

Chapitre 8

Surfaces de réponse par chaos polynomial

8.1. Introduction

8.1.1. *Problème de fiabilité*

Nous rappelons le problème posé en introduction du chapitre 7 : nous nous intéressons à un ouvrage ou une partie d'ouvrage réduite à une structure mécanique, représentable par un modèle mécanique décrivant son comportement. Ce modèle est décrit par une fonction de transfert \mathcal{M} (le plus souvent connue implicitement, par exemple sous forme d'un code aux éléments finis) permettant d'évaluer les effets des sollicitations (déplacements, déformations, contraintes, etc.) en fonction de paramètres d'entrée décrivant la structure et son environnement : les caractéristiques géométriques (dimensions, sections et moments d'inertie de poutres, etc.), les caractéristiques des matériaux constitutifs (module d'Young, coefficient de Poisson, etc.) et le chargement (efforts appliqués, sollicitations thermiques, etc.), paramètres regroupés dans un vecteur \mathbf{x} . On note $\mathbf{y} = \mathcal{M}(\mathbf{x})$ la réponse du modèle.

On définit ensuite un *modèle probabiliste* pour les paramètres d'entrée qui est caractérisé par la densité jointe du vecteur (aléatoire) des paramètres d'entrée \mathbf{X} (de taille M), notée $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. On définit enfin une *fonction d'état limite* traduisant mathématiquement le critère de défaillance par rapport auquel la structure doit être justifiée. Cette fonction s'écrit sous la forme $g(\mathcal{M}(\mathbf{X}), \mathbf{X}')$ et porte sur les effets des sollicitations (déplacements, contraintes, etc.) auxquels on fixe des limites (déterministes ou probabilistes), regroupées ici dans un vecteur \mathbf{X}' . Elle est définie

2 Fiabilité des ouvrages

conventionnellement de sorte que ses valeurs négatives correspondent à des réalisations \mathbf{x} des paramètres d'entrée qui conduisent à la défaillance.

L'objectif est alors d'évaluer la probabilité de défaillance P_f de la structure d'étude définie par :

$$P_f = \int_{\mathbf{x}: g(\mathcal{M}(\mathbf{x}), \mathbf{x}') \leq 0} f_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x} \quad [8.1]$$

Il existe un arsenal de méthodes pour résoudre le problème : simulation de Monte-Carlo, méthodes FORM/SORM, simulation directionnelle, *subset simulation*, qu'on retrouve notamment présentées dans les ouvrages de référence de Ditlevsen et Madsen [DIT 96] et Lemaire [LEM 05].

8.1.2. De Monte-Carlo aux chaos polynomiaux

La méthode de Monte-Carlo est bien connue en fiabilité des structures et plus généralement en mécanique probabiliste. Elle s'appuie sur la génération de *réalisations* des variables d'entrée, soit $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N\}$. Ces réalisations sont choisies de façon aléatoire dans l'espace des paramètres d'entrée par des algorithmes appropriés. Pour l'ensemble de l'échantillon, on compte le nombre de défaillances simulées N_f , c'est-à-dire le nombre de réalisations \mathbf{x}_i qui conduisent à une valeur négative de la fonction d'état limite (chaque évaluation de celle-ci requiert un calcul mécanique $y_i = \mathcal{M}(\mathbf{x}_i)$). La probabilité de défaillance est alors estimée par $\hat{P}_f = N_f / N$. La méthode de Monte-Carlo est simple à mettre en œuvre et robuste, car elle permet d'avoir des intervalles de confiance sur la probabilité calculée. Cependant, elle est très coûteuse en nombre de calculs à réaliser, notamment lorsqu'on recherche des probabilités de défaillance faibles (de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-6} en pratique). Ainsi on montre qu'une estimation précise à 5 % près d'une probabilité de 10^{-k} requiert environ $N = 4 \cdot 10^{k+2}$ points dans l'échantillon.

Vu sous un autre angle, la méthode de Monte-Carlo consiste à caractériser la réponse aléatoire de la structure $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ *point par point* dans « l'espace des possibles », et l'on comprend ainsi qu'elle nécessite un grand nombre de simulations du modèle pour évaluer finement le contenu probabiliste de Y , représenté par exemple par sa densité de probabilité $f_Y(y)$ que l'on estime à partir de l'histogramme de l'échantillon $\mathcal{Y} = \{\mathcal{M}(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, N\}$. Dans le contexte industriel, pour lequel les modèles sont le plus souvent de type « éléments finis » et nécessitent

un temps de calcul important (typiquement quelques minutes à quelques heures), cette approche n'est donc pas applicable.

De manière alternative, on peut considérer Y de façon intrinsèque, comme une variable aléatoire appartenant à un certain espace (l'espace des variables aléatoires de variance finie), et représenter cette variable sur une *base appropriée* de cet espace. Schématiquement, on va utiliser un développement en série de la forme :

$$Y \approx \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \Psi_j \quad [8.2]$$

où $\{\Psi_j, j \in \mathbb{N}\}$ désigne un ensemble de variables aléatoires formant la base et où les $\{a_j, j \in \mathbb{N}\}$ sont les « coordonnées » de la variable aléatoire Y dans cette base. On s'intéresse ici plus particulièrement à des bases constituées de *polynômes orthonormaux* de variables aléatoires. L'expression [8.2] est alors appelée *développement par chaos polynomial* (CP).

Dans la suite de ce chapitre, on va successivement décrire la construction de la base (section 8.2) puis le calcul des coefficients du développement et leur utilisation dans l'analyse de fiabilité (section 8.3). Deux exemples d'applications sont finalement présentés à la section 8.4.

8.2. Construction de la base du chaos polynomial

8.2.1. Polynômes orthogonaux

On suppose ici pour simplifier la présentation que les variables aléatoires d'entrée sont indépendantes, et on note $f_i(x_i)$ leur densité marginale (la densité de probabilité jointe est alors $f_x(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^M f_i(x_i)$). Pour chacune des variables aléatoires d'entrée X_i , on peut définir une famille de polynômes orthonormaux $\{P_j^i, j \in \mathbb{N}\}$, telle que $P_0^i \equiv 1$ et le degré de chaque polynôme P_j^i est j pour $j > 0$. L'orthonormalité est définie comme suit :

$$\langle P_j^i, P_k^i \rangle \equiv \int_{D_i} P_j^i(x) P_k^i(x) f_i(x) dx = \delta_{j,k} \quad [8.3]$$

où $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et 0 sinon, et D_i est le support de la variable aléatoire X_i . En pratique, on peut associer des familles classiques de polynômes orthogonaux aux

4 Fiabilité des ouvrages

variables aléatoires usuelles. Si X_i est gaussienne (resp. uniforme), la famille associée est celle des polynômes d'Hermite (resp. de Legendre) [ABR 70, SCH 00].

Il est alors aisé de construire une base de polynômes *multivariés* $\{\Psi_j, j \in \mathbb{N}\}$ par *tensorisation*, c'est-à-dire en multipliant les polynômes univariés entre eux :

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_M}(\mathbf{x}) = P_{\alpha_1}^{l_1}(x_1) \times \dots \times P_{\alpha_M}^{l_M}(x_M) \quad [8.4]$$

Soize et Ghanem [SOI 04] montrent que pour représenter la réponse aléatoire $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ d'un modèle mécanique, la famille $\{\Psi_\alpha \equiv \psi_\alpha(\mathbf{X}), \alpha \in \mathbb{N}^M\}$ forme une base dénombrable adéquate.

De plus, vis-à-vis du produit scalaire dans l'espace des variables aléatoires de variance finie, défini par l'espérance mathématique $\langle Y_1, Y_2 \rangle = \mathbb{E}[Y_1 Y_2]$ et compte tenu des équations [8.3, 8.4], cette base est *orthonormale* par construction :

$$\langle \Psi_\alpha, \Psi_\beta \rangle = \mathbb{E}[\psi_\alpha(\mathbf{X}) \psi_\beta(\mathbf{X})] = \delta_{\alpha\beta} \quad [8.5]$$

On ordonne classiquement les éléments de la base (repérés par leur multi-index α) par ordre de degré polynomial total $q = |\alpha| = \sum_{i=1}^M \alpha_i$ croissant, en les numérotant comme en [8.2] de $j=0$ à l'infini (voir [SUD 06] pour un algorithme de construction systématique de la base). En pratique, il est nécessaire de ne conserver qu'un nombre fini de termes dans le développement par CP.

On tronque alors généralement la série de sorte à ne conserver que les polynômes ψ_j de la base dont le degré total est inférieur ou égal à p donné.

On obtient ainsi une série tronquée comprenant P termes :

$$Y \approx \mathcal{M}^{CP}(\mathbf{X}) \equiv \sum_{j=0}^{P-1} a_j \psi_j(\mathbf{X}) \quad [8.6]$$

où l'on démontre que $P = \binom{M+p}{p}$.

8.2.2. Exemple

Considérons la réponse aléatoire Y d'un modèle mécanique $Y = \mathcal{M}(X_1, X_2)$ dépendant de deux variables aléatoires gaussiennes X_1 et X_2 , de moyennes et d'écart types respectifs μ_1, μ_2 et σ_1, σ_2 .

Modulo les transformations linéaires $X_i = \mu_i + \sigma_i \xi_i$, on peut exprimer la réponse en fonction de deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, soit $Y = \tilde{\mathcal{M}}(\xi_1, \xi_2)$.

La famille des polynômes orthogonaux vis-à-vis de la densité de probabilité gaussienne centrée réduite $\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$ est la famille des *polynômes d'Hermite* $He_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Ils sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} He_{-1}(x) \equiv He_0(x) &= 1 \\ He_{n+1}(x) &= xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x) \end{aligned} \quad [8.7]$$

Les polynômes ainsi construits sont orthogonaux mais ne sont pas normés. Ils présentent diverses propriétés [BAR 05]. On montre en particulier que $\langle He_n, He_n \rangle = n!$. La famille $He_n(x)/\sqrt{n!}$, $n \in \mathbb{N}$ est donc orthonormée. Les quatre premiers polynômes d'Hermite ainsi normés sont $\{1, x, (x^2 - 1)/\sqrt{2}, (x^3 - 3x)/\sqrt{6}\}$.

Supposons que l'on souhaite développer la réponse aléatoire Y sur une base de chaos polynomial de degré maximal $p = 3$. Les polynômes retenus sont construits à partir de produits de polynômes d'Hermite en ξ_1 et ξ_2 (tableau 8.1).

On cherche donc une approximation de la réponse du modèle (*surface de réponse stochastique*) sous la forme :

$$\begin{aligned} Y \equiv \mathcal{M}^{CP}(\xi_1, \xi_2) &= a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 (\xi_1^2 - 1)/\sqrt{2} + a_4 \xi_1 \xi_2 \\ &+ a_5 (\xi_2^2 - 1)/\sqrt{2} + a_6 (\xi_1^3 - 3\xi_1)/\sqrt{6} + a_7 (\xi_1^2 - 1)\xi_2/\sqrt{2} \\ &+ a_8 (\xi_2^2 - 1)\xi_1/\sqrt{2} + a_9 (\xi_2^3 - 3\xi_2)/\sqrt{6} \end{aligned} \quad [8.8]$$

où les coefficients $\{a_j, j = 0, \dots, 9\}$ sont à déterminer.

j	α	$\Psi_\alpha \equiv \Psi_j$
0	[0,0]	$\Psi_0 = 1$
1	[1,0]	$\Psi_1 = \xi_1$
2	[0,1]	$\Psi_2 = \xi_2$
3	[2,0]	$\Psi_3 = (\xi_1^2 - 1)/\sqrt{2}$
4	[1,1]	$\Psi_4 = \xi_1 \xi_2$
5	[0,2]	$\Psi_5 = (\xi_2^2 - 1)/\sqrt{2}$
6	[3,0]	$\Psi_6 = (\xi_1^3 - 3\xi_1)/\sqrt{6}$
7	[2,1]	$\Psi_7 = (\xi_1^2 - 1)\xi_2/\sqrt{2}$
8	[1,2]	$\Psi_8 = (\xi_2^2 - 1)\xi_1/\sqrt{2}$
9	[0,3]	$\Psi_9 = (\xi_2^3 - 3\xi_2)/\sqrt{6}$

Tableau 8.1. Exemple de construction d'un chaos polynomial de degré 3 à 2 variables

8.3. Calcul des coefficients du développement

8.3.1. Introduction

Les développements par chaos polynomial ont été historiquement introduits pour la représentation de champs aléatoires [WIE 38] et utilisés plus récemment pour la résolution d'équations aux dérivées partielles stochastiques (EDPS) [GHA 91]. Dans ce cadre, de nombreux travaux ont été menés pour résoudre ce type d'équations apparaissant aussi bien en biologie, mécanique, mécanique des fluides, en thermique ou pour des problèmes de diffusion [WIN 85, ISU 98, SUD 04, GHA 98, XIU 03, KNI 06]. La formulation faible de ces EDPS est discrétisée à la fois dans l'espace physique (par exemple, par éléments finis) et dans l'espace probabiliste (sur la base du chaos polynomial). Les coefficients apparaissant dans l'équation [8.6] sont obtenus par une méthode de Galerkin [GHA 91], et sont solution d'un grand système linéaire couplé, dont la résolution est délicate [PEL 00], d'où l'appellation générique de méthode *intrusive*. L'application de méthodes spectrales intrusives à la fiabilité des structures a été initialement proposée dans [SUD 00, SUD 02].

A l'opposé, des méthodes *non intrusives* se sont développées depuis quelques années. Elles permettent d'obtenir les coefficients du développement (équation [8.6]) à partir d'un ensemble de calculs *déterministes*, c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{Y} = \{\mathcal{M}(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, N\}$ d'évaluations de la réponse du modèle pour des valeurs des paramètres d'entrée judicieusement choisies. Le vocable *non intrusif* est lié au fait qu'on peut donc utiliser dans ces méthodes le code de calcul associé au modèle \mathcal{M} sans le modifier.

Parmi les méthodes non intrusives, on distingue deux classes, l'approche par *projection* [LEM 01, BAR 05, BAR 06, BLA 07] et l'approche par *régression* [BER 05, BER 06]. Celles-ci sont maintenant détaillées.

8.3.2. Méthodes de projection

Les méthodes dites de *projection* exploitent l'orthonormalité de la base du CP. En effet, en multipliant le développement [8.2] par $\psi_j(\mathbf{X})$ et en intégrant par rapport à la loi jointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ de \mathbf{X} , il vient :

$$a_j = \mathbb{E}[\mathcal{M}(\mathbf{X}) \psi_j(\mathbf{X})] \equiv \int_{D_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad [8.9]$$

En pratique, on estime l'expression ci-dessous au moyen de techniques d'intégration numérique, qui visent à approcher l'intégrale multidimensionnelle par une somme pondérée comme suit :

$$\hat{a}_j \approx \sum_{i=1}^N w_i \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) \psi_j(\mathbf{x}^{(i)}) \quad [8.10]$$

Plusieurs techniques peuvent être considérées, qui diffèrent par le choix des *points* $\mathbf{x}^{(i)}$ et des *poids* w_i d'intégration.

La technique dite de *simulation* repose sur le choix de N points d'intégration *aléatoires* et de poids d'intégration égaux à $1/N$, ce qui conduit à :

$$\hat{a}_j \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) \psi_j(\mathbf{x}^{(i)}) \quad [8.11]$$

C'est l'application de la simulation de Monte-Carlo à l'estimation de l'espérance dans l'équation [8.9]. La précision des estimateurs des coefficients dépend de la

technique d'échantillonnage utilisée. Pour une méthode standard de génération de nombres aléatoires (simulation de Monte-Carlo), on obtient une vitesse de convergence relativement lente en $N^{-1/2}$. Le taux de convergence peut être accru en utilisant des techniques d'échantillonnage stratifié, telles que les *tirages par hypercube latin* [MCK 79]. Par ailleurs, on montre que l'utilisation de *nombres quasi aléatoires* [NIE 92], qui sont engendrés à partir de suites *déterministes* dites à *discrépance faible*, assurant un meilleur échantillonnage de l'espace des paramètres, conduisent à des convergences plus rapides [BLA 07].

De manière alternative, l'intégrale [8.9] peut être approximée par une technique de *quadrature de Gauss*. Le principe en est bien connu dans le cas unidimensionnel : on évalue l'intégrale d'une fonction $h(x)$ (pondérée par une fonction poids $w(x)$) par une somme d'évaluations de h en des *points de quadrature* :

$$I = \int_D h(x) w(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k h(x_k) \quad [8.12]$$

La méthode de Gauss permet d'intégrer exactement des fonctions polynomiales de degré au plus $2n-1$ avec n points d'intégrations judicieusement choisis, c'est-à-dire les racines des polynômes orthogonaux vis-à-vis de la fonction w au sens de l'équation [8.3]. La généralisation au cas multidimensionnel (intégrale [8.9]) est obtenue par *tensorisation* des règles de quadrature 1D :

$$a_j \approx \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_M=1}^{n_M} w_{i_1}^1 \cdots w_{i_M}^M \psi_j(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_M}^M) \mathcal{M}(x_{i_1}^1, \dots, x_{i_M}^M) \quad [8.13]$$

On choisit communément des formules dites *isotropes*, autrement dit telles que $n_1 = \dots = n_M = n$. On montre que ce schéma permet d'intégrer exactement tout polynôme multivarié de degré partiel inférieur ou égal à $2n-1$. Or, si l'on approche la réponse du modèle par un chaos polynomial de degré p , l'intégrande de [8.9] est un polynôme de degré total $2p$. On utilise donc une règle de quadrature tensorisée à $n = p+1$ points pour l'estimation des coefficients. Une telle stratégie conduit à effectuer $N = (p+1)^M$ évaluations du modèle, ce qui peut se révéler prohibitif pour un nombre élevé de paramètres incertains ($M \geq 5$).

L'effort de calcul peut être considérablement allégé en remplaçant le produit tensoriel complet [8.13] par le schéma dit de Smolyak [SMO 63]. On parle alors de quadrature creuse. Cette technique a été utilisée en lien avec le chaos polynomial dans [KEE 03, SUD 07].

8.3.3. Méthodes de régression

8.3.3.1. Approche directe

Une alternative à la méthode de projection consiste à calculer les coefficients qui donnent la meilleure approximation de $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$, au sens des moindres carrés, par un développement tronqué comportant un nombre fixé P de termes. En utilisant la notation vectorielle suivante :

$$\mathbf{a} = \{a_0, \dots, a_{p-1}\}^T \quad [8.14]$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}) = \{\psi_0(\mathbf{X}), \dots, \psi_{p-1}(\mathbf{X})\}^T \quad [8.15]$$

l'équation [8.6] s'écrit :

$$\mathcal{M}^{CP} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{X}) \quad [8.16]$$

On se donne un ensemble $\mathcal{X} \equiv \{\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}^T$ de réalisations des variables aléatoires d'entrée, appelé *plan d'expériences*. On note \mathcal{Y} l'ensemble des évaluations du modèle correspondantes. Le plan d'expériences peut être construit à partir de tirages aléatoires ou de nombres quasi aléatoires (voir paragraphe 8.3.2), ou bien à partir des racines des polynômes orthogonaux servant à la construction de la base [BER 05].

Le problème consiste à trouver le jeu de coefficients $\hat{\mathbf{a}}$ qui minimise la somme des carrés des écarts (voir chapitre 7, [7.6 et 7.7]), autrement dit :

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \quad [8.17]$$

On montre que la solution s'écrit sous la forme analytique :

$$\hat{\mathbf{a}} = \left(\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \right)^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \mathcal{Y} \quad [8.18]$$

où la matrice $\boldsymbol{\Psi}$ a pour terme générique :

$$\boldsymbol{\Psi}_{ij} = \psi_j(\mathbf{x}^{(i)}) \quad i = 1, \dots, N \quad j = 0, \dots, P-1 \quad [8.19]$$

Pour que le problème de régression soit bien posé, il est nécessaire que le nombre N d'évaluations du modèle soit supérieur au nombre de coefficients inconnus P . Dans le cas d'un plan d'expériences aléatoires, ou de la forme hypercube latin (*Latin Hypercube Sampling*, LHS) [MCK 79], la règle heuristique $N = 2P$ conduit généralement à des résultats satisfaisants. Les travaux de [BER 05, BER 06] ont montré que la méthode de régression s'avère particulièrement efficace pour calculer les coefficients du développement. Elle permet également de définir des estimateurs d'erreur *a posteriori* et une méthodologie de construction adaptative de la base du chaos polynomial, qui est présentée ci-après [BLA 09].

8.3.3.2. Estimation d'erreur

L'erreur d'approximation pour un développement par chaos polynomial peut être quantifiée par le *coefficient de détermination* R^2 , couramment utilisé en régression. Ce coefficient dépend de la somme des carrés des écarts entre la « vraie » réponse du modèle et le CP :

$$R^2 \equiv 1 - \frac{1/N \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}^{CP}(\mathbf{x}^{(i)}))^2}{\hat{V}[Y]} \quad [8.20]$$

où $\hat{V}[Y]$ est la variance empirique des évaluations du modèle :

$$\hat{V}[Y] \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y^{(i)} - \bar{y})^2 \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^{(i)} \quad [8.21]$$

Ainsi $R^2 = 1$ indique une parfaite adéquation, tandis que $R^2 = 0$ correspond à une très mauvaise approximation. Cependant le coefficient R^2 doit être utilisé avec précaution, car il a tendance à sous-estimer la véritable erreur d'approximation. Dans le cas extrême $N = P$, l'approximation par CP interpole les réalisations du modèle, ce qui implique $R^2 = 1$ alors que l'erreur peut se révéler importante en des points n'appartenant pas au plan d'expériences. Ce phénomène est connu sous le nom de *surapprentissage*.

On utilise donc un estimateur d'erreur plus robuste, basé sur une technique de validation croisée dite *leave-one-out* [ALL 71, SAP 06]. Dans ce contexte, pour tout point du plan d'expériences $\mathbf{x}^{(i)}$, on calcule l'écart $\Delta^{(i)}$ entre l'observation $y^{(i)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)})$ et l'évaluation en $\mathbf{x}^{(i)}$ d'un développement par chaos polynomial

noté $\mathcal{M}_{\mathcal{X} \setminus \{\mathbf{x}^{(i)}\}}^{CP}$ dont les coefficients sont calculés à partir du plan d'expériences $\mathcal{X} \setminus \{\mathbf{x}^{(i)}\}$ obtenu en enlevant de \mathcal{X} le point $\mathbf{x}^{(i)}$. Par analogie avec le R^2 , on définit ainsi le coefficient Q^2 comme suit :

$$Q^2 \equiv 1 - \frac{1/N \sum_{i=1}^N \Delta^{(i)2}}{\hat{V}[Y]} \quad \Delta^{(i)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}_{\mathcal{X} \setminus \{\mathbf{x}^{(i)}\}}^{CP}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad [8.22]$$

8.3.3.3. Approche adaptative

On a vu dans le paragraphe 8.3.3.1 qu'il est nécessaire d'avoir un plan d'expériences dont la taille N est supérieure au nombre de termes P de la série tronquée afin de pouvoir résoudre le problème de régression. Or P augmente fortement avec le degré maximal p du chaos polynomial et le nombre M de variables aléatoires, en accord avec la formule $P = \binom{M+p}{p} = \frac{(M+p)!}{M!p!}$. Ainsi la méthode de régression pourrait conduire à coût de calcul important en grande dimension ($M \geq 10$).

Afin de réduire le nombre d'évaluations du modèle, on recherche une approximation par CP creux de la réponse Y , c'est-à-dire qui ne comporte qu'un faible nombre de coefficients non nuls. Naturellement, il n'est pas possible de connaître à l'avance les termes significatifs du CP. Une démarche itérative a donc été proposée dans [BLA 08, BLA 09, BLA 10b] pour la construction pas-à-pas d'un CP creux. La procédure est schématisée en figure 8.1.

En premier lieu, on se donne un plan d'expériences initial X , et on stocke les évaluations du modèle associées dans \mathcal{Y} . La réponse du modèle est tout d'abord approximée par un CP de degré $p=0$ (c'est-à-dire la base courante est un terme constant).

Ensuite, on propose des termes correspondant à des polynômes de la base de degré p et d'ordre d'interaction j croissants. On distingue alors deux étapes :

- une étape *ascendante* : on évalue l'impact de l'ajout de chaque terme candidat à la base courante ; on ajoute finalement tous les termes candidats qui contribuent à une augmentation sensible du coefficient R^2 ;
- une étape *descendante* : on évalue l'impact du retrait de tout terme de la base courante ; on retire finalement tous les termes qui contribuent à une diminution négligeable du R^2 .

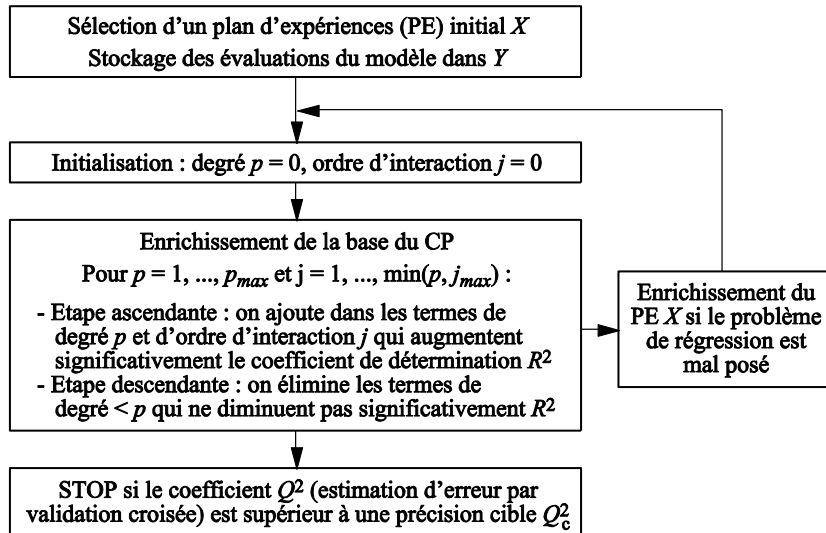


Figure 8.1. Schéma de l'algorithme pour la construction pas-à-pas d'un chaos polynomial creux

Parallèlement à cette adaptativité de la base du CP, on enrichit systématiquement le plan d'expériences de sorte à ce que les problèmes de régression soient toujours bien posés. Pour cela, on utilise des techniques d'échantillonnage séquentiel, basées sur des nombres quasi aléatoires ou bien des tirages de type *LHS emboîtés* [WAN 03, BLA 10b]. L'algorithme s'arrête lorsque le coefficient Q^2 du CP courant a atteint la précision cible Q_{tgt}^2 .

8.3.4. Post-traitement des coefficients

Comme on l'a indiqué plus haut, la variable aléatoire $Y = \mathcal{M}(X)$ est entièrement définie par la donnée de ses coefficients $a_j, j \in N$, dont on a donné plusieurs méthodes de calcul non intrusives à la section précédente. En particulier, la moyenne et la variance de Y s'obtiennent à partir de combinaisons simples de ces coefficients, de par l'orthonormalité de la base :

$$E[Y] = a_0 \quad V[Y] = \sum_{j=1}^{P-1} a_j^2 \quad [8.23]$$

Pour les analyses de fiabilité, on utilise une décomposition par chaos polynomial de la réponse du modèle, que l'on substitue dans la fonction d'état limite décrivant la défaillance. Si l'on considère pour simplifier un critère de défaillance associé à un seuil admissible y_{\max} à ne pas dépasser, la *fonction d'état-limite* associée s'écrit :

$$g(\mathbf{X}) = y_{\max} - \mathcal{M}(\mathbf{X}) \quad [8.24]$$

En remplaçant la réponse du modèle $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ par une approximation par CP $\mathcal{M}^{CP}(\mathbf{X})$ dans l'équation [8.24], on obtient la fonction d'état limite *analytique* :

$$g^{CP}(\mathbf{X}) = y_{\max} - \sum_{j=0}^{P-1} a_j \psi_j(\mathbf{X}) \quad [8.25]$$

Cette équation n'est rien d'autre qu'une *surface de réponse stochastique* remplaçant la fonction d'état limite initiale, c'est-à-dire une expression analytique, polynomiale, d'un coût d'évaluation quasi nul. La probabilité de défaillance peut ainsi être estimée à un coût de calcul négligeable en appliquant les méthodes de fiabilité classiques (simulation de Monte-Carlo directe, FORM et tirages d'importance).

On note ici une différence importante avec les surfaces de réponses quadratiques utilisées par ailleurs en fiabilité, qui sont des approximations *locales* (au niveau du point de conception dans le cadre de la méthode FORM) : dans ce cadre-là, une analyse paramétrique conduit à construire une nouvelle surface de réponse pour chaque valeur de paramètre, contrairement à l'approche par chaos polynomial.

8.4. Applications en fiabilité des structures

8.4.1. Treillis élastique

8.4.1.1. Présentation du problème

On s'intéresse au treillis élastique représenté sur la figure 8.2 [BLA 07, SUD 07]. On considère 10 variables aléatoires d'entrée, dont les lois de probabilité, les moyennes et les écarts types sont répertoriés dans le tableau 8.2. La quantité d'intérêt est le déplacement (aléatoire) vertical maximal de la structure, noté $V_1 = \mathcal{M}(\mathbf{X})$.

8.4.1.2. Analyse de fiabilité

On étudie la fiabilité de la structure vis-à-vis d'un déplacement maximal admissible. La fonction d'état limite associée s'écrit :

$$g(\mathbf{X}) = v_{\max} - |\mathcal{M}(\mathbf{X})| \leq 0, v_{\max} = 11 \text{ cm} \quad [8.26]$$

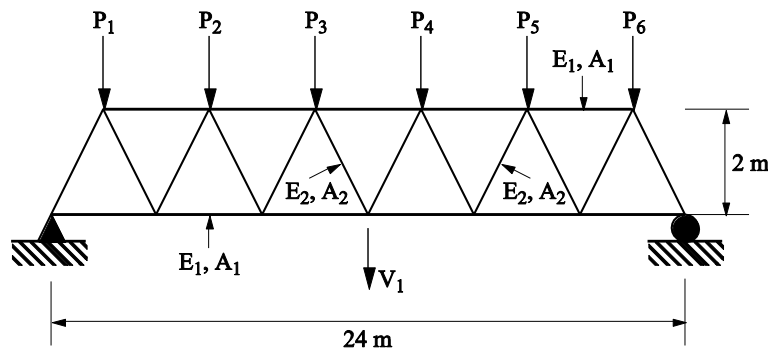


Figure 8.2. Treillis à 23 barres

Variable	Distribution	Moyenne	Ecart type
E_1, E_2 (MPa)	Lognormale	210 000	21 000
A_1 (cm ²)	Lognormale	20	2
A_2 (cm ²)	Lognormale	10	1
$P_1 - P_6$ (kN)	Gumbel	50	7,5

Tableau 8.2. Treillis élastique – Variables aléatoires d'entrée

La valeur de référence de la probabilité de défaillance est obtenue par simulation de Monte-Carlo directe avec $N = 10^6$ tirages. L'analyse de fiabilité est effectuée à partir de différentes approximations par CP de la réponse (notées $\mathcal{M}^{CP}(\mathbf{X})$) basées sur des polynômes d'Hermite normés. Dans ce but, on transforme le vecteur aléatoire d'entrée $\mathbf{X} = \{E_1, E_2, A_1, A_2, P_1, \dots, P_6\}^T$ en un vecteur aléatoire composé de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes.

On considère un chaos polynomial de degré 3. Les coefficients du CP ont été calculés par quadrature creuse de Smolyak en effectuant 1 771 calculs. Les résultats de référence sont obtenus en appliquant une méthode de tirage d'importance (densité d'importance centrée autour du point de conception obtenu par la méthode FORM), dont on déduit un indice de fiabilité généralisé. Les résultats sont présentés dans le tableau 8.3. On obtient une précision de 2 % sur l'indice de fiabilité sur toute la gamme de seuils admissibles [10-16] cm.

Les résultats obtenus à partir d'un chaos polynomial dont les coefficients sont calculés par régression sont présentés dans le tableau 8.4. Les indices de fiabilité au moyen d'un CP plein de degré $p = 3$ et de CP creux. Les coefficients des CP sont calculés à partir d'un plan d'expériences constitué de nombres quasi aléatoires. Il apparaît que les CP pleins et creux donnent tous les deux des estimateurs précis de β , avec une erreur relative inférieure à 3,5%.

Seuil (cm)	Référence		Projection Smolyak	
	P_f	β	P_f	β
10	$4,31.10^{-2}$	1,715	$4,29.10^{-2}$	1,718
11	$8,70.10^{-3}$	2,378	$8,73.10^{-3}$	2,377
12	$1,50.10^{-3}$	2,967	$1,47.10^{-3}$	2,974
14	$3,49.10^{-5}$	3,977	$2,83.10^{-5}$	4,026
16	$6,03.10^{-7}$	4,855	$4,01.10^{-7}$	4,935

Tableau 8.3. Treillis élastique – Résultats de fiabilité pour un chaos polynomial de degré $p=3$ par projection de Smolyak

On remarque toutefois que l'approche par chaos polynomial creux requiert environ 2 fois moins de calculs que l'approche par chaos plein, et 8 fois moins que lorsque les coefficients sont calculés par une méthode de quadrature de Smolyak.

8.4.2. Ossature de bâtiment

On considère à présent l'ossature de bâtiment représentée sur la figure 8.3 [LIU 91, BLA 10b]. Les éléments de poutres constituant la structure sont faits de huit matériaux différents, dont les propriétés sont répertoriées dans le tableau 8.5.

Seuil (cm)	Référence	Chaos plein		Chaos creux	
		$\hat{\beta}$	ε (%)	$\hat{\beta}$	ε (%)
10	1,715	1,71	0,6	1,72	0,0
11	2,378	2,38	0,0	2,38	0,0
12	2,967	2,98	0,3	2,99	0,7
14	3,977	4,04	1,5	4,07	2,3
16	4,855	4,95	2,1	5,02	3,5
Précision $1 - Q^2$		1.10^{-6}		9.10^{-5}	
Nombre de termes		286		114	
Nombre d'évaluations du modèle		443		207	

Tableau 8.4. Treillis élastique – résultats de fiabilité pour un chaos polynomial plein ($p=2$) et pour un chaos creux par régression

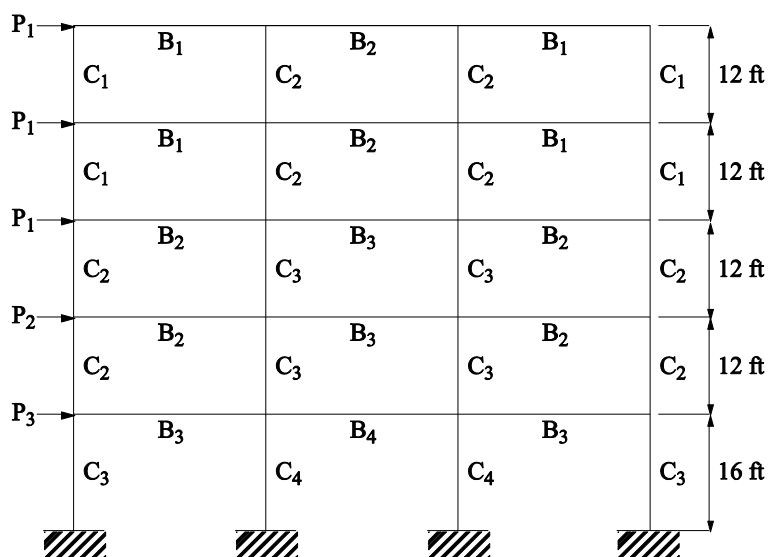


Figure 8.3. Exemple d'une ossature de bâtiment soumise à des charges latérales

Elément	Module d'Young	Moment d'inertie	Section droite
B_1	E_4	I_{10}	A_{18}
B_2	E_4	I_{11}	A_{19}
B_3	E_4	I_{12}	A_{20}
B_4	E_4	I_{13}	A_{21}
C_1	E_5	I_6	A_{14}
C_2	E_5	I_7	A_{15}
C_3	E_5	I_8	A_{16}
C_4	E_5	I_9	A_{17}

Tableau 8.5. Ossature de bâtiment – Propriétés des éléments

La quantité d'intérêt est la composante horizontale u du déplacement au coin en haut à droite de la structure.

Les 3 charges appliquées, les 2 modules d'Young, les 8 moments d'inertie et les 8 sections droites des poutres sont supposés aléatoires.

Ces variables aléatoires sont regroupées dans le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \{P_1, P_2, P_3, \dots, I_6, \dots, I_{13}, A_{14}, \dots, A_{21}\}^T$ de taille $M = 21$.

Les propriétés des variables aléatoires sont reportées dans le tableau 8.6.

De surcroît, les variables aléatoires d'entrée sont corrélées comme suit : les coefficients de corrélation associés aux sections droites et aux moments d'inertie d'un élément donné sont égaux à $\rho_{A_i I_i} = 0,95$, les coefficients de corrélation des autres propriétés géométriques sont égaux à $\rho_{A_i I_j} = \rho_{I_i I_j} = \rho_{A_i A_j} = 0,13$, le coefficient de corrélation des deux modules d'Young est égal à $\rho_{E_4 E_5} = 0,9$.

On transforme le vecteur aléatoire \mathbf{X} en un vecteur de variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes ξ au moyen d'une *transformation de Nataf* $\mathbf{X} = T(\xi)$ [NAT 62] avant d'effectuer le développement par chaos polynomial.

Variable	Distribution	Moyenne †	Ecart type †
P_1 (kN)		133,454	40,04
P_2 (kN)	Lognormale	88,970	35,59
P_3 (kN)		71,175	28,47
E_1 (kN/m ²)	Normale tronquée sur	$2,17375 \cdot 10^7$	$1,9152 \cdot 10^6$
E_2 (kN/m ²)	$[0, +\infty[$	$2,37964 \cdot 10^7$	$1,9152 \cdot 10^6$
I_6 (m ⁴)		$8,13443 \cdot 10^{-3}$	$1,08344 \cdot 10^{-3}$
I_7 (m ⁴)		$2,13745 \cdot 10^{-2}$	$2,59609 \cdot 10^{-3}$
I_8 (m ⁴)		$2,59610 \cdot 10^{-2}$	$3,02878 \cdot 10^{-3}$
I_9 (m ⁴)	Normale tronquée sur	$1,08108 \cdot 10^{-2}$	$2,59610 \cdot 10^{-3}$
I_{10} (m ⁴)	$[0, +\infty[$	$1,41055 \cdot 10^{-2}$	$3,46146 \cdot 10^{-3}$
I_{11} (m ⁴)		$2,32785 \cdot 10^{-2}$	$5,62487 \cdot 10^{-3}$
I_{12} (m ⁴)		$2,59610 \cdot 10^{-2}$	$6,49024 \cdot 10^{-3}$
I_{13} (m ⁴)		$2,13745 \cdot 10^{-2}$	$2,59609 \cdot 10^{-3}$
A_{14} (m ²)		$3,12564 \cdot 10^{-1}$	$5,58150 \cdot 10^{-2}$
A_{15} (m ²)		$3,72100 \cdot 10^{-1}$	$7,44200 \cdot 10^{-2}$
A_{16} (m ²)		$5,06060 \cdot 10^{-1}$	$9,30250 \cdot 10^{-2}$
A_{17} (m ²)	Normale tronquée sur	$5,58150 \cdot 10^{-1}$	$1,11630 \cdot 10^{-1}$
A_{18} (m ²)	$[0, +\infty[$	$2,53020 \cdot 10^{-1}$	$9,30250 \cdot 10^{-2}$
A_{19} (m ²)		$2,91168 \cdot 10^{-1}$	$1,02323 \cdot 10^{-1}$
A_{20} (m ²)		$3,73030 \cdot 10^{-1}$	$1,20933 \cdot 10^{-1}$
A_{21} (m ²)		$4,18600 \cdot 10^{-1}$	$1,95375 \cdot 10^{-1}$

† La moyenne et l'écart type des sections droites, des moments d'inertie et des modules d'Young sont ceux des lois de probabilité normales non tronquées

Tableau 8.6. Ossature de bâtiment – Variables aléatoires d'entrée

On étudie la fiabilité de la structure pour la fonction d'état-limite suivante :

$$g(\mathbf{X}) = u_{\max} - \mathcal{M}(T(\xi)) \quad [8.27]$$

où u_{\max} est un déplacement horizontal maximal admissible. On approche la fonction d'état-limite par une fonction analytique en remplaçant la réponse du modèle $\mathcal{M}(T(\xi))$ par sa représentation par un CP constitué de polynômes d'Hermite, noté $\mathcal{M}^{CP}(\xi)$. On effectue une étude paramétrique en faisant varier le seuil u_{\max} de 4 à 8 cm. Les indices de fiabilité généralisés sont estimés en post-traitant un CP plein de degré 3 ainsi qu'un CP creux. Les résultats sont reportés dans le tableau 8.7.

Comme cela a déjà été observé pour l'exemple du treillis, l'erreur d'estimation de l'indice de fiabilité augmente légèrement avec la valeur du seuil. Les deux types d'approximation par CP donnent des erreurs relatives sur $\hat{\beta}$ inférieures à 5 % pour u_{\max} variant entre 4 et 8 cm. L'approche par CP creux se révèle beaucoup plus efficace que l'utilisation d'un CP plein, avec un gain de facteur 8 en termes de nombre d'évaluations du modèle (seulement 450 appels au code aux éléments finis au lieu de 3 724).

Seuil (cm)	Référence	Chaos plein		Chaos creux	
		$\hat{\beta}$	ε (%)	$\hat{\beta}$	ε (%)
	β^{REF}				
4	2,27	2,26	0,4	2,29	0,9
5	2,96	3,00	1,4	3,01	1,7
6	3,51	3,60	2,6	3,61	2,8
7	3,96	4,12	4,0	4,11	3,8
8	4,33	4,58	5,8	4,56	5,3
Précision $1 - Q^2$		1.10 ⁻³		1.10 ⁻³	
Nombre de termes		2 024		138	
Nombre d'évaluations du modèle		3 724		450	

Tableau 8.7. Ossature de bâtiment – Estimations de l'indice de fiabilité généralisé $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$ pour différents seuils et erreurs relatives

8.5. Conclusion

Les méthodes de chaos polynomial ont fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années. Leur application à la fiabilité des structures est relativement récente et peut être vue comme une forme particulière de construction de *surfaces de réponse stochastiques*. Ce chapitre a montré le principe de ces méthodes par rapport aux techniques de simulation classiquement utilisées en fiabilité, et a introduit leur formalisme.

Les deux exemples d'application montrent l'intérêt d'utiliser des surfaces de réponse par chaos polynomial pour l'analyse de fiabilité : pour un coût de calcul de l'ordre de 200 appels au modèle aux éléments finis pour le treillis (resp. 450 appels pour l'ossature), on obtient la probabilité de défaillance pour différents seuils, pour un problème comportant 10 (resp. 21) variables aléatoires d'entrée. En pratique, l'étude paramétrique est effectuée à coût nul par rapport à un calcul unique de fiabilité, puisque le développement par chaos polynomial est réalisé une seule fois, puis post-traité pour les différents seuils.

En plus des probabilités de défaillance, le développement par chaos polynomial peut également être utilisé pour étudier la sensibilité de la réponse, en évaluant la densité de probabilité de la réponse, ses moments statistiques et les indices de sensibilité des variables d'entrée, toujours sans appel supplémentaire au code aux éléments finis [SUD 07, BAR 07]. Cette dernière publication [BAR07] a cependant montré que l'emploi d'une base de polynômes de Lagrange est une alternative intéressante aux polynômes d'Hermite, lorsque le nombre de variables aléatoires d'entrée reste faible ($M < 4-5$).

Enfin, le développement des bases polynomiales creuses et adaptatives ouvre la voie à la résolution de problèmes de grande dimension stochastique ($M \sim 50-100$) à des coûts de calcul raisonnable ($N < 1000$), notamment grâce à l'introduction dans le domaine de la mécanique probabiliste de méthodes statistiques avancées de régression tel que l'algorithme LAR (*Least Angle Regression*) [BLA 10a].

8.6. Bibliographie

- [ABR 70] ABRAMOWITZ M., STEGUN I., *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York, 1970.
- [ALL 71] ALLEN D., The prediction sum of squares as a criterion for selecting prediction variables, Rapport n° 23, Dept. of Statistics, Université du Kentucky, 1971.

- [BAR 05] BAROTH J., Analyse par EFS de la propagation d'incertitudes à travers un modèle mécanique non linéaire, Thèse de l'université Clermont II, 2005.
- [BAR 06] BAROTH J., BODÉ L., BRESSOLETTE P., FOGLI M., « SFE method using Hermite Polynomials : an approach for solving nonlinear problems with uncertain parameters », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, n° 195, p. 6479-6501, 2006.
- [BAR 07] BAROTH J., BRESSOLETTE P., CHAUVIERE C., FOGLI M., « An efficient SFE method using Lagrange Polynomials : application to nonlinear mechanical problems with uncertain parameters », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, n° 196, p. 4419-4429, 2007.
- [BER 05] BERVEILLER M., Eléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité, Thèse de doctorat, Université B. Pascal, Clermont-Ferrand, 2005.
- [BER 06] BERVEILLER M., SUDRET B., LEMAIRE M., « Stochastic finite elements : a non intrusive approach by regression », *Eur. J. Comput. Mech.*, vol. 15, n° 1-3, p. 81-92, 2006.
- [BLA 07] BLATMAN G., SUDRET B., BERVEILLER M., « Quasi-random numbers in stochastic finite element analysis », *Mécanique & Industries*, vol. 8, p. 289-297, 2007.
- [BLA 08] BLATMAN G., SUDRET B., « Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach », *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 336, n° 6, p. 518-523, 2008.
- [BLA 09] BLATMAN G., Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis, Thèse de doctorat, Université B. Pascal, Clermont-Ferrand, 2009.
- [BLA 10a] BLATMAN G., SUDRET B., « Efficient computation of Sobol' sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions », *Reliab. Eng. Sys. Safety*, 2010.
- [BLA 10b] BLATMAN G., SUDRET B., « An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis », *Prob. Eng. Mech.*, vol. 25, n° 2, p. 183-197, 2010.
- [BLA 10c] BLATMAN G., SUDRET B., « Adaptive sparse polynomial chaos expansions based on Least Angle Regression », *J. Comput. Phys.*, 2010.
- [DIT 96] DITLEVSEN O., MADSEN H., *Structural reliability methods*, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [GHA 91] GHANEM R., SPANOS P., *Stochastic finite elements – A spectral approach*, Springer Verlag, 1991, (réédition Dover Publications, 2003).
- [GHA 98] GHANEM R., DHAM D., « Stochastic finite element analysis for multiphase flow in heterogeneous porous media », *Transp. Porous Media*, vol. 32, p. 239-262, 1998.
- [ISU 98] ISUKAPALLI S.S., ROY A., GEORGOPOULOS P.G., « Stochastic response surface methods for uncertainty propagation : application to environmental and biological systems », *Risk analysis*, n° 18(3), p. 351-362, 1998.

- [KEE 03] KEESE A., MATTHIES H., « Sparse quadrature as an alternative to Monte-Carlo for stochastic finite element techniques », *Proc. Appl. Math. Mech.*, vol. 3(1), p. 493-494, 2003.
- [KNI 06] KNIO O., LE MAÎTRE O., « Uncertainty propagation in CFD using polynomial chaos decomposition », *Fluid Dyn. Res.*, vol. 38, n° 9, p. 616-640, 2006.
- [LEM 01] LE MAÎTRE O., KNIO O., NAJM H., GHANEM R., « A stochastic projection method for fluid flow – I. Basic formulation », *J. Comput. Phys.*, vol. 173, p. 481-511, 2001.
- [LEM 05] LEMAIRE M., *Fiabilité des structures – Couplage mécano-fiabiliste statique*, Hermès, Paris, 2005.
- [LIU 91] LIU P.-L., DER KIUREGHIAN A., « Optimization algorithms for structural reliability », *Structural Safety*, vol. 9, p. 161-177, 1991.
- [MCK 79] MCKAY M. D., BECKMAN R.J., CONOVER W.J., « A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code », *Technometrics*, vol. 2, p. 239-245, 1979.
- [NAT 62] NATAF A., « Détermination des distributions dont les marges sont données », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 225, p. 42-43, 1962.
- [NIE 92] NIEDERREITER H., *Random number generation and quasi-Monte-Carlo methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphie, Etats-Unis, 1992.
- [PEL 00] PELLISSETTI M.-F., GHANEM R., « Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements », *Adv. Eng. Soft.*, vol. 31, p. 607-616, 2000.
- [SAP 06] SAPORTA G., *Probabilités, analyse des données et statistique*, Technip, Paris, 2006.
- [SCH 00] SCHOUTENS W., *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [SMO 63] SMOLYAK S., « Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions », *Soviet. Math. Dokl.*, vol. 4, p. 240-243, 1963.
- [SOI 04] SOIZE C., GHANEM R., « Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 26, n° 2, p. 395-410, 2004.
- [SUD 00] SUDRET B., DER KIUREGHIAN A., *Stochastic finite elements and reliability : a state-of-the-art report*, Rapport n° UCB/SEMM-2000/08, Université de Californie, Berkeley, 2000.
- [SUD 02] SUDRET B., DER KIUREGHIAN A., « Comparison of finite element reliability methods », *Prob. Eng. Mech.*, vol. 17, p. 337-348, 2002.
- [SUD 04] SUDRET B., BERVEILLER M., LEMAIRE M., « A stochastic finite element method in linear mechanics », *Comptes Rendus Mécanique*, vol. 332, p. 531-537, 2004.

- [SUD 06] SUDRET B., BERVEILLER M., LEMAIRE M., « A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis », *Eur. J. Comp. Mech.*, vol. 15(7-8), p. 825-866, 2006.
- [SUD 07] SUDRET B., Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods, habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2007.
- [WAN 03] WANG G., « Adaptive response surface method using inherited Latin Hypercube design points », *J. Mech. Design*, vol. 125, p. 210-220, 2003.
- [WIE 38] WIENER N., « The homogeneous chaos », *Amer. J. Math.*, vol. 60, p. 897-936, 1938.
- [WIN 85] WINTERSTEIN S.R., « Non normal responses and fatigue damage », *J. of Engrg. Mech.*, vol. 111(10), p. 1291-1295, 1985.
- [XIU 03] XIU D., KARNIADAKIS G., « Modelling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 191, n° 43, p. 4927-4948, 2003.