter»,
ich Holmes gefragt haben, der spä-
Physiker und Geologe wurde. Vor
ert Jahren publizierte er, gerade
al 23 Jahre jung, sein Werk über
Alter der Erde. Heute gilt Holmes
ater der Geochronologie.

Neue Methodik

falls hundert Jahre ist es her, dass
Wissenschaft absolute Datierungs-
hoden zur Verfügung stehen. Dies



Querschnitt des Nautilus, eines lebenden Verwandten der urzeitlichen Tintenfische. (Bild pd)

Versteinerungen urzeitlicher Tintenfische

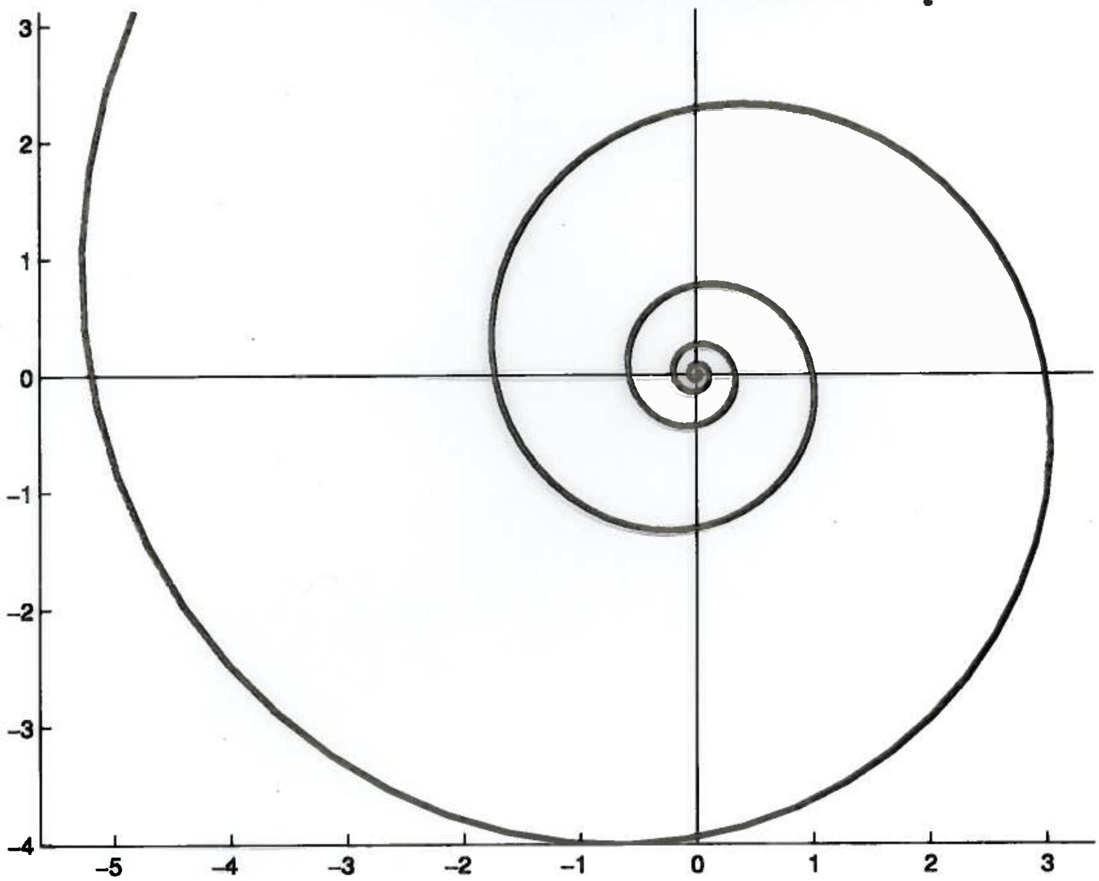
Ausstellung in Winterthur

rmn. In den Naturwissenschaftlichen Sammlungen Winterthur ist die Ausstellung *«Ammonshörner und Donnerkeile»* eröffnet worden. Im Mittelpunkt der Schau stehen versteinerte Überreste altertümlicher Tintenfische, die mehr als 300 Millionen Jahre der Erdgeschichte dokumentieren. Diese Tiergruppe bevölkerte mit nahezu 10 000 Arten die Meere, ehe sie, zusammen mit den Sauriern, vor rund 65 Millionen Jahren ausstarb.

Die vom Naturmuseum Olten zur Verfügung gestellte Ausstellung erzählt die wechselvolle Geschichte der urzeitlichen Tintenfische einschliesslich ihrer vielfältigen Anpassungsformen. Die Schau umfasst auch Randgebiete wie das Nachleben der altertümlichen Tiere als «Ammonshörner» und «Donnerkeile» in Sagen und Märchen.

Die Ausstellung im Temporärsaal der Naturwissenschaftlichen Sammlungen (Kunstmuseum) bleibt bis am 22. September geöffnet. Lehrer können an der Kasse eine Dokumentation verlangen. Ein Mitarbeiter des Museums wird am Mittwoch nachmittag, 24. April, Versteinerungen präparieren und Sammlern handwerkliche Tips geben. Am 17. August können Besucher ihre Fossilienfunde von einem Paläontologen bestimmen lassen.

Logarithmische Spirale mit Streckungsfaktor $f = 3$



$$z = x + iy = e^{(a-i)\varphi}, \qquad a = \frac{\log f}{2\pi}$$

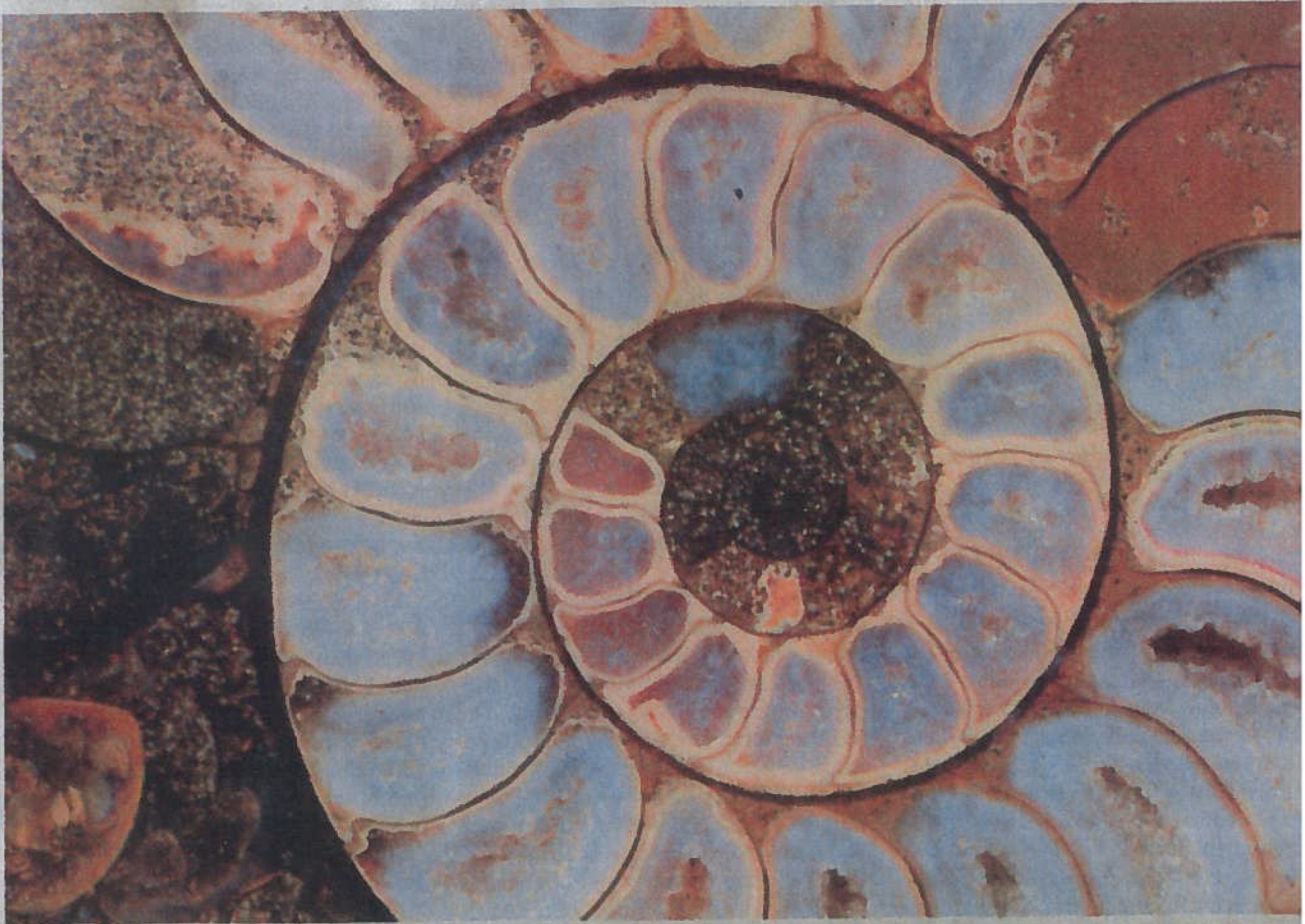
z: komplexe Koordinate, φ: Polarwinkel

Neue Zürcher

NZZ – ZEITUNG FÜR DIE SC

Mittwoch, 25. September 2013 · Nr. 222 · 234. Jg.

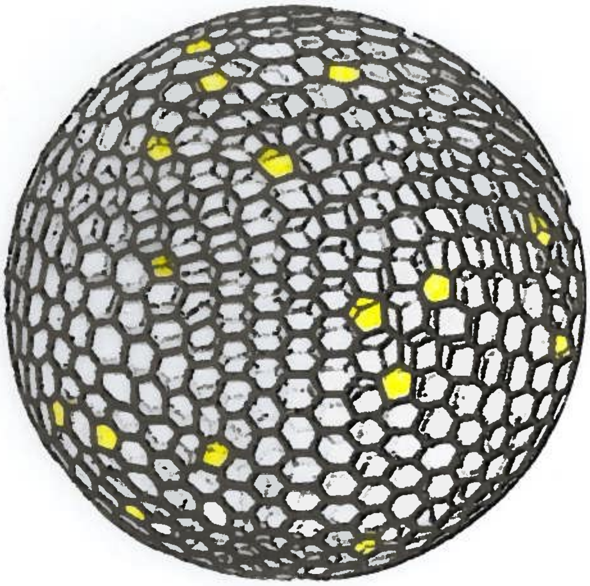
gegründet 1780



AXEL BROD / ALLOVER

Spuren lesen im Gestein

Vor vielen Millionen Jahren ausgestorbene Lebewesen wie dieser Ammonit zeugen von der bewegten Geschichte der Erde. Forschern dienen sie zur Datierung von Gestein und Sedimenten. Erst vor hundert Jahren begann man indes, die geologische Zeitskala mithilfe von Radioisotopen zu verfeinern – eine Methode, die die Geologie bis heute prägt.



Ernst Haeckel: Kunstformen der Natur, Leipzig 1899
Radiolarien: Aulonia hexagona

WIR SEHEN Geometrie überall !

Was war zuerst ?

NATUR ist "geometrisch" überall ! → GEOMETRIE: Versuch des Menschen, diese Vielfalt zu verstehen, zu ordnen und weiter zu entwickeln. → KUNST: schöpferische Ausnutzung und Erweiterung

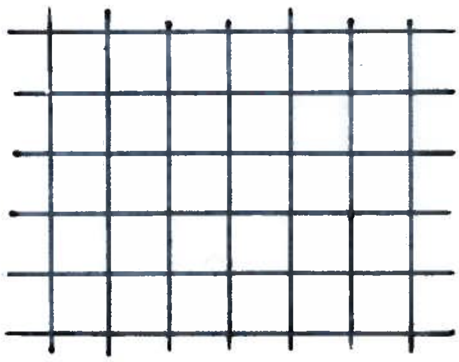
Dies wäre ein hübscher Schluss

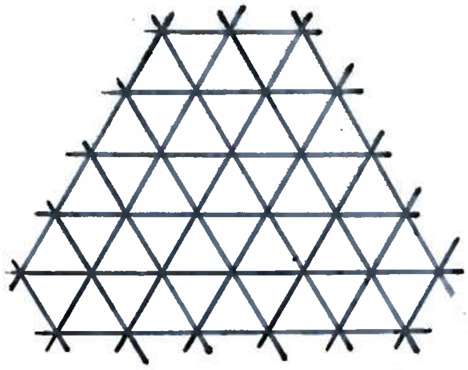
ANHANG

„Mathematicians are state-paid $\boxed{\text{artists}}$"

E. Trubowitz

1. PARKETTIERUNGEN

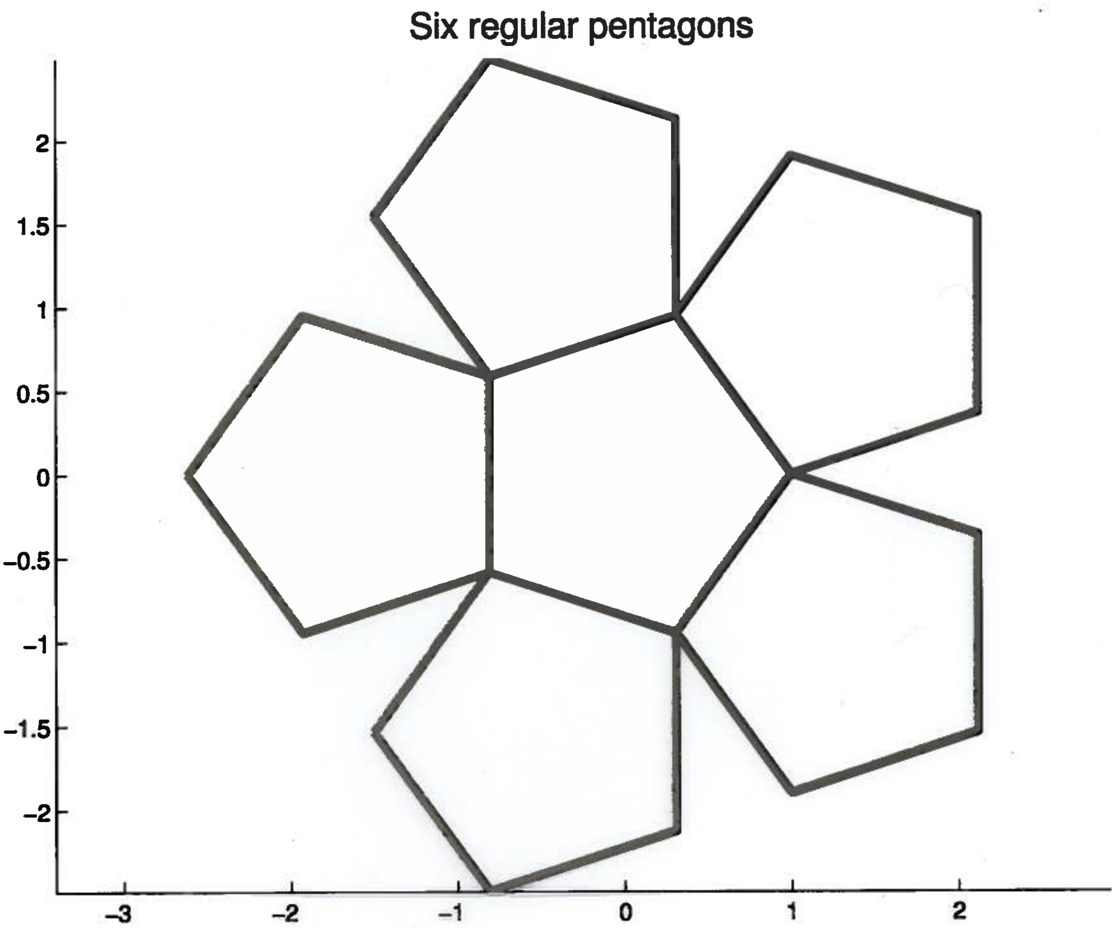




Dazu 6-ecke (Bienenweben)

und viele weitere, z.B. M.C. Escher

GEHT ES AUCH MIT 5-ECKEN ?

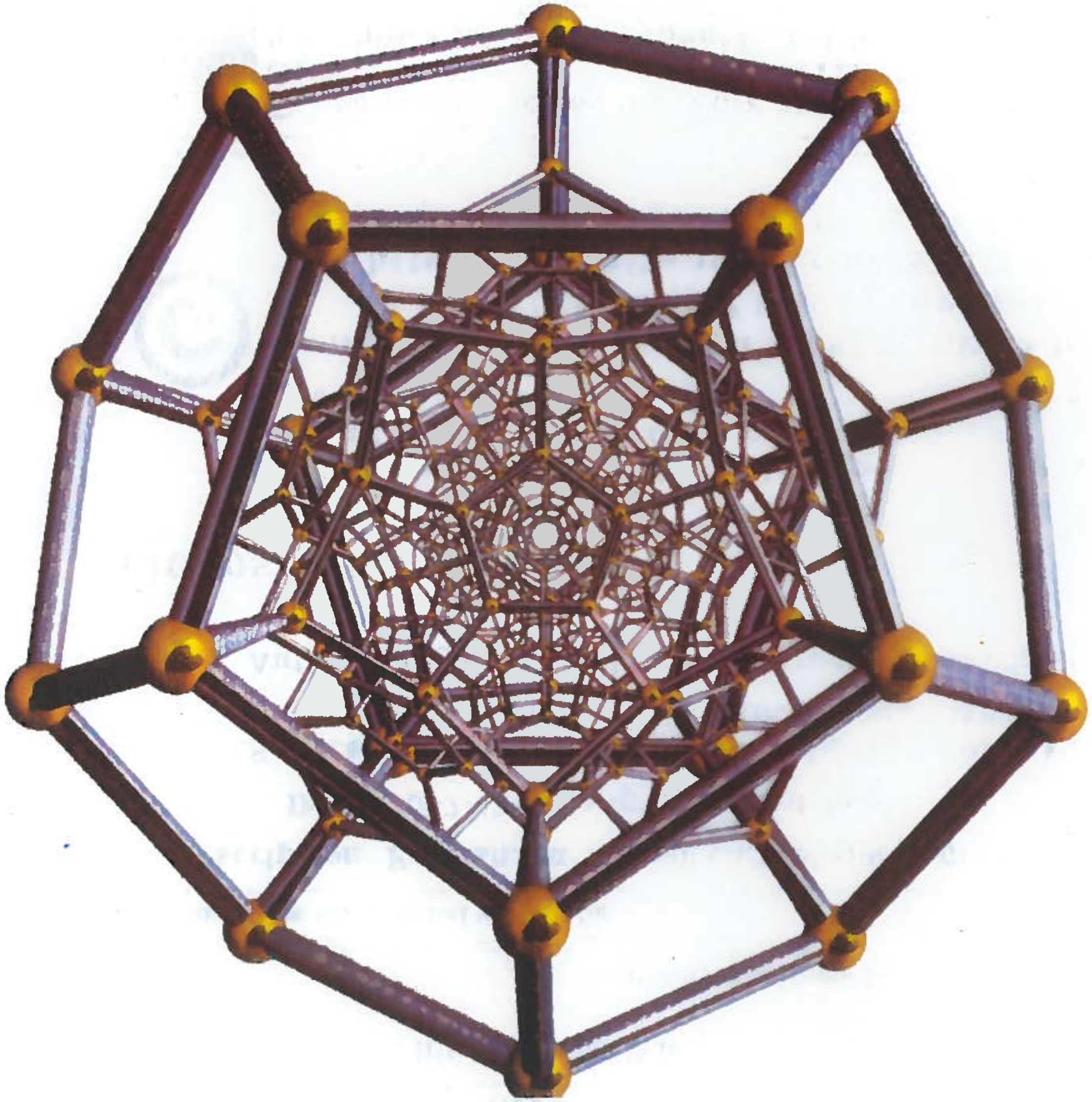

Six regular pentagons
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−3
−2
−1
0
1
2

28. Reptielen - Reptiles - Reptilien - Reptiles

29. Kringloop - Cycle - Kreislauf - Cycle

File:Schlegel wireframe 120-cell.png

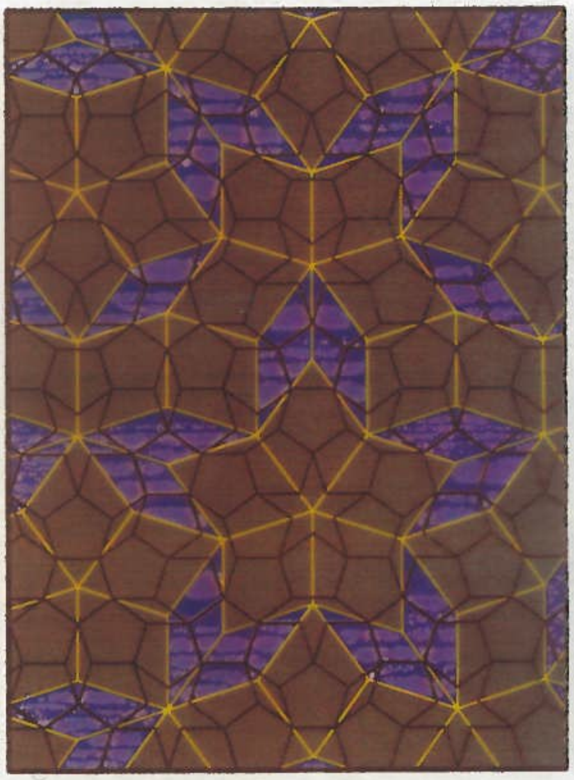
From Wikipedia, the free encyclopedia

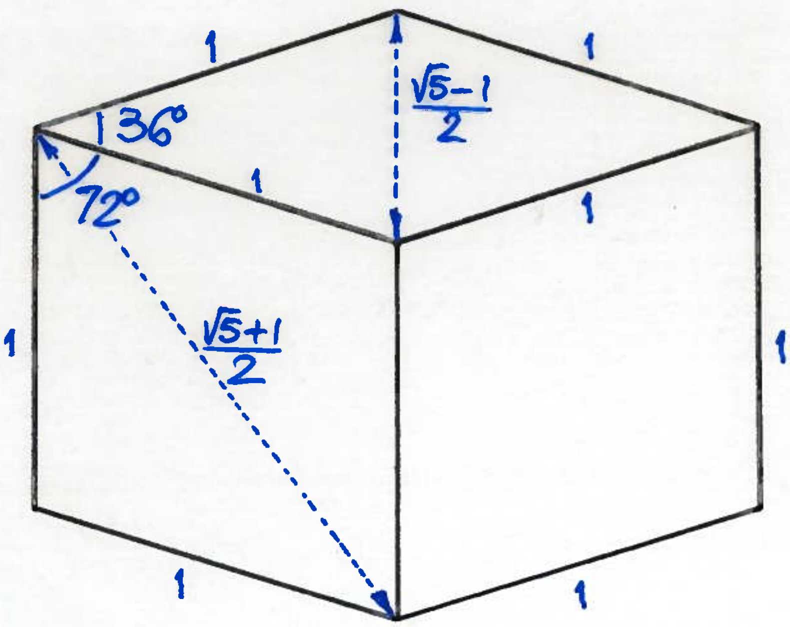


PENROSE TILINGS

Roger Penrose 1974

siehe Wikipedia
"Penrose tiling"
für viele (!) Beispiele





2. POLYEDER

Eulerscher Polyedersatz

Polyeder, einfach zusammenhängend (keine Löcher)

e_0 Ecken, e_1 Kanten, e_2 Flächen

$$\boxed{e_0 - e_1 + e_2 = 2}$$

Beispiel: Radiolarien (Ernst Haeckel)

m 5-ecke, n 6-ecke, k 7-ecke

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= \tfrac{1}{3}(5m+6n+7k) \\ e_1 &= \tfrac{1}{2}(5m+6n+7k) \\ e_2 &= m+n+k \end{aligned}\right\} e_0 - e_1 + e_2 = \frac{m-k}{6} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{m-k = 12, \quad n \text{ beliebig}}$$

Konkret: $m = 12$, $k=0$, $n=0$ Dodekaeder
$m = 12$, $k=0$ $n = 30$ Fussball

Jedes überzählige 5-eck (>12) muss durch ein 7-eck kompensiert werden

Einige spezielle Kristallformen des kubischen Systems

Aus Trommsdorff und Dietrich 1999

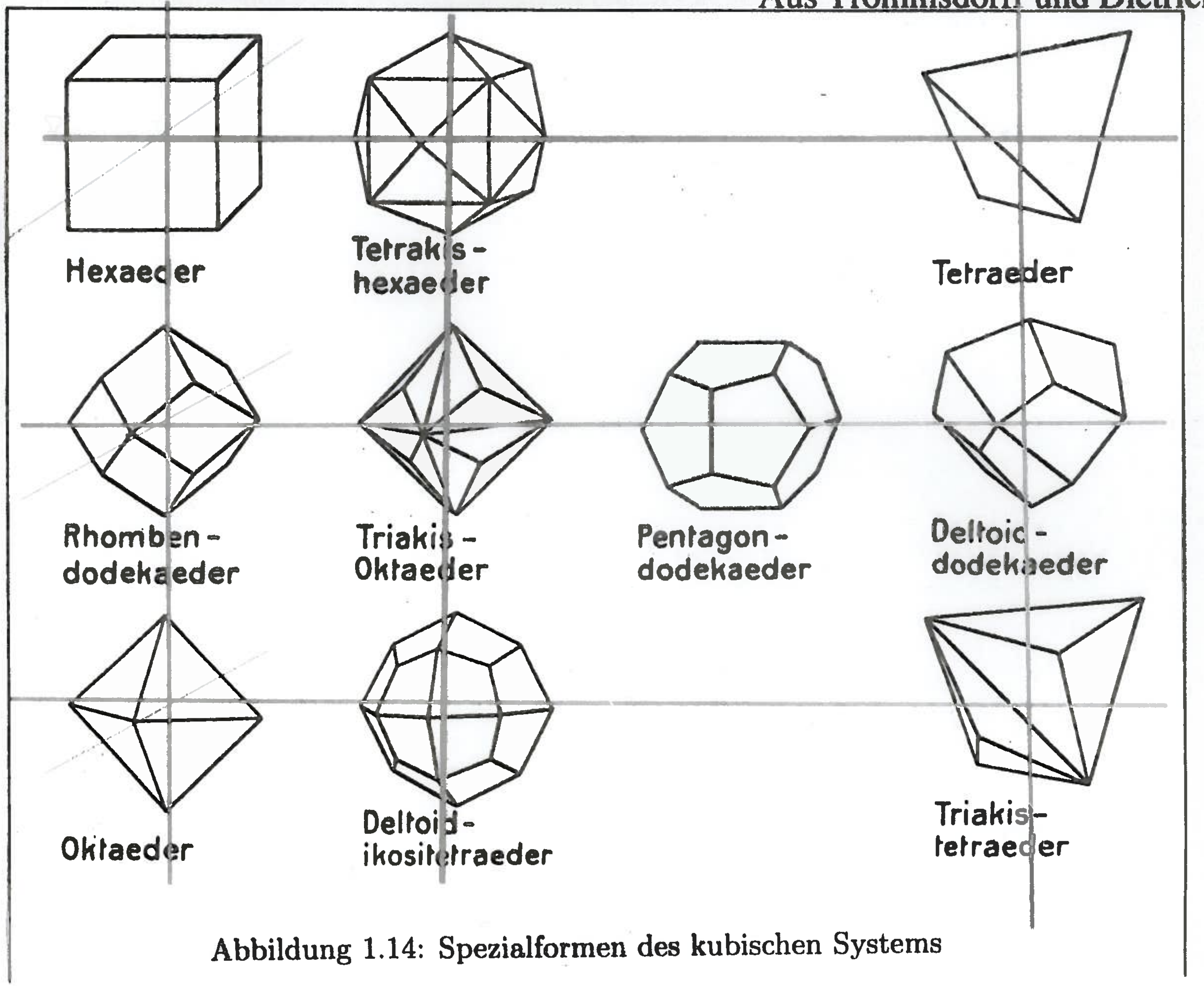
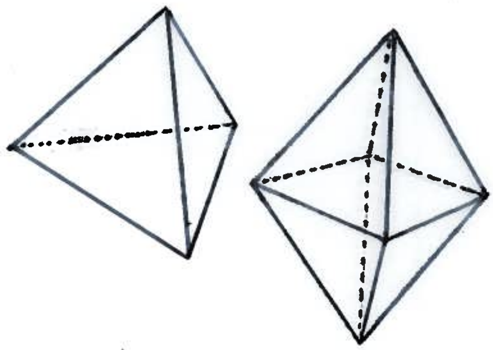
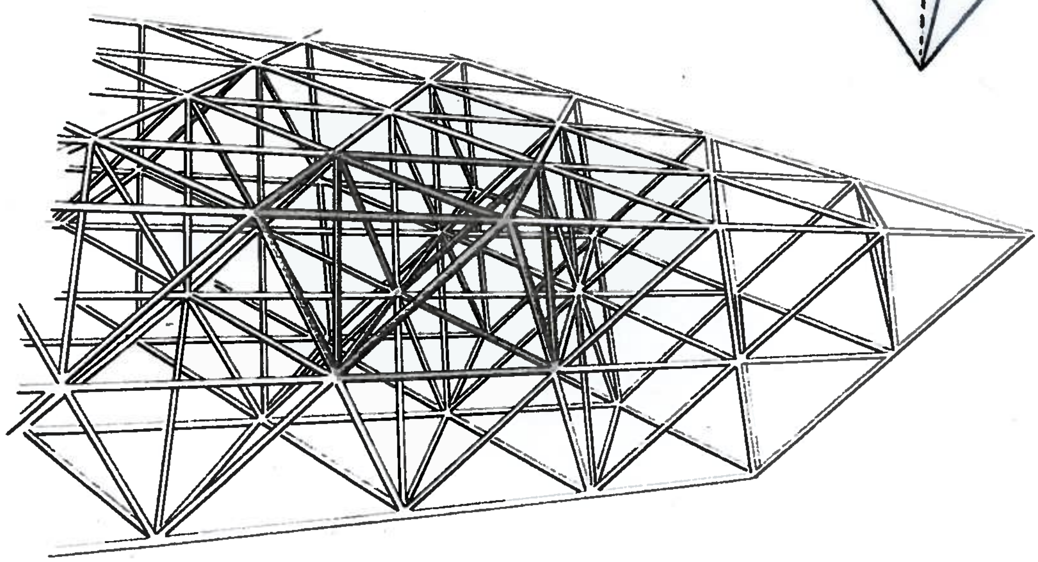
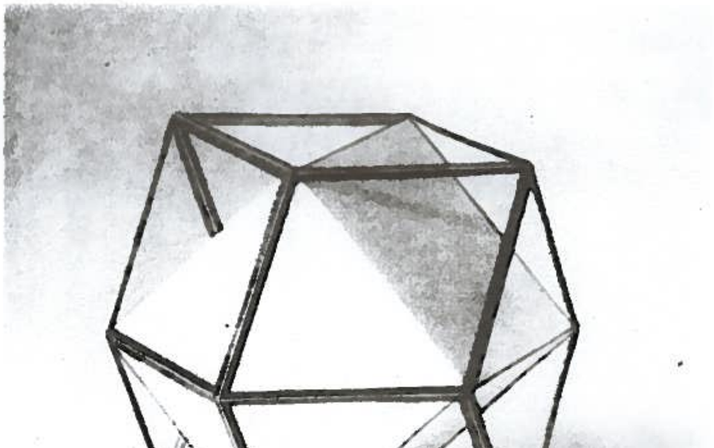


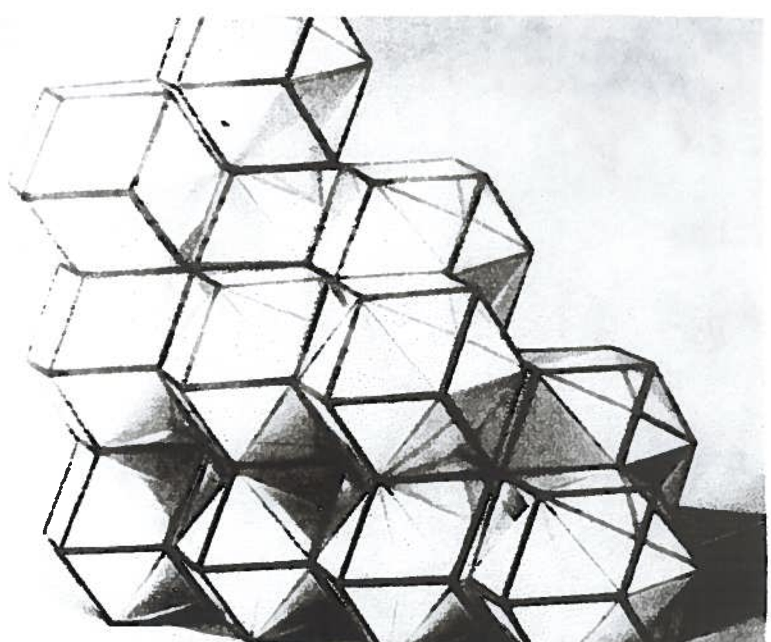
Abbildung 1.14: Spezialformen des kubischen Systems

128. *Tetrahedron and octahedron* (top) *and space tesselated by the two polyhedrons arranged alternately* (bottom)









3. DIE KEPLERsche VERMUTUNG

Johannes Kepler 1571 – 1630 ; 1611

1611: Dichteste Kugelpackung? $\rho = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}74048\,049$ 019

Achtung Wikipedia

1831: Carl Friedrich Gauss:

Dichtere Packung müsste nicht-period. sein

1900: David Hilbert:

Unsolved Problem # 18

1953: László Fejes Tóth:

Minimum in endlich vielen Variablen

1998: Thomas Hales:

Minimum in 150 variables by exhaustion

250 Seiten Text, 3 GByte programs & data (über 1000 dicke Bücher!)

submitted to "Annals of Mathematics"

2003: Kommission von 12 Personen, nach 4 Jahren:

"Panel is 99% certain of the correctness of the proof. However, computer calculations not certified."

$\Rightarrow$ KEPLER-VERMUTUNG NOCH NICHT BEWIESEN

Kubisch-Kugelpackung-Hexagonal

Kubisch dichteste Kugelpack.

Cubic close packing

ccp

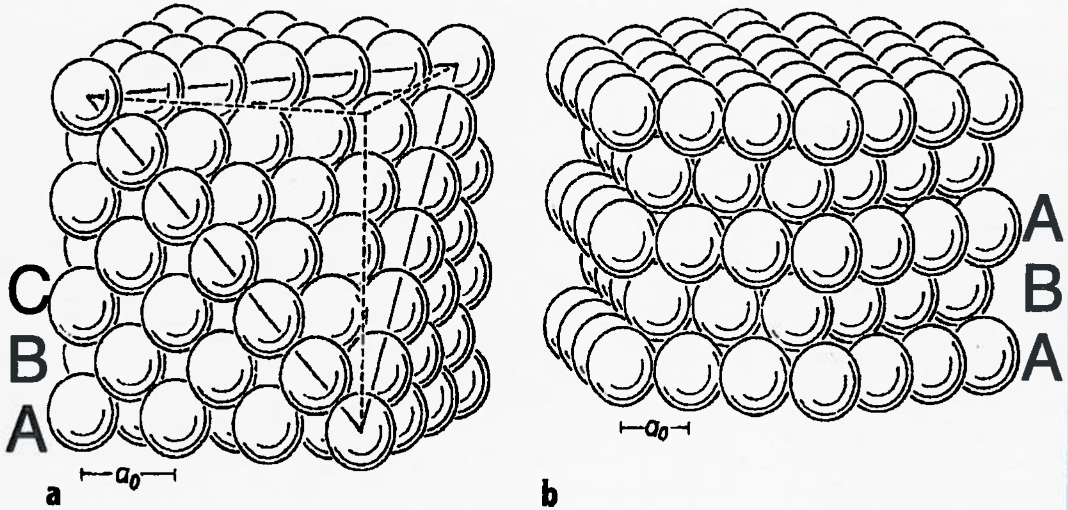


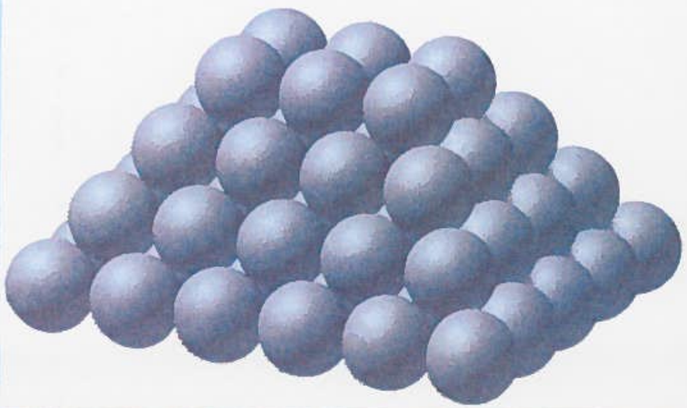
Abb. 2.1. a Kubisch dichteste Kugelpackung. **b** Hexagonal dichteste Kugelpackung. (Nach Ramdohr u. Strunz 1978)

Hexagonal dichteste Kugelpack.

Hexagonal close Packing

hcp

Okrusch und Matthes 2002



Kubisch-Kugelpackung-Hexagonal

Kubisch dichteste Kugelpack.

Cubic close packing

ccp

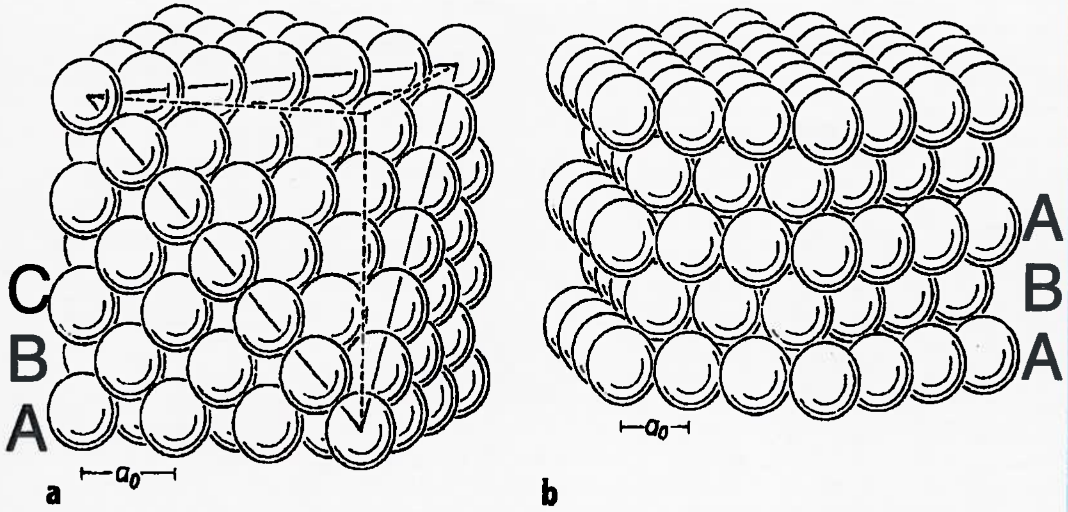
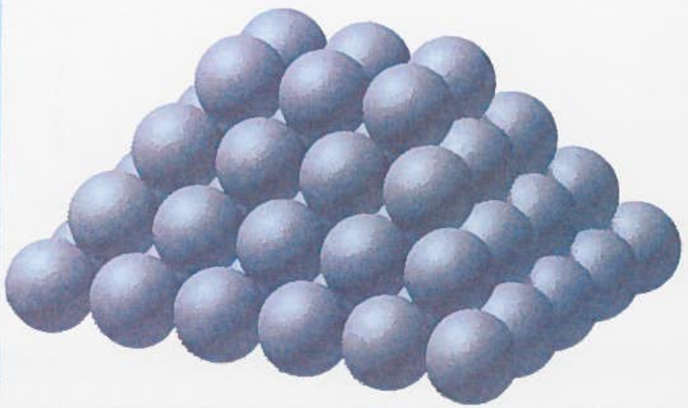


Abb. 2.1. a Kubisch dichteste Kugelpackung. **b** Hexagonal dichteste Kugelpackung. (Nach Ramdohr u. Strunz 1978)



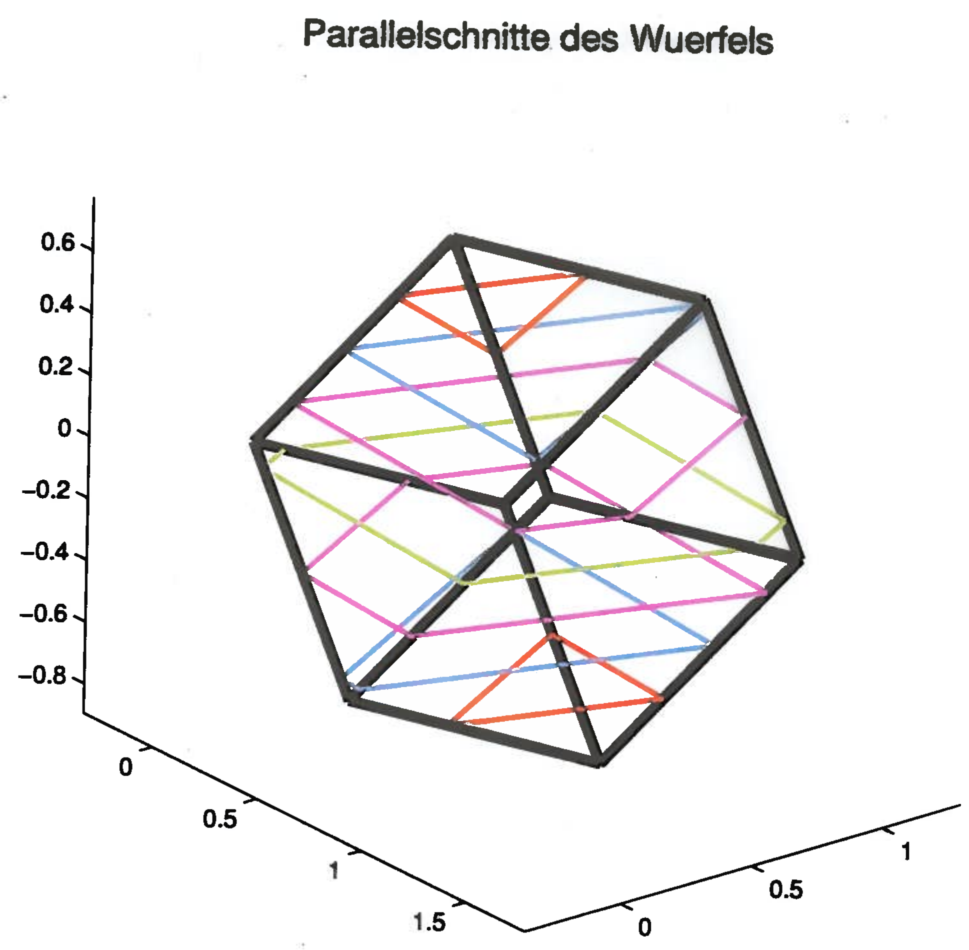
Hexagonal dichteste Kugelpack.

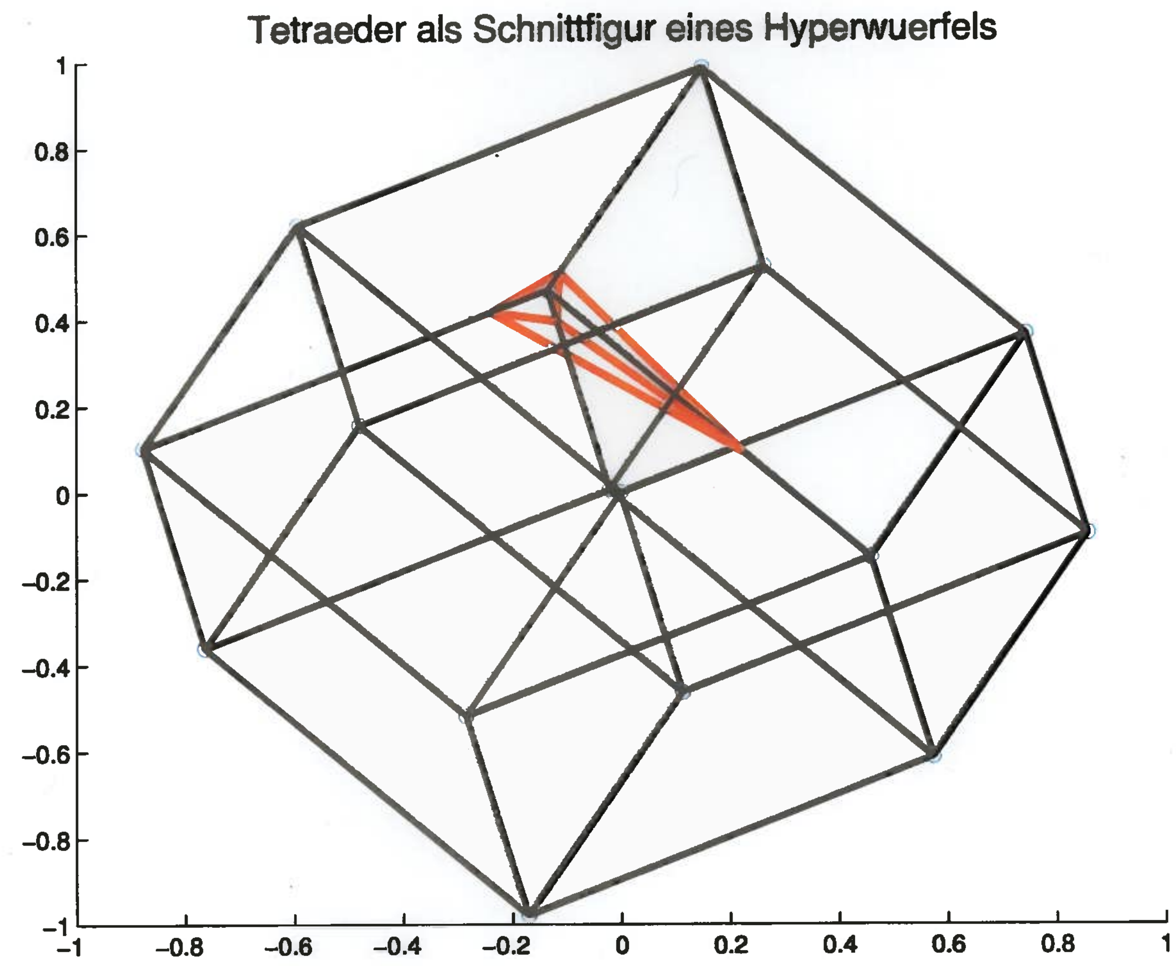
Hexagonal close Packing

hcp

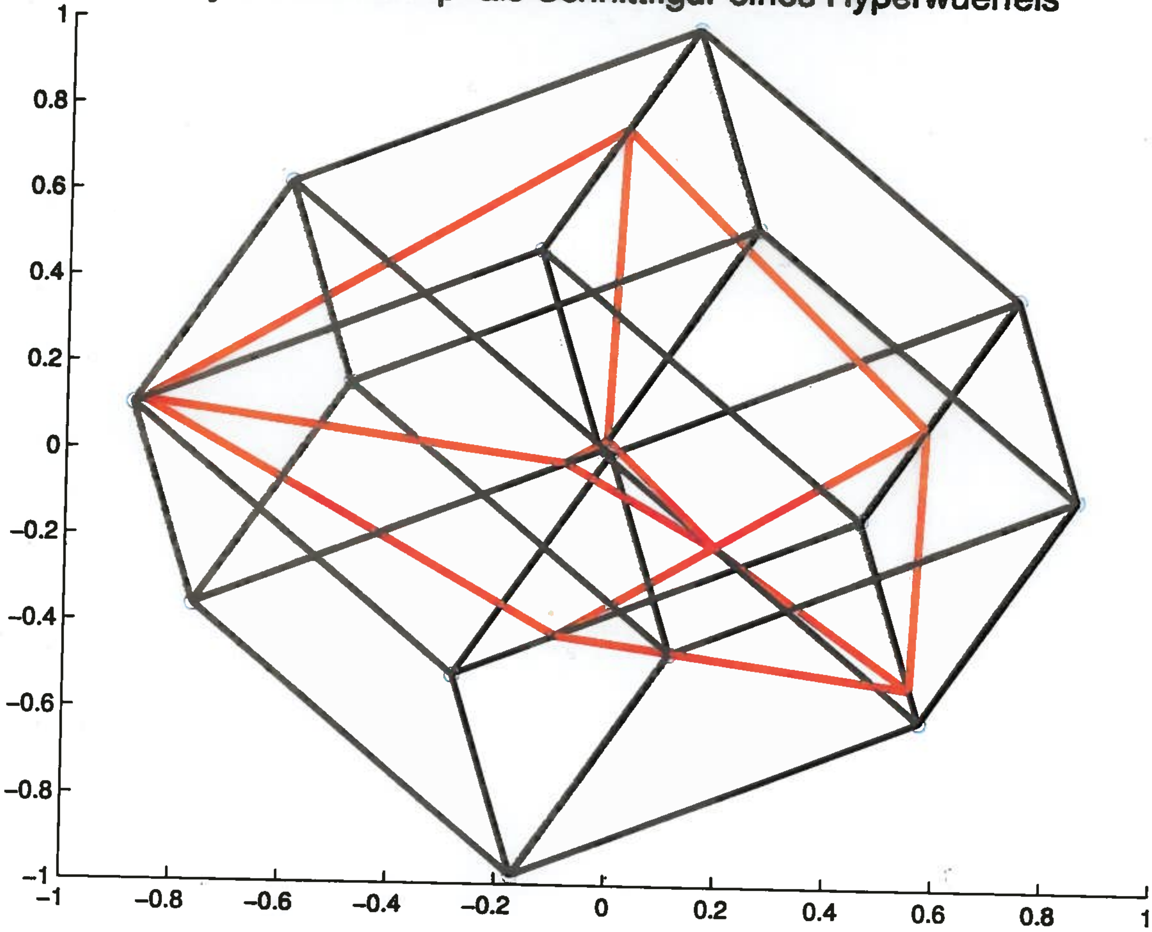
Okrusch und Matthes 2002

4. Schnittfiguren des (Hyper-)Würfels



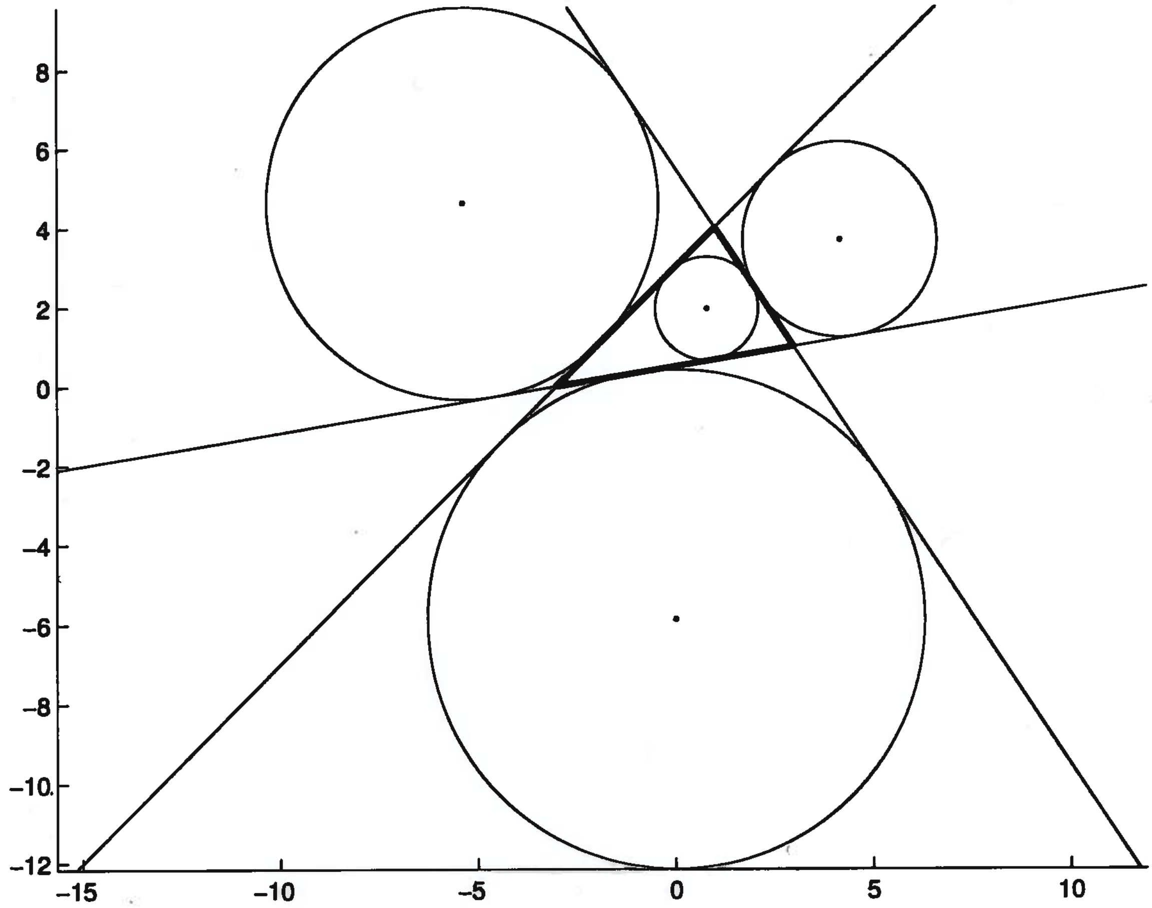

Tetraeder als Schnittfigur eines Hyperwuerfels
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

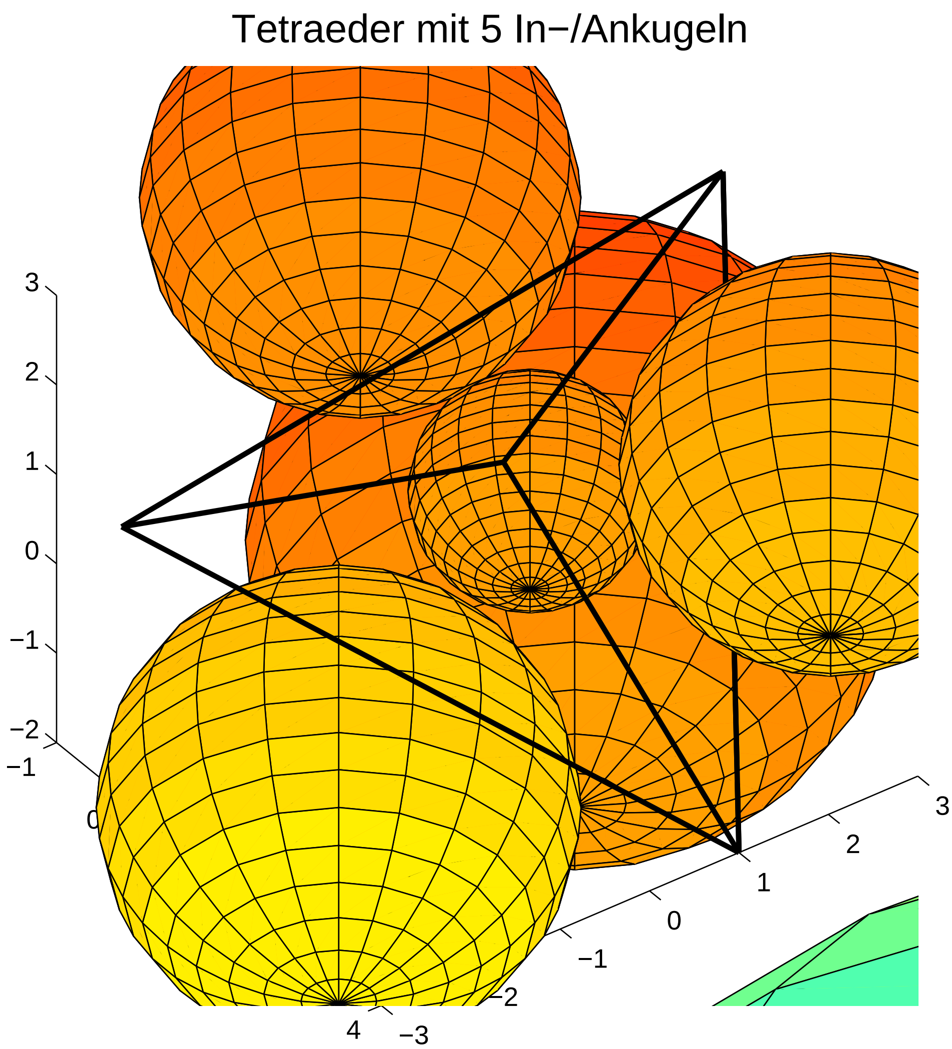
Pyramidenstumpf als Schnittfigur eines Hyperwuerfels



5. In-/An- Kreise/Kugeln

Dreieck und Tetraeder




Tetraeder mit 5 In−/Ankugeln
3
2
1
0
−1
−2
−1
0
4
−3
−2
−1
0
1
2
3

Tetraeder mit 8 In−/Ankugeln