Baustatik III, Hausübung 2

Rechnung mit kN und m

- Matrizen können in Mathcad nicht verschiedene Einheiten enthalten. Somit treten bei komplexen Rechnungsverfahren Probleme auf, wenn mit Einheiten gerechnet wird.
- Es ist deshalb zweckmässig, am Anfang des Mathcad-Sheets die Einheiten für sich in einem Textfed zu definieren und die Grössenordnungen in der Berechnung gemäss diesen Einheiten einzugeben.

Definition der Konstanten:

$L := 1$ $\qquad EA := 1$ $\qquad q_0 := 1$

- Durch Rechtsklick auf diese Definitionen kann unter "Eigenschaften" --> "Berechnung" die Auswertung deaktiviert werden. Dies ist für symbolische Auswertungen geeignet. Die Resultate werden dann als Funktion von L, EA und q_0 angezeigt. Aber Achtung:
- Dieses Vorgehen führt zu Fehlermeldungen, da die Variablen dann nicht mehr definiert sind.

Bereich 1 (aus separater Handrechnung):

$N_1(x,C) := -q_0 \cdot x + C_0$ $\qquad u_1(x,C) := \frac{1}{EA}\cdot\left(-q_0\cdot\frac{x^2}{2} + C_0\cdot x + C_1\right)$

- C ist ein Spaltenvektor mit den 4 unbekannten Integrationskonstanten C_0 bis C_3.
- Das erste Element in einer Zeile/Spalte entspricht in Mathcad dem Feldindex 0.
- Literalindex q_0 (Schreibe q.0); Feldindex C_0 (Schreibe C[0)

Bereich 2 (aus separater Handrechnung):

$N_2(x,C) := C_3$ $\qquad u_2(x,C) := \frac{1}{EA}\left(C_3\cdot x + C_2\right)$

Rand- und Übergangsbedingungen (Unbekannte: C_0,C_1,C_2,C_3):

Variante 1: Matrizenschreibweise

Verschiebung bei x=0: $\quad u_1(0,C) \rightarrow C_1$

Verschiebung bei x=L/2: $\quad u_1\left(\frac{L}{2},C\right) - u_2\left(\frac{L}{2},C\right) \text{ simplify } \rightarrow \frac{C_0}{2} + C_1 - C_2 - \frac{C_3}{2} - \frac{1}{8}$

Verschiebung bei x=L: $\quad N_2(L,C) + k\cdot u_2(L,C) \text{ simplify } \rightarrow k\cdot C_2 + k\cdot C_3 + C_3$

Normalkraft bei x=L/2: $\quad N_1\left(\frac{L}{2},C\right) - N_2\left(\frac{L}{2},C\right) \text{ simplify } \rightarrow C_0 - C_3 - \frac{1}{2}$

- Die vier Gleichungen müssen nun manuell zum Gleichungssystem in Matrixform zusammengefasst werden (C1(k) nächste Seite). Hierzu die Auswertung in der Definition der Konstanten deaktivieren!
- Wird oben in der Berechnung etwas geändert, so muss dieses Gleichungssystem entsprechend von Hand angepasst werden.
- Diese Variante besticht durch eine übersichtliche Darstellung des Gleichungssystems.

$$C1(k) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L}{2} & 1 & -1 & \frac{-L}{2} \\ 0 & 0 & \frac{k}{EA} & 1 + \frac{L \cdot k}{EA} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_0 \cdot L^2}{8} \\ 0 \\ \frac{q_0 \cdot L}{2} \end{pmatrix} \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot k + 4}{8 \cdot (k+1)} \\ 0 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8 \cdot (k+1)} - \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Variante 2: Gleichungssystem direkt lösen

$$C(k) := \begin{pmatrix} u_1(0, C) = 0 \\ u_1\left(\frac{L}{2}, C\right) - u_2\left(\frac{L}{2}, C\right) = 0 \\ N_2(L, C) + k \cdot u_2(L, C) = 0 \\ N_1\left(\frac{L}{2}, C\right) - N_2\left(\frac{L}{2}, C\right) = 0 \end{pmatrix} \text{ solve}, C_0, C_1, C_2, C_3 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot k + 4}{8 \cdot k + 8} & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{k}{8 \cdot k + 8} \end{pmatrix}$$

- Mathcad gibt einen Zeilenvektor zurück, welcher die 4 unbekannten Integrationskonstanten enthält.
- Um mit einfachen Feldindices weiterrechnen zu können, wird der Zeilenvektor durch Transponieren in einen Spaltenvektor umgewandelt.

$$C(k)^T \text{ simplify } \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot k + 4}{8 \cdot (k+1)} \\ 0 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8 \cdot (k+1)} - \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

- Diese Variante funktioniert automatisch. Manuelle Anpassungen bei einer Änderung weiter oben in der Berechnung erübrigen sich.
- Der Nachteil dieser Variante besteht darin, dass die Berechnungsmethode intuitiv nicht ersichtlich ist.

Implementierung von α:

$$C(\alpha) := C(k)^T \text{ substitute}, k = \alpha \cdot \frac{EA}{L} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot \alpha + 4}{8 \cdot \alpha + 8} \\ 0 \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{\alpha}{8 \cdot \alpha + 8} \end{pmatrix}$$

$C(\alpha) \text{ substitute}, \alpha = \infty \rightarrow$

funktioniert nur für α=0 und α=1!

- Für die Integrationskonstante C_3 ist mit α=∞ offensichtlich ein Grenzübergang auszudiskutieren (nächste Seite).

$\lambda := \infty$

$$C2 := \lim_{\alpha \to \lambda} C(\alpha) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ 0 \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Extrema:

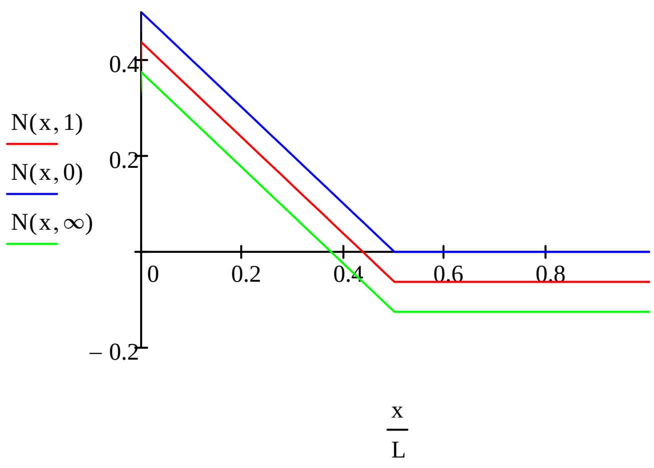
$$x_{opt} := \frac{d}{dx} u_1(x, C2) = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \frac{3}{8} \qquad u_1(x_{opt}, C2) \rightarrow \frac{9}{128}$$

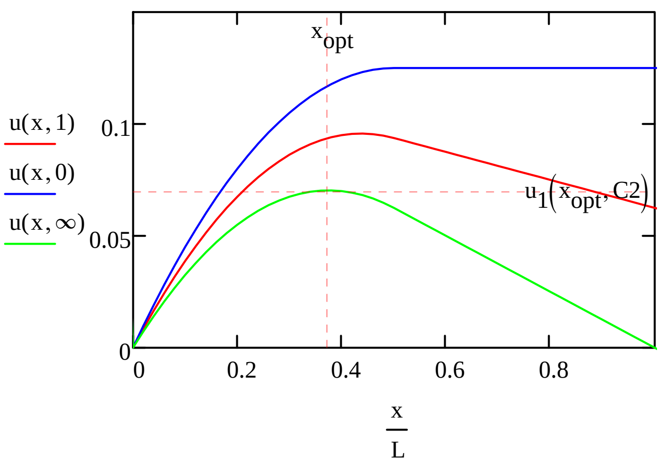
- Diese Werte gelten für den eingegebenen Wert λ und werden weiter unten im Diagramm verwendet.
- Um die Werte als Funktion von L, q_0 und EA darzustellen müsste in der Definition der Konstanten die Auswertung deaktiviert werden.

Diagramme:

$$N(x,\alpha) := \begin{cases} N_1(x, C(\alpha)) & \text{if } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ N_2(x, C(\alpha)) & \text{otherwise} \end{cases} \qquad u(x,\alpha) := \begin{cases} u_1(x, C(\alpha)) & \text{if } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ u_2(x, C(\alpha)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Funktionen mit verschiedenen Bereichen können mit Hilfe der Symbolleiste "Programmierung" erzeugt werden.





- Diagramme können durch Doppelklick formatiert werden
- Jede Achse im Diagramm besitzt standardmässig drei Platzhalter: Der mittige steht für die darzustellenden Werte und die beiden seitlichen für die untere resp. obere Achsgrenze.