

Chapitre 10

Approches probabilistes de fiabilité dans le temps

10.1. Introduction

Les approches probabilistes en fiabilité des structures ne font pas souvent apparaître explicitement la dimension temporelle. Si l'on revient à la formulation la plus simple du problème dit « R - S », dans lequel la défaillance du système se produit si la sollicitation S dépasse la résistance R , il est pourtant clair que ces deux quantités dépendent du temps dans de nombreux problèmes d'intérêt pratique :

– la résistance R peut diminuer dans le temps sous l'effet de mécanismes de *dégradation* des matériaux : corrosion des aciers dans le béton armé, propagation de fissures dans une pièce métallique, diminution de la ténacité de l'acier de cuve sous l'effet de l'irradiation dans les réacteurs de centrales nucléaires, etc. Ces mécanismes présentent en général une phase d'initiation et une phase de propagation, dont la modélisation peut contenir des paramètres incertains ;

– la sollicitation S peut être variable dans le temps du fait de la variabilité des chargements appliqués à la structure : vitesse du vent, hauteur de vague pour les structures offshore, charges roulantes pour les ponts, hauteurs d'eau liées aux crues pour les barrages, etc.

Les deux types de dépendance temporelle peuvent être présents simultanément ou non, et sont de nature différente : les phénomènes de dégradation de la résistance ont une cinétique *monotone* (conduisant à une décroissance de celle-ci au cours du

temps) alors que les chargements sont généralement de nature « oscillante », et nécessitent une modélisation fine par l'introduction de *processus stochastiques*.

Un traitement complet des problèmes de fiabilité dépendant du temps dépasse le cadre de cet ouvrage. Ce chapitre résume les concepts importants et présente la méthode PHI2, développée récemment pour traiter des problèmes de fiabilité dépendant du temps à partir d'un outil classique de la fiabilité, la méthode FORM. Pour un état de l'art plus complet dans ce domaine, on pourra se référer aux nombreux travaux de Rackwitz [RAC 01, RAC 04] et aux ouvrages de Ditlevsen & Madsen [DIT 96, chapitre 15] et Melchers [MEL 99, chapitre 6].

10.2. Processus stochastiques

Les processus stochastiques permettent une description de chargements aléatoires dans le temps [CRA 67, LIN 67]. On présente ici, sans volonté de rigueur mathématique excessive, des notions minimales nécessaires à la compréhension du chapitre.

10.2.1. Définition et propriétés élémentaires

Un processus stochastique à temps continu est un ensemble de variables aléatoires $X_t(\omega)$ indexé par le temps $t \in [0, T]$, à valeurs dans $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{R}$, où $\omega \in \Omega$ dénote les événements élémentaires d'un espace de probabilité sous-jacent. A chaque instant t_0 correspond donc une variable aléatoire ayant une certaine loi. Inversement, une *réalisation* ou *trajectoire* du processus correspond à la fonction $t \rightarrow X_t(\omega_0)$, que l'on note plus simplement $x(t, \omega_0)$. Définir un processus aléatoire revient à se donner la densité de probabilité conjointe de tout ensemble fini de variables $\{X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_N}(\omega)\}$ pour tout ensemble d'instant $0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq T$. On utilise en fiabilité des structures des processus particuliers (de Poisson, de renouvellement à saut, gaussiens, etc.) dont la définition est simplifiée, comme on le verra dans les exemples qui suivent.

Les définitions usuelles de densité de probabilité marginale, moments statistiques (moyenne $\mu_X(t)$, écart type $\sigma_X(t)$, etc.) associées aux variables aléatoires s'étendent naturellement, à chaque instant, aux processus.

On introduit par ailleurs la *fonction d'autocorrélation* :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X_{t_1} X_{t_2}] \quad [10.1]$$

où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique. Elle traduit la dépendance temporelle des trajectoires à deux instants distincts t_1, t_2 . De façon équivalente, on peut spécifier la fonction de *coefficient d'autocorrélation* :

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{E[X_{t_1} X_{t_2}] - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} \quad [10.2]$$

Par ailleurs, un processus est dit *stationnaire* si ces caractéristiques sont « invariantes » dans le temps. Cette notion implique en particulier que les moments statistiques $E[X_t^n]$ ne dépendent pas du temps, et que la fonction d'autocorrélation soit invariante par translation : $R_{XX}(t_1 + h, t_2 + h) = R_{XX}(t_1, t_2)$. Cela entraîne notamment que cette dernière ne dépende que de l'intervalle $\tau = t_2 - t_1$. Un processus est dit *différentiable* si, au sens des moindres carrés, la limite du ratio $\frac{X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)}{h}$ existe. On note alors le processus dérivé \dot{X}_t , qui vérifie :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} E \left[\left(\frac{X_{t+h} - X_t}{h} - \dot{X}_t \right)^2 \right] = 0 \quad [10.3]$$

Par linéarité, la moyenne du processus dérivé est $\mu_{\dot{X}}(t) = \frac{d\mu_X(t)}{dt}$ et on montre que sa fonction d'autocorrélation vaut :

$$R_{\dot{X}\dot{X}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \quad [10.4]$$

En particulier, pour un processus stationnaire, on a $R_{\dot{X}\dot{X}}(\tau) = -\frac{d^2 R_{XX}(\tau)}{d\tau^2}$.

10.2.2. Processus gaussiens

Contrairement aux processus stochastiques utilisés dans d'autres domaines (notamment en mathématiques financières), ceux utilisés en ingénierie pour

modéliser des chargements dépendant du temps (vent, houle, charges d'exploitation, etc.) présentent une certaine régularité, liée aux propriétés physiques des phénomènes qu'ils représentent. Les processus gaussiens sont ainsi d'utilisation courante dans différents domaines.

Un processus scalaire S_t est dit *gaussien* si, pour tout ensemble d'instant $0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq T$, le vecteur $\{X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_N}(\omega)\}$ est un vecteur gaussien. Il est défini par la seule donnée de sa moyenne $\mu_s(t)$, de son écart type $\sigma_s(t)$ et de sa fonction de coefficient d'autocorrélation $\rho_s(t_1, t_2)$. Les formes classiques utilisées pour cette dernière sont l'autocorrélation exponentielle ($\exp[-|t_1 - t_2|/\tau_s]$), gaussienne ($\exp[-((t_1 - t_2)/\tau_s)^2]$) ou encore sinus cardinal ($\sin[(t_1 - t_2)/\tau_s]/[(t_1 - t_2)/\tau_s]$). Une fois le processus ainsi défini, il est possible d'engendrer des trajectoires par des méthodes appropriées (méthode de Fourier, méthode de Karhunen-Loève, méthode EOLE, etc. [PRE 94, SUD 07]).

10.2.3. Processus de renouvellement à saut

Les processus de Poisson sont utilisés pour modéliser l'occurrence aléatoire dans le temps d'événements ponctuels, comme par exemple l'arrivée de clients dans une queue (guichet, serveur informatique, etc.). En notant $T_i(\omega), i \geq 1$ la variable aléatoire « instant de la i -ème occurrence » (à valeurs dans $]0, +\infty[$), on définit la fonction de comptage du processus par :

$$N_t(\omega) = \sup\{n : T_n(\omega) \leq t\} \quad [10.5]$$

C'est un processus à temps continu, dont les trajectoires sont à valeurs entières, constantes par morceaux, discontinues aux instants d'occurrence des événements observés. Un tel processus est dit *de Poisson* s'il vérifie les propriétés suivantes :

– $N_0 = 0$ et, pour tout ensemble fini d'instant $0 \leq t_1 < \dots < t_N$, les variables aléatoires $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_2}, \dots, N_{t_N} - N_{t_{N-1}}$ sont indépendantes ;

– $\forall 0 \leq s < t$, la variable $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$, où λ désigne l'intensité du processus. On a ainsi :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad [10.6]$$

Pour ces processus, on montre que la loi du temps de première occurrence T_1 est exponentielle de paramètre λ (soit $\mathbb{P}(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$), de même que la loi des écarts entre deux occurrences successives $T_{n+1} - T_n$.

Les processus de Poisson servent notamment à construire les *processus de renouvellement à saut*, utiles pour modéliser des chargements à trajectoire constante par morceaux (par exemple, les charges d'exploitation, de trafic), dont l'amplitude change à des instants aléatoires dans le temps.

Un tel processus est défini par la loi de probabilité de l'amplitude (des sauts) et l'intensité du processus de Poisson qui induit les sauts. Un exemple de trajectoire est donné sur la figure 10.1.

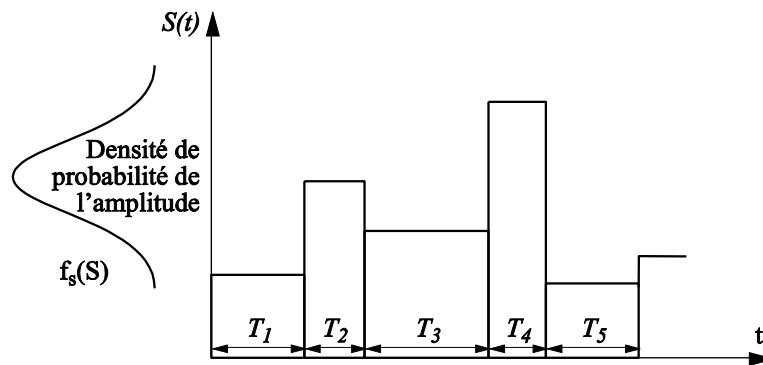


Figure 10.1. Exemple de trajectoire d'un processus de renouvellement à sauts

Les processus de renouvellement à sauts, les processus gaussiens, et ceux construits par transformation de ces derniers (par exemple, les processus lognormaux obtenus par exponentiation d'un processus gaussien) permettent de décrire une grande variété de chargements.

Notons qu'il arrive souvent que les paramètres décrivant les processus soient eux-mêmes des variables aléatoires. C'est le cas notamment dans le domaine offshore où l'on cherche à modéliser les effets environnementaux pour différents états de mer.

10.3. Problèmes de fiabilité dépendant du temps

10.3.1. Position du problème

Comme dans le cas de la fiabilité « classique », on suppose que la défaillance de l'ouvrage considéré est caractérisée par une fonction de performance, qui peut dépendre ici du temps de deux façons : soit directement en tant que paramètre, soit parce que la performance dépend de l'effet de chargements représentés par des processus aléatoires (ces derniers pouvant être stationnaires ou avoir eux-mêmes des propriétés dépendant du temps). On note donc cette fonction $g(\mathbf{R}(\omega), \mathbf{S}_t(\omega), t)$, où $\mathbf{R}(\omega) = \{R_1(\omega), \dots, R_p(\omega)\}^T$ (resp. $\mathbf{S}_t(\omega) = \{S_1(\omega), \dots, S_q(\omega)\}^T$) est un vecteur aléatoire (resp. un ensemble de processus scalaires) de loi jointe donnée.

La principale différence entre un problème de fiabilité « statique » et un problème dépendant du temps vient du fait que dans ce dernier cas, on ne sait pas en général quand la défaillance va intervenir. On définit donc la *probabilité de défaillance cumulée* sur l'intervalle de temps $[0, T]$ par :

$$P_f(0, T) = \mathbb{P}(\exists t \in [0, T] : g(\mathbf{R}(\omega), \mathbf{S}_t(\omega), t) \leq 0) \quad [10.7]$$

Dans le cas général, cette quantité ne doit pas être confondue avec la *probabilité instantanée de défaillance* notée $P_{f,i}(t)$ et définie par :

$$P_{f,i}(t) = \mathbb{P}(g(\mathbf{R}(\omega), \mathbf{S}_t(\omega), t) \leq 0) \quad [10.8]$$

Cette dernière quantité, calculable par les méthodes classiques de fiabilité (Monte-Carlo, FORM/SORM, tirages d'importance, etc.) en fixant le temps t à une valeur particulière, n'a pas d'interprétation simple sauf cas particulier présenté ci-après.

On montre en particulier que :

$$P_f(0, T) \geq \max_{t \in [0, T]} P_{f,i}(t) \quad [10.9]$$

Cette borne inférieure est en général très minorante et sans grand intérêt.

10.3.2. Dégradation de la résistance et problèmes à marge décroissante

Comme on l’a vu en introduction, la dégradation des propriétés des matériaux introduit la dimension temporelle dans un problème de fiabilité. Cependant, par définition, la dégradation va avoir tendance à faire décroître de façon *monotone* ces propriétés de résistance, de sorte qu’une fonction de performance de type « R - S » est également décroissante.

On appelle *problème de fiabilité à marge décroissante* un problème dans lequel toutes les trajectoires de la fonction de performance sont monotones décroissantes. Dans ce cas particulier, on montre que la probabilité de défaillance cumulée est égale à la probabilité instantanée à l’extrémité de l’intervalle de temps considéré :

$$P_f(0, T) = P_{f,i}(T) \tag{10.10}$$

Le problème de fiabilité dépendant du temps se ramène alors à une succession de problèmes *indépendants* du temps, pour différentes valeurs de T . Les méthodes classiques (FORM/SORM, simulation de Monte-Carlo, etc.) peuvent donc être utilisées directement.

A titre d’exemple, la section d’acier sain d’une armature de béton armé se corrodant sous l’effet de la carbonatation ou de la pénétration d’ions chlorure dans le béton peut se modéliser simplement sous la forme :

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_0 & \text{si } t \leq T_{init} \\ \phi_0 - 2i_{corr} \kappa (t - T_{init}) & \text{si } t > T_{init} \end{cases} \tag{10.11}$$

où ϕ_0 est le diamètre initial de l’armature, T_{init} est le temps d’initiation de la corrosion, i_{corr} le courant de corrosion et κ une constante. On peut relier la performance de la structure en béton à la section d’acier sain : en effet, la partie corrodée perd toute résistance mécanique, et la rouille qui en résulte a tendance, par expansion, à fissurer et faire éclater le béton de surface (épaufrures). Ainsi, si on définit la défaillance par une inégalité de type $\phi(t) \leq (1 - \lambda)\phi_0$ (avec par exemple $\lambda = 0,05$), on est dans le cas d’un problème à marge décroissante car la fonction de performance peut s’écrire $g(t) = \lambda\phi_0 - 2i_{corr} \kappa (t - T_{init})$, qui est clairement décroissante pour toute réalisation des variables aléatoires $\{\phi_0, i_{corr}, T_{init}\}$ qui sont à valeurs positives de par la physique.

10.3.3. Cas général

Comme on l'a vu précédemment, on ne sait pas dans le cas général à quel instant se produira la défaillance dans l'intervalle de temps $[0, T]$, celle-ci pouvant se produire plus ou moins tôt en fonction des réalisations des processus S_i intervenant dans la fonction de performance. Soit $\mathcal{T}(\omega)$ cet instant : c'est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, T]$, qui vérifie :

$$\mathbb{P}(\mathcal{T} \leq t) = \mathbb{P}(\exists \tau \in [0, t] : g(\mathbf{R}(\omega), \mathcal{S}_\tau(\omega), \tau) \leq 0) \stackrel{\text{def}}{=} P_f(0, t) \quad [10.12]$$

La probabilité cumulée de défaillance n'est donc rien d'autre que la fonction de répartition du temps de première défaillance, c'est-à-dire du temps nécessaire pour que le système « franchisse » la surface d'état limite. L'estimation de [10.12] passe par le calcul du *taux de franchissement* que l'on va maintenant définir.

10.3.3.1. Taux de franchissement

Soit $N_t^+(\omega)$ la variable aléatoire donnant le nombre de franchissements de la surface d'état limite (du domaine de sûreté vers celui de défaillance) pendant l'intervalle $[0, t]$. La défaillance se produit sur cet intervalle de temps soit si elle se produit à l'instant initial $t=0$, soit s'il y a au moins un franchissement avant l'instant t . On a donc :

$$P_f(0, t) = \mathbb{P}(\{g(\mathbf{R}(\omega), \mathcal{S}_0(\omega), t=0) \leq 0\} \cup \{N_t^+ > 0\}) \quad [10.13]$$

On montre que cette dernière expression peut être majorée [DIT 96, SUD 07] :

$$P_f(0, t) \leq P_{f,i}(0) + \mathbb{E}[N_t^+] \quad [10.14]$$

où $\mathbb{E}[N_t^+]$ désigne l'espérance du nombre de franchissements sur $[0, t]$. On définit alors le *taux de franchissement* de la surface d'état limite par :

$$v^+(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(N^+(t, t+h) = 1)}{h} \quad \text{avec} \quad N^+(t, t+h) = N_{t+h}^+ - N_t^+ \quad [10.15]$$

Cette quantité s'interprète comme la probabilité d'avoir exactement un franchissement dans l'intervalle infinitésimal $]t, t+h]$, divisée par h . On considère par ailleurs que les processus stochastiques intervenant dans le calcul sont réguliers de sorte que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(N^+(t, t+h) > 1)}{h} = 0$. Sous cette condition de régularité, et par la propriété d'additivité dans le temps de la variable de comptage N_t^+ , on montre que :

$$E[N_t^+] = \int_0^t v^+(\tau) d\tau \tag{10.16}$$

En regroupant les équations [10.9], [10.14] et [10.16], on obtient finalement l'encadrement suivant la probabilité cumulée de défaillance :

$$\max_{t \in [0, T]} P_{f,i}(t) \leq P_f(0, T) \leq P_{f,i}(t=0) + \int_0^T v^+(\tau) d\tau \tag{10.17}$$

Il « suffit » donc d'être capable d'évaluer le taux de franchissement $v^+(t)$ pour résoudre le problème de fiabilité dépendant du temps, ou au moins donner une borne supérieure de $P_f(0, T)$. On verra ci-dessous quelques résultats analytiques importants, et comment ils peuvent être ensuite utilisés dans un cadre général.

Les problèmes de fiabilité dépendant du temps *stationnaires* correspondent au cas où tous les processus regroupés dans $S_i(\omega)$ sont stationnaires et où la fonction de performance ne dépend pas explicitement du temps, ce que l'on note formellement $g(\mathbf{R}(\omega), S_i(\omega))$. Dans ce cas, le taux de franchissement ne dépend pas du temps et peut être évalué à n'importe quel instant (par exemple $t=0$). L'équation [10.17] se simplifie alors en :

$$P_f(0, T) \leq P_{f,i}(t=0) + v^+ T \tag{10.18}$$

REMARQUE 10.1.– Dans le cas où la fonction de performance ne dépend pas de variables aléatoires mais seulement de processus stationnaires (soit $g(S_i(\omega))$), le nombre de franchissements est un processus de Poisson d'intensité v^+ , ce qui permet d'estimer $P_f(0, T) \equiv F_T(T) \approx 1 - e^{-v^+ T}$. Cette approximation n'est cependant plus valable dans le cas général où g dépend également de variables aléatoires $\mathbf{R}(\omega)$, car les franchissements ne sont dans ce cas plus indépendants les uns des autres.

L'estimation correcte devient alors : $P_f(0, T) \approx E_{\mathbf{R}} \left[1 - e^{-(\nu^+ | \mathbf{R}) T} \right]$ et peut être évaluée par des méthodes spécifiques. Dans cette expression, $\nu^+ | \mathbf{R}$ est le taux de franchissement conditionnel aux variables aléatoires \mathbf{R} , et $E_{\mathbf{R}}[\cdot]$ désigne l'espérance par rapport à ces variables, voir les détails dans [SCH 91, RAC 98].

Le calcul du taux de franchissement par un processus stochastique scalaire (respectivement vectoriel) d'un seuil (respectivement d'une hypersurface) est complexe et le lecteur pourra se reporter aux ouvrages [DIT 96, RAC 04] pour un traitement complet. On donne cependant la formule de Rice [RIC 44], à la base de nombreux résultats.

Soit $S_t(\omega)$ un processus scalaire dérivable, soit $\dot{S}_t(\omega)$ le processus dérivé et $f_{\dot{S}S}(s, \dot{s})$ leur densité de probabilité conjointe. On s'intéresse au taux de franchissement $\nu^+(t)$ par le processus $S_t(\omega)$ d'un seuil (éventuellement variable dans le temps), noté $a(t)$. La formule de Rice s'écrit :

$$\nu^+(t) = \int_{a(t)}^{\infty} (\dot{s} - \dot{a}(t)) f_{\dot{S}S}(a(t), \dot{s}) d\dot{s} \quad [10.19]$$

Dans le cas d'un processus stationnaire et d'un seuil fixe (par exemple $a = 0$ dans le cas de la fonction de performance), la formule se simplifie en $\nu^+ = \int_0^{\infty} \dot{s} f_{\dot{S}S}(a, \dot{s}) d\dot{s}$. A titre d'exemple, si S_t est un processus gaussien de moyenne μ_s , d'écart type σ_s , on montre que le taux de franchissement du niveau a vaut $\nu_a^{+, \text{gaussien}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_{\dot{s}}}{\sigma_s} \varphi\left(\frac{a - \mu_s}{\sigma_s}\right)$,

où $\varphi(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$ désigne la densité de probabilité gaussienne. Si le processus gaussien n'est pas stationnaire (par exemple, sa moyenne et son écart type varient dans le temps) et si le seuil $a(t)$ est lui-même variable, le taux de franchissement

devient $\nu_a^{+, \text{gaussien}}(t) = \frac{\sigma_{\dot{s}}}{\sigma_s} \varphi(a(t)) \Psi\left(\frac{\dot{a}(t)}{\sigma_{\dot{s}} / \sigma_s}\right)$, où l'on a posé :

$$\Psi(x) = \varphi(x) - x \int_{-\infty}^{-x} \varphi(u) du \quad [\text{CRA 67}]$$

Le calcul du taux de franchissement de processus vectoriels à travers une hypersurface est donné par la formule de Belayev, dont on pourra trouver une présentation dans les références [DIT 96, RAC 04].

10.4. Méthode PHI2

On a présenté dans les sections précédentes les concepts utiles à la formulation de problèmes de fiabilité dépendant du temps : processus stochastiques, taux de franchissement, probabilité de défaillance cumulée et bornes associées. Pour être en mesure d'appliquer la formule [10.17] dans des cas pratiques, il faut donc évaluer le taux de franchissement du niveau zéro de la fonction de performance. Comme on l'a vu, des résultats analytiques ne sont disponibles que dans des cas très particuliers, et il faut donc développer dans le cas général des méthodes numériques.

Deux grandes classes de méthodes numériques sont connues :

- la méthode asymptotique, développée entre autres par Rackwitz et ses collègues, qui consiste à estimer le taux de franchissement et son intégrale dans le temps à partir de la formule de Rice et diverses approximations analytiques, comme l'intégration de Laplace (voir [RAC 98, RAC 04] pour plus de détails) ;

- une méthode basée sur l'analyse de fiabilité système, inspirée des travaux de [HAG 92, LI 95] et développée sous le nom de *méthode PHI2* dans les travaux de [AND 02, AND 04, SUD 08]. Comme on va le voir maintenant, celle-ci s'appuie sur les outils classiques de la fiabilité pour les problèmes *indépendants* du temps (notamment la méthode FORM et l'analyse de fiabilité des systèmes). Elle peut donc être utilisée avec les logiciels classiques, comme PhimecaSoft [LEM 06] ou Open TURNS (www.openturns.org).

10.4.1. Taux de franchissement et fiabilité système

Par définition, le taux de franchissement se calcule à partir de la probabilité d'avoir un franchissement de l'état limite entre deux instants proches t et $t+h$ (équation [10.15]). Dans notre contexte, un tel franchissement signifie que la structure se trouvait dans le domaine de sûreté à l'instant t et dans le domaine de défaillance à l'instant $t+h$. On peut donc calculer le taux de franchissement de la façon suivante (pour simplifier les notations, on pose $\mathbf{X}_t(\omega) = \{\mathbf{R}(\omega), \mathbf{S}_t(\omega)\}^\top$) :

$$v^+(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}(\{g(\mathbf{X}_t(\omega), t) > 0\} \cap \{g(\mathbf{X}_{t+h}(\omega), t+h) \leq 0\})}{h} \quad [10.20]$$

Le numérateur de l'équation précédente est la probabilité de défaillance d'un *système parallèle à deux composants*, que l'on peut estimer par la méthode FORM pour les systèmes [LEM 05, chapitre 9]. On résout ainsi par la méthode FORM chacun des deux problèmes de fiabilité. Soient $\beta(t)$ et $\alpha(t)$ (resp. $\beta(t+h)$ et

$\alpha(t+h)$) l'indice de fiabilité et le vecteur normal unitaire au point de conception associés à l'état limite $\{g(\mathbf{X}_t(\omega), t) \leq 0\}$ (resp. $\{g(\mathbf{X}_{t+h}(\omega), t+h) \leq 0\}$).

L'estimation de la probabilité de défaillance du système parallèle se calcule au premier ordre par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\text{FORM}}(\{g(\mathbf{X}_t(\omega), t) > 0\} \cap \{g(\mathbf{X}_{t+h}(\omega), t+h) \leq 0\}) \\ = \Phi_2(\beta(t), -\beta(t+h), \alpha(t) \cdot \alpha(t+h)) \end{aligned} \quad [10.21]$$

où $\Phi_2(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{2(1-\rho^2)}\right] dx dy$ désigne la fonction

de répartition de la loi binormale. En combinant [10.20] et [10.21], on montre dans [SUD 08] que le taux de franchissement se simplifie en :

$$v^+(t) = \|\dot{\alpha}(t)\| \varphi(\beta(t)) \Psi\left(\frac{\dot{\beta}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|}\right) \quad \text{où } \Psi(x) = \varphi(x) - x \int_{-\infty}^{-x} \varphi(u) du \quad [10.22]$$

Pour des problèmes de fiabilité stationnaires, le taux de franchissement ne dépend pas du temps et se simplifie en :

$$v^+ = \frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{2\pi}} \|\dot{\alpha}(t)\| \quad [10.23]$$

On note les similitudes entre ces deux formules et celles présentées plus haut comme application de la formule de Rice aux processus gaussiens (fin de la section 10.3). Pour interpréter [10.22], on peut ainsi considérer que la méthode FORM revient à « scalariser » le problème du franchissement, en remplaçant la fonction de performance par un processus scalaire équivalent dont on étudie le dépassement d'un seuil $\beta(t)$.

10.4.2. Mise en œuvre de la méthode PH12 – Cas stationnaire

Dans le cas d'un problème stationnaire, le taux de franchissement est constant. On va évaluer l'équation [10.23] en approchant numériquement la dérivée par différences finies, soit :

$$v_{num}^+ = \frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{2\pi}} \left\| \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} \right\| \quad [10.24]$$

Pour ce faire, il faut choisir un incrément de temps Δt suffisamment faible pour que l'estimation soit précise. L'expérience montre que $\Delta t \approx 10^{-3} \lambda_{\min}$ donne de bons résultats, où λ_{\min} est la plus petite longueur de corrélation des différents processus S_i intervenant dans le problème. Les différentes étapes pour évaluer [10.24] sont les suivantes :

- on définit les vecteurs aléatoires gaussiens $S^1(\omega)$ et $S^2(\omega)$ correspondant au processus gaussien $S_i(\omega)$ aux instants t et $t + \Delta t$ respectivement. Les composantes S_j^1 et S_j^2 sont corrélées deux à deux, de coefficient de corrélation $\rho_{S_j}(t, t + \Delta t)$, où ρ_{S_j} est la fonction de coefficient d'autocorrélation du processus $S_{i,j}$ (équation [10.2]) ;

- on remplace dans la fonction de performance $g(\mathbf{R}(\omega), S_i(\omega))$ les processus S_i par le vecteur S^1 , définissant ainsi $g_1(\mathbf{R}(\omega), S^1(\omega))$ et on calcule par la méthode FORM l'indice de fiabilité $\beta^{(1)}$ et le vecteur $\alpha^{(1)}$;

- on remplace dans la fonction de performance $g(\mathbf{R}(\omega), S_{t+\Delta t}(\omega))$ les processus $S_{t+\Delta t}$ par le vecteur S^2 , définissant ainsi $g_2(\mathbf{R}(\omega), S^2(\omega))$ et on calcule par la méthode FORM l'indice de fiabilité $\beta^{(2)}$ (égal à $\beta^{(1)}$) et le vecteur $\alpha^{(2)}$;

- à partir de ces résultats, le taux de franchissement [10.24] est évalué, puis la probabilité de défaillance cumulée :

$$v_{num}^+ = \frac{\varphi(\beta^{(1)})}{\sqrt{2\pi}} \left\| \frac{\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}}{\Delta t} \right\| \quad P_f(0, T) \leq \Phi(-\beta^{(1)}) + v_{num}^+ \cdot T \quad [10.25]$$

On voit que la borne supérieure ainsi calculée croît linéairement avec T . Pour exploiter ces résultats de façon pratique, on peut également exprimer cette borne sous forme d'« indice de fiabilité généralisé » $\beta^{\text{inf}}(0, T) = -\Phi^{-1}(\Phi(-\beta^{(1)}) + v^+ \cdot T)$.

De par la relation entre probabilité et indice de défaillance, cette valeur est une borne *inférieure* de l'indice de fiabilité d'où la notation β^{inf} . La borne supérieure β^{sup} associée au minorant de l'équation [10.17] est simplement $\beta^{(1)}$.

Il faut bien noter qu'il y a ici deux corrélations mises en œuvre. La première résulte de la corrélation du processus $\rho_{S_j}(t, t + \Delta t)$ et la seconde de la corrélation des états limites donnée par le produit scalaire $\alpha^{(1)} \cdot \alpha^{(2)}$.

10.4.3. Mise en œuvre de la méthode PHI2 – Cas non stationnaire

Dans ce cas, la fonction de performance dépend explicitement du temps ou les processus S_i ne sont pas stationnaires. Le taux de franchissement doit donc être évalué à différents instants, puis intégré sur $[0, T]$ (équation [10.17]) pour obtenir la borne supérieure de la probabilité cumulée. On discrétise l'intervalle d'intégration, soit $\{t_i = iT/N, i=0, \dots, N\}$, et on applique la procédure décrite au paragraphe 10.4.3 aux différents instants. La borne supérieure de la probabilité de défaillance cumulée s'obtient par exemple par la méthode d'intégration des trapèzes :

$$P_f(0, T) \leq P_{f,i}(0) + \frac{T}{N} \left(\frac{v^+(0) + v^+(T)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} v^+(t_i) \right) \quad [10.26]$$

Il est important de noter que l'intervalle de discrétisation T/N pour l'intégration n'est en général pas du même ordre de grandeur que l'intervalle Δt utilisé pour l'évaluation du taux de franchissement.

10.4.4. Exemple semi-analytique

Soit une poutre encastree de longueur L déterministe, de module de flexion EI , soumise à un effort vertical F à son extrémité libre. La flèche maximale de la poutre vaut $\delta = \frac{FL^3}{3EI}$ dans des conditions quasi statiques (la variation du chargement est supposée suffisamment lente). On s'intéresse au dépassement d'un seuil admissible δ_{\max} . Le module de flexion EI est supposé suivre une loi lognormale de paramètres $(\lambda_{EI}, \zeta_{EI})$. On suppose que le logarithme de la charge $\ln F$ est un processus gaussien stationnaire S_i de moyenne λ_F , d'écart type ζ_F , de fonction coefficient d'autocorrélation $\rho_F(t) = e^{-(t/\tau_F)^2}$, où τ_F désigne la longueur de corrélation. De façon à pouvoir effectuer des calculs analytiques, on écrit la fonction de performance associée au dépassement de la flèche maximale sous la forme :

$$g(EI, S_t) \stackrel{def}{=} \ln \delta_{\max} - \ln \delta = \ln \delta_{\max} - S_t - \ln \frac{L^3}{3} + \ln EI \quad [10.27]$$

Choisissons un instant t_0 quelconque. La variable $\ln EI$ est par hypothèse gaussienne et peut donc s'écrire $\ln EI = \lambda_{EI} + \zeta_{EI} U_1$, avec $U_1 \sim N(0,1)$. De même, S_{t_0} est une variable gaussienne de paramètres (λ_F, ζ_F) , que l'on peut écrire $S_{t_0} = \lambda_F + \zeta_F U_2$, avec $U_2 \sim N(0,1)$. Ainsi, après substitution, l'état limite [10.27] est linéaire en les variables gaussiennes centrées réduites U_1, U_2 . La méthode FORM est dans ce cas *exacte* pour calculer l'indice de fiabilité, qui vaut :

$$\beta^{(1)} = \frac{\ln \delta_{\max} - \ln(L^3/3) - \lambda_F + \lambda_{EI}}{\sqrt{\zeta_F^2 + \zeta_{EI}^2}} \quad [10.28]$$

Les coordonnées du vecteur unitaire normal au point de conception sont $\alpha^{(1)} = \left\{ -\zeta_{EI} / \sqrt{\zeta_F^2 + \zeta_{EI}^2}, \zeta_F / \sqrt{\zeta_F^2 + \zeta_{EI}^2} \right\}^T$.

Pour traduire l'état limite [10.27] à l'instant $t_0 + \Delta t$, il faut noter que S_{t_0} et $S_{t_0 + \Delta t}$ sont corrélées, de coefficient de corrélation $\tilde{\rho} = e^{-(\Delta t / \tau_F)^2}$ dépendant de la valeur $\Delta t \ll \tau_F$ choisie. La transformation isoprobabiliste des variables S_{t_0} et $S_{t_0 + \Delta t}$ (Nataf) s'écrit en fonction des variables indépendantes $U_2, U_3 \sim N(0,1)$:

$$S_{t_0} = \lambda_F + \zeta_F U_2, \quad S_{t_0 + \Delta t} = \lambda_F + \zeta_F \left(\tilde{\rho} U_2 + \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2} U_3 \right) \quad [10.29]$$

La problème de fiabilité instantanée à $t_0 + \Delta t$ est donc linéaire en les trois variables gaussiennes centrées réduites U_1, U_2, U_3 .

L'indice de fiabilité (exact) $\beta^{(2)}$ est le même que pour l'état limite [10.27], ce qui est logique puisque le problème est stationnaire.

Le vecteur normal vaut ici :

$$\alpha^{(2)} = \left\{ -\zeta_{EI} / \sqrt{\zeta_F^2 + \zeta_{EI}^2}, \tilde{\rho} \zeta_F / \sqrt{\zeta_F^2 + \zeta_{EI}^2}, \sqrt{1 - \tilde{\rho}^2} \zeta_F / \sqrt{\zeta_F^2 + \zeta_{EI}^2} \right\}^T$$

Pour terminer le calcul, il est nécessaire d'introduire les valeurs numériques des différents paramètres. On peut alors évaluer, pour le Δt suffisamment faible choisi, l'indice de fiabilité $\beta^{(1)} = \beta^{(2)}$, les vecteurs $\alpha^{(i)}$ et les reporter dans l'équation [10.25] pour calculer le taux de franchissement.

10.5. Application : treillis sous chargement dépendant du temps

Nous considérons figure 10.2 le treillis élastique du chapitre 8 de la troisième partie. On s'intéresse à la fiabilité dépendant du temps de cette structure sous l'effet de charges variables dans le temps, appliquées sur les nœuds de la membrure supérieure.

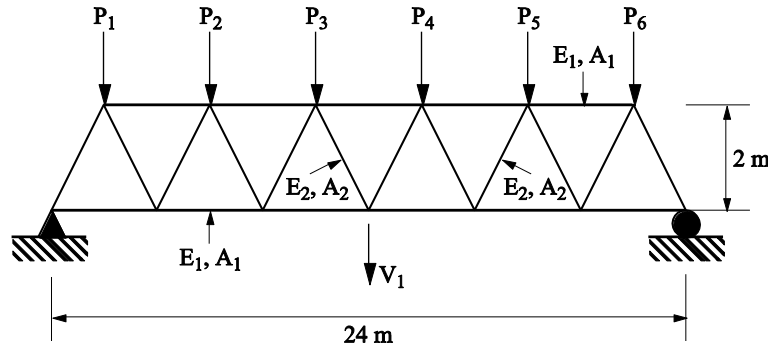


Figure 10.2. Treillis à 23 barres

Les variables aléatoires d'entrée sont décrites dans le tableau 10.1. Nous modélisons les 6 charges verticales appliquées par un *unique* processus gaussien, de moyenne 50 kN, d'écart type 7,5 kN, de fonction d'autocorrélation gaussienne $\rho_p(t) = e^{-(t/\tau_p)^2}$, où la longueur de corrélation τ_p vaut 1 jour. Compte tenu de cette valeur, on suppose que la variation temporelle du chargement est suffisamment lente pour pouvoir négliger les effets d'inertie : un calcul quasi statique est donc valable. On étudie la fiabilité dépendant du temps de la structure vis-à-vis d'un déplacement maximum admissible. La fonction d'état limite associée s'écrit :

$$g(E_1, A_1, E_2, A_2, P_i) = v_{\max} - |\mathcal{M}(E_1, A_1, E_2, A_2, P_i)| \leq 0, v_{\max} = 16 \text{ cm} \quad [10.30]$$

où $\mathcal{M}(E_1, A_1, E_2, A_2, P_t)$ désigne la réponse calculée par éléments finis. Le problème de fiabilité étant stationnaire, un seul calcul de taux de franchissement (constant) est nécessaire.

Le problème initial comportant 4 variables aléatoires et un processus est transformé par la méthode PHI2 en deux analyses FORM avec $4+2=6$ variables aléatoires (dont une modélisant P_t et l'autre $P_{t+\Delta t}$). On choisit ici $\Delta t = 10^{-3}$.

Variable	Distribution	Moyenne	Ecart type
E_1, E_2 (MPa)	Lognormale	210 000	21 000
A_1 (cm ²)	Lognormale	20	2
A_2 (cm ²)	Lognormale	10	1
P_t (kN)	Processus gaussien	50	7,5

Tableau 10.1. Treillis élastique – Variables aléatoires d’entrée

L’analyse de fiabilité instantanée à l’instant t donne l’indice $\beta = 4,032$, de vecteur normal $\alpha^{(1)} = \{-0,533447 \ -0,067651 \ -0,533447 \ -0,067651 \ 0,649397 \ 0,0\}^T$. A l’instant $t + \Delta t$, on obtient le même indice de fiabilité et un vecteur normal $\alpha^{(2)} = \{-0,533447 \ -0,067651 \ -0,533447 \ -0,067651 \ 0,649396 \ 0,000918\}^T$. On remarque que seules les deux dernières composantes (c’est-à-dire celles associées au processus) changent. L’application de la formule [10.18] donne un taux de franchissement de $\nu^+ = 4,3 \cdot 10^{-5}$ /jour. La borne supérieure de la probabilité de défaillance cumulée est alors obtenue par la formule [10.20]. On représente cette probabilité en fonction du temps sur la figure 10.3. Ces résultats montrent bien que la probabilité de défaillance cumulée peut dépasser la probabilité de défaillance instantanée de plusieurs ordres de grandeur, celle-ci étant obtenue en supposant le chargement comme une variable aléatoire.

10.6. Conclusion

Si les méthodes de fiabilité des structures pour des problèmes indépendants du temps sont aujourd’hui bien établies et déjà couramment utilisées à l’échelle industrielle, il n’en est pas de même lorsque la dimension temporelle intervient

explicitement dans la formulation du problème. Le maniement des processus stochastiques pour modéliser la variabilité temporelle et des probabilités de défaillance cumulées introduisent une difficulté supplémentaire. On s'est restreint dans ce chapitre à aborder les concepts utiles à la résolution de tels problèmes. On s'est par ailleurs restreint aux problèmes pour lesquels les aspects dynamiques ne sont pas pris en compte. Les problèmes et méthodes de la *dynamique stochastique* sont en effet un domaine à part entière, notamment présenté dans les ouvrages [KRE 83, SOI 01, LUT 03]. On s'est principalement intéressé à la méthode PHI2 pour l'évaluation du taux de franchissement, qui est basée sur l'utilisation de la méthode FORM pour les systèmes. Cette approche a le mérite de n'utiliser que des outils classiques développés pour les problèmes de fiabilité *indépendants du temps*, et donc mis en œuvre dans de nombreux logiciels disponibles. Il convient cependant de vérifier que l'approximation FORM est validée pour les problèmes traités.

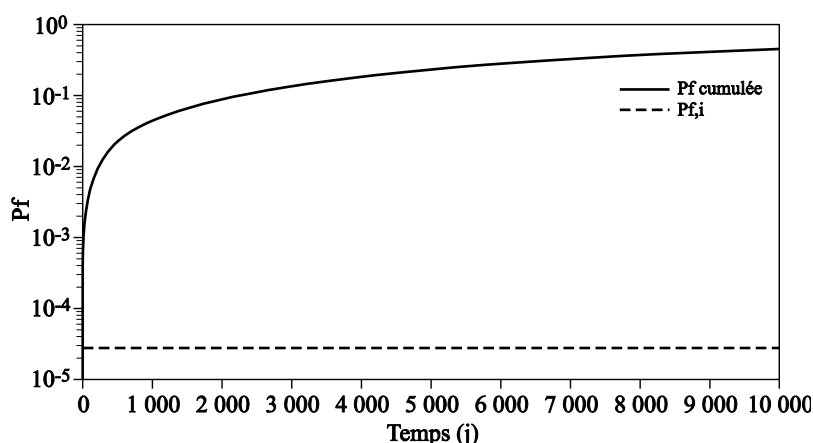


Figure 10.3. Treillis élastique sous chargement variable – Probabilité de défaillance cumulée

Enfin, on n'a pas abordé l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo pour traiter les problèmes dépendant du temps. Son application nécessite en effet la génération de trajectoires des processus intervenant dans le problème, puis la résolution temporelle du problème mécanique. Cette approche est donc très coûteuse et ne doit être utilisée qu'en dernier recours, notamment pour des problèmes non linéaires de dynamique traités dans le domaine temporel (analyse sismique de structures, etc.).

10.7. Bibliographie

- [AND 02] ANDRIEU-RENAUD C., Fiabilité mécanique des structures soumises à des phénomènes physiques dépendant du temps, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 2002.
- [AND 04] ANDRIEU-RENAUD C., SUDRET B., LEMAIRE M., « The PHI2 method : a way to compute time-variant reliability », *Reliab. Eng. Sys. Safety*, vol. 84, p. 75-86, 2004.
- [CRA 67] CRAMER H., LEADBETTER M., *Stationary and related processes*, John Wiley & Sons, Chichester, 1967.
- [DIT 96] DITLEVSEN O., MADSEN H., *Structural reliability methods*, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [HAG 92] HAGEN O., « Threshold up-crossing by second order methods », *Prob. Eng. Mech.*, vol. 7, p. 235-241, 1992.
- [KRE 83] KREE P., SOIZE C., *Mécanique aléatoire*, Dunod, Paris, 1983.
- [LEM 05] LEMAIRE M., *Fiabilité des structures – Couplage mécano-fiabiliste statique*, Hermès, Paris, 2005.
- [LEM 06] LEMAIRE M., PENDOLA M., « PHIMECA-SOFT », *Structural Safety*, vol. 28, p. 130-149, 2006.
- [LI 95] LI C., DER KIUREGHIAN A., « Mean out-crossing rate of nonlinear response to stochastic input », dans M. Lemaire, J. Favre, A. Mebarki (dir.), *Proc. 7th Int. Conf. on Applications of Stat. and Prob. in Civil Engineering (ICASP7)*, Paris, p. 1135-1141, Balkema, Rotterdam, 1995.
- [LIN 67] LIN Y.K., *Probabilistic theory of structural dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1967.
- [LUT 03] LUTES L., SARKANI S., *Random vibrations : analysis of structural and mechanical systems*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2003.
- [MEL 99] MELCHERS R., *Structural reliability analysis and prediction*, John Wiley & Sons, Chichester, 1999.
- [PRE 94] PREUMONT A., *Random vibrations and spectral analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.
- [RAC 98] RACKWITZ R., « Computational techniques in stationary and non stationary load combination – A review and some extensions », *J. Struct. Eng.*, vol. 25 (1), p. 1-20, 1998.
- [RAC 01] RACKWITZ R., « Reliability analysis – A review and some perspectives », *Structural Safety*, vol. 23, p. 365-395, 2001.
- [RAC 04] RACKWITZ R., « Zuverlässigkeit und Lasten im konstruktiven Ingenieurbau », *Lecture notes*, Technical University of Munich, 2004.

- [RIC 44] RICE S., « Mathematical analysis of random noise », *Bell System Tech. J.*, vol. 23, p. 282-332, 1944.
- [SOI 01] SOIZE C., *Dynamique des structures – Éléments de base et concepts fondamentaux*, Ellipses, Paris, 2001.
- [SCH 91] SCHALL G., FABER M., RACKWITZ R., « The ergodicity assumption for sea states in the reliability assessment of offshore structures », *J. Offshore Mech. Arctic Eng.*, ASME, vol. 113 (3), p. 241-246, 1991.
- [SUD 07] SUDRET B., *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*, habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, 2007.
- [SUD 08] SUDRET B. « Analytical derivation of the outcrossing rate in time-variant reliability problems », *Struc. Infra. Eng.*, vol. 4(5), p. 353-362, 2008.