

N° ordre : 1395
EDSPIC : 263

Université BLAISE PASCAL - Clermont II
Ecole Doctorale
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

Thèse

présentée
pour obtenir le grade de

Docteur d'Université
(Spécialité : Génie Mécanique)

par

Céline ANDRIEU-RENAUD
Ingénieur IFMA

**Fiabilité mécanique des structures soumises à des
phénomènes physiques dépendant du temps**

Soutenue publiquement le 13 décembre 2002 devant le jury :

M. P. BERNARD	UBP Clermont-Ferrand	Examineur
M. C. BES	UPS Toulouse	Rapporteur
M. M. LEMAIRE	IFMA Clermont-Ferrand	Directeur de thèse
M. A. MILLARD	CEA Gif sur Yvette	Rapporteur
M. J-C. MITTEAU	IFMA Clermont-Ferrand	Co-directeur de thèse
M. J-M. REYNOUARD	INSA Lyon	Président
M. B. SUDRET	EDF Moret sur Loing	Co-directeur de thèse

Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée,
Institut Français de Mécanique Avancée et Université Blaise-Pascal.

A mon grand-père Angelo
A mon mari
A mes parents

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée (LaRAMA), sous la direction de Monsieur **Maurice Lemaire** à qui j'adresse mes premiers remerciements. Notre collaboration scientifique a commencé voilà quelques années et a toujours été, pour moi, un grand plaisir et une source intarissable d'enrichissements. Qu'il soit assuré de ma reconnaissance pour cela mais surtout pour son soutien permanent et pour la confiance qu'il a su me témoigner tout au long de mon travail.

Monsieur **Jean-Marie Reynouard**, professeur à IINSA de Lyon, m'a fait le grand honneur de présider mon jury de soutenance. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Monsieur **Christian Bès**, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, m'a fait l'honneur de rapporter ce travail. Notre collaboration fut brève mais très agréable et extrêmement enrichissante.

Monsieur **Alain Millard**, Ingénieur au Commissariat à l'Energie Atomique et Professeur à l'École Polytechnique m'a fait l'honneur d'être rapporteur de ce travail. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a manifesté dans ce travail et lui en suis très reconnaissante.

Monsieur **Bruno Sudret**, Ingénieur à Electricité de France, a co-dirigé mon travail. Sa compétence, sa disponibilité, son aide et ses conseils m'ont été très précieux dans l'aboutissement de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Monsieur **Jean-Claude Mitteau**, Professeur Emérite de l'Institut Français de Mécanique Avancée m'a aidée au début de mes travaux. Je l'en remercie sincèrement.

Monsieur **Pierre Bernard**, Professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, a accepté de faire partie du jury. Les remarques et les conseils sur l'aspect mathématique de ce travail, qu'il m'a donnés lors de nos brèves mais fructueuses collaborations, ont été particulièrement appréciées. Qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

Une pensée aussi pour tous les étudiants avec qui j'ai eu la chance de collaborer et qui ont apporté leur contribution à ce travail.

Enfin un chaleureux remerciement à tous les membres du LaRAMA pour cette ambiance agréable qui permet de venir travailler avec bonheur chaque matin!

Table des matières

Notations	15
Introduction	17
I La fiabilité fonction du temps	21
1 De la probabilité instantanée à la probabilité cumulée	23
1.1 Introduction	23
1.1.1 Une modélisation par variables aléatoires ou processus stochastiques . .	23
1.1.2 Le problème de fiabilité des structures	24
1.1.3 Deux phénomènes conduisant à la défaillance	25
1.1.4 Plan du chapitre	25
1.2 Définition de la probabilité instantanée et de la probabilité cumulée	25
1.2.1 Probabilité instantanée de défaillance	25
1.2.2 Probabilité cumulée de défaillance	26
1.2.3 Un cas particulier $\mathbf{X}(t, \omega) \equiv \mathbf{R}(\omega)$	26
1.3 Quelques définitions et notations	29
1.3.1 Rappels mathématiques	29
1.3.2 Exemples conducteurs	31
1.4 Notion de franchissements	32
1.4.1 Franchissement en sortant	32
1.4.2 Taux de franchissements	34
1.4.3 Développement de la formule de Rice	36
1.4.4 Taux global de franchissements	37
1.5 Calcul de la probabilité cumulée de défaillance	39
1.5.1 Principe du calcul	39
1.5.2 Méthode de Monte-Carlo	42
1.6 Conclusion	45
2 Approche asymptotique	47
2.1 Décomposition des variables de la fonction de performance	47
2.2 Probabilité cumulée de défaillance pour les processus mélangeants	49
2.2.1 Un niveau de fiabilité élevé	49
2.2.2 $\mathbf{S}(t, \omega)$ est seul présent	49
2.2.3 $\mathbf{R}(\omega)$ et $\mathbf{S}(t, \omega)$ sont seuls présents	50
2.2.4 $\mathbf{R}(\omega)$, $\mathbf{Q}(t, \omega)$ et $\mathbf{S}(t, \omega)$ sont présents	50
2.2.5 Conclusion	51

2.3	Borne supérieure de la probabilité	51
2.4	Application aux processus Gaussiens différentiables	51
2.4.1	Hypothèses du calcul	51
2.4.2	Taux de franchissements	52
2.4.3	Forme générale de l'espérance du nombre de franchissements	52
2.5	Applications	60
2.6	Conclusion	63
3	Propositions pour de nouvelles approches de la fiabilité	65
3.1	Quelques rappels	65
3.1.1	L'approximation FORM	65
3.1.2	L'approche système de la fiabilité	66
3.2	La méthode PHI2	67
3.2.1	La méthode	67
3.2.2	Détermination de la corrélation	70
3.2.3	Applications	71
3.2.4	Une autre façon de déterminer la corrélation entre les états-limites	73
3.3	Calcul infinitésimal par RGMR	74
3.3.1	Quelques définitions	74
3.3.2	Calcul de la probabilité instantanée de défaillance	77
3.3.3	Calcul des volumes des sphères et des boules de rayon unité dans \mathbb{R}^n	79
3.3.4	Calcul de l'angle solide	80
3.3.5	Calcul du taux de franchissements	85
3.3.6	Mise en oeuvre numérique par RGMR	86
3.3.7	Calcul de la probabilité cumulée de défaillance	87
3.4	Conclusion	87
4	Comparaison des méthodes	89
4.1	Présentation des exemples	89
4.2	Comparaison <i>a priori</i> des méthodes asymptotique, PHI2 et RGMR	90
4.3	Cas 1 : $R(\omega) - S(t, \omega)$	91
4.4	Cas 2 : $R(\omega) - \delta.t - S(t, \omega)$	95
4.5	Cas 3 : $R(\omega) - \delta(\omega).t - S(t, \omega)$	100
4.6	Cas 4 : $R(\omega) + \delta.(t - T/2)^2 - S(t, \omega)$	102
4.7	Comparaison premier franchissement – tous les franchissements	104
4.8	Conclusion	105
II	Mise en oeuvre	107
5	Etude d'un modèle simplifié d'une enceinte en béton précontraint	109
5.1	Modèle mécanique	109
5.2	Modèle probabiliste	112
5.3	Résolution par la méthode de la fonction de performance décroissante	112
5.4	Conclusion	115

6	Etude d'une poutre sous poids propre et chargement aléatoire	117
6.1	Structure étudiée	117
6.2	Phénomène de fluage	118
6.3	Chargement extérieur	119
6.4	Analyse probabiliste	120
6.4.1	Cas S variable aléatoire	120
6.4.2	Cas S processus et t_d déterministe	120
6.4.3	Cas S processus et t_d variable aléatoire	122
6.5	Conclusion	127
	Conclusion générale	129
	Bibliographie	131
	Annexes	136
A	Decreasing performance function in time dependent reliability	137
A.1	Preliminaries	138
A.1.1	Trajectories and law of a stochastic process	138
A.1.2	Reliability	139
A.2	Main results	139
A.3	Conclusion	141
B	Rappels sur les processus indexés sur le temps	143
B.1	Introduction	143
B.2	Processus stochastique scalaire	143
B.2.1	Une première définition	144
B.2.2	Représentations mathématiques	144
B.3	Propriétés d'un processus	147
B.3.1	La continuité en moyenne d'ordre deux (m.o.d.)	147
B.3.2	La dérivabilité en moyenne d'ordre deux (m.o.d.)	148
B.3.3	La stationnarité	148
B.3.4	L'ergodicité	150
B.3.5	Les processus mélangeant ("mixing" en anglais)	151
B.3.6	La régularité	152
C	Les trois types de franchissements	155
C.1	Introduction	155
C.2	Franchissement en croissant ou <i>upcrossing</i>	155
C.3	Franchissement en décroissant ou <i>downcrossing</i>	155
C.4	Franchissement ou <i>crossing</i>	155
C.5	En fiabilité dépendante du temps : franchissement en sortant ou <i>outcrossing</i>	157
D	Un point sur les fonctions d'autocorrélation, de covariance et de covariance normalisée	159
D.1	Définitions	159
D.1.1	Fonction d'autocorrélation	159
D.1.2	Fonction de covariance	159
D.1.3	Fonction de covariance normalisée	159

D.2	Quelques propriétés	160
D.2.1	Pour la fonction d'autocorrélation	160
D.2.2	Pour la fonction de covariance	160
D.2.3	Pour la fonction de covariance normalisée	160
D.3	Exemple	160
E	Définitions diverses	163
E.1	Fonction d'ordre o	163
E.2	Inégalité de Jensen	163
E.3	Difféomorphisme	163
E.4	Concept de mesure	163
E.5	Théorème de Fubini	164

Table des figures

1.1	la probabilité instantanée et la probabilité cumulée.	26
1.2	exemple d'illustration : tige soumise à un effort normal.	28
1.3	processus $S(t, \omega)$ régulier : un franchissement au plus.	30
1.4	représentation de trajectoires d'un processus - cas stationnaire et non stationnaire.	31
1.5	franchissement en sortant.	33
1.6	exemples d'illustration de franchissements.	33
1.7	exemple de trajectoire d'un processus Gaussien et de franchissement d'un seuil.	34
1.8	exemple de trajectoire simulée d'un processus stationnaire grâce à la décomposition EOLE.	42
1.9	la fiabilité fonction du temps : démarche générale.	46
2.1	exemple de trajectoires de variables de type \mathbf{S}	48
2.2	décomposition des variables dans la fonction de performance.	48
2.3	approximation de la distribution Gaussienne.	50
2.4	franchissement de la surface $\partial F = \{G(t, \mathbf{S}(t, \omega)) = 0\}$ par le processus $\mathbf{S}(t, \omega)$	53
2.5	l'approche asymptotique : démarche générale.	64
3.1	représentation de la transformée T et de l'approximation FORM.	66
3.2	illustration du calcul de $\nu(t)$ par la fiabilité système.	70
3.3	principe de la transformation stéréographique.	76
3.4	relation entre la boule de dimension \sum_{n-1} et l'hypersphère de dimension \sum_{n-2}	80
3.5	sélection des points appartenant à l'intersection de la sphère unité avec le plan Π	82
3.6	sélection des points U_i correspondant au domaine de défaillance.	83
3.7	cas d'un domaine de défaillance des deux côtés du pôle P	84
3.8	illustration de la fonction λ	85
3.9	la méthode PHI2 et la méthode RGMR : démarche générale.	88
4.1	probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 1 pour $l = 1$ an.	93
4.2	probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 1 pour $l = 0,5$ an.	93
4.3	étude de convergence pour le calcul de $\nu(t)$ pour $l = 1$ an dans le cas 1.	94
4.4	étude de convergence de la simulation de MC en fonction de l'erreur de discrétisation de la décomposition EOLE dans le cas $l = 1$ an pour le cas 1.	96
4.5	cas 2 : taux de franchissements en fonction du temps ($l = 1$ an).	96
4.6	probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 2 pour $l = 1$ an.	97
4.7	probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 2 pour $l = 0,5$ an.	97
4.8	étude de convergence de la simulation de MC en fonction de l'erreur de discrétisation de la décomposition EOLE dans le cas $l = 1$ an pour le cas 2.	99
4.9	probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 3 pour $l = 1$ an.	101
4.10	probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 3 pour $l = 0,5$ an.	101

4.11	taux de franchissements dans le cas 4 en fonction du temps pour $l = 1$ an. . . .	103
4.12	probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 4 pour $l = 1$ an. . . .	103
5.1	structure concernée par l'étude.	110
5.2	cas simplifié de l'enceinte : probabilité cumulée par la méthode de la fonction de performance décroissante.	115
6.1	modèle simplifié de la poutre sous poids propre et chargement aléatoire en milieu de travée.	117
6.2	représentation de la fonction $H(t_d, t_f)$	119
6.3	probabilité de défaillance instantanée dans le cas de la poutre sous fluage. . . .	121
6.4	probabilité de défaillance cumulée dans le cas S processus et t_d déterministe. . .	122
6.5	indice de fiabilité intervenant dans la méthode PHI2 lorsque t_d est aléatoire, calculé par simulation.	123
6.6	coefficient de variation de la simulation au cours du temps dans le cas où t_d est aléatoire par la méthode des tirages d'importance.	124
6.7	nuage de points à $t = 10$ ans pour $\Delta t = 0,005$ an.	125
6.8	nuage de points à $t = 50$ ans pour $\Delta t = 0,005$ an.	126
6.9	probabilité de défaillance cumulée dans le cas où l'instant d'application de la charge ponctuelle est uniformément distribué.	126
6.10	les différentes méthodes abordées dans ce mémoire et leur situation.	132
C.1	franchissement en croissant de niveau u	156
C.2	franchissement en décroissant de niveau u	156
C.3	tracé de $t \sin(1/t)$ au voisinage de 0.	157

Liste des tableaux

1.1	données générales des exemples de référence.	32
2.1	données de l'étude dans le cas non-stationnaire étudié.	61
2.2	données de l'étude dans le cas non-stationnaire étudié.	62
3.1	calcul de la corrélation et comparaison avec COMREL-TI dans le cas 1 : données du problème.	73
3.2	calcul de la corrélation et comparaison avec COMREL-TI dans le cas 1 : résultats obtenus à la date τ	73
3.3	calcul de la corrélation et comparaison avec COMREL-TI dans le cas 1 : résultats obtenus à la date $\tau + \Delta\tau$	74
4.1	données numériques relatives aux quatre exemples traités.	89
4.2	taux de franchissements dans le cas 1 pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.	92
4.3	étude de l'influence de la discrétisation EOLE sur le taux de franchissements dans le cas 1.	94
4.4	probabilité de défaillance sur [0,30 ans] dans le cas 2 pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.	98
4.5	nombre d'appels nécessaires pour le calcul de la probabilité cumulée sur [0,30 ans] pour AsM.	98
4.6	influence du nombre de points d'intégration dans la méthode du PHI2.	99
4.7	probabilité de défaillance sur [0,30 ans] dans le cas 3 pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.	102
4.8	probabilité de défaillance sur [0,30 ans] dans le cas 4 pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.	102
4.9	probabilité de défaillance de premier franchissement contre tous les franchissements (Simulation MC)	105
5.1	paramètres de l'étude du réservoir.	113
6.1	données probabilistes de l'étude de la poutre sous fluage.	120

Notations

Vecteurs, matrices et opérateurs

$\{V\}$ ou \mathbf{X}	Vecteur colonne
$[M]$	Matrice
$\nabla_{\mathbf{X}}G$	Gradient d'une fonction G par rapport aux variables \mathbf{X}
\dot{G}	Dérivée de G par rapport au temps
$\varepsilon_{rr}(t)$	Estimateur d'erreur à la date t

Variable aléatoire

v.a.	Variable aléatoire
ω	Aléa, $\omega \in \Omega$ espace des aléas
$X(\omega)$ ou X	Variable aléatoire
x	Réalisation de la variable aléatoire $X(\omega)$
m_X	Moyenne de la v.a. $X(\omega)$
σ_X	Ecart-type de la v.a. $X(\omega)$
c_X	Coefficient de variation de la v.a. $X(\omega)$
$\text{var}(X)$	Variance de la v.a. $X(\omega)$
$E[X]$	Espérance de $X(\omega)$
$\text{cov}(X, Y)$	Covariance de X et Y

Processus

$X(t, \omega)$	Processus aléatoire
$X_t(\omega)$	Processus aléatoire à la date t
$x(t)$	Réalisation (trajectoire) du processus $X(t, \omega)$ pour l'aléa ω
$m_X(t)$	Moyenne du processus $X(t, \omega)$
$\sigma_X(t)$	Ecart-type du processus $X(t, \omega)$
$c_X(t)$	Coefficient de variation du processus $X(t, \omega)$
$\rho_{XX}(t_1, t_2)$	Coefficient de corrélation du processus $X(t, \omega)$ entre les dates t_1 et t_2
$R_{XX}(t_1, t_2)$	Fonction d'autocorrélation du processus $X(t, \omega)$ entre les dates t_1 et t_2
$C_{XX}(t_1, t_2)$	Fonction de covariance du processus $X(t, \omega)$ entre les dates t_1 et t_2

Fonction de performance et domaines

$G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$	Fonction de performance du temps t et de $\mathbf{X}(t, \omega)$, ensemble des variables aléatoires $X_j(\omega)$, $j = 1, \dots, p$ et de processus scalaires $X_k(t, \omega)$, $k = 1, \dots, q$
-------------------------------	---

$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = 0$	Surface d'état-limite
$H(t, \mathbf{U}(t, \omega)) = 0$	Surface d'état-limite en variables normées
\mathcal{D}_s	Domaine de sûreté
\mathcal{D}_f	Domaine de défaillance
$[t_1, t_2]$	Intervalle de temps

Probabilité

P ou Prob	Probabilité, ex : $P(X > x)$ ou Prob($X > x$)
$P_{f,c}(t_1, t_2)$	Probabilité de défaillance cumulée sur l'intervalle $[t_1, t_2]$
$P_{f,i}(t)$	Probabilité de défaillance instantanée à la date t
$\nu(t)$	Taux de franchissements à la date t
$\nu_1(t)$	Taux de premier franchissement à la date t
$N(t_1, t_2)$	Nombre de franchissements sur l'intervalle $[t_1, t_2]$

Loi normale

$\mathcal{N}(0, 1)$	Loi normale de moyenne nulle et de variance unitaire
$\phi(x)$	Densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$
$\Phi(x)$	Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$
$\phi_2(x, y; \rho)$	Densité de probabilité de la loi binormale
$\Phi_2(x, y; \rho)$	Fonction de répartition de la loi binormale

Produit de l'analyse de fiabilité

$\beta(t)$	Indice de Hasofer et Lind à la date t
P^*	Point de défaillance le plus probable
$\alpha_i(t)$	Cosinus directeurs de la normale à l'état-limite en P^* à la date t

Introduction

Contexte

Alors que le parc des équipements industriels et civils s'est développé considérablement dans les dernières décennies, la maîtrise de la sûreté et des coûts de maintenance des installations est devenue un enjeu essentiel. Cette question concerne aussi bien les ouvrages du génie civil, les installations industrielles, que les machines ou les aéronefs.

Il est donc nécessaire de progresser dans la connaissance, la modélisation et le traitement des mécanismes de vieillissement des structures concernées d'une part et dans la modélisation de leur environnement d'autre part.

L'analyse de fiabilité structurale est une des approches pouvant être utilisée afin d'évaluer la durée de vie de composants. Le but d'une telle analyse est de calculer la probabilité de défaillance d'un système mécanique pour un scénario de défaillance donné, en prenant en compte les incertitudes présentes dans la description du modèle (géométrie, propriétés du matériau) et dans celle de l'environnement (chargement). Le comportement du matériau considéré, sous différentes sollicitations, est modélisé par des données caractéristiques. Ces dernières présentent, en général, une forte variabilité. L'utilisation purement déterministe des différents modèles de prédiction du comportement vieillissant des structures limite donc la qualité de l'information qu'ils peuvent fournir aux organisations chargées de la maintenance. L'utilisation d'approches probabilistes prenant en compte cette variabilité est donc proposée pour contribuer à l'analyse et à la gestion des différentes problématiques liées au vieillissement des structures.

Problématiques

Le vieillissement d'une structure est souvent étudié pas à pas grâce à des analyses probabilistes instantanées et indépendantes. Le fait que ce phénomène dépende explicitement du temps n'est pas toujours pris en compte. Le temps est en fait considéré comme un simple paramètre et ne joue pas un rôle actif. Les structures étudiées ne sont pas non plus isolées : elles fonctionnent dans un environnement incertain ; sont soumises à des sollicitations extérieures. L'obtention d'une information plus précise et plus réaliste nécessite en toute rigueur l'utilisation d'une théorie de la fiabilité introduisant toute la dépendance nécessaire par rapport au temps.

La dépendance envers le temps peut être de deux types :

- les propriétés des matériaux peuvent se dégrader dans le temps. Les mécanismes de dégradation présentent habituellement une phase d'initiation et une phase de propagation. La durée d'initiation ainsi que les cinétiques de propagation peuvent être considérées comme aléatoires dans les analyses. Des exemples de tels mécanismes sont l'apparition et la propagation de fissures en mécanique de la rupture, la corrosion dans les structures métalliques ou le phénomène de fluage dans le béton, etc...

- le chargement peut être aléatoire dans le temps : les processus stochastiques sont alors introduits dans l'analyse. Cela permet de prendre en compte les chargements dus à l'environnement tels que la vitesse du vent, la température ou la hauteur des vagues, l'occurrence de chargement, les charges dues au trafic, etc...

Ces deux types de dépendance nécessitent différentes méthodes d'analyse.

Lorsque seuls les mécanismes de dégradation sont considérés, le problème semble pouvoir être étudié assez facilement. En effet, comme les processus de dégradation sont en général monotones dans le temps (la longueur d'une fissure augmente dans le temps, la taille d'une zone non corrodée ne peut que décroître dans le temps, etc...), il est possible de se concentrer sur la fin de la durée de vie de la structure. Ainsi le problème peut être résolu en utilisant les outils de la fiabilité indépendante du temps. Malheureusement, les hypothèses à satisfaire ainsi que les moyens de les vérifier ne sont pas, ou peu, définis dans la littérature.

Lorsqu'un chargement aléatoire est considéré, sous certaines hypothèses sur les propriétés du processus représentatif, une approche asymptotique [Bry *et al.* 91], [Sch *et al.* 91] semble la plus évoluée aujourd'hui pour traiter cette question. Elle est développée pour certains types de processus et nécessite des hypothèses assez fortes. Son utilisation peut alors s'avérer délicate.

Objectifs de ce travail

Les travaux présentés dans ce mémoire ont deux objectifs. Le premier objectif est d'initier une discussion sur les aspects théoriques à maîtriser pour prendre en compte l'effet du temps dans les calculs de fiabilité. Le second objectif est de proposer des méthodes de calcul pour les problèmes dépendant du temps en utilisant les outils classiques de la fiabilité des structures. Tout ceci constitue la première partie de ce mémoire. La seconde partie expose la mise en œuvre de méthodes proposées au travers de deux exemples mécaniques.

La première partie se décompose ainsi en quatre chapitres :

- Le premier chapitre permet d'introduire la fiabilité dépendante du temps ainsi que les différentes notions de probabilité rencontrées en fiabilité mécanique. Ensuite les outils mathématiques nécessaires à l'étude d'un problème de fiabilité dépendante du temps sont présentés ainsi que des exemples conducteurs qui permettront d'illustrer les différentes propositions développées tout au long de ce mémoire. La notion de franchissement d'un processus, exposée ensuite, va permettre de présenter les relations générales concernant la probabilité de défaillance prenant en compte l'effet du temps : la probabilité de défaillance cumulée. Les principes de la simulation de Monte-Carlo terminent ce chapitre.
- Le deuxième chapitre présente les relations permettant de déterminer la probabilité de défaillance dans le cadre de l'approche asymptotique pour certains types de processus. Cette approche est la plus développée à ce jour, et c'est celle qui est implémentée dans le logiciel COMREL-TV, logiciel permettant d'effectuer des calculs de fiabilité, qui, de par sa notoriété, est utilisé tout au long de ce travail comme outil de comparaison. Elle est basée sur une décomposition des variables en différents types. Des développements mathématiques ont permis d'aboutir à des relations que nous développons dans le cadre des processus Gaussiens différentiables.
- Le troisième chapitre expose les deux méthodes que nous proposons. La première, nommée PHI2 est basée sur l'approche système de la fiabilité et l'utilisation d'outils classiques de la fiabilité mécanique. La seconde, nommée RGMR, est basée sur la géométrie Riemannienne.
- Le quatrième chapitre a pour but de comparer les méthodes exposées au chapitre précédent, avec les méthodes classiques décrites dans les deux premiers chapitres, du point

de vue des hypothèses nécessaires à chacune, de leur précision et de leur coût de calcul. Quatre cas sont traités et permettent de montrer les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles.

La seconde partie est composée de deux chapitres. Elle illustre la mise en œuvre des méthodes présentées précédemment.

- La première étude concerne d'une enceinte en béton précontraint à travers un modèle simplifié. Il s'agit d'un exemple dont la dépendance envers le temps émane uniquement des propriétés des matériaux.
- La seconde étude présente une poutre en béton armée soumise à la fois à un chargement extérieur stochastique et à une évolution dans le temps des caractéristiques du matériau (phénomène de fluage). Il s'agit d'un cas que seule la méthode PHI2 peut traiter, ce qui permet d'en montrer tout l'avantage.

Une partie de ce travail de thèse a été impulsée par le département "Matériaux et Mécanique des Composants" d'EDF R&D, qui en a assuré le co-financement et le co-encadrement au travers d'un contrat-cadre liant ce département au Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée (LaRAMA).

Première partie

La fiabilité fonction du temps

Chapitre 1

De la probabilité instantanée à la probabilité cumulée

1.1 Introduction

1.1.1 Une modélisation par variables aléatoires ou processus stochastiques

Sollicitée par un champ d'actions d'origines diverses, une structure mécanique répond en fonction de sa géométrie et des caractéristiques de résistance de ses matériaux constitutifs. Le fait que la réponse soit considérée comme acceptable dépend des exigences à satisfaire. On distingue généralement les critères associés à l'état-limite ultime de la structure qui sont liés à la pérennité de l'ouvrage (par exemple, résistance vis-à-vis d'un mode de ruine) et les critères associés aux états-limites de service (portant par exemple sur la déformation ou le déplacement maximal admissible). Chacun d'entre eux peut être exprimé en terme d'état-limite, dépendant lui-même d'un certain nombre de variables. Ces variables, appelées variables de conception, sont notées $X(t, \omega)$ où t exprime qu'elles sont fonction du temps et ω qu'elles dépendent d'un aléa. Pour préciser cette variable, disons simplement pour le moment que chaque élément ω d'un espace Ω représente une réalisation possible de la variable aléatoire $X(\omega)$. Ainsi, $X(\omega = \omega_0) = x$ est une réalisation de la v.a., ou un tirage. Du point de vue mathématique, ces variables $X(t, \omega)$ sont des processus indexés sur le temps. Une généralisation, qui ne sera pas abordée dans ce travail, introduit les processus indexés sur le temps et l'espace. Elle relève plutôt des éléments finis stochastiques.

Les variables de conception représentent aussi bien les données relatives à la structure telles que les propriétés des matériaux, la géométrie, les conditions aux limites que les données relatives aux actions qui s'y appliquent. Ces données émanent de l'étude d'une réalité physique ayant abouti à une image mathématique de celle-ci et il est illusoire de penser qu'elles sont parfaitement connues. La connaissance à disposition ne permet de disposer que d'une information limitée et incertaine à laquelle les modèles probabilistes peuvent donner une structure mathématique.

Si le caractère aléatoire des variables de conception ne provient que de l'aléa ω , alors elles sont modélisées par des variables aléatoires. Si elles sont aussi indexées sur le temps t , elles sont modélisées par des processus stochastiques dont la propriété essentielle est de posséder une corrélation entre deux instants. Par exemple, la température extérieure qu'il fait actuellement dépend fortement de celle qu'il faisait voilà une heure.

1.1.2 Le problème de fiabilité des structures

Une définition du mot fiabilité est donnée par le texte retenu par l'AFNOR [Afn 88] :

« aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée... le terme est aussi utilisé comme caractéristique désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès ».

Ce texte présente l'intérêt d'une définition qualitative (*aptitude*) et d'une définition quantitative (*probabilité*) étroitement associées.

La fiabilité des structures concerne donc la prédiction de la probabilité de dépassement d'un état-limite à chaque instant, tout au long de la durée de vie en service. La probabilité d'occurrence d'un tel événement – la violation de l'état-limite – est une mesure numérique de la (*mal*)chance d'occurrence. La “violation” de cet état-limite peut être définie comme l'atteinte d'une condition non désirable dans le comportement de la structure, comme une exigence non satisfaite.

Une exigence à satisfaire est représentée par une règle, ou un ensemble de règles, issue de scénarios de défaillance dépendant du problème mécanique considéré. L'exemple le plus simple est le modèle “ $R - S$ ” où R désigne une *résistance* et S une *sollicitation*, dont l'état-limite associé est $R - S = 0$. Plus généralement, une *fonction de performance* est associée à une règle de fonctionnement, elle est notée $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$.

On définit alors :

- une *fonction d'état-limite* ou *marge* par :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = 0$$

- un *domaine de sûreté* \mathcal{D}_s par :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) > 0$$

- et un *domaine de défaillance* \mathcal{D}_f par :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) \leq 0$$

où t représente le temps et ω l'aléa.

Ces définitions permettent de poser le problème de fiabilité des structures tel qu'il est abordé dans ce travail :

Connaissant une modélisation des variables de conception par processus stochastiques $\mathbf{X}(t, \omega)$ et un scénario de défaillance auquel est associée la fonction de performance $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$, calculer :

$$\text{Prob}(\exists \tau \in [t_1, t_2], \text{tq. } G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) \leq 0)$$

c'est-à-dire la probabilité de l'événement : il existe une date τ appartenant à la durée de vie $[t_1, t_2]$ pour laquelle la structure est défaillante.

Dans le cadre de la fiabilité des structures, les ruptures ou endommagements majeurs sont rares, ainsi la violation des états-limites les plus sérieux ont une occurrence assez faible.

1.1.3 Deux phénomènes conduisant à la défaillance

La défaillance d'une structure résulte de deux phénomènes, conduisant à deux types d'études. En effet, une structure peut être défaillante suite à la dégradation progressive des caractéristiques de résistance des matériaux (endommagement, fissuration, vieillissement physico-chimique,...) ou bien à la suite d'actions aléatoires extrêmes dont la probabilité d'occurrence augmente avec la durée de vie (action climatique décennale, centennale,...).

- Dans une étude de dégradation, l'état-limite ne comporte souvent que des fonctions du temps décrivant la cinétique du processus et des variables aléatoires $R(\omega)$ modélisant l'aléa des paramètres de ce processus d'où $\mathbf{X}(t, \omega) = \mathbf{R}(\omega)$.
- Dans une étude d'actions aléatoires, l'état-limite comporte des processus aléatoires $S(t, \omega)$ seuls, d'où $\mathbf{X}(t, \omega) = \mathbf{S}(t, \omega)$. Leur étude est plus complexe et les outils à mettre en œuvre le sont en général tout autant.
- Dans une étude plus générale, l'état-limite peut comporter une combinaison des deux champs : $R(\omega)$ et $S(t, \omega)$ sont présents simultanément dans l'état-limite d'où $\mathbf{X}(t, \omega) = \{\mathbf{R}(\omega), \mathbf{S}(t, \omega)\}$.

1.1.4 Plan du chapitre

Ce chapitre va nous permettre de préciser le problème de fiabilité fonction du temps que nous venons d'introduire et de montrer quelles sont les solutions dès maintenant disponibles en fonction des hypothèses retenues. Il souligne également quelles sont les questions ouvertes qui feront l'objet de notre contribution dans les chapitres suivants. Il est divisé en quatre sections :

- La première section introduit les définitions des probabilités instantanée et cumulée, probabilités qui interviennent en fiabilité mécanique. Il traite également le cas où l'état-limite comporte seulement des variables aléatoires $R(\omega)$, par exemple dans le cas où seule la dégradation d'un matériau est étudiée.
- La deuxième section permet de donner quelques rappels mathématiques nécessaires au traitement d'un problème de fiabilité dépendant du temps et de définir les exemples conducteurs qui seront traités tout au long de ce document.
- La troisième section présente la notion de franchissement pour un processus $S(t, \omega)$ et du taux de franchissements associé.
- La dernière section présente les relations concernant la probabilité cumulée de défaillance dans le cas général où $R(\omega)$ et $S(t, \omega)$ sont présents ainsi que les principes de la méthode de Monte-Carlo.

1.2 Définition de la probabilité instantanée et de la probabilité cumulée

1.2.1 Probabilité instantanée de défaillance

En utilisant une analyse probabiliste à un instant donné, supposée indépendante des états précédents (non conditionnée par rapport aux instants précédents), il est possible de calculer la **probabilité instantanée** de défaillance :

$$P_{f,i}(t) = \text{Prob}(G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) \leq 0) \quad (1.1)$$

où $\mathbf{X}(t, \omega)$ est le vecteur des variables de conception, t le temps et ω l'aléa.

$P_{f,i}(t)$ est la probabilité que la structure soit défaillante à l'instant t .

1.2.2 Probabilité cumulée de défaillance

Une hypothèse de départ importante est : on considère que sur un petit intervalle de temps $[\tau, \tau + \Delta\tau]$, il ne peut y avoir qu'un seul franchissement (hypothèse de régularité du processus que nous précisons à la section 1.3).

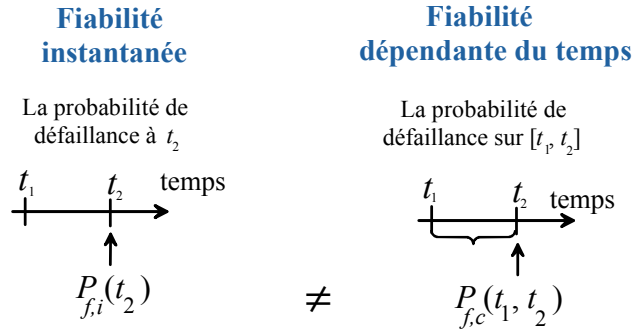


FIG. 1.1: la probabilité instantanée et la probabilité cumulée.

La probabilité cumulée de défaillance est alors exactement celle introduite en 1.1.2 :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) = \text{Prob}(\exists \tau \in [t_1, t_2], \text{tq. } G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) \leq 0) \quad (1.2)$$

Il s'agit de la probabilité que la structure soit défaillante sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ (fig. 1.1).

1.2.3 Un cas particulier $\mathbf{X}(t, \omega) \equiv \mathbf{R}(\omega)$

La dépendance envers le temps dans les analyses de fiabilité peut provenir des propriétés des matériaux qui se dégradent dans le temps. Les mécanismes de dégradation présentent habituellement une phase d'initiation et une phase de propagation. Lors d'une analyse de fiabilité, la durée d'initiation ainsi que la cinétique de propagation peuvent être considérées comme aléatoires. Des exemples de tels mécanismes sont l'initiation et la propagation de fissures en mécanique de la rupture, la corrosion dans les structures en acier, le phénomène de fluage dans le béton, etc.

Les mécanismes de dégradation présentent en général une cinétique monotone dans le temps : une fissure qui se propage ne peut se refermer sans traitement adéquat, une armature corrodée ne se régénère pas, etc. Si l'aléa dans les paramètres du modèle de dégradation est correctement représenté (variables $\mathbf{R}(\omega)$), la fonction d'état-limite associée au problème de fiabilité est alors décroissante pour toutes les réalisations de ces variables. Dans ce cadre, la proposition suivante (démontrée à l'annexe A) permet de calculer simplement la probabilité de défaillance cumulée :

Proposition : *supposons que la fonction de performance est décroissante jusqu'à un instant $T < \infty$, i.e.*

$$\forall s, t \leq T, \quad \forall \omega_0 \in \Omega, \quad s < t \Rightarrow G(s, \mathbf{X}(s, \omega = \omega_0)) \geq G(t, \mathbf{X}(t, \omega = \omega_0))$$

alors, à tout instant $\tau \leq T$, les probabilités de défaillance cumulée et instantanée sont identiques :

$$P_{f,c}(0, \tau) = P_{f,i}(\tau) \quad (1.3)$$

Commentaires :

(i) Il est rarement facile de vérifier analytiquement la propriété de décroissance de la fonction de performance G . Un moyen serait d'utiliser une simulation de Monte-Carlo de la dérivée :

$$\frac{d}{dt}G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$$

ce qui suppose que toutes les trajectoires de G sont continûment dérivables par rapport au temps t . Si on n'obtient que des valeurs négatives, on peut considérer que les hypothèses de la proposition sont satisfaites.

(ii) Nous avons supposé que toutes les trajectoires de la fonction de performance sont décroissantes. On peut affaiblir cette hypothèse en supposant que le processus G est presque sûrement décroissant, *i.e.* l'ensemble des trajectoires non décroissantes est de probabilité nulle.

(iii) Par contre si l'ensemble des trajectoires non décroissantes n'est pas de probabilité nulle, aussi petite soit-elle, la proposition est en principe mise en défaut :

$$P_{f,c}(0, \tau) \neq P_{f,i}(\tau)$$

Ceci pose un sérieux problème aux niveaux théorique et pratique :

1. Théoriquement, il faut savoir estimer la probabilité des trajectoires non décroissantes.
2. Pratiquement, dans la simulation, on peut obtenir des dérivées strictement positives de la fonction de performance.

Cette question mérite d'être approfondie dans le sens suivant : la probabilité de défaillance instantanée $P_{f,i}$ est une première approximation de $P_{f,c}$, qu'il s'agit d'améliorer par une correction faisant intervenir la probabilité des trajectoires non décroissantes :

$$P_{f,c} = P_{f,i} + O(P_G(\mathcal{N})) \quad (1.4)$$

où \mathcal{N} désigne l'ensemble des trajectoires non décroissantes. Si le processus G est continûment différentiable, on a :

$$\mathcal{N} = \bigcup_t \{G(\cdot) \mid \dot{G}(t) > 0\}$$

Souvent, des termes non négatifs proviennent du modèle mathématique. Par exemple, si on prend des variables Gaussiennes non tronquées, on peut obtenir des réalisations associées aux des queues de distribution qui engendrent la non-décroissance de la fonction de performance dans des situations non physiquement admissibles.

La décroissance de la fonction de performance se rencontre principalement dans des études telles que celles considérées ci-dessus. On peut aussi la retrouver dans d'autres types d'études n'impliquant pas nécessairement une dégradation. Nous en donnons ici un exemple.

Exemple : dimensionnement d'une tige soumise à un effort normal par l'application d'une action de traction/compression :

Considérons une tige horizontale dont l'extrémité gauche est encastree, l'autre demeurant libre (illustrée figure 1.2). Nous conservons les mêmes notations et valeurs numériques que dans la référence [Lem *et al.* 96].

On note S la section de cette poutre, f_y la limite élastique du matériau qui la compose et $P.t$ la force appliquée, t représentant le temps.

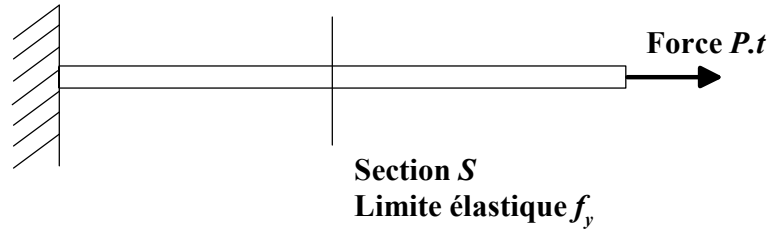


FIG. 1.2: exemple d'illustration : tige soumise à un effort normal.

La sollicitation mécanique est, dans le cas présent, une contrainte de valeur Pt/S . La règle de dimensionnement est que la contrainte soit inférieure à la limite élastique, ce qui se traduit par :

$$\frac{Pt}{S} < f_y$$

La fonction de performance s'exprime alors par :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = f_y(\omega) S - P(\omega) t$$

où $f_y(\omega)$ et $P(\omega)$ sont des variables aléatoires, S est déterministe.

Vérifions que G est décroissante. Pour cela, calculons sa dérivée :

$$\frac{d}{dt}G = \frac{d}{dt}(f_y S - Pt) = -P$$

En supposant P Gaussienne avec une moyenne $m_P = 70$ MN/jour et un coefficient de variation $\sigma_P/m_P = 21,5\%$, la probabilité d'avoir une valeur négative de P est de :

$$\text{Prob}(P \leq 0) = 1,6 \cdot 10^{-6}$$

On peut donc raisonnablement écrire, si $P_{f,i}$ est assez grand :

$$P_{f,c} = P_{f,i} + o(10^{-6})$$

en vertu de la proposition et du point (iii) ci-dessus.

Dans cet exemple, nous avons pu estimer la probabilité des trajectoires non décroissantes grâce à l'expression simple de la dérivée de la fonction de performance sans avoir recours à la simulation de Monte-Carlo.

1.3 Quelques définitions et notations

1.3.1 Rappels mathématiques

Après avoir introduit les principes du calcul de la fiabilité des structures soumises à des phénomènes dépendant du temps et donné un premier résultat, il est maintenant nécessaire de bien préciser les définitions et les notations retenues. Dans cette section, ne sont rappelés que les éléments essentiels. Le lecteur intéressé peut se reporter à l'annexe B où les références bibliographiques et des exemples sont donnés.

• Processus stochastique scalaire

Un processus stochastique, ou processus aléatoire, est un modèle mathématique d'évolution dont la dépendance envers le temps et/ou l'espace est gouvernée par des lois de probabilités. Dans toute la suite, seule la dépendance envers le temps t est considérée.

La notation retenue ici pour un processus stochastique scalaire est :

$$S(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega$$

- Pour t fixé, $S(t = t_1, \omega)$ est une fonction sur l'espace de probabilité Ω , et est ainsi une *variable aléatoire* que nous notons $S_{t_1}(\omega)$.
- Pour ω fixé, $S(t, \omega = \omega_1)$ définit une fonction de t et est une *réalisation*, une *fonction d'échantillonnage* ou encore une *trajectoire* du processus stochastique que nous notons $s(t)$.

On note $m_S(t) = E[S(t, \omega)]$ la moyenne du processus $S(t, \omega)$ et $\sigma_S(t)$ son écart-type. Soit $R_{SS}(t_1, t_2)$, la fonction d'autocorrélation du processus $S(t, \omega)$. Elle est définie par :

$$R_{SS}(t_1, t_2) = E[S(t_1, \omega) S(t_2, \omega)]$$

où l'opérateur $E[.]$ désigne l'opération d'espérance mathématique.

La fonction de covariance normalisée, également appelée coefficient de corrélation $\rho_{SS}(t_1, t_2)$ du processus $S(t, \omega)$, de moyenne $m_S(t)$ et d'écart-type $\sigma_S(t)$, est définie par :

$$\rho_{SS}(t_1, t_2) = \frac{R_{SS}(t_1, t_2) - m_S(t_1) m_S(t_2)}{\sigma_S(t_1) \sigma_S(t_2)}$$

Des exemples de phénomènes modélisés par des processus stochastiques sont : les imperfections de matériaux, les charges dues au vent sur une structure, l'accélération du sol due à un tremblement de terre, etc.

• Processus Gaussien

Un processus $S(t, \omega)$ est Gaussien si tout vecteur $\{S(t_1, \omega), \dots, S(t_n, \omega)\}$ est Gaussien.

Il est complètement défini par sa moyenne $m_S(t_i)$, $i = 1, \dots, n$, son écart-type $\sigma_S(t_i)$, $i = 1, \dots, n$ et son coefficient de corrélation $\rho_{SS}(t_i, t_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$.

• La régularité

Un processus est considéré comme régulier lorsque, sur un intervalle du type $[t, t + h]$ avec h très petit, il présente au plus un seul franchissement d'un niveau donné (par exemple le passage

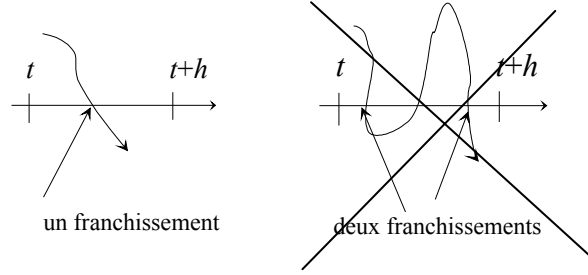


FIG. 1.3: processus $S(t, \omega)$ régulier : un franchissement au plus.

dans le domaine de défaillance) sur cet intervalle (fig. 1.3). Ce qui se traduit par, en notant $N(t, t+h)$ le nombre de franchissements sur l'intervalle $[t, t+h]$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(N(t, t+h) > 1) = 0$$

La notion de franchissement est définie plus complètement en annexe C.

Par la suite, les *trajectoires* de $S(t, \omega)$ sont supposées continues et le processus régulier (Annexe B).

- **Le mélange ("mixing")**

La notion de mélange, exposée plus en détail dans l'annexe B, peut être comprise comme une non corrélation entre deux états à des dates très éloignées. Ainsi, une réalisation d'un processus à une date $t + \Delta t$ n'est pas corrélée à la réalisation à la date t . En terme de fonction d'autocovariance normalisée, ceci peut s'écrire de la façon suivante :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \rho_{SS}(t, t + \Delta t) = 0$$

- **La dérivabilité en moyenne d'ordre deux (m.o.d.)**

Lorsque le processus $S(t, \omega)$ est de moyenne $m_S(t)$ et de fonction d'autocorrélation $R_{SS}(t_1, t_2)$, sa dérivée $\dot{S}(t, \omega)$ est de moyenne $m_{\dot{S}}(t)$ et d'écart-type $\sigma_{\dot{S}}(t)$. Ces quantités peuvent être déterminées grâce aux relations :

$$\begin{aligned} m_{\dot{S}}(t) &= \frac{d}{dt} m_S(t) \\ \sigma_{\dot{S}}^2(t) &= R_{\dot{S}\dot{S}}(t, t) - m_{\dot{S}}^2(t) \\ \text{avec } R_{\dot{S}\dot{S}}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_{SS}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

- **La stationnarité**

Lorsque le processus $S(t, \omega)$ est Gaussien stationnaire (fig. 1.4) de moyenne m_S et de fonction d'autocorrélation $R_{SS}(t, t + \tau) = R_{SS}(\tau)$, sa dérivée $\dot{S}(t, \omega)$ est aussi Gaussienne. La moyenne et l'écart-type du processus dérivé sont alors :

$$\begin{aligned} m_{\dot{S}}(t) &= \frac{d}{dt} m_S(t) = 0 \\ R_{\dot{S}\dot{S}}(\tau = 0) &= \sigma_{\dot{S}}^2 = - \left. \frac{d^2}{d\tau^2} R_{SS}(\tau) \right|_{\tau=0} \end{aligned}$$

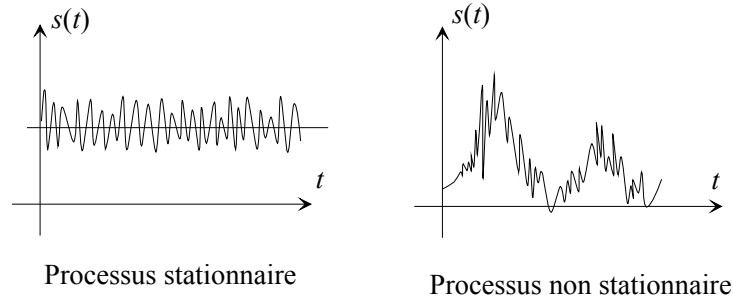


FIG. 1.4: représentation de trajectoires d'un processus - cas stationnaire et non stationnaire.

1.3.2 Exemples conducteurs

Quatre exemples conducteurs sont définis dans cette section. Ils vont être traités tout au long de ce document. Ils ont pour avantage de permettre de nombreux développements analytiques et ils offrent ainsi la possibilité de comparer les différentes méthodes qui sont exposées dans les chapitres suivants. Les fonctions de performance considérées sont les suivantes :

- Le premier cas est un cas stationnaire :

$$G_1(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - S(t, \omega)$$

Cas 1 : $R(\omega) - S(t, \omega)$

- Le deuxième cas est non-stationnaire (décroissance de G_2 déterministe sous l'hypothèse que les lois sont telles que l'on a presque sûrement la décroissance) :

$$G_2(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - \delta.t - S(t, \omega)$$

Cas 2 : $R(\omega) - \delta.t - S(t, \omega)$

- Le troisième cas est non-stationnaire (décroissance de G_3 aléatoire sous l'hypothèse que les lois sont telles que l'on a presque sûrement la décroissance) :

$$G_3(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - \delta(\omega).t - S(t, \omega)$$

Cas 3 : $R(\omega) - \delta(\omega).t - S(t, \omega)$

- Ce dernier cas a la particularité de présenter un extremum au milieu de l'intervalle d'étude de longueur T :

$$G_4(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) + \delta. \left(t - \frac{T}{2}\right)^2 - S(t, \omega)$$

Cas 4 : $R(\omega) - \delta.(t - \frac{T}{2})^2 - S(t, \omega)$

Variables	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
R	$\mathcal{N}(m_R; \sigma_R^2)$	$\mathcal{N}(m_R; \sigma_R^2)$	$\mathcal{N}(m_R; \sigma_R^2)$	$\mathcal{N}(m_R; \sigma_R^2)$
S	$\mathcal{N}(m_S; \sigma_S^2)$	$\mathcal{N}(m_S; \sigma_S^2)$	$\mathcal{N}(m_S; \sigma_S^2)$	$\mathcal{N}(m_S; \sigma_S^2)$
δ	0	<i>cste</i>	$\mathcal{N}(m_\delta; \sigma_\delta^2)$	$\mathcal{N}(m_\delta; \sigma_\delta^2)$
T	/	/	/	T

TAB. 1.1: données générales des exemples de référence.

Les données pour ces différents exemples sont rassemblées dans le tableau 1.1 :

Dans tous les cas, $S(t, \omega)$ est un processus Gaussien différentiable stationnaire dont le coefficient de corrélation $\rho_{SS}(t_1, t_2)$ est défini par :

$$\rho_{SS}(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)^2}{l^2}\right) \quad (1.5)$$

où l est la longueur de corrélation qui est, dans notre cadre, assimilée à un temps. L'intervalle d'étude est défini par $[0, T]$. Une telle forme est classique, elle exprime simplement les deux valeurs limites, à savoir $\rho = 1$ si $t_2 = t_1$ et $\rho = 0$ si $(t_2 - t_1)^2 \rightarrow \infty$.

1.4 Notion de franchissements

1.4.1 Franchissement en sortant

Soit $\mathbf{X}(t, \omega)$ le vecteur des variables de conception, t le temps et ω l'aléa. $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ représente la fonction de performance d'une structure selon un mode de fonctionnement donné. L'événement :

$$E = \{\exists \tau \in [t_1, t_2], \text{ tq. } G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) \leq 0\} \quad (1.6)$$

traduit un franchissement de l'état-limite $G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) = 0$ dans le domaine de défaillance \mathcal{D}_f et c'est le premier franchissement qui est recherché (*first outcrossing*) (Fig. 1.5).

L'existence de E n'est pas évidente. Cette hypothèse est levée par l'hypothèse de régularité faite sur les trajectoires.

On note $E[N^+(t_1, t_2)]$ l'espérance du nombre de franchissements sortant $N^+(t_1, t_2)$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Exemple : étudions les exemples donnés sur la figure 1.6.

Soit la fonction de performance $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$. Dans le cas de $G(t, \mathbf{X}(t, \omega_1))$, il n'y a pas de franchissement et la trajectoire reste dans le domaine de sûreté. Dans le cas de $G(t, \mathbf{X}(t, \omega_2))$, il y a un seul franchissement vers le domaine de défaillance. Dans le cas de $G(t, \mathbf{X}(t, \omega_3))$, la trajectoire passe dans le domaine de défaillance : il y a un franchissement. Puis, sortant du domaine de défaillance, on observe un autre franchissement. Dans ce cas, on ne s'intéresse qu'au premier franchissement, correspondant à la première défaillance.

Il faut noter que certains franchissements sont en fait des cas "tangents", c'est-à-dire qu'ils atteignent l'état-limite - $G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = 0$ - sans pour autant le franchir. Sous l'hypothèse de régularité des processus, Krée et Soize [KreSoi 83] ont démontré que ces cas tangents forment un ensemble négligeable du point de vue probabiliste, c'est à dire un ensemble de probabilité nulle.

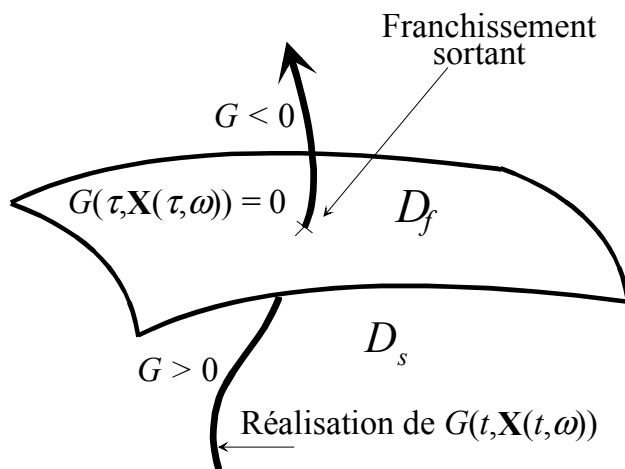


FIG. 1.5: franchissement en sortant.

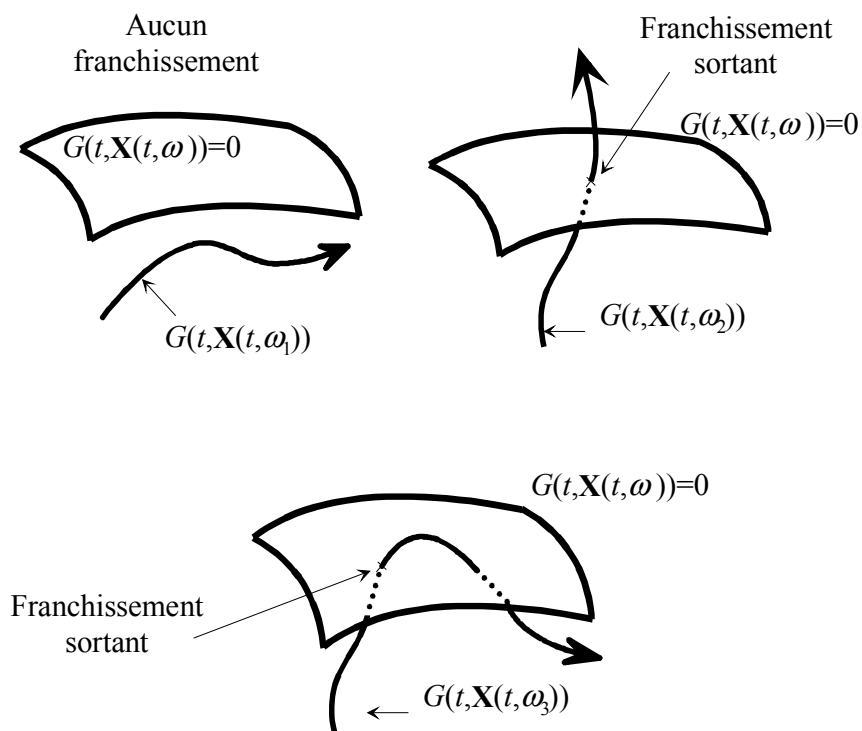


FIG. 1.6: exemples d'illustration de franchissements.

1.4.2 Taux de franchissements

Le taux de franchissements $\nu(t)$ est lié au nombre de franchissements $N^+(t_1, t_2)$ par la relation :

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N^+(t, t + \Delta t) = 1)}{\Delta t}$$

Le nombre moyen de franchissements sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est alors [DitMad 96] :

$$E[N^+(t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \nu(t) dt \quad (1.7)$$

• Taux de premier franchissement

En fiabilité, nous nous intéressons au taux de premier franchissement $\nu_1(t)$ qui va nous permettre de déterminer la probabilité de première défaillance. Il est difficile de déterminer ce taux dans le cas général.

• Formule de Rice

La première expression permettant le calcul du taux de franchissements a été proposée par Rice en 1944 [Ric 44a], [Ric 44b]. Elle est basée sur l'hypothèse selon laquelle le processus $S(t, \omega)$ est scalaire, différentiable et que les trajectoires sont continûment différentiables. Elle a été généralisée aux processus vectoriels par Belayev [Bel 68].

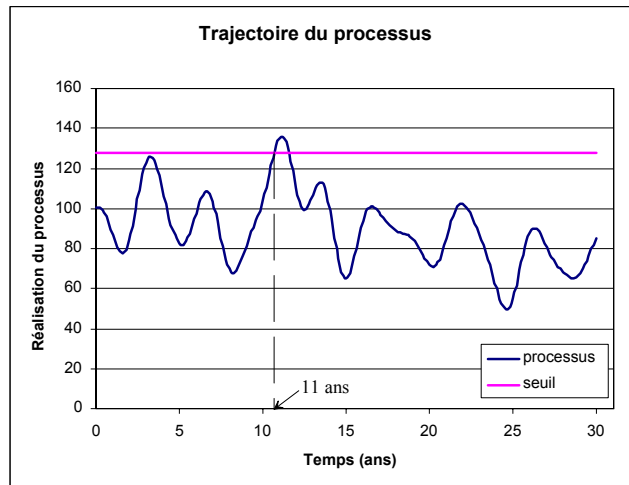


FIG. 1.7: exemple de trajectoire d'un processus Gaussien et de franchissement d'un seuil.

Le relation donnée par Rice est basée sur le dépassement d'un seuil par le processus considéré. Ceci est illustré figure 1.7 où une trajectoire d'un processus Gaussien est représentée ainsi qu'un seuil (fonction de niveau) constant dans le temps. A la date $t = 11$ ans, le processus franchit le seuil. C'est ce type de franchissement que nous étudions ici.

Soit :

- $z(t)$ une fonction de niveau, déterministe ;

- $f_{S\dot{S}}(u, v)$ la distribution de probabilité conjointe des valeurs des processus $S(t, \omega)$ et $\dot{S}(t, \omega)$.

Dans le cas scalaire, le taux de franchissements ν^+ peut être déterminé grâce à la formule de Rice :

$$\nu^+(t) = \int_{\dot{z}(t)}^{\infty} (\dot{s} - \dot{z}(t)) f_{S\dot{S}}(z(t), \dot{s}) d\dot{s} \quad (1.8)$$

Dans le cas vectoriel, le calcul se fait avec la formule de Belayev [Bel 68] qui est une généralisation de celle de Rice.

$$\nu^+(t) = \int_{\partial\mathcal{D}_f} \mathbf{E} \left[\mathbf{n}^t(\mathbf{s}) \dot{\mathbf{S}}(t, \omega) | \mathbf{S}(t, \omega) = \mathbf{s} \right] f_{\mathbf{S}(t, \omega)}(\mathbf{S}) d\mathbf{S} \quad (1.9)$$

La frontière $\partial\mathcal{D}_f$ entre le domaine de sûreté et le domaine de défaillance est considérée ici comme déterministe. Dans un cas général, il n'y a aucune raison de penser que cette frontière soit purement déterministe. Elle peut dépendre de variables aléatoires. $\mathbf{n}^t(\mathbf{s})$ est un vecteur correspondant à la normale extérieure à $\partial\mathcal{D}_f$ au point considéré.

La notation ν^+ rappelle l'origine de la formule donnée pour le franchissement en croissant (dépassement d'un seuil par un processus). Il y a aussi ν^- pour le taux de franchissements en décroissant et ν pour le taux global (voir Annexe C pour la définition des différents franchissements). En fiabilité, c'est plutôt le franchissement en décroissant (on passe de $G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) > 0$ à $G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) \leq 0$) *i.e.* sortant du domaine de sûreté \mathcal{D}_s qui est recherché. Dans la suite, nous notons ν sans indiquer le signe puisqu'il ne peut pas y avoir d'ambiguïté. En revanche, nous serons amenés à séparer le taux de *premier* franchissement noté ν_1 , du taux de *tous* les franchissements noté ν .

Les développements de ces formules ne se font que pour des processus particuliers. Des travaux ont été effectués sur les processus, notamment les processus Gaussiens différentiables. Ce point est abordé au chapitre suivant (chap. 2).

Exemple : *soit un processus Gaussien stationnaire $S(t, \omega)$. Calculons le taux de franchissements pour ce processus pour la fonction de niveau $z(t) = a = cste$. La densité Gaussienne d'ordre 2 s'écrit :*

$$f_{S\dot{S}}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_S\sigma_{\dot{S}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x - m_S}{\sigma_S}\right)^2 + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{S}}^2}\right]\right)$$

où $S(t, \omega)$ est de moyenne m_S et d'écart-type σ_S et $\dot{S}(t, \omega)$ est de moyenne 0 et d'écart-type $\sigma_{\dot{S}}$. En effet, la moyenne de $\dot{S}(t, \omega)$ est égale à 0 car $m_{\dot{S}}(t) = \frac{d}{dt}m_S(t)$ et $m_S(t) = cste$ pour un processus stationnaire. Le calcul de $\nu(t)$ donne :

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \int_0^{\infty} (\dot{s} - 0) \frac{1}{2\pi\sigma_S\sigma_{\dot{S}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a - m_S}{\sigma_S}\right)^2 + \frac{\dot{s}^2}{\sigma_{\dot{S}}^2}\right]\right) d\dot{s} \\ &= \frac{\sigma_{\dot{S}}}{2\pi\sigma_S} \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a - m_S}{\sigma_S}\right)^2 + \frac{\dot{s}^2}{\sigma_{\dot{S}}^2}\right]\right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{S}}}{\sigma_S} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a - m_S}{\sigma_S}\right)^2\right) \end{aligned}$$

On remarque que le taux de franchissements est indépendant du temps et donc constant. Ceci est toujours vrai dans le cas stationnaire.

1.4.3 Développement de la formule de Rice

La formule de Rice (1.8) est ici développée pour calculer le taux de franchissements et la probabilité cumulée de défaillance dans les cas 1 et 2 des exemples conducteurs.

Pour généraliser l'écriture, on note que la variable X de loi Gaussienne a pour moyenne m_X et écart-type σ_X .

▷ Cas 1 : $R(\omega) - S(t, \omega)$

Soit la "pulsation" ω_0 ("cycle rate" en anglais) défini par :

$$\omega_0^2 = \left. \frac{\partial^2 \rho_{SS}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2}$$

ω_0 a donc pour valeur dans le cas étudié (voir expression (1.5)) :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{l} \quad (1.10)$$

Le taux de franchissements pour un processus $S(t, \omega)$ et un seuil déterministe r est donné par Schall *et al.* [Sch *et al.* 91] :

$$\nu(t|r) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \phi\left(\frac{r - m_S}{\sigma_S}\right)$$

Pour obtenir le résultat correspondant au cas 1, il faut intégrer cette relation par rapport à la variable R , dont la densité de probabilité s'écrit $f_R(r) = \frac{1}{\sigma_R} \phi\left(\frac{r - m_R}{\sigma_R}\right)$:

$$\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \phi\left(\frac{r - m_S}{\sigma_S}\right) \frac{1}{\sigma_R} \phi\left(\frac{r - m_R}{\sigma_R}\right) dr$$

En utilisant les résultats analytiques d'Owen [Owe 80], on aboutit à :

$$\nu(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \phi\left(\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right)$$

Le taux étant indépendant du temps, il vient :

$$E[N^+(t_1, t_2)] = \nu(t) \cdot (t_2 - t_1) = \nu \cdot (t_2 - t_1) \quad (1.11)$$

♣

▷ Cas 2 : $R(\omega) - \delta \cdot t - S(t, \omega)$

Pour traiter ce cas, il faut connaître la probabilité cumulée de défaillance pour une fonction de performance de la forme $G(t, \omega) = a(t) - S(t, \omega)$ où $a(t)$ est un seuil dépendant du temps. Une telle relation est donnée par Cramer et Leadbetter dans [CraLea 67]. Elle permet de générer des exemples analytiques comme nous le faisons pour le cas 2.

Soit le seuil normalisé correspondant :

$$b(t) = \frac{a(t) - m_S}{\sigma_S}$$

On note $\dot{b}(t)$ sa dérivée par rapport au temps t .

Le nombre moyen de franchissements entre t_1 et t_2 est donné par la relation :

$$\mathbb{E} [N^+ (t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \omega_0 \phi (b(t)) \Psi \left(\frac{\dot{b}(t)}{\omega_0} \right) dt$$

avec $\Psi(x) = \phi(x) - x\Phi(x)$.

Le taux de franchissements est alors :

$$\nu(t) = \omega_0 \phi(b(t)) \Psi \left(\frac{\dot{b}(t)}{\omega_0} \right)$$

Pour le cas 2, le seuil normalisé a la forme suivante :

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{r - \delta t - m_S}{\sigma_S} \\ \dot{b}(t) &= -\frac{\delta}{\sigma_S} \end{aligned}$$

Le calcul est donc le suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N^+ (t_1, t_2)] &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}} \nu(t) f_R(r) dr dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}} \omega_0 \phi \left(\frac{r - \delta t - m_S}{\sigma_S} \right) \Psi \left(\frac{-\delta}{\sigma_S \omega_0} \right) \frac{1}{\sigma_R} \phi \left(\frac{r - m_R}{\sigma_R} \right) dr dt \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $u = (r - m_R)/\sigma_R$ et en utilisant les résultats d'intégrales donnés par Owen [Owe 80], on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N^+ (t_1, t_2)] &= \int_{t_1}^{t_2} \omega_0 \Psi \left(\frac{-\delta}{\sigma_S \omega_0} \right) \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \phi \left(\frac{m_R - \delta t - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) dt \\ &= \omega_0 \frac{\sigma_S}{\delta} \Psi \left(\frac{-\delta}{\sigma_S \omega_0} \right) \left\{ \Phi \left(\frac{m_R - \delta t_1 - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) - \Phi \left(\frac{m_R - \delta t_2 - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right) \right\} \end{aligned}$$

♣

1.4.4 Taux global de franchissements

La formule du taux global de franchissements développée par Rice a été reprise par Ditlevsen et Madsen dans [DitMad 96] en contexte d'analyse de fiabilité.

On définit :

- $\mathcal{D}_s(t)$ l'ensemble des réalisations de $\mathbf{S}(t, \omega)$ tel que $G(t, \mathbf{S}(t, \omega)) > 0$;
- $\mathcal{D}_f(t)$ l'ensemble des réalisations de $\mathbf{S}(t, \omega)$ tel que $G(t, \mathbf{S}(t, \omega)) \leq 0$;
- $\delta\mathcal{D}_s(t)$ l'ensemble des réalisations de $\mathbf{S}(t, \omega)$ tel que $G(t, \mathbf{S}(t, \omega)) = 0$, formant ainsi "la frontière" entre les domaines $\mathcal{D}_s(t)$ et $\mathcal{D}_f(t)$.

$N(t_1, t_2)$ représente le nombre de franchissements dans le domaine de défaillance sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

Si on suppose que le processus $\mathbf{S}(t, \omega)$ et la réalisation $s(t)$ ont des propriétés telles que, dans l'intervalle de temps t à $t + \Delta t$, il y a deux franchissements – ou plus – à travers la frontière $\partial \mathcal{D}_f(t)$ (sortant ou entrant) avec la probabilité d'un ordre supérieur à 1 en Δt (*i.e.* pour chaque entier $i \geq 2$, il existe une constante p_i telle que la probabilité d'avoir $i \geq 2$ franchissements est $p_i o(\Delta t)^1$), alors on a :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}[N(t, t + \Delta t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(N(t, t + \Delta t) = 1) \quad (1.12)$$

avec $\sum_{i=2}^{\infty} ip_i < \infty$ et la limite dans (1.12) existe.

L'équation (1.12) s'explique grâce au calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N(t, t + \Delta t)] &= P(N(t, t + \Delta t) = 1) + 2.P(N(t, t + \Delta t) = 2) + \dots \\ &= P(N(t, t + \Delta t) = 1) + o(\Delta t) \\ &= P(N(t, t + \Delta t) = 1) \end{aligned}$$

Il faut $\sum_{i+2}^{\infty} ip_i < \infty$ car en fait on étudie la limite de $\frac{p_1}{\Delta t}$. La fonction de répartition est définie par $\sum_{i=1}^{\infty} ip_i = 1$ donc on a $p_1 = 1 - \sum_{i=2}^{\infty} ip_i$ d'où, si $\sum_{i+2}^{\infty} ip_i < \infty$ alors p_1 existe.

Au niveau de la théorie de la fiabilité des structures, il est suffisant de considérer les problèmes de franchissements sortants pour les processus qui ont ce type de propriété.

Il faut noter que l'événement (succès à t – défaillance à $t + \Delta t$) :

$$\{\mathbf{S}(t, \omega) \in \mathcal{D}_s(t)\} \cap \{\mathbf{S}(t + \Delta t, \omega) \in \mathcal{D}_f(t + \Delta t)\} \quad (1.13)$$

implique l'événement :

$$\{N(t, t + \Delta t) \geq 1\} \quad (1.14)$$

et que l'événement différence entre (1.14) et (1.13) (c'est à dire que l'événement (1.14) ait lieu sans l'occurrence de (1.13)) est un sous-événement de l'événement "il y a un nombre pair de franchissements". En effet, lorsqu'on dit qu'il y a un nombre pair de franchissements, on considère qu'il y a des franchissements sortants et entrants dans le domaine de sûreté. La différence entre les formules (1.14) et (1.13) est en fait la considération des franchissements entrants dans le domaine de sûreté seulement puisqu'il y a au moins un franchissement, qui n'est pas sortant.

Il s'ensuit que la probabilité associée à l'événement (1.14) est encadrée par la probabilité associée à l'événement (1.13) et la somme de cette probabilité et de celle d'obtenir un nombre pair de franchissements. C'est à dire :

$$\begin{aligned} &P(\{\mathbf{S}(t, \omega) \in \mathcal{D}_s(t)\} \cap \{\mathbf{S}(t + \Delta t, \omega) \in \mathcal{D}_f(t + \Delta t)\}) \\ &\leq \\ &P(N(t, t + \Delta t) \geq 1) \\ &\leq \\ &P(\{\mathbf{S}(t, \omega) \in \mathcal{D}_s(t)\} \cap \{\mathbf{S}(t + \Delta t, \omega) \in \mathcal{D}_f(t + \Delta t)\}) + P(N(t, t + \Delta t) = 2k) \end{aligned} \quad (1.15)$$

¹Une définition de $o(\Delta t)$ est donnée en annexe E.

$k \in \mathbb{N}$.

Le dernier terme dans la dernière ligne de l'équation (1.15) étant $o(\Delta t)$, on obtient toujours :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}[N(t, t + \Delta t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(\{\mathbf{S}(t, \omega) \in \mathcal{D}_s(t)\} \cap \{\mathbf{S}(t + \Delta t) \in \mathcal{D}_f(t + \Delta t)\}) \quad (1.16)$$

du moment que $P(N(t, t + \Delta t) \geq 1)$ et $P(N(t, t + \Delta t) = 1)$ dans (1.12) ne diffèrent que par des termes d'ordre $o(\Delta t)$.

La limite du terme de gauche de (1.16) est notée $\nu(t)$ et est appelée le taux de franchissements sortant global au temps t :

$$\nu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(\{\mathbf{S}(t, \omega) \in \mathcal{D}_s(t)\} \cap \{\mathbf{S}(t + \Delta t) \in \mathcal{D}_f(t + \Delta t)\}) \quad (1.17)$$

Il faut bien comprendre que la notion de franchissement n'a de sens que pour un processus. La surface d'état-limite qu'il traverse peut dépendre du temps mais n'est pas aléatoire. C'est bien ce qui est exprimée par la relation (1.17).

1.5 Calcul de la probabilité cumulée de défaillance

1.5.1 Principe du calcul

• Relation générale

La probabilité cumulée de défaillance $P_{f,c}(t_1, t_2)$ est encadrée par :

$$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} [P_{f,i}(t)] \leq P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + \mathbb{E}[N^+(t_{1+}, t_2)]$$

où $P_{f,i}(t)$ représente la probabilité instantanée à la date t . $N^+(t_{1+}, t_2)$ est le nombre de franchissements du domaine de sûreté vers le domaine de défaillance sur l'intervalle de temps $[t_{1+}, t_2]$. t_{1+} est définie par $t_{1+} = t_1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ce qui suit en est une brève démonstration.

Il n'y a jamais défaillance si on est dans le domaine de sûreté à l'instant de départ t_1 et si il n'y a aucun passage dans le domaine de défaillance sur l'intervalle de temps considéré $[t_{1+}, t_2]$. La probabilité P_a correspondant à cet événement est :

$$P_a(t_1, t_2) = P(\{G(t_1, \mathbf{X}(t_1, \omega)) > 0\} \cap \{N^+(t_{1+}, t_2) = 0\}) \quad (1.18)$$

La probabilité que l'on cherche est la probabilité de défaillance $P_{f,c}(t_1, t_2)$ qui est définie par :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) = 1 - P_a(t_1, t_2)$$

Il faut donc prendre l'événement complémentaire de celui impliqué dans la relation (1.18) :

$$\begin{aligned} P_{f,c}(t_1, t_2) &= 1 - P(\{G(t_1, \mathbf{X}(t_1, \omega)) > 0\} \cap \{N^+(t_{1+}, t_2) = 0\}) \\ &= 1 + P(\{G(t_1, \mathbf{X}(t_1, \omega)) > 0\} \cup \{N^+(t_{1+}, t_2) = 0\}) \\ &\quad - P(G(t_1, \mathbf{X}(t_1, \omega)) > 0) - P(N^+(t_{1+}, t_2) = 0) \\ &= 1 + P(\{G(t_1, \mathbf{X}(t_1, \omega)) > 0\} \cup \{N^+(t_{1+}, t_2) = 0\}) \\ &\quad - 1 + P(G(t_1, \mathbf{X}(t_1, \omega)) \leq 0) - 1 + P(N^+(t_{1+}, t_2) > 0) \\ &= P(G(t_1, \mathbf{X}(t_1, \omega)) \leq 0) + P(N^+(t_{1+}, t_2) > 0) \\ &\quad - P(\{G(t_1, \mathbf{X}(t_1, \omega)) \leq 0\} \cap \{N^+(t_{1+}, t_2) > 0\}) \end{aligned}$$

En négligeant le troisième terme de l'équation, on aboutit à la relation :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + P(N^+(t_{1+}, t_2) > 0) \quad (1.19)$$

$P_{f,i}(t_1)$ est calculée avec les outils de la fiabilité indépendante du temps.

De plus :

$$\begin{aligned} P(N^+(t_{1+}, t_2) > 0) &= P(N^+(t_{1+}, t_2) = 1) + P(N^+(t_{1+}, t_2) = 2) + \dots \\ &\leq P(N^+(t_{1+}, t_2) = 1) + 2P(N^+(t_{1+}, t_2) = 2) \\ &+ \dots = E[N^+(t_{1+}, t_2)] \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant, on obtient finalement :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + E[N^+(t_{1+}, t_2)] \quad (1.20)$$

En reportant la relation (1.7) dans la relation (1.20), cette **borne supérieure de la probabilité cumulée de défaillance** s'exprime par [Bol 81] :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \nu(\tau) d\tau \quad (1.21)$$

Elle est minorée par une borne inférieure définie par Shinozuka [Shi 64] :

$$\begin{aligned} P_{f,c}(t_1, t_2) &= 1 - P(G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) > 0; \forall t \in [t_1, t_2]) \\ &\geq 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \{G(t_i, \mathbf{X}(t_i, \omega)) > 0\}; \forall t_i \in [t_1, t_2]\right) \\ &\geq P\left(\bigcup_{i=1}^n \{G(t_i, \mathbf{X}(t_i, \omega)) \leq 0\}\right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

On obtient finalement une **borne inférieure de la probabilité cumulée de défaillance** :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \geq \max_{t_1 \leq t \leq t_2} [P_{f,i}(t)] \quad (1.23)$$

$P_{f,i}(t)$ représente la probabilité instantanée à la date t . Cette borne inférieure est en général une approximation grossière.

Le calcul de la borne supérieure de la probabilité cumulée de défaillance sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ passe par la connaissance du taux de franchissements du domaine de sûreté \mathcal{D}_s vers le domaine de défaillance \mathcal{D}_f . De la même façon, la probabilité de premier franchissement est obtenue en sommant la probabilité de défaillance instantanée $P_{f,i}(t_1)$ à la date t_1 de mise en service, et l'intégrale des taux de *premiers* franchissements sur la durée $t_2 - t_1$ choisie :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) = P_{f,i}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \nu_1(\tau) d\tau \quad (1.24)$$

Cependant, rechercher les taux de premiers franchissements ν_1 peut s'avérer délicat. C'est pourquoi on détermine plutôt une borne supérieure de cette probabilité, qui est la probabilité de *tous* les passages. La seule condition nécessaire est que le processus soit régulier.

• Méthodes de calcul

Compte-tenu des hypothèses, le calcul de $P_{f,c}(t_1, t_2)$ peut être abordé par différentes méthodes :

- la méthode de Monte-Carlo peut être appliquée sous des hypothèses larges, mais au prix de calculs généralement lourds et donc coûteux. Elle est présentée en 1.5.2.
- dans le cas de processus différentiables et à sauts ([Bry *et al.* 91], [Sch *et al.* 91]) il existe, pour ces deux types de processus, des relations explicites de l'espérance du nombre de franchissements sur un intervalle de temps donné. Les relations développées dans le cadre des processus différentiables Gaussiens sont données au chapitre 2, les processus à sauts ne rentrant pas dans le cadre de notre étude.
- l'application directe de la relation (1.17) a été proposée par Hagen et Tvedt [HagTve 91b] en introduisant un développement limité de la fonction de performance et par Der Kiureghian [DKiuLi 96], [LiDKiu 97] dans le domaine de la mécanique vibratoire. Elle est mise en œuvre selon plusieurs approches numériques au chapitre 3.
- enfin, il existe une situation où la probabilité cumulée de premier franchissement peut être calculée très facilement. Il s'agit du cas où la fonction de performance est décroissante. Elle a été présentée en 1.2.3.

• Discrétisation du processus

L'application de la méthode de Monte-Carlo aux processus stochastiques nécessite une procédure de discrétisation qui permet d'approximer le processus à partir d'un nombre fini de variables aléatoires qui seront ensuite simulées. La méthode EOLE (Expansion Optimal Linear Estimation) [LiDKiu 93] est ici utilisée. Des points $t_i, i = 1, \dots, N$ sont sélectionnés sur l'intervalle $[0, t]$. Le développement EOLE conduit à :

$$S(t, \omega) \approx m_S(t) + \sigma_S(t) \sum_{i=1}^r \frac{\xi_i(\omega)}{\sqrt{\lambda_i}} \phi_i^t C_{t,t_i} \quad (1.25)$$

où :

- $m_S(t), \sigma_S(t)$ sont respectivement la moyenne et l'écart-type du processus $S(t, \omega)$;
- $\xi_i(\omega)$ sont des variables aléatoires Gaussiennes centrées réduites indépendantes ;
- (λ_i, ϕ_i) sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de corrélation dont le terme générique est $C_{ij} = \{\rho_{SS}(t_i, t_j), i, j = 1, \dots, N\}$. Notons que les valeurs propres sont triées par ordre décroissant.
- C_{t,t_i} est un vecteur dépendant du temps dont les composantes sont $C_{t,t_i} = \rho_{SS}(t, t_i), i = 1, \dots, N$;
- $r \leq N$ est le nombre de termes dans la sommation correspondant aux r plus grandes valeurs propres.

Cette décomposition est une sorte de séparation des variables car le processus est remplacé par une somme de produits de variables aléatoires par des fonctions du temps. Le développement EOLE est calculé grâce à une routine Matlab émanant de [SudDKiu 00]. Un estimateur d'erreur, qui permet d'évaluer la précision de la discrétisation est calculé dans chaque cas par :

$$\varepsilon_{rr}(t) = 1 - \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} (\phi_i^t C_{t,t_i})^2 \quad (1.26)$$

Un exemple de trajectoire simulée dans le cas d'un processus S Gaussien différentiable est donné figure 1.8.

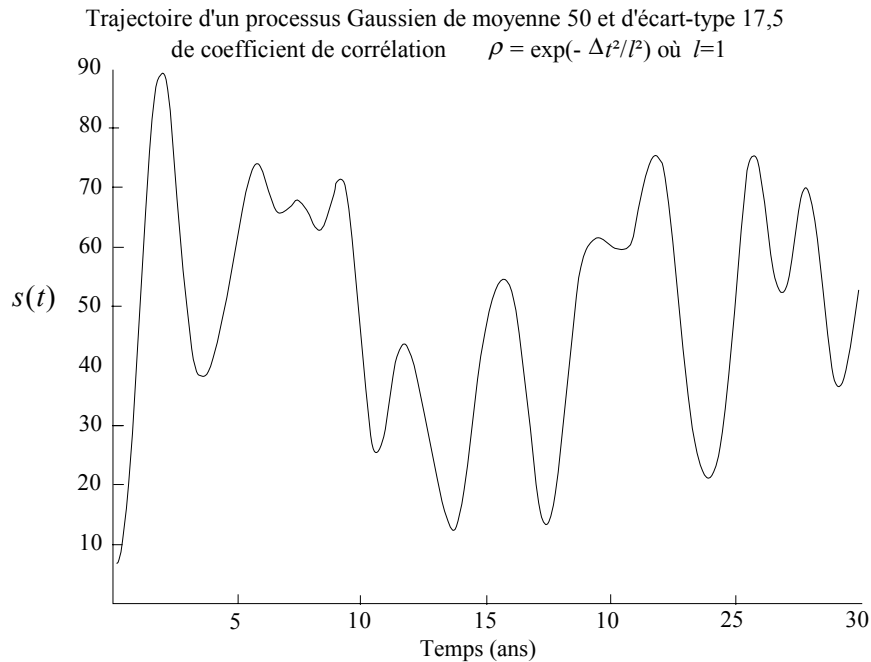


FIG. 1.8: exemple de trajectoire simulée d'un processus stationnaire grâce à la décomposition EOLE.

• Conclusion

Cette section a permis de donner les relations générales concernant les probabilités instantanée et cumulée de défaillance et d'établir une liste (non exhaustive) de méthodes permettant de les déterminer. La section suivante présente la méthode de Monte-Carlo qui a pour avantage de fournir des résultats simplement une fois la discrétisation du processus effectuée.

1.5.2 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode de type simulation. Pour obtenir un résultat suffisamment précis, cette méthode nécessite un grand nombre de tirages et il faut disposer pour cela d'un générateur de nombres aléatoires performant.

Pour déterminer le taux de franchissements et la probabilité cumulée de défaillance, nous nous appuyons sur les raisonnements utilisés dans le cadre d'une simulation de Monte-Carlo classique. En effet, nous pouvons considérer les simulations dans un contexte dépendant du temps comme une multitude de simulations de Monte-Carlo portant chacune sur un intervalle différent : pour chaque intervalle Δt , nous déterminons le nombre de franchissements (premier ou global) dans l'intervalle, de la même manière que dans une simulation de Monte-Carlo classique on détermine le nombre de tirages dans une zone de défaillance.

- **Premier franchissement**

La simulation de Monte-Carlo est très simple à mettre en œuvre lorsque la fonction de performance peut être écrite sous la forme de produits de variables aléatoires et de fonctions du temps. Tout d'abord, l'intervalle de temps est divisé en sous-intervalles. En effet, il suffit de tirer les variables aléatoires à t_1 puis de faire une simple étude des fonctions où le paramètre qui varie est le temps. La date à laquelle chaque trajectoire devient négative pour la première fois est notée. Le nombre de trajectoires ayant traversé l'état-limite sur l'intervalle considéré est alors incrémenté de 1. La formule permettant de déterminer la moyenne du taux de premier franchissement à une date donnée est :

$$\hat{\nu}_1(t) = \frac{\text{Nombre de premiers franchissements dans le domaine de défaillance sur } [t, t + \Delta t]}{\Delta t \cdot \text{Nombre total de tirages effectués}}$$

pour rester cohérent avec la définition du taux de premier franchissement.

Pour calculer la moyenne de la probabilité cumulée de première défaillance, la relation est :

$$\hat{P}_{f,c}(t_1, t_2) = \frac{\text{Nombre de premiers franchissements dans le domaine de défaillance sur } [t_1, t_2]}{\text{Nombre total de tirages effectués}}$$

Ce type de simulation s'applique à des processus qui sont décomposés sous la forme de variables aléatoires et de fonctions du temps. Cette décomposition n'est pas immédiate dans la plupart des cas, mais elle peut éventuellement être obtenue par décomposition en série orthogonale (ex. EOLE, relation (1.25)) ou transformation de Fourier.

- **Tous les franchissements**

La méthode est la même que précédemment à la différence près qu'il faut compter tous les franchissements dans le domaine de défaillance et non pas uniquement le premier.

La formule permettant de déterminer la moyenne du taux de tous les franchissements à une date donnée est :

$$\hat{\nu}(t) = \frac{\text{Nombre de franchissements dans le domaine de défaillance sur } [t, t + \Delta t]}{\Delta t \cdot \text{Nombre total de tirages effectués}}$$

Pour calculer la moyenne de la probabilité cumulée de défaillance, la relation est :

$$\hat{P}_{f,c}(t_1, t_2) = \frac{\text{Nombre de franchissements dans le domaine de défaillance sur } [t_1, t_2]}{\text{Nombre total de tirages effectués}}$$

Le tout en respectant le fait que la probabilité de défaillance est au plus égale à 1.

- **Mesure du coefficient de variation de la probabilité cumulée de défaillance estimée**

Ce qui suit est inspiré de Lemaire *et al.* [Lem *et al.* 01]. On recherche la variance $\text{var}(\hat{P}_{f,c}(t_1, t_2))$ de l'estimateur de la probabilité où $\hat{P}_{f,c}(t_1, t_2)$ est, soit la probabilité de premier franchissement, soit la probabilité de tous les franchissements. Le raisonnement qui suit est valable indifféremment dans les deux cas.

Soit la fonction indicatrice \mathbf{I}_{D_f} définie par :

$$\mathbf{I}_{D_f} = \begin{cases} 1 & \text{si il y a défaillance} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour N_{MC} tirages aléatoires, la moyenne empirique de \mathbf{I}_{D_f} est une **estimation non biaisée** de $P_{f,c}$:

$$P_{f,c}(t_1, t_2) = \mathbb{E} [\mathbf{I}_{D_f}] \approx \hat{P}_{f,c}(t_1, t_2) = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \mathbf{I}_{D_f}^{(r)}$$

Les tirages étant indépendants, la variance s'obtient par le calcul suivant :

$$\text{var} \left(\hat{P}_{f,c}(t_1, t_2) \right) = \text{var} \left(\frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \mathbf{I}_{D_f}^{(r)} \right) = \frac{1}{N_{MC}^2} \text{var} \left(\sum_{r=1}^{N_{MC}} \mathbf{I}_{D_f}^{(r)} \right) = \frac{1}{N_{MC}^2} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \text{var} \left(\mathbf{I}_{D_f}^{(r)} \right)$$

Soit

$$\text{var} \left(\hat{P}_{f,c}(t_1, t_2) \right) = \frac{1}{N_{MC}^2} N_{MC} \text{var} \left(\mathbf{I}_{D_f}^{(r)} \right) = \frac{1}{N_{MC}} \text{var} \left(\mathbf{I}_{D_f}^{(r)} \right) = \frac{1}{N_{MC}} \left(\mathbb{E} \left[\mathbf{I}_{D_f}^{(r)2} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbf{I}_{D_f}^{(r)} \right]^2 \right)$$

car les variables sont identiquement distribuées.

Cependant, cet estimateur est biaisé. L'estimateur non biaisé est obtenu en multipliant par $\frac{1}{N_{MC}-1}$ au lieu de $\frac{1}{N_{MC}}$. Sachant que $\mathbf{I}_{D_f}^{(r)2} = \mathbf{I}_{D_f}^{(r)}$, une approximation de l'**estimateur de la variance** est alors :

$$\text{var} \left(\hat{P}_{f,c}(t_1, t_2) \right) = \frac{1}{N_{MC} - 1} \left(\frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \mathbf{I}_{D_f}^{(r)} - \left(\frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \mathbf{I}_{D_f}^{(r)} \right)^2 \right)$$

• Mesure du coefficient de variation du taux de franchissements estimé

Soit $k(t, t + \Delta t)$ le nombre de franchissements sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. Le raisonnement qui suit concerne tous les franchissements sur l'intervalle considéré. La même démarche est possible pour les premiers franchissements.

Le **taux de franchissements estimé** pour N_{MC} tirages est alors :

$$\hat{\nu}(t) = \frac{k(t, t + \Delta t)}{N_{MC} \cdot \Delta t}$$

Pour déterminer la variance du taux de franchissements, on écrit tout d'abord :

$$\hat{P}_{f,c}(t, t + \Delta t) = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \mathbf{I}_{D_f}^{(r)} = \frac{k(t, t + \Delta t)}{N_{MC}}$$

D'où :

$$\text{var}(\hat{\nu}(t)) = \frac{\text{var} \left(\hat{P}_{f,c}(t, t + \Delta t) \right)}{\Delta t^2}$$

Une approximation de l'**estimateur de la variance** est alors :

$$\text{var}(\hat{\nu}(t)) = \frac{1}{(N_{MC} - 1) \Delta t^2} \left(\frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \mathbf{I}_{D_f}^{(r)} - \left(\frac{1}{N_{MC}} \sum_{r=1}^{N_{MC}} \mathbf{I}_{D_f}^{(r)} \right)^2 \right)$$

Soit encore :

$$\text{var}(\hat{\nu}(t)) = \frac{1}{(N_{MC} - 1) \Delta t^2} \frac{k(t, t + \Delta t)}{N_{MC}} \left(1 - \frac{k(t, t + \Delta t)}{N_{MC}} \right)$$

Cette expression nous informe que deux paramètres influent sur la précision du résultat :

- le nombre de tirages. Comme dans une simulation de Monte-Carlo classique, plus on augmente de nombre de tirages, plus la variance diminue.
- la taille de l'intervalle. Plus on diminue la taille de l'intervalle, plus la variance augmente dans un rapport quadratique.

La méthode de Monte-Carlo peut être rendue plus efficace par des techniques de conditionnement. Un exemple peut être trouvé dans [EnrFra 00].

1.6 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de poser les bases du calcul de fiabilité fonction du temps et d'introduire le problème du calcul de la probabilité cumulée de défaillance. Il a également permis de rappeler les outils mathématiques nécessaires, pour lesquels l'annexe B apporte des développements complémentaires.

Quelques résultats, résumés Fig. 1.9, ont été donnés :

- Lorsque seul le phénomène de dégradation est considéré (variable $R(\omega)$), la fonction de performance est généralement décroissante dans le temps et donc toutes les trajectoires sont décroissantes. Si cette propriété peut être vérifiée, le calcul de la probabilité cumulée de défaillance se réduit à celui de la probabilité instantanée.
- Lorsque le chargement, représenté par un processus $S(t, \omega)$, est aléatoire, une telle simplification n'est pas possible. Il faut alors utiliser l'approche par taux de franchissements telle qu'elle a été exposée.

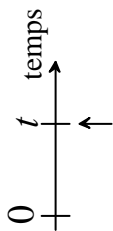
Dans les cas les plus généraux, les analyses de fiabilité mettent en jeu simultanément des processus $S(t, \omega)$ et des variables aléatoires $R(\omega)$. Il faut alors utiliser des relations générales que différentes méthodes permettent de calculer. La méthode de Monte-Carlo, méthode de simulation exposée dans ce chapitre, permet d'avoir des résultats pouvant servir de référence dans des situations simples.

Les chapitres suivants de cette partie vont maintenant nous permettre d'examiner l'approche asymptotique telle qu'elle est proposée par différents auteurs, puis de proposer des développements originaux à partir d'une approche de type "fiabilité des systèmes".

La fiabilité fonction du temps

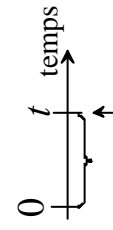
METHODES

Fiabilité instantanée
 La probabilité de défaillance à t



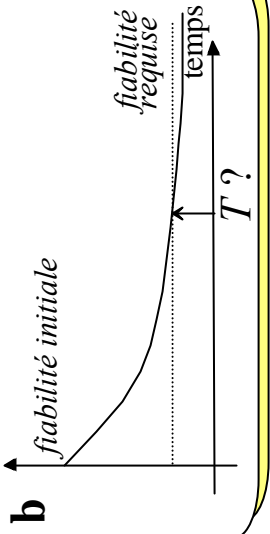
$$P_{f,i}(t) \neq P_{f,c}(0, t)$$

Fiabilité dépendante du temps
 La probabilité de défaillance sur $[0, t]$

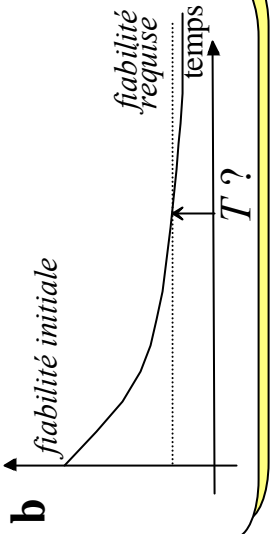


DONNÉES

Modèle mécanique
 $G(t, X(t, w))$
 Modèle probabiliste des données
 - sur la géométrie
 - sur le matériau
 - sur le chargement



OBJECTIFS



Chargement aléatoire

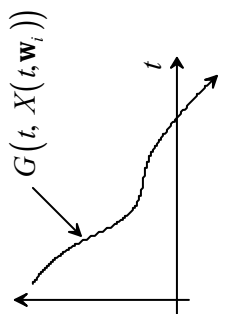
?

Dégradation

Chargement aléatoire + Dégradation

Fonction de performance décroissante

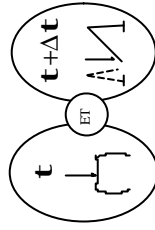
$$P_{f,c}(0, t) \approx P_{f,i}(t)$$



Taux de franchissements

Rice

$$n(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(\{X(t, w) \in D_s\} \cap \{X(t + \Delta t, w) \in D_f\})}{\Delta t}$$



Calcul de la probabilité de défaillance cumulée

$$P_{f,c}(0, t) \leq P_{f,i}(0) + \int_0^t n(t) dt$$

Simulation de Monte-Carlo

Approche asymptotique (chap. 2)

PHI2 (chap. 3)

RGMR (chap. 3)

Chapitre 2

Approche asymptotique

Le premier chapitre a souligné comment la fiabilité dépendante du temps est beaucoup plus complexe à calculer que celle indépendante du temps. De nombreux travaux ont été, et sont toujours, menés afin d'aboutir à des relations permettant de la calculer. La plupart de ces travaux est basée sur l'approche par taux de franchissements qui paraît incontournable d'après Rackwitz [Rac 98]. Très peu de solutions exactes existent. Un panel de solutions, basé sur une telle approche en utilisant les intégrations asymptotiques, a été développé notamment dans le cadre des processus Gaussiens différentiables et des processus de renouvellement à sauts rectangulaires [Bry *et al.* 91]. L'objet de ce chapitre est d'examiner en détail les résultats obtenus sur l'approche asymptotique.

Schall, Faber et Rackwitz [Sch *et al.* 91] ont décomposé les variables intervenant dans la fonction de performance en plusieurs types et cette démarche est rappelée dans la première section. La seconde section concerne les relations permettant de calculer la probabilité de défaillance cumulée dans le cadre des processus mélangeants. La troisième section présente une borne supérieure de cette probabilité. La section suivante expose, de façon résumée, les relations qui ont été mises en place dans le cadre des processus Gaussiens différentiables. Ce chapitre se termine par deux applications.

2.1 Décomposition des variables de la fonction de performance

Soit $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ la fonction de performance du vecteur des processus $\mathbf{X}(t, \omega)$. Il est possible de décomposer celui-ci en un jeu de trois types de variables [Sch *et al.* 91] :

- **R** : vecteur de **variables aléatoires indépendantes du temps** comme pour la fiabilité indépendante du temps. Leurs paramètres de distribution peuvent être des fonctions déterministes connues à chaque date t . La caractéristique la plus importante pour le triplet $(R(\omega), m_{R(\omega)}(t), \sigma_{R(\omega)}(t))$ est d'être non-ergodique. On peut citer le diamètre d'un câble ou le module d'Young de l'acier.
- **Q** : vecteur de **séquences stationnaires et ergodiques**. Généralement, il est utilisé pour modéliser les variations dans le temps à long terme des phénomènes modélisés. On suppose possible de diviser l'intervalle de temps $[0, t]$ en sous intervalles où $\mathbf{Q}(\tau, \omega) = \mathbf{q}(\omega)$ sur chaque sous-intervalle. Les paramètres des variables peuvent dépendre de **R**. On peut citer l'état de la mer, les états du trafic ou les régimes d'accélération du vent.
- **S** : vecteur de **processus suffisamment mélangeants**, non nécessairement stationnaires, dont les paramètres peuvent dépendre de **Q** et **R**. Les variations de $\mathbf{S}(t, \omega)$ sont

rapides comparées à celles de $\mathbf{Q}(t, \omega)$. Cela peut être une force avec un processus à saut, une contrainte suivant un processus Gaussien. Schall *et al.* classent les processus de type \mathbf{S} en deux catégories : les processus Gaussiens différentiables et les processus de renouvellement à sauts rectangulaires (voir la figure 2.1).

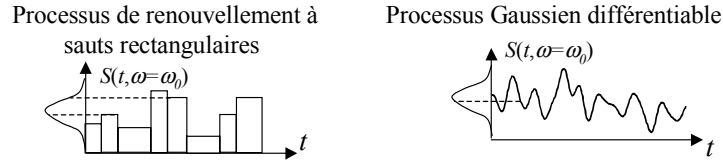


FIG. 2.1: exemple de trajectoires de variables de type \mathbf{S} .

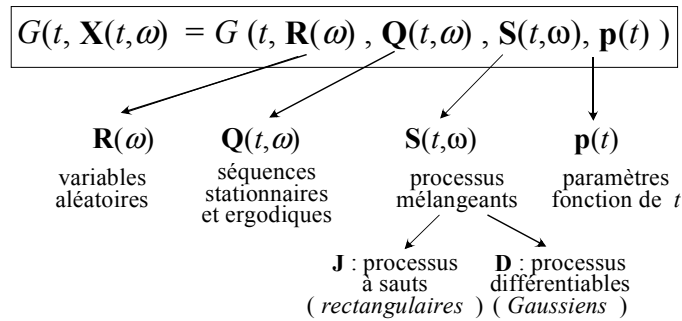


FIG. 2.2: décomposition des variables dans la fonction de performance.

La fonction de performance $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ s'écrit alors en fonction des différentes variables :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = G(t, \mathbf{R}(\omega), \mathbf{Q}(t, \omega), \mathbf{S}(t, \omega), \mathbf{p}(t))$$

où $\mathbf{p}(t)$ contient les paramètres fonction du temps. La figure 2.2 récapitule les hypothèses.

La non stationnarité d'une étude de fiabilité peut provenir de deux origines. Elle peut provenir de la non-stationnarité du processus ou de l'intervention explicite du temps dans l'expression de la fonction de performance G . Les exemples ci-dessous illustrent ce propos.

Exemple : [RCP 98] donne un exemple du type résistance – sollicitation. La fonction de performance est :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega)(1 + a_1 t + a_2 t^2) - (D(\omega) - L_1(t, \omega) - L_2(t, \omega) - L_3(t, \omega))$$

où R est une variable de résistance, D est une action permanente et L_i sont des processus stationnaires de chargement représentant différentes actions variables de type Q ou S . L'étude est non-stationnaire car le temps intervient explicitement dans l'expression de $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$.

Exemple : Soit la fonction de performance :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - S(t, \omega)$$

où R est une variable de résistance et S un processus aléatoire dont la moyenne a pour expression $m_S(t) = a.t$ ($a = cste$ et t est le temps). Cette étude n'est pas stationnaire.

Un problème de fiabilité dépendante du temps met en jeu des variables aléatoires et des processus. Pour calculer la probabilité de défaillance cumulée, on considère tout d'abord des réalisations des variables aléatoires tout en conservant le processus. Ainsi, on détermine le taux de franchissements de $\mathbf{S}(t, \omega)$. Il est alors conditionné sachant les autres variables \mathbf{r} et \mathbf{q} (réalisation resp. de $\mathbf{R}(\omega)$ et $\mathbf{Q}(t, \omega)$). Ensuite, on intègre par rapport à $\mathbf{R}(\omega)$ et $\mathbf{Q}(t, \omega)$.

2.2 Probabilité cumulée de défaillance pour les processus mélangeants

Cette section présente le principe du calcul de la probabilité cumulée de défaillance tel qu'il a été proposé par Schall, Faber et Rackwitz [Sch *et al.* 91] afin de souligner les hypothèses prises en compte.

2.2.1 Un niveau de fiabilité élevé

Ce qui suit suppose que les franchissements sont rares (niveau de fiabilité élevée) et asymptotiquement indépendants (processus mélangeant). Le niveau de fiabilité élevée n'est jamais réellement défini dans la littérature. Il faut satisfaire l'hypothèse que l'indice de fiabilité tend vers l'infini. Ditlevsen et Madsen [DitMad 96] donnent une approximation de la distribution Gaussienne Φ dans le cadre de la fiabilité en supposant la même hypothèse :

$$\Phi(-\beta) \approx \frac{\phi(\beta)}{\beta}$$

On peut définir l'erreur de l'approximation $\phi(\beta)/\beta$ par rapport à la valeur réelle $\Phi(-\beta)$ par :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\phi(\beta)}{\beta \cdot \Phi(-\beta)} - 1$$

Avoir une erreur inférieure à 5% (valeur prise classiquement) implique que :

$$\beta \geq 4,3 \rightarrow P_{f,i} \approx \Phi(-\beta) = 8.10^{-6}$$

Ce résultat est illustré figure 2.3, elle donne une idée de la signification "niveau de fiabilité élevée".

2.2.2 $\mathbf{S}(t, \omega)$ est seul présent

Lorsque $\mathbf{S}(t, \omega)$ (ou de façon équivalente $\mathbf{Q}(t, \omega)$) est seul présent dans la fonction de performance. On suppose que les sauts dans le domaine de défaillance suivent un processus de Poisson. D'après Cramer et Leadbetter [CraLea 67], la probabilité de défaillance cumulée peut être estimée à partir de la relation :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \approx 1 - \exp(-E[N^+(t_1, t_2)]) \text{ sous } \beta \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

où $E[N^+(t_1, t_2)]$ est l'espérance du nombre de franchissements de $\mathbf{S}(t, \omega)$ à travers la surface d'état-limite considérée.

Ditlevsen [Dit 71] a effectué des développements mathématiques pour prendre en compte la condition de défaillance à l'origine ($P_{f,i}(t_1) \neq 0$) :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \approx 1 - (1 - P_{f,i}(t_1)) \exp\left(-\frac{E[N^+(t_1, t_2)]}{1 - P_{f,i}(t_1)}\right)$$

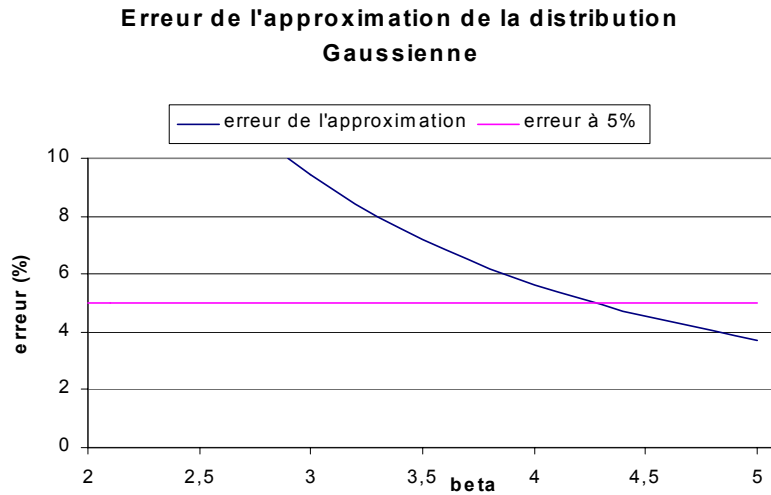


FIG. 2.3: approximation de la distribution Gaussienne.

2.2.3 $\mathbf{R}(\omega)$ et $\mathbf{S}(t, \omega)$ sont seuls présents

Le caractère Poissonien des sauts est perdu car ils ne sont plus indépendants du fait de la présence de variables de type \mathbf{R} non ergodiques. L'espérance du nombre de franchissements présente dans la relation (2.1) n'est valable qu'une fois conditionnée en \mathbf{R} , soit $N^+(t_1, t_2 | \mathbf{r})$. Par conséquent, la probabilité obtenue est conditionnée $P_{f,c}(t_1, t_2 | \mathbf{r})$. Pour obtenir la probabilité cherchée, il faut intégrer cette probabilité conditionnée suivant toutes les valeurs possibles de \mathbf{R} (opérateur espérance $\mathbf{E}_{\mathbf{R}}$). Ce qui donne [Rac 97] :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \approx \mathbf{E}_{\mathbf{R}} [1 - \exp(-\mathbf{E}[N^+(t_1, t_2 | \mathbf{r})])] \text{ sous } \beta \rightarrow \infty$$

2.2.4 $\mathbf{R}(\omega)$, $\mathbf{Q}(t, \omega)$ et $\mathbf{S}(t, \omega)$ sont présents

• Formulation

Dans ce cas, l'opérateur d'espérance est appliqué par rapport aux variables $\mathbf{R}(\omega)$ mais aussi par rapport aux variables $\mathbf{Q}(t, \omega)$. Une relation a été établie par Schall *et al.* [Sch *et al.* 91]. Elle est basée sur deux hypothèses fortes : $\mathbf{S}(t, \omega)$ est mélangeant et l'étude est à un niveau de fiabilité élevée (*i.e.* $P_{f,i}(t_1) \approx 0$). Ce qui donne :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \approx 1 - \mathbf{E}_{\mathbf{R}} [\exp[-\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [\mathbf{E}[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]]]] \text{ sous } \beta \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

En appliquant l'inégalité de Jensen (définie en annexe E), on obtient la relation suivante :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \approx 1 - \exp[-\mathbf{E}_{\mathbf{R}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [\mathbf{E}[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]]]] \text{ sous } \beta \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Schall *et al.* ont réalisé une étude développée dans [Sch *et al.* 91] en fonction de la place de l'espérance dans le calcul conduisant à des bornes : l'équation (2.2) donne une valeur exacte mais n'est pas la plus facile à calculer. La plus simple à utiliser consiste, d'après eux, à avoir toutes les espérances dans l'exponentielle (Eq. (2.3)) bien qu'elle puisse engendrer l'apparition d'erreur systématique sur les résultats.

2.2.5 Conclusion

Cette section ne peut prétendre à une présentation exhaustive de la méthode proposée par Schall, Faber et Rackwitz et nous suggérons au lecteur de se référer à l'article cité. Cependant, il nous paraissait nécessaire d'introduire la démarche afin d'en souligner le domaine d'application et les hypothèses afin d'être à même d'effectuer les comparaisons avec les résultats proposés. De plus, la mise en œuvre de la méthode est facilitée puisqu'elle est implémentée dans le logiciel COMREL-TV [RCP 98].

2.3 Borne supérieure de la probabilité

Le calcul précédent suppose que les franchissements sont rares (niveau de fiabilité élevée) et asymptotiquement indépendants (processus mixing). Lorsque tel n'est pas le cas, seule une borne supérieure de la probabilité de défaillance peut être trouvée. La relation donnée dans ce paragraphe a, pour la première fois, été publiée dans [Bol 81].

En suivant le même raisonnement que dans le chapitre précédent, on aboutit à la relation :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + P(N^+(t_{1+}, t_2) > 0) \quad (2.4)$$

$P_{f,i}(t_1)$ est calculée avec les outils de la fiabilité indépendante du temps. De plus :

$$\begin{aligned} P(N^+(t_{1+}, t_2) > 0) &= P(N^+(t_{1+}, t_2) = 1) + P(N^+(t_{1+}, t_2) = 2) + \dots \\ &\leq P(N^+(t_{1+}, t_2) = 1) + 2P(N^+(t_{1+}, t_2) = 2) \\ &+ \dots = \mathbf{E}_{\mathbf{R}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [\mathbf{E} [N^+(t_{1+}, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]]] \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant dans la relation (2.4), on obtient finalement :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + \mathbf{E}_{\mathbf{R}} [\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [\mathbf{E} [N^+(t_{1+}, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]]] \quad (2.5)$$

2.4 Application aux processus Gaussiens différentiables

2.4.1 Hypothèses du calcul

Le calcul est fondé sur l'hypothèse que le processus $\mathbf{X}(t, \omega)$ est Gaussien, à trajectoires continûment dérivables et sur des hypothèses suivantes basées sur la fonction de performance G .

Soit la fonction de performance $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable, elle définit une surface $G = \{x; G(x) = 0\}$. On suppose que :

1. $G(0) > 0$ et $\min_{x \in G} |x| = 1$.
2. G est compacte.
3. $\nabla G(x) \neq 0$ pour tout $x \in G$.
4. G est orientée par un champ de vecteurs normaux $n(x) = -|\nabla G(x)|^{-1} \nabla G(x)$.

Sous ces conditions, il est possible de définir une intégrale de surface sur G , notée ds_1 . Tant que G est compacte, l'aire de la surface de G est finie.

De plus, on suppose que la fonction $G(x)$ est suffisamment régulière pour que le nombre moyen de franchissements de $X(t, \omega)$ à travers G soit décrit par une formule d'intégrale de surface donnée par Belayev.

2.4.2 Taux de franchissements

L'approche générale par taux de franchissements a été développée, entre autres, par Rice en 1944 [Ric 44a], [Ric 44b], Cramer et Leadbetter [CraLea 67]. La théorie mathématique utilisée est lourde mais a pour but final de fournir une solution rapide pour tout problème aussi complexe soit-il. Ceci engendre des approximations qui sont principalement des approximations asymptotiques dues à la réalisation des diverses intégrations nécessaires (espace des probabilités et temps) par des méthodes asymptotiques.

2.4.3 Forme générale de l'espérance du nombre de franchissements

Il s'agit de donner les différentes formes de l'espérance du nombre de franchissements. Les différentes parties de cette section sont donc :

- Franchissements de $\mathbf{S}(t, \omega)$ sachant \mathbf{r} et \mathbf{q} : il s'agit de donner la relation permettant de déterminer le nombre moyen de franchissements dans le cas où on ne considère qu'un processus vectoriel.
- Cela est ensuite appliqué au cas scalaire.

L'espérance du nombre de franchissements est ensuite donnée en prenant en compte toutes les variables présentes dans la fonction de performance d'où deux façons de procéder, une que nous qualifions de "théorique" et une plus "numérique".

- La première utilise une intégration asymptotique sur deux espaces en même temps (espace des probabilités et temps).
- La seconde utilise la séparation des espaces pour réaliser les intégrations. Cette dernière semble plus aisée à manipuler, c'est celle qui est implémentée dans COMREL-TV et que nous illustrons à la fin de ce chapitre.

• Franchissements de $\mathbf{S}(t, \omega)$ sachant \mathbf{r} et \mathbf{q} : $\mathbf{E}[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]$

Les développements exposés dans ce paragraphe proviennent de [Rac 97]. On considère une réalisation \mathbf{r} et $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ (réalisation resp. de $\mathbf{R}(\omega)$ et $\mathbf{Q}(t, \omega)$). On définit par $F = \{G(t, \mathbf{S}(t, \omega)) \leq 0\}$ le domaine de défaillance conditionné dans l'espace standard et de frontière ∂F variant dans le temps. On la suppose deux fois différentiables en \mathbf{s} et en τ tout du moins localement :

$$\partial F = \partial F(\mathbf{S}(\tau, \omega), \tau) = \{\mathbf{S}(\tau, \omega), \tau \text{ tel que } G(\tau, \mathbf{S}(\tau, \omega)) = 0\}$$

Tous les développements de ce paragraphe sont faits pour une réalisation donnée de $\mathbf{R}(\omega)$ et de $\mathbf{Q}(t, \omega)$ donc nous sommes bien dans le cas où $\mathbf{S}(\tau, \omega)$ traverse une surface non aléatoire mais pouvant dépendre du temps. Il faut intégrer le résultat obtenu pour supprimer la condition "sachant \mathbf{r} et \mathbf{q} ".

On suppose que sur un petit intervalle de temps, il ne peut y avoir qu'un franchissement. Donc la relation (1.17) devient :

$$\nu(\partial F, \tau | \mathbf{r}, \mathbf{q}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0; \Delta\tau > 0} \frac{1}{\Delta\tau} P(N(\tau, \tau + \Delta\tau) = 1) \quad (2.6)$$

On note $P_1(\partial F, \Delta\tau)$ la probabilité qu'il n'y ait qu'un franchissement de la frontière ∂F vers le domaine de défaillance sur l'intervalle de temps $\Delta\tau$. La relation (2.6) se réécrit donc :

$$\nu(\partial F, \tau | \mathbf{r}, \mathbf{q}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0; \Delta\tau > 0} \frac{1}{\Delta\tau} P_1(\partial F, \Delta\tau)$$

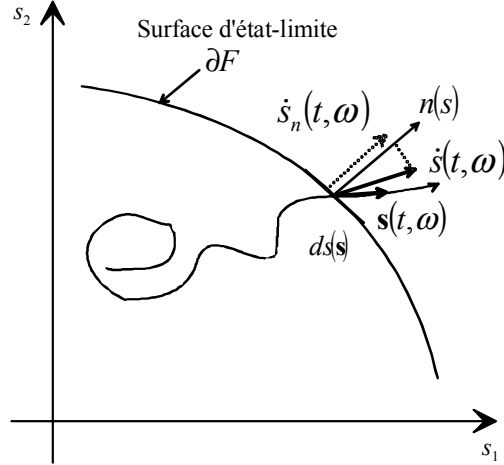


FIG. 2.4: franchissement de la surface $\partial F = \{G(t, \mathbf{S}(t, \omega)) = 0\}$ par le processus $\mathbf{S}(t, \omega)$.

En posant :

- $\tau \leq t \leq \tau + \Delta\tau$;
- $\partial\dot{F}(\mathbf{s}; t)$ une variation dans le temps de la surface ∂F en \mathbf{s} ;
- $\dot{S}_n(t, \omega)$ la projection de la dérivée de $\mathbf{S}(t, \omega)$ sur la normale à la surface ∂F au point \mathbf{s} (voir Fig. 2.4) ;
- $\Delta(\partial F)$ une fine couche enveloppant la surface ∂F ;

alors, $P_1(\partial F, \Delta\tau)$ peut être donnée par :

$$P_1(\partial F, \Delta\tau) = P\left(\{\mathbf{S}(t, \omega) \in \Delta(\partial F)\} \cap \{\dot{S}_n(t, \omega) > \partial\dot{F}(\mathbf{s}; t)\}\right)$$

Si $\mathbf{S}(\tau, \omega)$ est Gaussien, alors $\dot{S}_n(\tau, \omega)$ l'est aussi. Ceci permet d'introduire la densité de probabilité conjointe $\phi_{n+1}(\mathbf{s}, \dot{s}_n, \tau)$ de $\mathbf{S}(\tau, \omega)$ et $\dot{S}_n(\tau, \omega)$. La probabilité P_1 peut donc s'écrire grâce à l'intégrale :

$$P_1(\partial F(\tau), \Delta\tau) = \int_{\Delta(\partial F)} \int_{\dot{S}_n > \partial\dot{F}(\mathbf{s}; \tau)} \phi_{n+1}(\mathbf{s}, \dot{s}_n, \tau) d\dot{s}_n ds$$

L'intégrale sur $\Delta(\partial F)$ est transformée en une intégrale sur ∂F en considérant la couche $\Delta(\partial F)$ comme une somme de cylindres infiniment petits de hauteur $(\dot{s}_n(\tau, \omega) - \partial\dot{F}(\mathbf{s}; \tau)) \Delta\tau$ et de base $ds(\mathbf{s})$ où $ds(\mathbf{s})$ est un voisinage surfacique du point de franchissement. En introduisant ceci dans l'équation précédente, l'intégration par rapport à \mathbf{s} conduit à :

$$P_1(\partial F, \Delta\tau) = \int_{\partial F} \int_{\dot{S}_n > \partial\dot{F}(\mathbf{s}; \tau)} \left(\dot{s}_n(\tau, \omega) - \partial\dot{F}(\mathbf{s}; \tau)\right) \phi_{n+1}(\mathbf{s}, \dot{s}_n, \tau) \Delta\tau d\dot{s}_n ds(\mathbf{s})$$

\mathbf{S} est un processus Gaussien et sa dérivée est aussi un processus Gaussien. $\mathbf{S}(\tau, \omega)$ et $\dot{S}_n(\tau, \omega)$ étant indépendants, on peut donc écrire que $\phi_{n+1}(\mathbf{s}, \dot{s}_n, \tau) = \phi_1(\dot{\mathbf{s}} | \mathbf{S}(\tau) = \mathbf{s}) \phi_n(\mathbf{s})$.

En introduisant ainsi la densité de \dot{S}_n conditionnée en $\mathbf{S} = \mathbf{s}$, en appliquant la limite selon (2.6) et en calculant l'intégrale sur tout $\tau \in [t_1, t_2]$, on obtient l'expression du nombre moyen

de franchissements :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [N^+ (t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial F} \int_{\dot{S}_n > \partial \dot{F}(\mathbf{s}; \tau)} \left(\dot{s}_n (\tau, \omega) - \partial \dot{F}(\mathbf{s}; \tau) \right) \phi_1 (\dot{\mathbf{s}} | \mathbf{S}(\tau) = \mathbf{s}) \phi_n (\mathbf{s}) d\dot{s}_n ds(\mathbf{s}) d\tau \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour la suite du développement, nous nous plaçons dans le cas des processus scalaires. Le même type de démarche est appliqué aux processus vectoriels. Pour cela [Bry *et al.* 91] peut être consulté.

• Application au cas scalaire

Soient $a(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ la fonction seuil d'origine (*i.e.* non normalisée) et $Y(\tau)$ le processus Gaussien (non normalisé) de moyenne $m_Y(\tau)$ et d'écart-type $\sigma_Y(\tau)$. $g(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q}, Y)$ est la fonction de performance. On note :

- le processus normalisé

$$S(\tau) = \frac{Y(\tau) - m_Y(\tau)}{\sigma_Y(\tau)}$$

- la fonction seuil normalisée

$$b(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q}) = \frac{a(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q}) - m_Y(\tau)}{\sigma_Y(\tau)}$$

- la fonction de performance

$$g(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q}, S) = b(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q}) - S(\tau)$$

- La dérivée première par rapport au temps d'une fonction quelconque $h(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ est notée $\dot{h}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ et la dérivée seconde est notée $\ddot{h}(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$.

- La dérivée mixte (temps et variable) de h en r^* est notée $\dot{h}_{,i}^* = \left. \frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial \tau} \right|_{r^*}$.

Dans le cas **scalaire**, l'équation (2.7) se réduit à :

$$\mathbb{E} [N^+ (t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\dot{S}_n > \dot{b}} \left(\dot{s} - \dot{b}(\tau, \mathbf{q}) \right) \phi_1 (\dot{s} | \mathbf{S}(\tau) = \mathbf{s}) \phi_1 (s) d\dot{s} d\tau$$

S est un processus Gaussien. Sa dérivée par rapport au temps, notée \dot{S} , est aussi Gaussienne et a pour moyenne 0 (S est normé centré) et pour variance ω_0^2 . L'espérance du nombre moyen de franchissements de $b(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ par $S(\tau)$ sur un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$ conditionné en $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$ et $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N^+ (t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}] &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\dot{S}_n > \dot{b}} \frac{1}{\omega_0(\tau)} \left(\dot{s} - \dot{b}(\tau, \mathbf{q}) \right) \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\dot{s}^2}{\omega_0^2(\tau)} \right] \\ &\cdot \exp \left[-\frac{1}{2} b^2(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q}) \right] d\dot{s} d\tau \end{aligned} \quad (2.8)$$

La méthode de Laplace (quelques détails sont donnés dans [Rac 00]) et les intégrales d'Owen [Owe 80] sont utilisées. Il s'agit de l'approximation asymptotique des intégrales de probabilités

pour $b(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ grand. Le lecteur peut consulter l'ouvrage de Breitung [Bre 94] développant cette méthode de façon assez détaillée.

Celle-ci utilise le fait que la plus grande contribution à l'intégrale vient du voisinage du point τ^* où $b^2(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ atteint son minimum. Deux cas sont alors à considérer : soit le point est à l'intérieur de l'intervalle d'étude, soit il est sur une des frontières de l'intervalle.

Les développements qui suivent émanent de Bryla *et al.* [Bry *et al.* 91].

\implies Si le point τ^* est à l'intérieur de $]t_1, t_2[$: la fonction $b^2(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ est développée à l'ordre 2 :

$$b^2(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q}) = b^2(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}) + 2b(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}) \ddot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}) \tau^2 + \dots \quad (2.9)$$

En introduisant (2.9) dans (2.8), on peut assimiler le calcul à celui de l'espérance de la valeur absolue d'une combinaison linéaire de variables Gaussiennes. De plus, l'intégrale sur tout l'intervalle de temps peut être calculée étant donné que seul le voisinage proche de τ^* contribue vraiment à l'intégrale. Ce qui aboutit au résultat suivant, sous l'hypothèse que $b(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ est suffisamment grand :

$$\mathbb{E}[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}] \approx \frac{2\phi(b(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}))}{\sqrt{2b(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}) \ddot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q})}} \left(\omega_0^2 + \frac{2\ddot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q})}{b(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

\implies Si le point τ^* est sur une frontière de $[t_1, t_2]$ (i.e. $\tau^* = t_1$ ou $\tau^* = t_2$) : la fonction $b^2(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ est développée à l'ordre 1 :

$$b^2(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q}) = b^2(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}) + 2b(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}) \dot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}) \tau + \dots \quad (2.10)$$

En appliquant le même type de raisonnement que précédemment, on obtient :

$$\mathbb{E}[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}] = \omega_0 \left[2\phi\left(\frac{\dot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q})}{\omega_0}\right) - \frac{\dot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q})}{\omega_0} + 2\frac{\dot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q})}{\omega_0} \Phi\left(\frac{\dot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q})}{\omega_0}\right) \right] \cdot \frac{\phi(b(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}))}{b(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q}) \dot{b}(\tau^*, \mathbf{r}, \mathbf{q})}$$

• **Espérance par rapport à \mathbf{R} et \mathbf{Q} en intégrant simultanément sur les deux espaces**

Les variables \mathbf{R} et \mathbf{Q} sont placées dans un même vecteur noté \mathbf{Z} dans toute la suite. Pour prendre en compte ces variables, il faut intégrer la relation (2.7) par rapport à toutes les valeurs possibles de \mathbf{R} et \mathbf{Q} . Ce qui aboutit, dans le cas des processus Gaussiens différentiables scalaires, à :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}} [\mathbb{E}[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]] \quad (2.11) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_q}} \int_{\partial F} \int_{\dot{S}_n > \dot{b}} \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{s}_n(\tau, \omega) - \partial \dot{F}(\mathbf{s}; \tau) \right) \phi_{\dot{S}_n | S=s}(\dot{s}_n) \phi_S(s) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\tau d\dot{s}_n ds(s) d\mathbf{z} \end{aligned}$$

En introduisant dans l'équation (2.11) :

$$- u_{\dot{S}} = \dot{s} / \sigma_{\dot{S}};$$

- $\xi = (u_{\dot{s}}, \mathbf{z}, \tau)^t$;
- $k(\xi) = \sigma_{\dot{s}} u_{\dot{s}} - \dot{b}(\tau, \mathbf{z})$;
- $f(\xi) = u_{\dot{s}}^2 + \mathbf{z}^t \mathbf{z} + b^2(\tau, \mathbf{z})$;

on obtient :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}} [\mathbf{E} [N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]] = \int_{\dot{S}_n > \dot{b} \times \mathbb{R}^{n_q} \times [t_1, t_2]} \frac{1}{(2\pi)^{1 + \frac{n_q}{2}}} |k(\xi)| \exp\left(-\frac{1}{2} f(\xi)\right) d\xi \quad (2.12)$$

Il faut trouver le point ξ^* qui minimise la fonction $f(\xi)$ sur $[t_1, t_2]$. Ensuite, un développement limité des fonctions f et k est effectué au voisinage de ξ^* . Ceci permet d'appliquer de nouveau les hypothèses asymptotiques permettant d'utiliser la technique de Laplace.

\implies Si le point τ^* est à l'intérieur de $]t_1, t_2[$

En introduisant :

- \mathbf{B}_z^* le Hessien de b par rapport à \mathbf{z} en τ^* ;
- la matrice \mathbf{H} définie par :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \dots 0 \dots & \dots \\ \vdots & & \\ 0 & \mathbf{I}_{n_z} + b^* \mathbf{B}_z^* & b^* \dot{b}_{,i}^* \\ \vdots & & \\ 0 & b^* \dot{b}_{,i}^* & b^* \ddot{b}^* \end{bmatrix}$$

- $f(\xi) = (b^{*2} + \mathbf{z}^{*t} \mathbf{z}^*) + \frac{1}{2} \xi^t \mathbf{H} \xi$;
- $c = (\sigma_{\dot{X}}, \dot{b}_{,1}^*, \dots, \dot{b}_{,n_z}^*, \ddot{b}^*)$;
- $k(\xi) = c^t \xi$;

la relation (2.11) devient :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}} [\mathbf{E} [N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]] \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} (b^{*2} + \mathbf{z}^{*t} \mathbf{z}^*)\right) \left[\frac{c^t \mathbf{H}^{-1} c}{|\det(\mathbf{H})|} \right]^{1/2}$$

\implies Si le point τ^* est sur une frontière de $[t_1, t_2]$

En introduisant :

- $\eta^t = (u_{\dot{s}}, \mathbf{z})$;
- la matrice \mathbf{K} définie par :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & \dots 0 \dots \\ \vdots & \\ 0 & \mathbf{I}_{n_z} + b^* \mathbf{B}_z^* \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

- $f(\xi) = (b^{*2} + \mathbf{z}^{*t} \mathbf{z}^*) + 2 b^* \dot{b}^* \tau + \eta^t \mathbf{K} \eta$;

$$\begin{aligned} - \tilde{c}^t &= \left(\sigma_{\dot{X}}, \dot{b}_{,1}^*, \dots, \dot{b}_{,n_z}^* \right); \\ - a &= \dot{b}^* / \left(\tilde{c}^t \mathbf{K}^{-1} \tilde{c} \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

la relation (2.11) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}} \left[\mathbf{E} \left[N^+ (t_1, t_2) \mid \mathbf{r}, \mathbf{q} \right] \right] &\approx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} (b^{*2} + \mathbf{z}^{*t} \mathbf{z}^*) \right)}{\left| \dot{b}^* \dot{b}^* \right|} \left[\frac{\tilde{c}^t \mathbf{K}^{-1} \tilde{c}}{|\det(\mathbf{K})|} \right]^{1/2} \\ &\cdot (2\phi(a) + a - 2a \Phi(a)) \end{aligned}$$

• **Espérance par rapport à \mathbf{R} et \mathbf{Q} en intégrant séparément sur chaque espace [Rac 98]**

Les relations données ici sont valables aussi bien dans le cas vectoriel que dans le cas scalaire. En effet, les processus vectoriels sont “scalairisés” c’est à dire qu’en transformant l’état-limite, on se ramène à manipuler des processus scalaires, définis à partir du processus vectoriel d’origine. Si on note $\nabla_{\mathbf{S}} G$ le vecteur gradient de $G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{s})$ par rapport aux variables \mathbf{S} et $\alpha_{\mathbf{S}} = \nabla_{\mathbf{S}} G(\mathbf{s}) \bullet \|\nabla_{\mathbf{S}} G(\mathbf{s})\|^{-1}$, le processus scalairisé $W^L(t, \omega)$ de moyenne 0 et d’écart-type 1 s’écrit :

$$W^L(t, \omega) = \frac{\alpha_{\mathbf{S}}^t}{\|\alpha_{\mathbf{S}}\|} \bullet \mathbf{S}$$

dont la matrice des corrélations est donnée par :

$$\rho_{W^L W^L}(t_1, t_2) = \left(\frac{\alpha_{\mathbf{S}}^t}{\|\alpha_{\mathbf{S}}\|} \right)^t \rho_{SS}(t_1, t_2) \left(\frac{\alpha_{\mathbf{S}}^t}{\|\alpha_{\mathbf{S}}\|} \right)$$

Le point de départ est le même que lorsqu’on intègre en même temps sur les deux espaces (relation (2.11)) :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}} \left[\mathbf{E} \left[N^+ (t_1, t_2) \mid \mathbf{r}, \mathbf{q} \right] \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n_q}} \int_{\partial F} \int_{\dot{S}_n > \dot{b}} \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{s}_n(\tau, \omega) - \partial \dot{F}(\mathbf{s}; \tau) \right) \phi_{\dot{S}_n | S=s}(\dot{s}_n) \phi_S(s) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\tau d\dot{s}_n ds(s) d\mathbf{z} \end{aligned}$$

Les variables \mathbf{R} et \mathbf{Q} sont placées dans un même vecteur \mathbf{Z} . La transformation habituelle des distributions de probabilité est appliquée pour toutes les variables \mathbf{R} et \mathbf{Q} . Ces intégrales sont résolues via la méthode de Laplace après avoir, comme précédemment, développé la fonction seuil normalisée $b(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ au premier ou au second ordre suivant le cas. L’espérance conditionnée du nombre de franchissements dans le cadre des processus différentiables Gaussiens est :

$$\mathbf{E} \left[N^+ (t_1, t_2) \mid \mathbf{r}, \mathbf{q} \right] = \int_{t_1}^{t_2} \omega_0(\tau | \mathbf{r}, \mathbf{q}) \phi(b(\tau | \mathbf{r}, \mathbf{q})) \Psi \left(\frac{\dot{b}(\tau | \mathbf{r}, \mathbf{q})}{\omega_0(\tau | \mathbf{r}, \mathbf{q})} \right) d\tau$$

où $\Psi(x) = \phi(x) - x \Phi(-x)$

Les résultats présentés ci-après sont basés sur les approximations suivantes [Rac 98] :

- Il existe un point critique τ^* dans l’espace des temps où le taux de franchissements devient maximum.

- La “pulsation” $\omega_0(\tau)$ du processus $\mathbf{S}(t, \omega)$ considéré est défini par :

$$\omega_0^2(\tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \rho_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(\tau_1, \tau_2) \Big|_{\tau_1 = \tau_2 = \tau}$$

Sa variation dans le temps est considérée comme lente. Ainsi, il est suffisant de prendre le taux de cycles au point critique, c’est-à-dire $\omega_0(\tau^*)$.

- L’intégration du taux de franchissements par rapport au temps peut être approximée en appliquant la méthode d’intégration asymptotique de Laplace. Elle peut être faite indépendamment de l’intégration par rapport aux autres variables. Ainsi, aucune interaction entre le temps et les autres variables n’est à considérer.
- L’intégration par rapport aux variables \mathbf{Q} peut être faite simultanément avec l’intégration par rapport aux variables \mathbf{S} . Il est admissible d’intégrer par rapport aux variables \mathbf{R} en même temps que par rapport aux autres variables.

⇒ *Cas stationnaire*

Les formules données ci-après permettent de déterminer la probabilité de défaillance cumulée dans le cas où le seul processus présent dans l’état-limite est un processus Gaussien stationnaire différentiable. Elles émanent de [Bre 88] où les développements sont exposés.

t^* , date à laquelle le taux de franchissements est maximum, peut se situer sur les bornes de l’intervalle d’étude ou à l’intérieur de cet intervalle.

On note :

- $\nabla_{\mathbf{S}}^2 G$ est la matrice des dérivées du second ordre de la fonction de performance $G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) = 0$ en $(\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*)$ par rapport aux variables \mathbf{S} ;
- $\rho_{\mathbf{S}\mathbf{S}}(t_1, t_2)$ est la matrice de corrélation et $\rho_{S_i S_j}(t_1, t_2)$ est la fonction de corrélation entre les variables S_i et S_j aux dates t_1 et t_2 . $\rho_{\mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}}(t_1, t_2)$ et $\rho_{\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{S}}}(t_1, t_2)$ sont alors définies par :

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}}(t_1, t_2) &= \left\{ \frac{\partial \rho_{S_i S_j}(t_1, t_2)}{\partial t_2} ; i, j = 1, \dots, n_S \right\} \\ \rho_{\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{S}}}(t_1, t_2) &= \left\{ \frac{\partial^2 \rho_{S_i S_j}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} ; i, j = 1, \dots, n_S \right\} \end{aligned}$$

et traduisent les corrélations entre les processus et les dérivées.

Précisons maintenant les quantités et relations nécessaires :

- β est l’indice local de fiabilité instantanée (*i.e.* $\beta = -\Phi^{-1}(P_{f,i})$) pris à la date τ^* ;
- D est une matrice définie par :

$$D = I - \frac{\beta}{\|\nabla_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{S}} G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{s})\|} \nabla_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{S}}^2 G$$

où I est la matrice identité et $G_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{S}}$ est une matrice comprenant les dérivées secondes de $G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) = 0$ par rapport à $(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{s})$ en $(\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*)$.

- ω_0 est le taux de cycle du processus “scalairisé”. Il est donné par :

$$\omega_0^2 = \frac{\alpha_{\mathbf{S}}^t}{\|\alpha_{\mathbf{S}}^t\|} \left(\rho_{\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{S}}} - \rho_{\mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}}^t \frac{1}{\|\nabla_{\mathbf{S}} G(s)\|} \nabla_{\mathbf{S}}^2 G \rho_{\mathbf{S}\dot{\mathbf{S}}} \right) \frac{\alpha_{\mathbf{S}}}{\|\alpha_{\mathbf{S}}\|} \quad (2.13)$$

Le second terme dans la parenthèse de 2.13 est un facteur de correction du second ordre généralement petit.

En introduisant les diverses quantités définies ci-dessus, sous les approximations citées, l'expression de l'espérance non conditionnée du nombre moyen de franchissements sur $[t_1, t_2]$ est :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}} [E [N (t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]] \approx \frac{\phi(\beta)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{|\det(D)|} \right)^{1/2} \omega_0 (t_2 - t_1) \quad (2.14)$$

Dans le cas stationnaire, τ^* peut être pris égal à n'importe quelle valeur de t comprise dans $[t_1, t_2]$ car, dans ce cas, le taux de franchissements a une valeur constante quelle que soit la date t (comme vu chapitre 1, page 34 lors de l'exemple sur la formule de Rice).

\implies Cas non stationnaire : τ^* situé dans $]t_1, t_2[$

Les données supplémentaires par rapport au cas stationnaire sont :

- $\ddot{\beta}$ est la dérivée seconde par rapport au temps au point critique τ^* de l'indice local de fiabilité instantanée ;
- et :

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \gamma^2 (\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*) = \frac{\ddot{\beta} (\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*)}{\beta (\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*)} \frac{1}{\omega_0^2 (\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*)} \\ \tau_{1,2} &= \sqrt{\ddot{\beta} (\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*) \beta (\mathbf{r}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*)} (t_{1,2} - \tau^*) \end{aligned}$$

- $A = \left\{ \Phi \left(\tau_2 \sqrt{1 + \gamma^2} \right) - \Phi \left(\tau_1 \sqrt{1 + \gamma^2} \right) \right\}$
- $B = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \sqrt{\frac{\ddot{\beta}}{\beta(\tau^*)}}$
- $C = \phi(\tau_1) \Phi(-\tau_1 \gamma) - \phi(\tau_2) \Phi(-\tau_2 \gamma)$

Dans le cas des processus Gaussiens non-stationnaires, la relation permettant de déterminer l'espérance non conditionnée du nombre moyen de franchissements sur $[t_1, t_2]$ dans le cas du point critique situé à l'intérieur de l'intervalle de temps est :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}} [E [N^+ (t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]] &= \\ & \frac{\phi(\beta(\tau^*))}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{|\det(D)|} \right)^{1/2} \omega_0(\tau^*) \\ & \cdot \left\{ \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \gamma^2}{\beta(\tau^*) \ddot{\beta}}} (A + B.C) \right\} \end{aligned}$$

Le dernier facteur est un facteur émanant de l'intégration asymptotique par rapport au temps.

\implies Cas non stationnaire : τ^* situé sur la frontière de $[t_1, t_2]$

Les données supplémentaires par rapport au cas stationnaire sont :

- $a = \dot{\beta}(\tau^*) / \omega_0$;
- $\Psi(x) = \phi(x) - x \Phi(-x)$.

Dans le cas des processus Gaussiens non-stationnaires, la relation permettant de déterminer l'espérance non conditionnée du nombre moyen de franchissements sur $[t_1, t_2]$ est :

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{R}, \mathbf{Q}} [E [N^+ (t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]] &= \frac{\phi(\beta(\tau^*))}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{|\det(D)|} \right)^{1/2} \omega_0(\tau^*) \\ &\cdot \left\{ \sqrt{2\pi} \Psi(a) \left[\frac{1 - \exp\left(-\beta(\tau^*) \left| \dot{\beta}(\tau^*) \right| (t_2 - t_1)\right)}{\beta(\tau^*) \left| \dot{\beta}(\tau^*) \right|} \right] \right\} \end{aligned}$$

Le dernier facteur est un facteur émanant de l'intégration asymptotique par rapport au temps.

⇒ *Remarque*

Lorsque l'état-limite est linéaire, $\det |H| = 1$ et ω_0^2 a une expression plus simple :

$$\omega_0^2 = \rho_{\dot{\mathbf{S}}\dot{\mathbf{S}}} (t_1 = \tau^*, t_2 = \tau^*)$$

• Conclusion

Les différentes formules analytiques présentées ci-dessus ont été implémentées dans le logiciel COMREL-TV développé par *RCP consult* [RCP 98] sous la direction de R. Rackwitz. Pour l'utiliser, il faut caractériser la fonction de performance, les variables aléatoires et les processus en jeu.

Dans la section suivante, nous mettons en application les formules rappelées dans cette section dans deux des cas tests proposés, respectivement stationnaire et non-stationnaire. Nos résultats sont comparés à ceux obtenus par COMREL-TV que nous utilisons par la suite.

La confrontation des résultats a par ailleurs permis de mettre en évidence un dysfonctionnement du logiciel COMREL-TV qui a pu être corrigée dans la dernière version utilisée (V7.1).

2.5 Applications

▷ Cas 1 : $R(\omega) - S(t, \omega)$

La fonction de performance considérée est :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - S(t, \omega)$$

où $R(\omega)$ est la résistance initiale et $S(t, \omega)$ est un processus stochastique Gaussien qui représente la sollicitation. Sa fonction de covariance normalisée est définie par :

$$\rho_{SS}(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)^2}{l^2}\right)$$

où $l = 1$ est la longueur de corrélation temporelle.

Les valeurs numériques sont résumées dans le tableau 2.1.

Variable	Loi	Moyenne	Ecart-type
$R(\omega)$	Gauss	150 N	15 N
$S(t, \omega)$	Gauss	50 N	17,5 N

TAB. 2.1: données de l'étude dans le cas non-stationnaire étudié.

L'étude est menée sur l'intervalle $[0, 30 \text{ ans}]$.

La fonction d'état-limite dans l'espace standard est :

$$H(t, \mathbf{U}(t, \omega)) = m_R + \sigma_R \cdot u_R - m_S - \sigma_S \cdot u_S$$

Le calcul de $\beta(t)$ est direct étant donné que l'état-limite est linéaire dans l'espace standard :

$$\beta(t) = \frac{m_R - m_S}{(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)^{1/2}}$$

$\beta(t)$ est constant dans le temps. Les calculs sont donc faits à la borne supérieure de l'intervalle de temps (choix arbitraire), c'est-à-dire $\tau^* = t_2 = 30$.

$$\beta(\tau^*) = 2,603$$

Les valeurs des coordonnées du point de conception dans l'espace standard s'obtiennent immédiatement :

$$\begin{aligned} u_R(\tau^*) &= -1,694 \\ u_S(\tau^*) &= 1,976 \end{aligned}$$

Les dérivées première et seconde du coefficient de corrélation sont nécessaires :

$$\begin{aligned} \rho_{SS}(t_1, t_2) &= \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)^2}{l^2}\right) \\ \frac{\partial \rho_{SS}(t_1, t_2)}{\partial t_1} &= 2\frac{(t_2 - t_1)}{l^2} \rho_{SS}(t_1, t_2) \\ \frac{\partial^2 \rho_{SS}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} &= \left(\frac{2}{l^2} - 4\frac{(t_2 - t_1)^2}{l^4}\right) \rho_{SS}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \rho_{SS}(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|_{t_1=t_2=\tau^*} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \rho_{SS}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=\tau^*} &= 2 > 0 \end{aligned}$$

On vérifie ainsi que le processus satisfait bien aux hypothèses d'un processus différentiable (dérivée première nulle en τ^* et dérivée seconde positive en τ^*).

L'état-limite est linéaire et il n'y a qu'un seul processus présent, d'où :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{2} = 1,414 \\ a &= -0,077 \end{aligned}$$

Le calcul de l'espérance du nombre moyen de franchissements sur l'intervalle $[0, 30 \text{ ans}]$ donne :

$$E_{R,Q} [E [N^+ (t_1, t_2)]] = \frac{\phi(2, 603)}{\sqrt{2\pi}} 1,414 \times 30 = 0,228$$

Ce qui correspond au résultat donné par COMREL-TV.

♣

▷ Cas 3 : $R(\omega) - \delta(\omega).t - S(t, \omega)$

La fonction de performance considérée est :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - \delta(\omega).t - S(t, \omega)$$

$\delta(\omega)$ est un coefficient de dégradation aléatoire. La dégradation est supposée linéaire par rapport au temps t . Le processus stochastique $S(t, \omega)$ a la même fonction de covariance normalisée que dans l'exemple précédent.

Les valeurs numériques sont résumées dans le tableau 2.2.

Variable	Loi	Moyenne	Ecart-type
$R(\omega)$	Gauss	150 N	15 N
$\delta(\omega)$	Gauss	2,5 N/an	0,05 N/an
$S(t, \omega)$	Gauss	20 N	17,5 N

TAB. 2.2: données de l'étude dans le cas non-stationnaire étudié.

La fonction d'état-limite dans l'espace standard est :

$$H(t, \mathbf{U}(t, \omega)) = m_R + \sigma_R.u_R - (m_\delta + \sigma_\delta.u_\delta).t - m_S - \sigma_S.u_S$$

Le calcul de $\beta(t)$ est direct étant donné que l'état-limite est linéaire dans l'espace standard :

$$\beta(t) = \frac{m_R - m_\delta.t - m_S}{(\sigma_R^2 + \sigma_\delta^2.t^2 + \sigma_S^2)^{1/2}}$$

$\beta(t)$ étant strictement décroissant dans le temps, le taux de franchissements est maximum à la borne supérieure de l'intervalle de temps, c'est-à-dire $\tau^* = t_2 = 30$.

$$\beta(\tau^*) = 2,381$$

La dérivée première de $\beta(t)$ par rapport à t est nécessaire :

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) &= \frac{-m_\delta t}{(\sigma_R^2 + \sigma_\delta^2 t^2 + \sigma_S^2)^{1/2}} \\ &\quad + (m_R - m_\delta.t - m_S) \frac{(-0,5.2.\sigma_\delta^2.t)}{(\sigma_R^2 + \sigma_\delta^2 t^2 + \sigma_S^2)^{1/2}} \\ \dot{\beta}(t) \Big|_{\tau^*} &= -0,109 \end{aligned}$$

Les dérivées première et seconde du coefficient de corrélation sont les mêmes que dans l'exemple précédent, tout comme le calcul de ω_0 . Le calcul de l'espérance du nombre moyen de franchissements sur l'intervalle $[0, 30 \text{ ans}]$ donne alors :

$$\begin{aligned} E_{R,Q} [E [N^+ (t_1, t_2)]] &= \frac{\phi(2, 381)}{\sqrt{2\pi}} 1,414 \\ &\cdot \left\{ \sqrt{2\pi} (\phi(-0,077) + 0,077 \Phi(0,077)) \left[\frac{1 - \exp(-2,381|-0,109|(30))}{2,381|-0,109|} \right] \right\} \\ &= 0,056 \end{aligned}$$

ce qui correspond à la valeur donnée par COMREL-TV mis à jour.

♣

2.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de rappeler la solution développée notamment par Rackwitz et Breitung afin de calculer le nombre moyen de franchissements (et donc la probabilité de défaillance cumulée) dans le cas où seul le processus mélangeant $\mathbf{S}(t, \omega)$ est présent puis en prenant en compte les variables de types \mathbf{Q} (processus stationnaire) et \mathbf{R} (variable aléatoire). Elle est basée sur l'approche utilisant des intégrations asymptotiques. Les calculs permettant d'aboutir à ces relations ne sont pas d'un accès aisé. La démarche générale est résumée Fig. 2.5.

Le logiciel COMREL-TV a été implémenté à partir de ces relations. Son avantage est qu'il est d'utilisation aisée. Par contre, il nécessite la présence obligatoire d'un processus $\mathbf{S}(t, \omega)$. Il ne peut pas être utilisé lorsque seules des variables aléatoires et le temps sont présents dans la fonction d'état-limite.

Les développements théoriques et l'implémentation logicielle constituent aujourd'hui, à notre avis, la réponse la plus évoluée à bien des problèmes de fiabilité fonction du temps. Néanmoins, le mode de description des processus et le caractère asymptotique des solutions nous invitent à rechercher d'autres voies susceptibles d'apporter des solutions plus économiques, plus précises et susceptibles de généralisation. Le chapitre suivant est consacré à présenter nos propositions.

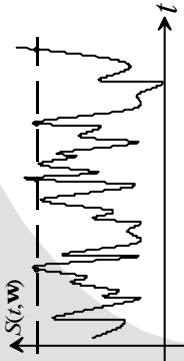
L'approche asymptotique

TAUX DE FRANCHISSEMENTS CONDITIONNÉ
Processus scalaire Rice
Processus vectoriel Belyev

$$n(\mathbf{t} | \mathbf{r}, \mathbf{q}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(\{G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{S}(t, \mathbf{w})) > 0\} \cap \{G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{S}(t + \Delta t, \mathbf{w})) \leq 0\})}{\Delta t}$$

NOMBRE MOYEN DE FRANCHISSEMENTS

$$E[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} n(\mathbf{t} | \mathbf{r}, \mathbf{q}) dt$$



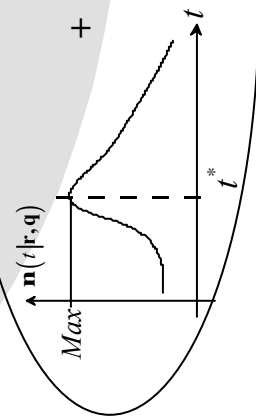
CALCUL DE LA PROBABILITÉ DE DÉFAILLANCE

Approximation $b \rightarrow \infty$

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \approx 1 - \exp[-E_R[E_Q[E[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]]]]$$

Borne supérieure

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + E_R[E_Q[E[N^+(t_1, t_2) | \mathbf{r}, \mathbf{q}]]]$$



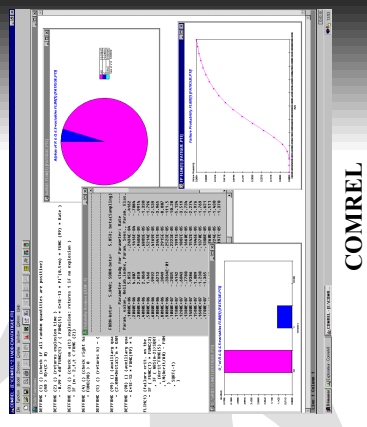
+ Laplace Owen = Formules analytiques

DONNÉES
Modèle mécanique

$$G(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{w})) = G(t, \mathbf{R}(\mathbf{w}), \mathbf{Q}(t, \mathbf{w}), \mathbf{S}(t, \omega), \mathbf{p}(t))$$

- $\mathbf{R}(\mathbf{w})$: variables aléatoires
- $\mathbf{Q}(t, \mathbf{w})$: séquences stationnaires et ergodiques
- $\mathbf{S}(t, \omega)$: processus mélangeants
- $\mathbf{p}(t)$: paramètres fonction de t

\mathbf{D} : processus différentiables (Gaussiens)
 \mathbf{J} : processus à sauts (rectangulaires)



COMREL

FIG. 2.4: l'approche asymptotique : démarche générale.

Chapitre 3

Propositions pour de nouvelles approches de la fiabilité

Ce chapitre décrit les deux méthodes que nous proposons afin de calculer le taux de franchissements et par conséquent la probabilité de défaillance cumulée pour résoudre des problèmes de fiabilité dépendant du temps :

- la méthode baptisée PHI2 ;
- la méthode RGMR.

Il regroupe les développements théoriques originaux de ce travail de thèse. Une comparaison des résultats obtenus par rapport à ceux donnés par les méthodes rappelées précédemment est réalisée au chapitre suivant, lorsque les hypothèses sont compatibles.

3.1 Quelques rappels

Cette section a pour but de rappeler les notions de fiabilité mécanique nécessaires à la description des méthodes présentées dans ce chapitre. Il s'agit de l'approximation FORM (*First Order Reliability Method*) et de l'approche système de la fiabilité. Elles proviennent du document de cours [Lem *et al.* 01].

3.1.1 L'approximation FORM

Plaçons nous dans le cas simple où le temps n'intervient pas. Le modèle probabiliste d'une structure est défini par un scénario de défaillance, représenté par une fonction de performance $G(\mathbf{X}(\omega))$, dépendante de variables de conception $\mathbf{X}(\omega)$ issues du modèle mécanique. Le domaine de sûreté et le domaine de défaillance sont définis de la même façon qu'au chapitre 1.

Le calcul théorique de la probabilité de défaillance $P_{f,i}$ n'est pas toujours possible. L'utilisation de l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind [HasLin 74] permet une première approximation de celle-ci.

Définissons une transformation T permettant de passer de l'espace des variables de conception à un espace de variables Gaussiennes normées, centrées, décorélées $\mathbf{U}(\omega) = \{U_j(\omega)\}$, telles que :

$$\begin{aligned}U_j(\omega) &= T_j(\mathbf{X}(\omega)) \\ H(\{U_j(\omega)\}) &= G\left(\left\{T_j^{-1}(U_j(\omega))\right\}\right)\end{aligned}$$

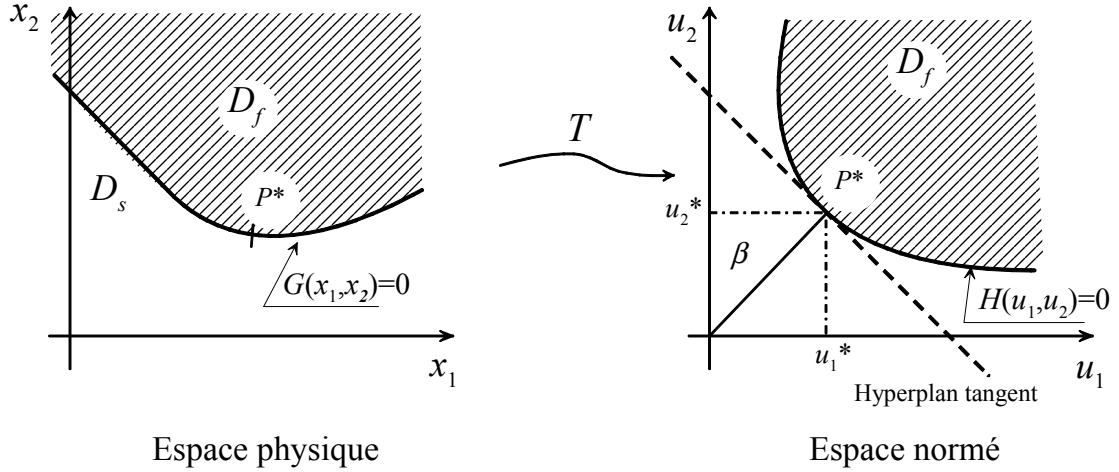


FIG. 3.1: représentation de la transformée T et de l'approximation FORM.

L'indice de fiabilité β représente la distance entre l'origine de l'espace des variables $\mathbf{U}(\omega)$ et le domaine défini par $H(\mathbf{U}(\omega)) \leq 0$ (voir Fig. 3.1), c'est à dire :

$$\beta = \min \sqrt{\mathbf{U}^t(\omega) \mathbf{U}(\omega)} \text{ sous } H(\mathbf{U}(\omega)) \leq 0 \quad (3.1)$$

Le point solution du problème défini par l'équation (3.1) est appelé point de défaillance le plus probable et est noté P^* .

Lorsque la surface d'état-limite $H(\mathbf{U}(\omega))$ est remplacée par son hyperplan tangent au point P^* , la probabilité de défaillance en approximation FORM est donnée par la relation :

$$P_{f,i} = \Phi(-\beta)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi de Gauss centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

3.1.2 L'approche système de la fiabilité

La défaillance d'un système mécanique a, jusqu'à présent, été définie par un seul scénario de défaillance décrivant un événement simple E . Ce scénario est associé à une fonction d'état-limite qui sépare le domaine de défaillance du domaine de sûreté.

Dans le cas général, la défaillance est issue d'une combinaison d'événements simples E_k . Ceci constitue un système. C'est donc la défaillance de ce système qui est étudiée.

Il existe plusieurs types de combinaisons possibles. Nous n'aborderons ici que la combinaison parallèle. Un système est dit parallèle lorsque la défaillance de tous les événements E_k est nécessaire pour la défaillance du système. La probabilité de défaillance du système P_{f_syst} est alors la probabilité de l'intersection des événements de défaillance :

$$P_{f_syst} = P(\cap_{k=1}^n E_k)$$

Les variables associées aux événements peuvent être corrélées. La corrélation associée aux états-limites représentant respectivement les événements E_k, E_l est notée ρ_{E_k, E_l} . Elle peut être calculée à partir d'une approximation FORM comme le produit scalaire des cosinus directeurs des deux hyperplans représentatifs.

Lorsque l'approximation FORM est appliquée à chaque composant du système, *i.e.* la probabilité de défaillance $P_{f,i}$ associée à chaque composant E_k est telle que :

$$P_{f,i}(E_k) = \Phi(-\beta_k)$$

alors, la probabilité P_{f_syst} peut être calculée en faisant intervenir la loi multi-normale ϕ_n . Notons $\{\beta_k\}$ le vecteur formé des n indices de fiabilité des composants E_k et $[\rho_{E_k, E_l}]$ la matrice des corrélations associées aux états-limites, alors :

$$\begin{aligned} P_{f_syst} &= \int_{-\infty}^{-\beta_1} \int_{-\infty}^{-\beta_2} \dots \int_{-\infty}^{-\beta_n} \phi_n(\hat{\mathbf{u}}) d\beta_1 d\beta_2 \dots d\beta_n \\ &= \Phi_n(-\{\beta_k\}; [\rho_{E_k, E_l}]) \end{aligned}$$

où $\phi_n(\hat{\mathbf{u}})$ est la densité multi-normale de Gauss pour les n variables \hat{u}_k normées, centrées et corrélées :

$$\phi_n(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det[\rho_{E_k, E_l}]}} \exp\left(-\frac{1}{2} \{\hat{u}_k\}^t [\rho_{E_k, E_l}]^{-1} \{\hat{u}_k\}\right)$$

3.2 La méthode PHI2

La méthode développée dans cette section est inspirée de l'écriture proposée par Hagen et Tvedt [HagTve 91a] [HagTve 91b]. Ces auteurs approximent le taux de franchissements de $\mathbf{S}(t, \omega)$ conditionné par les variables \mathbf{R} et \mathbf{Q} défini en (1.17) par la relation (3.2) dans laquelle l'état à la date $\tau + \Delta\tau$ est obtenu par un développement de la fonction de performance à l'ordre 1 en fonction du temps :

$$\begin{aligned} \nu(\tau|\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} P(\{G(\tau, \mathbf{S}(\tau, \omega)|\mathbf{r}, \mathbf{q}) > 0\} \\ &\quad \cap \{G(\tau, \mathbf{S}(\tau, \omega)|\mathbf{r}, \mathbf{q}) + \dot{G}(\tau, \mathbf{S}(\tau, \omega)|\mathbf{r}, \mathbf{q})\Delta\tau \leq 0\}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ce qui implique que la fonction de performance, et donc le processus, soient obligatoirement dérivables. Ils utilisent ensuite une approche système de la fiabilité pour calculer la probabilité de l'intersection ainsi définie. Ensuite, le taux obtenu est intégré suivant toutes les valeurs possibles de \mathbf{R} et \mathbf{Q} , ce qui permet d'obtenir la probabilité de défaillance cumulée non conditionnée.

La méthode PHI2 s'appuie directement sur la formulation (1.17) en s'affranchissant du développement limité.

3.2.1 La méthode

• Le principe

Le calcul de la probabilité cumulée de défaillance est classiquement basé sur la formule de Rice qui permet de déterminer le taux de franchissements, ou sur le calcul de l'espérance du nombre de franchissements en utilisant des formules asymptotiques. Ces taux sont des taux conditionnés en \mathbf{r} et \mathbf{q} . Ils sont ensuite intégrés suivant toutes les valeurs possibles de \mathbf{R} et \mathbf{Q} , ce qui permet de calculer la borne supérieure de la probabilité de défaillance cumulée non conditionnée. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, ce calcul nécessite des développements avancés en mathématiques et des implémentations logiciel *ad-hoc* (par exemple dans COMREL-TV).

La méthode que nous proposons consiste à utiliser l'approche proposée par Hagen et Tvedt [HagTve 91a] [HagTve 91b] qui permet de calculer directement le taux de franchissements en utilisant la loi binormale. Cette idée a été reprise par Der Kiureghian [DKiuLi 96], [LiDKiu 97] dans le domaine de la mécanique vibratoire. Cependant, pour notre part, nous considérons que le processus en jeu est donné uniquement par la fonction de performance qui doit franchir un seuil de niveau 0, sans décomposition *a priori* des variables. Il ne reste plus qu'à intégrer le taux de franchissements ainsi obtenu par rapport au temps. Il est ainsi possible de calculer la probabilité de défaillance cumulée grâce aux outils classiques (indépendants du temps) de la fiabilité.

Le taux de franchissements $\nu(\tau)$ est alors défini par la formule :

$$\nu(\tau) = \frac{\text{Prob}(A \cap B)}{\Delta\tau} \quad (3.3)$$

où les événements sont :

- $A = \{ \text{la structure est dans le domaine de sûreté à } \tau \}$;
- $B = \{ \text{la structure est dans le domaine de défaillance à } \tau + \Delta\tau \}$.

Connaissant la probabilité de défaillance instantanée initiale et le taux de franchissements, il est possible de calculer une borne supérieure de la probabilité de défaillance cumulée par :

$$P_{f,c}(t_1, t_2) \leq P_{f,i}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \nu(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

En introduisant la fonction de performance G , la relation précédente devient :

$$\nu(\tau) = \frac{\text{Prob}(A' \cap B')}{\Delta\tau} \quad (3.5)$$

avec

$$\begin{aligned} A' &= \{G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) > 0\} \\ B' &= \{G(\tau + \Delta\tau, \mathbf{X}(\tau + \Delta\tau, \omega)) \leq 0\} \end{aligned}$$

Dans la relation (3.5), $\text{Prob}(A' \cap B')$ peut être vue comme la probabilité de défaillance d'un système parallèle à deux composants. Dans le contexte d'une approximation FORM, ce type de calcul nécessite l'utilisation de la fonction de distribution de probabilité Φ_2 , qui donne son nom à la présente méthode. L'ensemble des développements théoriques qui suivent et différentes applications ont été successivement présentés dans les travaux [And *et al.* 01], [And *et al.* 02a], [And *et al.* 02b], [Sud *et al.* 02].

• La démarche

La démarche de calcul est la suivante :

- L'indice de fiabilité $\beta(\tau)$ associé à $\{G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) \leq 0\}$ est calculé après avoir gelé le temps (qui devient un simple paramètre) dans toutes les fonctions dépendantes du temps et en ayant remplacé les processus aléatoires $S_j(t, \omega)$ par les variables aléatoires correspondantes $S_j^{(1)}(\omega)$. Une approximation de premier ordre FORM (*First Order Reliability Method*) correspond à remplacer la surface d'état-limite par l'hyperplan tangent à l'état-limite au point de conception, soit $\boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \mathbf{u} + \beta(\tau) = 0$ dans l'espace standard. Par conséquent, l'indice de fiabilité associé à $\{G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) > 0\}$ est $-\beta(\tau)$ ($A' : -\boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \mathbf{u} - \beta(\tau) \leq 0$).

- L'indice de fiabilité $\beta(\tau + \Delta\tau)$ associé à $\{G(\tau + \Delta\tau, \mathbf{X}(\tau + \Delta\tau, \omega)) \leq 0\}$ est calculé par une seconde analyse FORM. Les processus aléatoires $S_j(t, \omega)$ sont remplacés par un autre jeu de variables aléatoires $S_j^{(2)}(\omega)$ différentes de $S_j^{(1)}(\omega)$ mais corrélées avec ces dernières. Le coefficient de corrélation est donné par :

$$\rho\left(S_j^{(1)}(\omega), S_j^{(2)}(\omega)\right) = \rho_{S_j S_j}(\tau, \tau + \Delta\tau) \quad (3.6)$$

où $\rho_{S_j S_j}(\tau, \tau + \Delta\tau)$ correspond à la fonction de covariance normalisée du processus $S_j(t, \omega)$. La surface d'état-limite en approximation FORM est donnée par $\boldsymbol{\alpha}(\tau + \Delta\tau) \cdot \mathbf{u} + \beta(\tau + \Delta\tau) \leq 0$ dans l'espace standard. L'indice de fiabilité correspondant à $\{G(\tau + \Delta\tau, \mathbf{X}(\tau + \Delta\tau, \omega)) \leq 0\}$ est alors $\beta(\tau + \Delta\tau)$.

- La corrélation entre les états-limites représentant les deux événements A' et B' est :

$$\rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau) = -\boldsymbol{\alpha}(\tau) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\tau + \Delta\tau) \quad (3.7)$$

La probabilité de $A' \cap B'$ est alors, en approximation FORM :

$$\text{Prob}(A' \cap B') = \Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau); \rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau)) \quad (3.8)$$

où Φ_2 est la fonction de répartition de la loi binormale. Ainsi le taux de franchissements est approximé par :

$$\nu(\tau)_{\text{PHI2}} = \frac{\Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau); \rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau))}{\Delta\tau} \quad (3.9)$$

où $\Delta\tau$ doit être sélectionné correctement via une étude de convergence.

La probabilité de défaillance $P_{f,c}(0, t)$ est enfin calculée en intégrant le taux de franchissements ainsi calculé par la méthode de Simpson.

Le calcul des indices de fiabilité et des cosinus directeurs peut être effectué avec un logiciel du type COMREL-TI car il s'agit de déterminer des produits de la fiabilité classique à partir d'états-limites ne contenant plus que des variables aléatoires et le temps en tant que simple paramètre.

• Illustration

La figure 3.2 illustre la probabilité $\nu(\tau) \Delta\tau$ en approximation FORM dans l'espace des variables standards $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$ où T est une transformation isoprobabiliste [Lem *et al.* 01]. Sur la figure 3.2, $\beta(\tau)$ et $\beta(\tau + \Delta\tau)$ sont respectivement les indices de fiabilité des événements A et B . ϕ_2 représente la fonction de densité de probabilité de la loi binormale. La probabilité $\nu(\tau) \Delta\tau$ est représentée par l'intégrale de ϕ_2 sur le domaine hachuré.

• Choix de Δt

Le choix de Δt est critique. Choisi trop grand, il diminue le taux de franchissements par suite de l'existence de trajectoires qui ont déjà franchi la limite dans l'intervalle $]\tau, \tau + \Delta\tau[$ et sont revenues dans le domaine de fiabilité à l'instant $\tau + \Delta\tau$. Choisi trop petit, il conduit numériquement au quotient de quantités trop faibles. De plus, lorsque $\Delta\tau$ tend vers 0, ρ_{GG} tend vers -1, ce qui introduit également un comportement singulier dans la fonction Φ_2 .

On voit que Δt est lié à la vitesse d'oscillation du processus. Il faut le choisir d'autant plus petit que le processus peut varier plus rapidement. La condition est que, pour aucune trajectoire, la fonction de performance ne peut avoir deux zéros dans l'intervalle $[\tau, \tau + \Delta\tau]$.

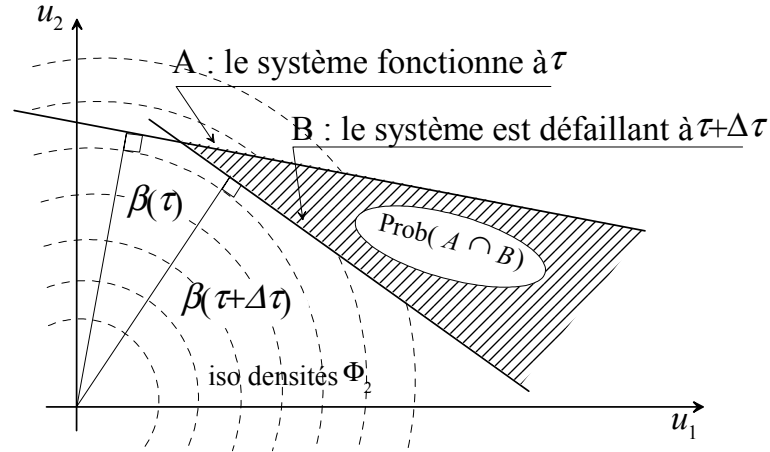


FIG. 3.2: illustration du calcul de $\nu(t)$ par la fiabilité système.

• Calcul de Φ_2

La fonction de distribution cumulée de la loi binormale Φ_2 peut être calculée de différentes façons en utilisant :

- la forme intégrale :

$$\begin{aligned} \Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau); \rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau)) \\ &= \int_{-\infty}^{\beta(\tau)} \int_{-\infty}^{-\beta(\tau + \Delta\tau)} \phi_2(x, y; \rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau)) dx dy \\ &= \Phi(\beta(\tau)) \Phi(-\beta(\tau + \Delta\tau)) \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{\rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \left(\beta(\tau)^2 + \beta(\tau + \Delta\tau)^2 + 2\beta(\tau)\beta(\tau + \Delta\tau)z \right) dz$$

- l'expression de Φ_2 lorsque $\rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau) = -1$:

$$\Phi_2(\beta(\tau), -\beta(\tau + \Delta\tau); -1) = \begin{cases} \Phi(\beta(\tau)) - \Phi(\beta(\tau + \Delta\tau)) & \text{si } \beta(\tau) > \beta(\tau + \Delta\tau) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2.2 Détermination de la corrélation

La question de la corrélation se pose à deux niveaux.

• Fonction de covariance normalisée ou corrélation du processus

Il faut tout d'abord considérer le processus en jeu dans la fonction de performance. Ce qui suit, développé dans le cas où la fonction de performance ne comporte qu'un seul processus

stochastique, peut être généralisé. Soit $S(t, \omega)$ ce processus. On note S_{t_i} la variable aléatoire associée au processus à la date t_i .

La corrélation $\rho_{SS}(t_1, t_2)$ des variables $S_{t_1}(\omega) = S(t_1, \omega)$ et $S_{t_2}(\omega) = S(t_2, \omega)$ résulte alors directement de la spécification du processus. Elle permet de connaître la loi de la variable aléatoire $S^{(2)}(\omega)$ sachant $S^{(1)}(\omega)$ dans la relation (3.6).

• Corrélation des états-limites

Ensuite, les deux états-limites successifs aux dates τ et $\tau + \Delta\tau$ sont corrélés et la corrélation $\rho_{GG}(t_1, t_2)$ est donnée classiquement par le produit des cosinus directeurs en approximation FORM, formule (3.7) :

$$\rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau) \equiv \rho_{GG}(\Delta\tau) = - \sum_i \alpha_{\tau_i} \alpha_{\tau + \Delta\tau_i}$$

3.2.3 Applications

Considérons la fonction de performance $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$. Soit $\hat{H}(t, \hat{\mathbf{U}}(t, \omega))$ la fonction correspondante dans l'espace standard de variables corrélées. Les variables décorrélées correspondantes sont notées $\mathbf{U}(t, \omega)$.

Un premier calcul de fiabilité permet d'obtenir l'indice de fiabilité β , les cosinus directeurs α_i et les coordonnées du point de conception u_i^* . Examinons l'application de la méthode PHI2 à notre premier exemple conducteur.

▷ Cas 1 : $R(\omega) - S(t, \omega)$

On considère le cas simple du type résistance sollicitation dont la fonction de performance est :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - S(t, \omega)$$

où R est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne m_R et d'écart-type σ_R , et S un processus stochastique Gaussien de moyenne m_S , d'écart-type σ_S et de fonction de corrélation :

$$\rho_{SS}(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)^2}{l^2}\right)$$

- On considère tout d'abord une date τ . L'expression de l'état-limite dans l'espace normé est :

$$\sigma_R u_R - \sigma_S u_{S_\tau} + m_R - m_S = 0$$

dans laquelle $S_\tau = S(\tau, \omega)$, ce qui donne les résultats immédiats suivants :

$$\begin{aligned} \beta(\tau) &= \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \\ \alpha_R(\tau) &= \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \\ \alpha_{S_\tau}(\tau) &= -\frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \end{aligned}$$

- On considère maintenant l'état-limite à une date $\tau + \Delta\tau$:

$$G(\tau + \Delta\tau, \mathbf{X}(\tau + \Delta\tau, \omega)) = R(\omega) - S(\tau + \Delta\tau, \omega) = 0$$

dans lequel la variable réduite de R est \hat{u}_R et la variable réduite de $S_{\tau+\Delta\tau}$ est $\hat{u}_{S_{\tau+\Delta\tau}}$ d'où :

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{u}}) = \sigma_R \hat{u}_R + m_R - \sigma_S \hat{u}_{S_{\tau+\Delta\tau}} - m_S$$

La corrélation entre $S_{\tau+\Delta\tau}$ et S_τ est prise en compte en utilisant les relations de décorrélation de variables Gaussiennes (décomposition de Cholesky de la matrice des corrélations) :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{S_\tau} \\ \hat{u}_{S_{\tau+\Delta\tau}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho_{SS}(\Delta\tau) & \sqrt{1 - \rho_{SS}^2(\Delta\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S_\tau} \\ u_{S_{\tau+\Delta\tau}} \end{bmatrix}$$

d'où l'état-limite à la date $\tau + \Delta\tau$:

$$m_R - m_S + \sigma_R u_R - u_{S_\tau} \sigma_S \rho_{SS}(\Delta\tau) - \sigma_S \sqrt{1 - \rho_{SS}^2(\Delta\tau)} u_{S_{\tau+\Delta\tau}} = 0$$

et :

$$\begin{aligned} \beta(\tau + \Delta\tau) &= \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \\ \alpha_R(\tau + \Delta\tau) &= \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \\ \alpha_{S_\tau}(\tau + \Delta\tau) &= -\frac{\sigma_S \rho_{SS}(\Delta\tau)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \\ \alpha_{S_{\tau+\Delta\tau}}(\tau + \Delta\tau) &= -\frac{\sigma_S \sqrt{1 - \rho_{SS}^2(\Delta\tau)}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \end{aligned}$$

La corrélation $\rho_{GG}(\Delta\tau)$ est calculée pour $-\beta(\tau)$ et $\beta(\tau + \Delta\tau)$ par :

$$\begin{aligned} \rho_{GG}(\Delta\tau) &= -(\alpha_R(\tau) \alpha_R(\tau + \Delta\tau) + \alpha_{S_\tau}(\tau) \alpha_{S_\tau}(\tau + \Delta\tau) + \alpha_{S_{\tau+\Delta\tau}}(\tau) \alpha_{S_{\tau+\Delta\tau}}(\tau + \Delta\tau)) \\ &= -(\alpha_R(\tau) \alpha_R(\tau + \Delta\tau) + \alpha_{S_\tau}(\tau) \alpha_{S_\tau}(\tau + \Delta\tau)) \\ &= -\frac{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 \rho_{SS}(\Delta\tau)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{aligned}$$

- **Application numérique et comparaison avec COMREL-TI**

Sous COMREL-TI, deux états-limites ont été déclarés :

$$\begin{aligned} G_1(t, \omega) &= R(\omega) - S_\tau \\ G_2(t, \omega) &= R(\omega) - S_{\tau+\Delta\tau} \end{aligned}$$

ainsi qu'une corrélation $\rho_{SS}(\Delta\tau)$ entre S_τ et $S_{\tau+\Delta\tau}$.

Les données du problèmes sont dans le tableau 3.1.

Variabes	Loi	Moyenne	Ecart-type
R	Gauss	10 MPa	2 MPa
S_τ	Gauss	5 MPa	1 MPa
$S_{\tau+\Delta\tau}$	Gauss	5 MPa	1 MPa

TAB. 3.1: calcul de la corrélation et comparaison avec COMREL-TI dans le cas 1 : données du problème.

Quantité	Analytique	Comrel
β	2,236	2,236
α_R	0,8944	0,8944
α_{S_τ}	-0,4472	-0,4472
$\alpha_{S_{\tau+\Delta\tau}}$	0	0

TAB. 3.2: calcul de la corrélation et comparaison avec COMREL-TI dans le cas 1 : résultats obtenus à la date τ .

Pour une longueur de corrélation $l = 1$ an et un pas de temps $\Delta\tau = 0,45$ an, le coefficient de corrélation du processus est $\rho_{SS}(\Delta\tau) = 0,8$.

Les résultats pour G_1 sont donnés dans le tableau 3.2. Les résultats pour G_2 en introduisant la corrélation $\rho_{SS}(\Delta\tau)$ sont donnés dans le tableau 3.3.

D'où, la valeur obtenue de la corrélation entre les états-limites à τ et à $\tau + \Delta\tau$:

$$\begin{aligned}\rho_{GG}(\Delta\tau) &= -(0,8944^2 + 0,4472 \times 0,3578 - 0 \times 0,2683) \\ &= -0,96\end{aligned}$$

La valeur obtenue analytiquement est : $\rho_{GG}(\Delta\tau) = -0,96$. On obtient bien le même résultat.

♣

3.2.4 Une autre façon de déterminer la corrélation entre les états-limites

Lorsque la fonction de performance a une expression simple, la corrélation peut être déterminée de façon directe par :

$$\rho_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau) = - \frac{R_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau) - m_{G(\tau)} m_{G(\tau+\Delta\tau)}}{\sigma_{G(\tau)} \sigma_{G(\tau+\Delta\tau)}}$$

où $R_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau)$ est la fonction d'autocorrélation de l'état-limite G , $m_{G(\tau)}$ est la moyenne de G à la date τ et $\sigma_{G(\tau)}$ est l'écart-type de G à la date τ .

Le signe “-” vient du fait que la corrélation recherchée est celle entre $\{G(\tau, \mathbf{X}(\tau, \omega)) > 0\}$ et $\{G(\tau + \Delta\tau, \mathbf{X}(\tau + \Delta\tau, \omega)) \leq 0\}$.

▷ Cas 1 : $R(\omega) - S(t, \omega)$

Quantité	Analytique	Comrel
β	2,236	2,236
α_R	0,8944	0,8944
α_{S_τ}	-0,3578	-0,3578
$\alpha_{S_{\tau+\Delta\tau}}$	-0,2683	-0,2683

TAB. 3.3: calcul de la corrélation et comparaison avec COMREL-TI dans le cas 1 : résultats obtenus à la date $\tau + \Delta\tau$.

Si on reprend le cas précédent $G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - S(t, \omega)$, cela donne :

$$\begin{aligned} m_{G(\tau)} &= m_{G(\tau+\Delta\tau)} = m_R - m_S \\ \text{var}[G(\tau)] &= \text{var}[G(\tau + \Delta\tau)] = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} R_{GG}(\tau, \tau + \Delta\tau) &= \mathbf{E}[G(\tau) G(\tau + \Delta\tau)] \\ &= \mathbf{E}[(R(\omega) - S(\tau, \omega)) (R(\omega) - S(\tau + \Delta\tau, \omega))] \\ &= \sigma_R^2 + m_R^2 - 2m_R m_S + \sigma_S^2 \rho_{S_\tau S_{\tau+\Delta\tau}} + m_S^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\rho_{GG}(\Delta\tau) = - \frac{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 \rho_{SS}(\Delta\tau)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$



3.3 Calcul infinitésimal par RGMR

La méthode RGMR est une méthode exacte dans le sens où les seules approximations faites sont numériques contrairement aux méthodes FORM ou SORM qui utilisent une approximation géométrique des surfaces respectivement par un plan ou une forme quadratique. Cette méthode, appelée *Riemannian Geometrical Method for Reliability*, a été développée au LaRAMA par J-C Mitteau [Mit *et al.* 95]. Dans la version que nous utilisons, aucune forme particulière de la fonction de performance n'est demandée.

La première partie de cette section expose le calcul de la probabilité instantanée de défaillance par la méthode RGMR. La seconde partie présente la relation mise en place permettant de calculer le taux de franchissements, ce qui permet de calculer une borne supérieure de la probabilité de défaillance.

3.3.1 Quelques définitions

Considérons une distribution de probabilité de dimension n (le vecteur aléatoire appartient à \mathbb{R}^n). On introduit l'espace projeté, noté $P(\mathbb{R}^n)$, de dimension $n - 1$. Il représente l'espace des directions non orientées de \mathbb{R}^n (l'espace des directions de \mathbb{R}^{n-1} passant par l'origine). On peut munir cet espace d'une structure mathématique qui permette de parler de distance entre deux directions et d'intégrer suivant l'ensemble des directions. Cette structure est basée sur l'utilisation de la *géométrie riemannienne*.

• **Définitions**

Définition 1 [Mon 97] : une carte est un système de coordonnées d'un ensemble M . Elle est notée $(U, x_1, x_2, \dots, x_d)$ où U est une partie non vide de M et x_1, x_2, \dots, x_d des fonctions numériques définies dans U , telles que l'application :

$$x : m \in U \mapsto (x_1(m), x_2(m), \dots, x_d(m)) \in \mathbb{R}^d$$

soit une bijection sur un ouvert de \mathbb{R}^d .

Définition 2 [Mit 97] : une transformation stéréographique de dimension $n - 1$ est une transformation coordonnée par coordonnée de \mathbb{R}^{n-1} dans une sphère de dimension $(n - 1)$ et de rayon 1 notée $\sum_{n-1,1}$, considérée comme une hypersurface dans l'espace de dimension n .

Le volume défini par cette hypersurface est appelé boule.

Pour résumer, dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , on définit :

- la sphère unité de dimension $n - 1$ dont le volume, noté $\text{vol}(\sum_{n-1,1})$ correspond à la surface de la sphère ;
- la boule de dimension $n - 1$ qui correspond au volume intérieur de la sphère.

Les arguments qui justifient l'utilisation d'une telle transformation sont que les formules pour le calcul sont beaucoup plus simples. De plus, il est facile de définir une correspondance des coordonnées une à une. Une représentation graphique jusqu'à l'ordre 4 peut être faite et facilement interprétée.

• **Construction d'une carte stéréographique**

Voici les 2 étapes qui permettent de construire complètement une carte stéréographique :

- 1 - Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) les n coordonnées dans l'espace considéré. L'équation de la sphère unité $\sum_{n-1,1} \subset \mathbb{R}^n$ est :

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

Exemple : dans \mathbb{R}^3 , l'équation devient $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1$. On retrouve bien l'équation d'une sphère.

- 2 - Soit $P = (0, \dots, 0, -1)$. P est le pôle définissant la carte stéréographique ; \vec{e}_n le vecteur unitaire orthogonal à l'espace $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Appelons Π l'hyperplan défini par $x_n = 0$.

Pour chaque vecteur $U = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \Pi$, $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$ est calculé et un point image M est associé :

$$M = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \left(\frac{2x_1}{1+r^2}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{1+r^2}, \frac{1-r^2}{1+r^2} \right)$$

ce qui peut se réécrire :

$$f : U \rightarrow \frac{2}{1+r^2}U + \frac{1-r^2}{1+r^2}\vec{e}_n$$

où \vec{e}_n est le vecteur unitaire orthogonal à l'espace $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

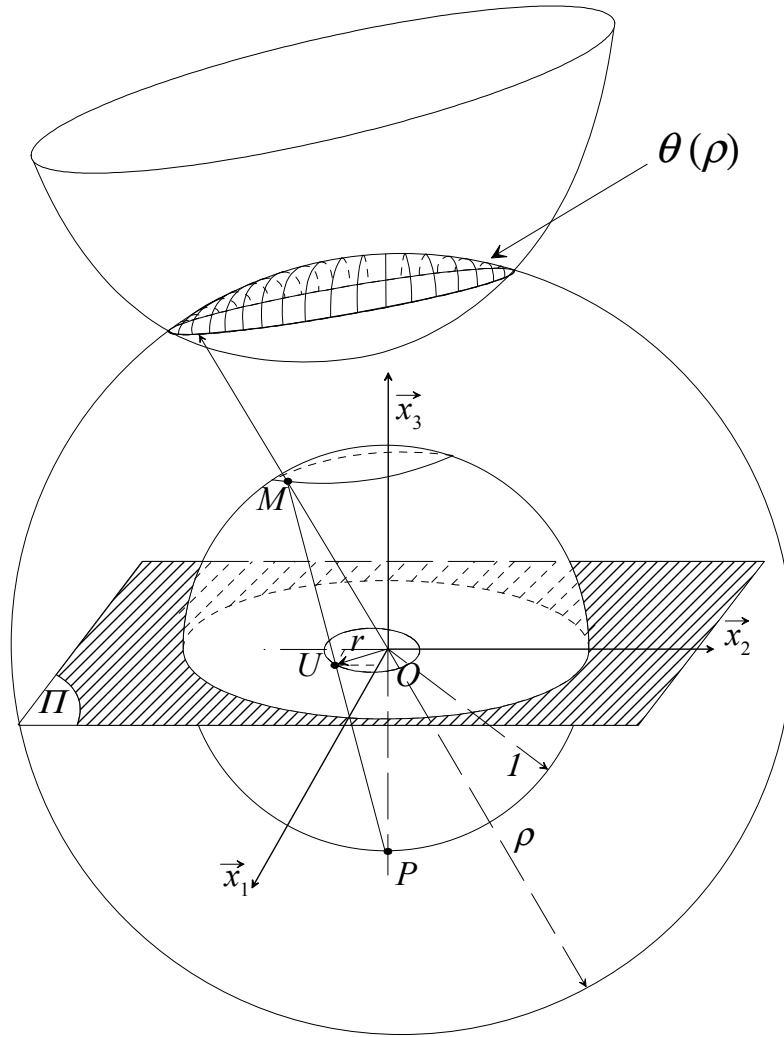


FIG. 3.3: principe de la transformation stéréographique.

Le point M est un point de $\sum_{n-1,1}$. En effet :

$$\begin{aligned} \|\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\|^2 &= \frac{1}{(1+r^2)^2} \left[4 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (1-r^2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{(1+r^2)^2} [4r^2 + 1 - 2r^2 + r^4] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exemple : dans \mathbb{R}^3 , $P = (0, 0, -1)$ le pôle définissant la carte stéréographique. \vec{e}_3 est le vecteur unitaire orthogonal à l'espace $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Appelons Π l'hyperplan défini par $x_3 = 0$ (voir figure 3.3).

Pour chaque vecteur $U = (x_1, x_2) \in \Pi$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est calculé et un point image M est associé :

$$M = \Phi(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1+r^2}, \frac{2x_2}{1+r^2}, \frac{1-r^2}{1+r^2} \right)$$

qui est un point dans $\Sigma_{2,1}$, ce qui correspond à la surface de la sphère unité dans \mathbb{R}^3 .

La transformation stéréographique est illustrée dans \mathbb{R}^3 par la figure 3.3. Le vecteur \overrightarrow{OM} est l'image de U sur la sphère unité par la projection stéréographique.

L'intérêt fondamental d'une telle représentation est de permettre la couverture de tout l'espace des directions passant par l'origine (espace projeté $P(\mathbb{R}^n)$) avec un ensemble compact qui est la sphère unité de dimension $n - 1$.

• Concept de mesure¹

En posant ν_{n-1} la mesure de Lebesgue de dimension $n-1$, l'élément de volume dans l'espace $P(\mathbb{R}^n)$ est donné par :

$$d\text{vol}(\Sigma_{n-1,1}) = \left(\frac{2}{1+r^2} \right)^{n-1} \nu_{n-1}$$

La relation entre l'élément de volume de la sphère unité $d\text{vol}(\Sigma_{n-1,1})$ et l'élément de volume de la sphère de rayon ρ $d\text{vol}(\Sigma_{n-1,\rho})$ est donnée par :

$$d\text{vol}(\Sigma_{n-1,\rho}) = \rho^{n-1} d\text{vol}(\Sigma_{n-1,1})$$

Exemple : dans \mathbb{R}^3 , la relation entre l'élément de surface $d\text{vol}(\Sigma_{2,1})$ de la sphère unité, $\Sigma_{2,1}$, et l'élément de volume $d\text{vol}(\Sigma_{2,\rho})$ de la sphère de rayon ρ , $\Sigma_{2,\rho}$, est donnée par :

$$d\text{vol}(\Sigma_{2,\rho}) = \rho^2 d\text{vol}(\Sigma_{2,1}) \quad (3.11)$$

En effet, pour la sphère de rayon 1, la surface est donnée par $S_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi$. Pour la sphère de rayon ρ , la surface est donnée par $S_\rho = \pi \cdot \rho^2$. On a bien $S_\rho = \rho^2 \cdot S_1$.

3.3.2 Calcul de la probabilité instantanée de défaillance

Toute la partie théorique qui suit est, sauf exception précisée, issue de la compilation de plusieurs documents [Mit *et al.* 95], [Mit 95], [Mit 97], [Mit 99], [Mit 00] et de l'étude du code source du programme lui-même.

• Notion d'angle solide

On utilise la méthode dite "de l'angle solide". Notons \mathcal{D}_f le domaine de défaillance. Soit un nombre réel $\rho > 0$, on considère l'angle solide $\theta(\rho)$, mathématiquement défini comme le volume de l'intersection de l'hypersphère de rayon ρ avec le domaine de défaillance (cf. figure 3.3).

Pratiquement, on considère le rapport du volume intersection de la sphère de rayon ρ avec le domaine de défaillance \mathcal{D}_f par le volume total de l'hypersphère que l'on nomme l'angle solide relatif. D'où :

$$\theta(\rho) = \frac{\text{vol}(\Sigma_{n-1,\rho} \cap \mathcal{D}_f)}{\text{vol}(\Sigma_{n-1,\rho})}$$

où $\Sigma_{n-1,\rho}$ désigne l'hypersphère de dimension $n-1$ centrée à l'origine, de rayon ρ dans l'espace de dimension n .

¹Une définition est donnée en annexe E.

L'angle solide relatif peut aussi être exprimé en fonction des hypersphères de rayon unité. Pour cela, on utilise la projection de $\Sigma_{n-1,\rho} \cap \mathcal{D}_f$ sur la sphère unité ; elle est notée $\Sigma_{proj,1}$. D'où :

$$\theta(\rho) = \frac{\text{vol}(\Sigma_{proj,1})}{\text{vol}(\Sigma_{n-1,1})}$$

• La probabilité de défaillance

Dans tous les cas, l'espace de probabilité est \mathbb{R}^n , muni d'une densité normale standard isotrope exprimée par :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right) \text{ où } \rho = \|\mathbf{x}\|$$

La probabilité de défaillance est alors donnée par l'intégrale multiple :

$$P_f = \int_{\mathcal{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Cette intégrale est transformée en utilisant le théorème de Fubini (annexe E) et en appliquant le changement de variable $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \rho$. Elle devient :

$$P_f = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\beta}^{\infty} \left[\int_{\mathcal{D}_{f,\rho}} d\sigma_{\rho} \right] \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right) d\rho \quad (3.12)$$

où $\mathcal{D}_{f,\rho} = \Sigma_{n-1,\rho} \cap \mathcal{D}_f$ correspond à l'intersection du domaine de défaillance avec l'hypersphère de rayon ρ et $d\sigma_{\rho}$ est l'élément de surface de cette hypersphère.

L'intégrale entre crochets de la relation (3.12) peut s'exprimer en fonction de l'angle solide $\theta(\rho)$:

$$\int_{\mathcal{D}_{f,\rho}} d\sigma_{\rho} = \theta(\rho) \text{vol}(\Sigma_{n-1,\rho}) \quad (3.13)$$

où $\Sigma_{n-1,\rho}$ désigne l'hypersphère de dimension $n-1$ centrée à l'origine, de rayon ρ dans l'espace de dimension n . Il existe une relation entre l'élément de volume de la sphère unité et celui de la sphère de rayon ρ qui est :

$$d \text{vol}(\Sigma_{n-1,\rho}) = \rho^{n-1} d \text{vol}(\Sigma_{n-1,1})$$

ce qui donne, en intégrant sur la surface à ρ constant :

$$\text{vol}(\Sigma_{n-1,\rho}) = \rho^{n-1} \text{vol}(\Sigma_{n-1,1}) \quad (3.14)$$

En intégrant (3.13) et (3.14) dans (3.12), la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P(D_f) = \frac{\text{vol}(\Sigma_{n-1,1})}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\beta}^{\infty} \theta(\rho) \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right) \rho^{n-1} d\rho$$

où β est l'indice de fiabilité FORM du domaine \mathcal{D}_f et $\text{vol}(\Sigma_{n-1,1})$ est le volume de la sphère unité de dimension $n-1$ dans \mathbb{R}^n .

Exemple : dans \mathbb{R}^3 , les calculs étant faits dans l'espace normé centré, la densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}$ est Gaussienne, c'est-à-dire :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right)$$

Si on réécrit la probabilité de défaillance, cela donne :

$$P_f = \int_{\mathcal{D}_f} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right) dx_1 dx_2 dx_3$$

Dans le cadre de cette étude, la quantité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ représente le carré du rayon d'une sphère. Ce rayon est noté ρ . La partie $dx_1 dx_2 dx_3$ représente un élément de volume. Cet élément peut aussi être pris comme égal à une tranche du domaine de défaillance. Cette tranche a pour surface celle de l'intersection notée ici $\mathcal{D}_{f,\rho}(\rho)$ d'une sphère de rayon ρ et du domaine de défaillance et pour épaisseur $d\rho$. L'intégrale devient alors :

$$P_f = \int_{\beta}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right) \mathcal{D}_{f,\rho}(\rho) d\rho$$

Or, par définition, l'angle solide noté $\theta(\rho)$ correspond au rapport de $\mathcal{D}_{f,\rho}(\rho)$ par le volume total de la sphère de rayon ρ . D'où $\mathcal{D}_{f,\rho}(\rho) = \theta(\rho) \text{vol}(\Sigma_{2,\rho}) = \rho^2 \theta(\rho) \text{vol}(\Sigma_{2,1})$ si on utilise la relation (3.11). D'où, en remplaçant, il vient :

$$P_f = \frac{\text{vol}(\Sigma_{2,1})}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\beta}^{\infty} \rho^2 \theta(\rho) \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right) d\rho$$

3.3.3 Calcul des volumes des sphères et des boules de rayon unité dans \mathbb{R}^n

Il faut distinguer les boules des sphères. Si on se place en dimension 3, une boule correspond à une sphère pleine. Le volume de la sphère correspond à l'aire de la surface uniquement.

- **Volume des boules**

Définissons les volumes en dimensions 1 et 2 :

$$V_1 = 2 \quad V_2 = \pi$$

Pour la dimension n , le volume de la boule, notée V_n , est donné par la relation de récurrence suivante :

$$V_n = V_{n-2} \cdot \frac{2\pi}{n}$$

On peut vérifier dans \mathbb{R}^3 : $V_3 = V_1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$, ce qui correspond bien au volume d'une boule de rayon 1.

Cette relation de récurrence est issue de la relation entre les volumes respectifs de l'hyper-sphère de dimension n et de celle de dimension $n-1$ (voir figure 3.4) qui est :

$$V_n = \int_{\Sigma_{n-2}} V_{n-1} \sin(\theta) d\theta$$

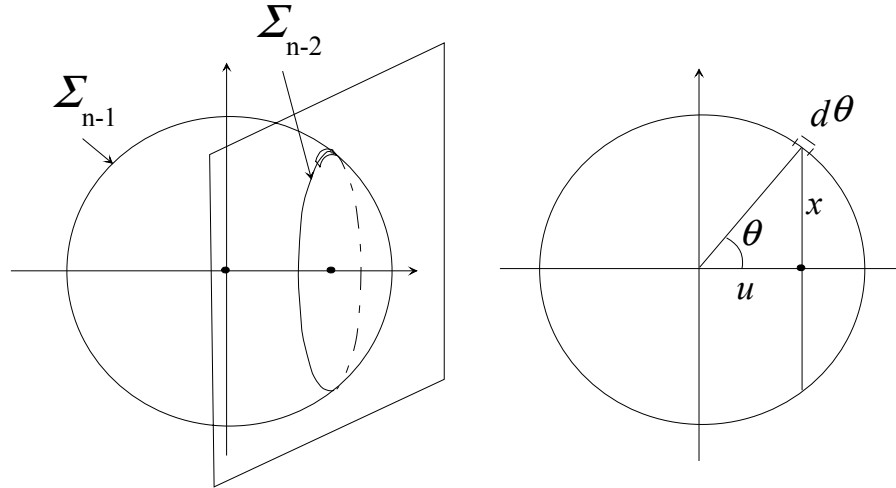


FIG. 3.4: relation entre la boule de dimension Σ_{n-1} et l'hypersphère de dimension Σ_{n-2} .

• Volume des sphères

Pour la dimension n le volume de la sphère, noté $\text{vol}(\Sigma_{n-1,1})$, est donné par :

$$\text{vol}(\Sigma_{n-1,1}) = n.V_n$$

On peut vérifier dans \mathbb{R}^3 : $\text{vol}(\Sigma_{2,1}) = 3.V_3 = 4.\pi$, ce qui correspond bien à la surface d'une sphère de rayon 1.

La relation permettant de déterminer le volume des sphères a pour origine la dérivation des volumes des boules pour un rayon de 1.

3.3.4 Calcul de l'angle solide

Le calcul de l'angle solide est un élément essentiel de la méthode RGMR. Pour en faciliter la compréhension, l'explication est donnée dans \mathbb{R}^3 , sachant que la méthode est identique en dimension n .

On note :

- $r(\mathbf{x})$ la norme du vecteur (x_1, x_2) ;
- $\rho(\mathbf{x})$ la norme du vecteur (x_1, x_2, x_3) ;
- Π le plan défini par $x_3 = 0$;
- $\Sigma_{2,1}$ la sphère de rayon 1, de centre O ;
- L'intersection de Π avec $\Sigma_{2,1}$ représente un disque de rayon unité centré en O . Il est noté D_Π .

L'expression de l'angle solide est alors donnée par :

$$\theta(\rho) = \frac{\text{vol}(\Sigma_{proj,1})}{\text{vol}(\Sigma_{2,1})}$$

où $\Sigma_{proj,1}$ est la projection de $\Sigma_{2,\rho} \cap \mathcal{D}_f$ sur la sphère unité et $\Sigma_{2,1}$ est le volume total de la sphère unité.

On appelle $U = (x_1, x_2)$ le point appartenant à D_\cap . Ce point est à une distance $r(\mathbf{x})$ du centre O . Le point U balaie tout D_\cap .

La notion de transformation conforme est utilisée ici pour calculer les volumes qui nous intéressent. La particularité d'une telle transformation est qu'elle conserve les angles et transforme tous les vecteurs en des vecteurs d'égale longueur. Par exemple, si on considère un élément de volume dV centré sur U alors son image via la transformation conforme sera un élément de volume centré sur M et de valeur $dV \cdot \lambda^n$, λ dépendant du rapport des longueurs entre PU et PM . Dans notre cas, $\lambda = \frac{2}{1+r^2}$.

Le calcul de l'angle solide passe par l'intégration d'éléments de volume. Pour le calculer, on considère l'intégration du Jacobien sur un espace qui correspond à l'ensemble des points appartenant à la surface intersection $\Sigma_{proj,1}$. Cela conduit à :

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Sigma_{proj,1}) &= \int |J| dx_1 dx_2 \\ &= \int_{U \in D_U(\rho)} \left(\frac{2}{1+r^2} \right)^{n-1} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

avec $D_U(\rho) = \left\{ U \in \Pi \mid H(\rho \overrightarrow{OM}) \leq 0 \right\}$.

Le calcul de cette intégrale se fait en deux étapes :

1. le plan Π est discrétisé en points U_i . Parmi ces points, il ne faut conserver que les points U_i qui appartiennent au disque intersection du plan Π et de la sphère de rayon unité.
2. il faut vérifier que le point M' correspondant à chaque point U_i conservé appartient bien au domaine de défaillance.

• Première étape : sélection des points U_i

Pour commencer, la surface intersection est discrétisée en éléments de volume de centres U_i . Lorsque un élément est complètement inclus dans la surface, il faut le prendre totalement en compte. Lorsque un élément est à cheval sur la frontière, il ne faut le prendre en compte qu'en partie. Lorsqu'un élément est en dehors, il ne faut pas le prendre en compte du tout. Par conséquent une astuce a été mise en place, elle consiste à multiplier le Jacobien par un coefficient dépendant de l'emplacement de l'élément (voir figure 3.5). h étant une constante pré-définie, cela donne :

- Si $r_i < 1 - 0,8h$ (U_i à l'intérieur de D_\cap) $\Rightarrow x_i = 1$ *i.e.* on prend toute la cellule (par exemple U_1 figure 3.5).
- Si $1 - 0,8h \leq r_i < 1 + 0,8h$ (U_i sur le bord de D_\cap) $\Rightarrow x_i = 0,5$ *i.e.* on ne prend que la moitié de la cellule (par exemple U_2 figure 3.5).
- Si $r_i > 1 + 0,8h$ (U_i à l'extérieur de D_\cap) $\Rightarrow x_i = 0$ *i.e.* on élimine la cellule (par exemple U_3 figure 3.5).

À ce niveau, le calcul du volume complet de la sphère peut être effectué grâce à la relation :

$$\text{vol}(\Sigma_{2,1}) = 2 \sum_{U_i | U_i \in D_\cap} \left(\frac{2}{1+r_i^2} \right)^2 \quad \text{pour tout } U_i \in D_\cap$$

Seule la moitié de la sphère est balayée d'où le coefficient 2 devant la somme pour obtenir le volume total.

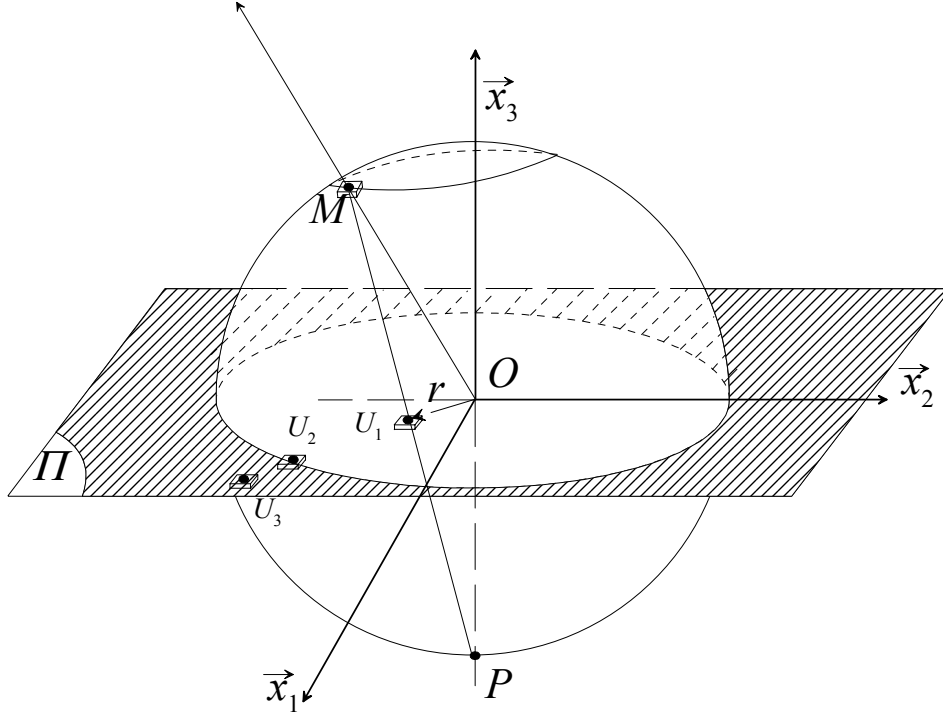


FIG. 3.5: sélection des points appartenant à l'intersection de la sphère unité avec le plan Π .

• **Deuxième étape : trouver les U_i correspondant au domaine de défaillance**

Pour cela, l'expression de l'état-limite dans l'espace des variables normées centrées est nécessaire. Soit $H(\rho \overrightarrow{OM})$ cet état-limite est tel que :

$$H(\rho \overrightarrow{OM}) = H\left(\frac{2x_1}{1+r^2}\rho, \dots, \frac{2x_{n-1}}{1+r^2}\rho, \frac{1-r^2}{1+r^2}x_n\rho\right)$$

On calcule $H(\rho \overrightarrow{OM})$ et on étudie le signe pour différents points i .

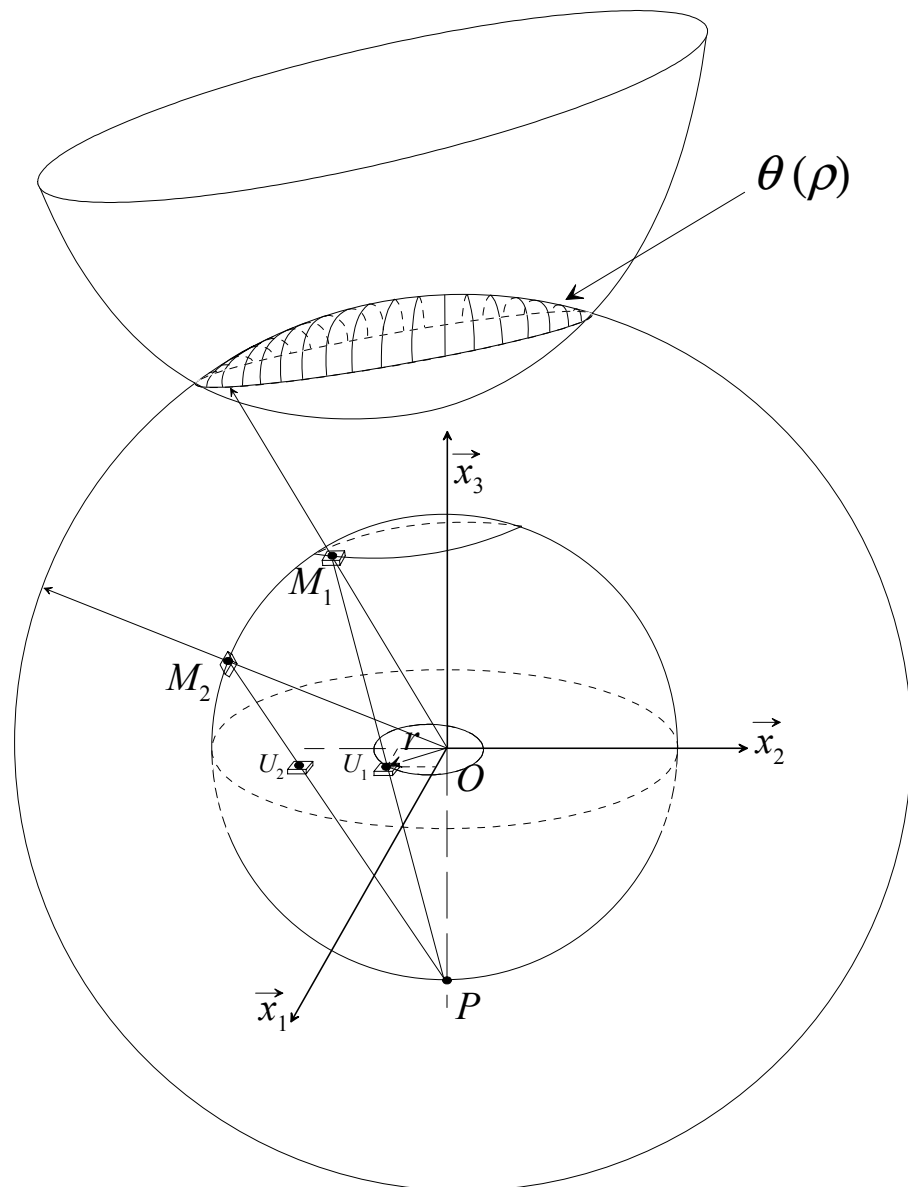
- Si $H(\rho \overrightarrow{OM}_i) \leq 0$ ou $H(-\rho \overrightarrow{OM}_i) \leq 0$, le point U_i correspondant est conservé car il appartient au domaine de défaillance.
- Si $H(\rho \overrightarrow{OM}_i) > 0$ ou $H(-\rho \overrightarrow{OM}_i) > 0$, le point U_i correspondant n'est pas conservé car il n'appartient pas au domaine de défaillance.

Sur la figure 3.6, le point U_1 est conservé car $\rho \overrightarrow{OM}_1$ appartient au domaine de défaillance ; par contre le point U_2 ne l'est pas car $\rho \overrightarrow{OM}_2$ n'appartient pas au domaine de défaillance.

L'intégrale devient alors :

$$\text{vol}(\Sigma_{proj,1}) = \sum_{U_i \in D \cap |H(\rho U_i)| \leq 0} \left(\frac{2}{1+r_i^2}\right)^{n-1} x_i + \sum_{U_i \in D \cap |H(-\rho U_i)| \leq 0} \left(\frac{2}{1+r_i^2}\right)^{n-1} x_i$$

Le calcul en $-M'$ vient du fait qu'il peut y avoir une partie de l'état-limite du côté du pôle P non prise en compte car seule la moitié de la sphère est représentée. Pour ne pas l'oublier,

FIG. 3.6: sélection des points U_i correspondant au domaine de défaillance.

une vérification systématique est faite, ainsi, elle est prise en compte dans le calcul de l'angle solide. Ce cas est illustré dans \mathbb{R}^3 sur la figure 3.7.

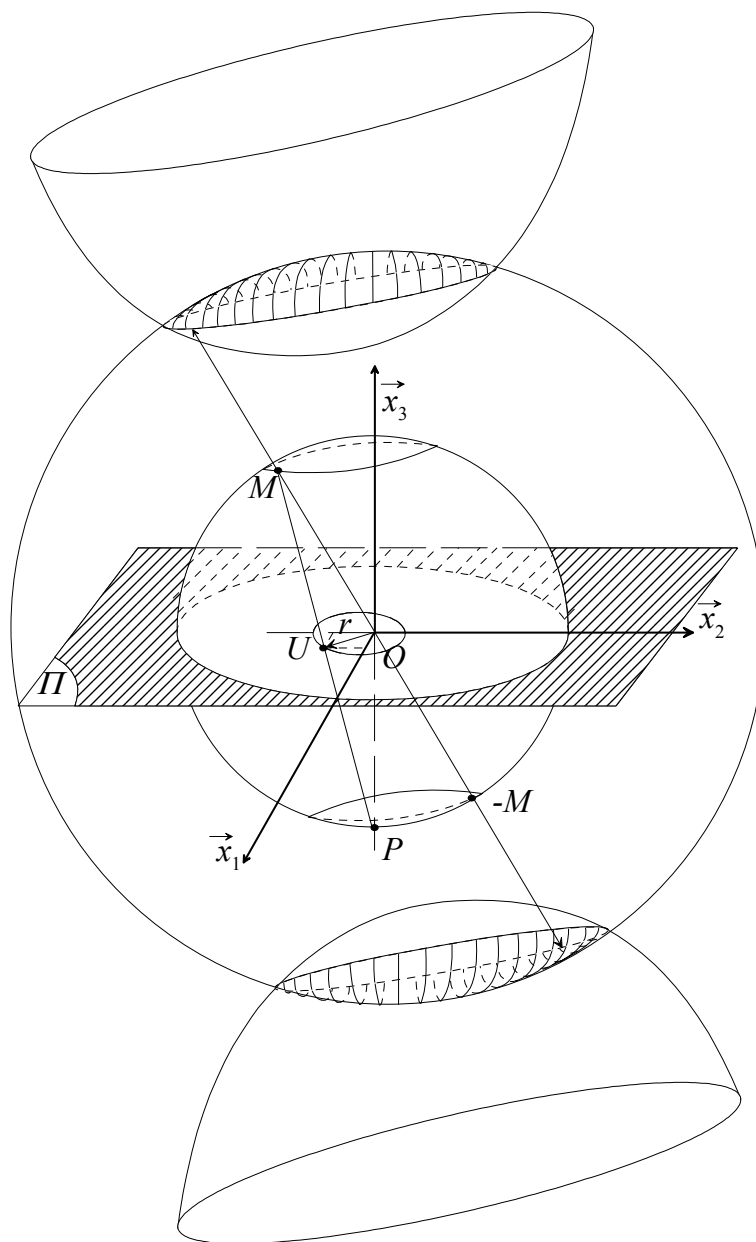


FIG. 3.7: cas d'un domaine de défaillance des deux côtés du pôle P .

Une fois les quantités $\text{vol}(\Sigma_{2,1})$ et $\text{vol}(\Sigma_{proj,1})$ déterminées, l'angle solide se calcule immédiatement par la relation :

$$\theta(\rho) = \frac{\sum_{U_i \in D_\Omega | H(\rho U_i) \leq 0} \left(\frac{2}{1+r_i^2}\right)^{n-1} x_i + \sum_{U_i \in D_\Omega | H(-\rho U_i) \leq 0} \left(\frac{2}{1+r_i^2}\right)^{n-1} x_i}{2 \sum_{U_i | U_i \in D_\Omega} \left(\frac{2}{1+r_i^2}\right)^{n-1}}$$

3.3.5 Calcul du taux de franchissements

Des difficultés peuvent apparaître lorsque l'on traite un problème mettant en jeu des processus qui fluctuent très rapidement. On est alors confronté au problème numérique de la division de deux quantités voisines de zéro, l'évaluation numérique du numérateur elle-même pouvant être impossible par suite du manque d'épaisseur du domaine de défaillance (voir figure 3.8). D'autre part, les échantillons, dans le cas d'une méthode par simulation directe ou conditionnelle, ou les points d'intégration dans une méthode de type RGMR [Mit *et al.* 95], ne peuvent se situer dans le domaine trop mince situé entre la surface d'état-limite $\partial\mathcal{D}_f$ à la date t , notée $\partial\mathcal{D}_f(t)$, et la surface d'état-limite $\partial\mathcal{D}_f$ à la date $t + \Delta t$, notée $\partial\mathcal{D}_f(t + \Delta t)$, de l'espace Ω définies par les équations $G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = 0$ et $G(t + \Delta t, \mathbf{X}(t + \Delta t, \omega)) = 0$.

Il faut examiner le passage à la limite dans la formule (1.17) page 39. Ceci conduit à une généralisation de la formule de Belayev [Bel 68], généralisation vectorielle de la formule de Rice. Il existe des conditions particulières pour que ce passage à la limite soit possible.

Dans la mesure où la surface d'état-limite $\partial\mathcal{D}_f(t)$ à l'instant t ne possède pas trop de points critiques, c'est-à-dire de points en lesquels on aurait $dG(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = 0$, on peut prouver que, pour tout compact de $\partial\mathcal{D}_f(t)$, il existe pour Δt suffisamment petit, une fonction $\lambda : \partial\mathcal{D}_f(t) \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable telle que les points de $\partial\mathcal{D}_f(t + \Delta t)$ sont définis de façon univoque par $\mathbf{u}' + \lambda(\mathbf{u})\text{grad}(\mathbf{u})$ (voir figure 3.8).

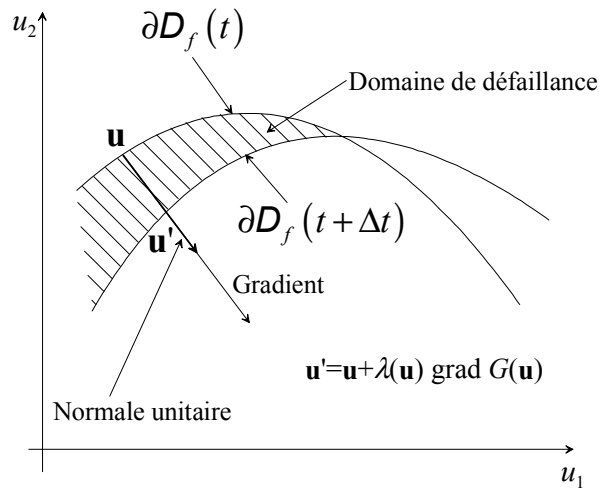


FIG. 3.8: illustration de la fonction λ .

Il faut noter que le signe de λ caractérise le sens de variation du domaine de défaillance. Les valeurs positives caractérisent la portion de domaine qui concerne la défaillance. Les valeurs négatives n'en font pas partie et doivent être éliminées.

A condition que les singularités de $\partial\mathcal{D}_f(t)$ forment un ensemble de mesure nulle (points multiples), le taux de franchissements est alors donné par une intégrale le long de l'hypersurface $\partial\mathcal{D}_f(t)$.

On pose :

- $\dot{G}(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ la dérivée partielle par rapport au temps de la fonction de performance ;
- $d_{\mathbf{X}}G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ la différentielle par rapport aux variables $\mathbf{X}(t, \omega)$ (matrice ligne des dérivées partielles) ;
- $\dot{\mathbf{X}}(t, \omega)$ la matrice colonne des dérivées partielles de $\mathbf{X}(t, \omega)$ par rapport au temps ;

- $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{X}$ la matrice des dérivées des composantes de $\mathbf{X}(t, \omega)$;
- n la dimension du vecteur $\mathbf{X}(t, \omega)$;
- $d\sigma_t(\mathbf{u})$ la mesure de volume de long de l'hypersurface $\partial\mathcal{D}_f(t)$;
- \bullet l'opérateur représentant la multiplication matricielle.

Soit $\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial\mathbf{X}}{\partial t}$ la dérivée partielle de $\mathbf{X}(t, \omega)$ par rapport au temps et $F_{\dot{\mathbf{X}}}$ la distribution de probabilité de $\dot{\mathbf{X}}$. On note :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\dot{G}(t, \mathbf{x}(t)) + d_{\mathbf{X}}G(t, \mathbf{x}(t)) \bullet \dot{\mathbf{x}} > 0} dF_{\dot{\mathbf{X}}} \\ B &= \int_{\dot{G}(t, \mathbf{x}(t)) + d_{\mathbf{X}}G(t, \mathbf{x}(t)) \bullet \dot{\mathbf{x}} > 0} \dot{\mathbf{X}} dF_{\dot{\mathbf{X}}} \end{aligned}$$

Le taux de franchissements a pour expression [Mit *et al.* 02] [AndLem 02] [MitAnd 02] :

$$\nu(t) = \int_{\partial\mathcal{D}_f(t)} \frac{\dot{G}(t, \mathbf{x}(t)) A + d_{\mathbf{X}}G(t, \mathbf{x}(t)) B}{|d_{\mathbf{X}}G \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{X}(t)|} \phi_n(\mathbf{u}) d\sigma_t(\mathbf{u}) \quad (3.15)$$

Une esquisse de démonstration est proposée par J-C Mitteau dans [Mit 02].

Dans le cas normal (Gaussien centré sans corrélation) où le processus est scalaire, on peut alors introduire la quantité a telle que, à t et ω fixés, :

$$\dot{G}(t, \mathbf{x}(t)) + d_{\mathbf{X}}G(t, \mathbf{x}(t)) \cdot a = 0$$

et les valeurs de A et B sont données par :

$$\begin{aligned} A &= \Phi(a) \\ B &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \end{aligned}$$

3.3.6 Mise en oeuvre numérique par RGMR

La méthode RGMR, dont le principe général a été exposée dans la première partie de cette section, permet l'analyse de la surface d'état-limite. Le calcul en chacun des points de l'état-limite de l'intégrand de l'équation (3.15), puis une intégration de Riemann sur l'ensemble de ces points, fournit le taux de franchissements. La démarche pour effectuer l'intégration est la même que celle présentée au paragraphe 3.3.2 à la différence que l'intégrale se calcule sur la surface d'état-limite et non sur le volume représentant le domaine de défaillance.

La méthode est particulièrement adaptée au calcul des intégrales de fiabilité dans l'espace standard, puisque la densité de probabilité admet une symétrie sphérique.

Les étapes de la méthode sont les suivantes :

1. définir l'algorithme de calcul de G , critère de fiabilité.
2. construire la transformation isoprobabiliste choisie.
3. définir les différentes quantités intervenant dans la relation (3.15).
4. écrire la fonction d'état-limite dans l'espace des variables normales (normées centrées) en combinant les deux opérations précédentes ; on peut alors intégrer dans l'espace des directions pour obtenir le taux de franchissements.

3.3.7 Calcul de la probabilité cumulée de défaillance

Un logiciel RGMR a été programmé par Mitteau [Mit *et al.* 95]. Il permet de calculer la probabilité instantanée de défaillance par la méthode de l'angle solide ainsi que le taux de franchissements $\nu(\tau)$ pour un instant τ suivant la relation (3.15).

L'espérance du nombre de franchissements $E[N(t_1, t_2)]$ est calculée en intégrant sur $[t_1, t_2]$, par la méthode de Simpson, le taux ainsi obtenu. Une borne supérieure de la probabilité cumulée de défaillance est déterminée en ajoutant à $E[N(t_1, t_2)]$ la probabilité instantanée de défaillance à l'instant initial, $P_{f,i}(t_1)$.

3.4 Conclusion

La méthode PHI2 apporte une solution au calcul de la fiabilité dépendante du temps basée uniquement sur les outils classiques de fiabilité instantanée. L'avantage est qu'elle permet de traiter des cas dont la dépendance envers le temps peut provenir aussi bien du chargement que de la dégradation des propriétés des matériaux. Elle repose sur une approximation FORM de deux états-limites successifs. Elle pourrait inclure une dimension SORM mais la voie RGMR apparaît plus prometteuse pour tenir compte de toutes les géométries possibles d'un état-limite d'autant qu'elle permet aussi bien le calcul de la fiabilité instantanée que son application au calcul du taux de franchissements à un coût acceptable si la fonction d'état-limite est explicite et suffisamment simple.

RGMR a pour principaux avantages de permettre des calculs sur des domaines de défaillance de forme complexe ou éclatés en plusieurs parties.

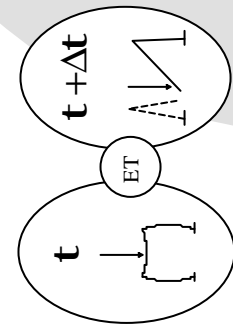
Comme présenté Fig. 3.9, l'utilisation de la méthode PHI2 ou de RGMR dépend des hypothèses satisfaites par le processus présent dans la fonction de performance. Elles permettent toutes les deux de calculer une borne supérieure de la probabilité de défaillance.

Pour la méthode PHI2, des routines ont été implémentées sous Turbo C++[®], Mathcad[®] et Excel[®]. La routine sous C++ permet de traiter les fichiers de COMREL-TI afin d'avoir un fichier contenant les cosinus directeurs à chaque pas de temps. La routine Mathcad permet de calculer le taux de franchissements. La routine sous Excel permet de calculer la probabilité cumulée et de la tracer. La même étude peut être effectuée sous Mathcad.

Pour RGMR, le calcul du taux de franchissements est effectué grâce à un programme implémenté sous Visual C++[®]. La définition de l'état-limite dans l'espace normé centré ainsi que le calcul des différentes dérivées se fait analytiquement. Les résultats sont alors programmés. Ce qui permet, après compilation, d'avoir un exécutable permettant, entre autre, de calculer le taux de franchissements.

Dans le chapitre suivant, ces méthodes sont appliquées aux exemples conducteurs définis au chapitre 1. Les résultats sont comparés à ceux donnés par les méthodes classiques.

PHI2 / RGMR



Calcul du taux de franchissements

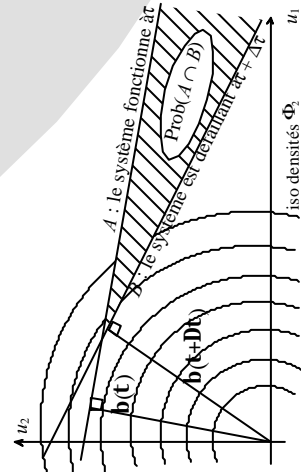
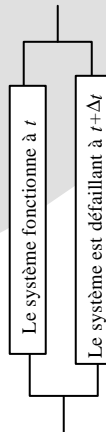
$$\mathbf{n}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{\{G(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{w})) > 0\} \cap \{G(t + \Delta t, \mathbf{X}(t + \Delta t, \mathbf{w})) \leq 0\}\}}{\Delta t}$$

H : Régulier
 H : Régulier
 Dérivable

PHI2

Introduction de la fiabilité système

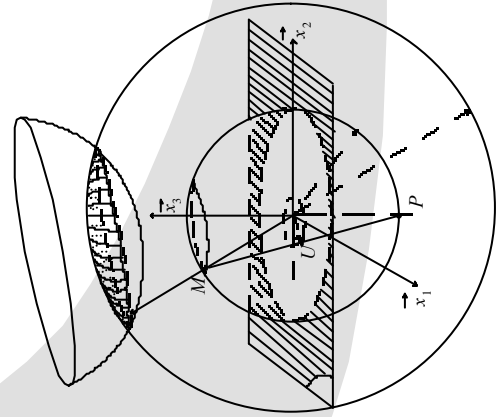
$$\mathbf{n}(t) \approx \frac{\Phi_2(\mathbf{b}(t), -\mathbf{b}(t + \Delta t); \mathbf{r}_t)}{\Delta t}$$



RGMR

Formule différentielle

$$\mathbf{n}(t) = \int_{\mathbf{x}_t} \frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{t}, \mathbf{X}(\mathbf{t}, \mathbf{w})) A + d_{\mathbf{x}} G(\mathbf{t}, \mathbf{X}(\mathbf{t}, \mathbf{w})) B \mathbf{f}_n(\mathbf{u}) d\mathbf{s}_t(\mathbf{u})$$



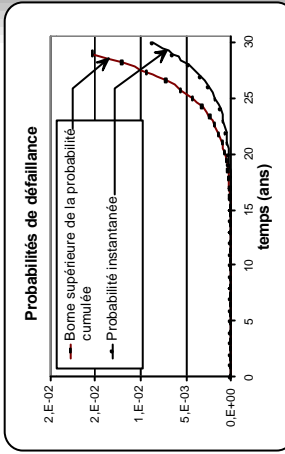
DONNÉES

Modèle mécanique

$$G(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{w}))$$

Modèle probabiliste des données

- sur la géométrie
- sur le matériau
- sur le chargement



Calcul d'une borne supérieure de la probabilité de défaillance cumulée

$$P_{f,c}(0, t) \leq P_{f,i}(0) + \int_0^t \mathbf{n}(t) dt$$

FIG. 3.9: la méthode PHI2 et la méthode RGMR : démarche générale.

Chapitre 4

Comparaison des méthodes

Le but de ce chapitre est de comparer l'efficacité des nouvelles méthodes proposées au chapitre 3 (méthodes PHI2 et RGMR) à l'approche asymptotique présentée au chapitre 2. Les résultats de simulation de Monte-Carlo sont également pris en compte. Pour cela, ces méthodes vont être appliquées aux exemples conducteurs définis au chapitre 1.

Les méthodes que nous avons à disposition sont :

- l'approche asymptotique via le logiciel COMREL-TV v7.1, notée AsM dans ce qui suit ;
- la méthode PHI2 ;
- la méthode analytique correspondant à une mise en œuvre directe de la formule de Rice (notée Rice) ;
- la simulation type Monte-Carlo (notée simulation MC) ;
- la méthode RGMR.

4.1 Présentation des exemples

Les quatre exemples traités sont les exemples conducteurs définis au chapitre 1. Les données pour les différents exemples sont présentées tableau 4.1.

Variables	$R(\omega)$	$S(t, \omega)$	δ ou $\delta(\omega)$	T
Cas 1 $R(\omega) - S(t, \omega)$	$m_R = 150$ $\sigma_R = 15$	$m_S = 50$ $\sigma_S = 17,5$	-	-
Cas 2 $R(\omega) - \delta.t - S(t, \omega)$	$m_R = 150$ $\sigma_R = 15$	$m_S = 5$ $\sigma_S = 17,5$	2,5	-
Cas 3 $R(\omega) - \delta(\omega).t - S(t, \omega)$	$m_R = 150$ $\sigma_R = 15$	$m_S = 5$ $\sigma_S = 17,5$	$m_\delta = 2,5$ $\sigma_\delta = 0,05$	-
Cas 4 $R(\omega) + \delta.(t - \frac{T}{2})^2 - S(t, \omega)$	$m_R = 5$ $\sigma_R = 1$	$m_S = 0$ $\sigma_S = 1$	0,02	30

TAB. 4.1: données numériques relatives aux quatre exemples traités.

R et S sont en MN, δ est en MN par an dans les cas 2 et 3 et en MN par an² dans le cas 4. T est en années.

Dans tous les cas, $S(t, \omega)$ est un processus Gaussien différentiable dont la fonction de corrélation est définie par :

$$\rho_{SS}(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{(t_2 - t_1)^2}{l^2}\right) \quad (4.1)$$

où l est la longueur de corrélation qui est un temps dans le contexte de notre étude. Elle prend deux valeurs distinctes qui sont 0,5 an et 1 an. COMREL-TV ne traite que les processus réguliers et différentiables, ce qui est le cas en utilisant la fonction de corrélation donnée équation 4.1.

Toutes les études sont menées sur l'intervalle [0, 30 ans].

4.2 Comparaison *a priori* des méthodes asymptotique, PHI2 et RGMR

La comparaison des méthodes peut être faite sur trois plans :

- celui des hypothèses mises en jeu par chacune des méthodes ;
- celui de la précision du résultat obtenu par rapport à une valeur de référence en ce qui concerne la probabilité cumulée de défaillance ;
- celui du coût en terme de nombre d'appels à la fonction d'état-limite.

• Analyse des hypothèses

Toutes les méthodes présentées dans ce chapitre nécessitent la régularité du processus en jeu, lorsque processus il y a. Les méthodes asymptotique et RGMR ne traitent que les cas comportant un processus.

La méthode asymptotique traite les processus de renouvellement à sauts, les processus Gaussiens différentiables et leurs combinaisons. Elle est implémentée dans le logiciel COMREL-TV [RCP 98].

La méthode RGMR traite les processus différentiables. Son principal avantage réside dans le fait qu'elle ne fait aucune approximation quant à la forme du domaine de défaillance, elle traite donc sans difficulté les domaines en plusieurs parties, les points de conception multiples...

La méthode PHI2 peut tout aussi bien être appliquée à des cas qui ne comportent pas de processus (*i.e.* qui ne comportent que des variables aléatoires et le temps) qu'à des cas avec des processus. Elle peut être mise en œuvre en approximation FORM ou SORM. Avec les développements actuels de la méthode, le processus présent doit être défini par sa loi et sa fonction d'autocorrélation ou de covariance normalisée.

• Analyse de la précision

L'étude de la précision des résultats obtenus est traitée tout au long des exemples dans la suite de ce chapitre et ne peut guère être analysée *a priori*.

• Analyse du coût

En ce qui concerne le coût, seules les méthode asymptotique (AsM) et PHI2 sont concernées dans la suite de ce chapitre. En effet, la méthode RGMR, de part le type d'intégration qu'elle utilise et le calcul des différentes dérivées, demande un nombre d'appels à l'état-limite très

important (plus de 40 000 par calcul de $\nu_{PHI2}^+(\tau)$). Une difficulté réside dans le choix des paramètres de convergence des algorithmes qui influe sur le nombre d'appels. Les paramètres par défaut de COMREL-TV ont été retenus excepté concernant l'indice de fiabilité dont la précision a été poussée à 0,001.

La méthode asymptotique utilise des résultats analytiques aussi bien pour le taux de franchissements que pour l'intégration asymptotique. Elle nécessite une analyse FORM indépendante du temps pour obtenir un résultat dans le cas stationnaire. Lorsque le problème étudié est non-stationnaire, le point de conception est recherché à la fois dans l'espace normal standard des variables et dans l'intervalle de temps $[0, t]$ en utilisant un algorithme modifié. Ensuite les dérivées première et seconde de l'indice de fiabilité $\beta(t^*)$ sont nécessaires. Elles sont calculées par différences finies, ce qui engendre un coût de calcul supplémentaire.

Comparativement, le principal avantage de la méthode PHI2 réside dans le fait qu'elle n'implique que des outils bien établis de la fiabilité indépendante du temps (l'analyse FORM classique, l'analyse système) qui sont implémentés dans de nombreux logiciels, par exemple COMREL-TI [RCP 98], PHIMECA [Moh 02], PROBAN [DNV 00] ou CALREL [Liu *et al.* 89] parmi d'autres. De plus, avec les développements actuels de la méthode, tout processus régulier d'ordre 2 ayant une fonction d'autocorrélation ou de covariance normalisée définie peut être utilisé. Dans le cas stationnaire, une seule évaluation de $\nu_{PHI2}^+(\tau)$ est nécessaire, d'après l'équation (1.11). Du point de vue calculatoire, obtenir le taux de franchissements nécessite deux analyses FORM successives, la deuxième analyse étant corrélée à la première par la corrélation des variables aléatoires représentant le processus à deux instants différents tels qu'illustré au chapitre 3. Dans un cas non stationnaire, plusieurs évaluations de $\nu_{PHI2}^+(\tau)$ à différents instants sont nécessaires afin de réaliser l'intégration du taux de franchissements sur l'intervalle de temps considéré. La règle de Simpson est ensuite utilisée. Cependant si la non-stationnarité n'est pas trop forte (évolution suffisamment lente dans le temps du taux ou de la probabilité), seulement quelques points (par exemple entre 3 et 5) sont nécessaires pour une estimation précise. Comme PHI2 ne nécessite pas le calcul des dérivées de $\beta(t^*)$, cela devrait être au plus aussi coûteux qu'AsM.

En pratique, les ingénieurs semblent généralement intéressés non pas par une seule valeur de $P_{f,c}(0, t)$, mais par son évolution dans le temps *i.e.* $\{P_{f,c}(0, t_i), i = 1, \dots, N$ où $t_N = T\}$. Dans ce cas, le calcul de $\nu_{PHI2}^+(\tau)$ à différents points dans le temps prend tout son intérêt. Pour obtenir le même résultat en utilisant AsM tel qu'implémentée dans COMREL, une "étude paramétrique" est nécessaire, ce qui correspond à mener N analyses successives. AsM ne devrait pas être plus efficace dans ce cas.

En conclusion, les méthodes AsM et PHI2 ont chacune des avantages et des inconvénients par rapport au coût de calcul qu'elles engendrent. Afin d'effectuer une comparaison précise, le nombre d'appels à l'état-limite nécessaire dans les analyses va être donné dans les exemples qui suivent.

4.3 Cas 1 : $R(\omega) - S(t, \omega)$

La fonction d'état-limite est de la forme :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - S(t, \omega)$$

Les caractéristiques des différentes données sont présentées tableau 4.1.

Comme il a été vu au chapitre 1, une solution analytique basée sur la formule de Rice peut être déterminée. En définissant m_R (resp. m_S) et σ_R (resp. σ_S) comme étant la moyenne et l'écart-type de $R(\omega)$ (resp. $S(t, \omega)$) et $\omega_0 = -\dot{\rho}_{SS}(0)$, l'expression du taux de franchissements

est :

$$\nu(t) = \nu = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \phi \left(\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right)$$

Le taux de franchissements étant constant dans le temps, il est utilisé dans cet exemple pour effectuer les différentes comparaisons. La borne supérieure analytique $P_{f,c}^R$ de la probabilité de défaillance cumulée est définie par :

$$P_{f,c}(0, t) \leq P_{f,c}^R(0, t) = P_{f,i}(0) + \nu.t$$

• Résultats numériques

Longueur de corrélation l	0,5 an	1 an
Approche asymptotique (Borne sup. COMREL)	$3,68.10^{-5}$	$1,84.10^{-5}$
RGMR	$2,79.10^{-5}$	$1,39.10^{-5}$
PHI2	$2,79.10^{-5}$	$1,39.10^{-5}$
Rice intégré	$2,79.10^{-5}$	$1,39.10^{-5}$
Simulation MC tous les franchissements (CV)	$1,99.10^{-5}$ (3,27 %)	$1,27.10^{-5}$ (5,13 %)
Simulation MC premier franchissement (CV)	$1,80.10^{-5}$ (4,31 %)	$1,15.10^{-5}$ (5,38 %)

TAB. 4.2: taux de franchissements dans le cas 1 pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.

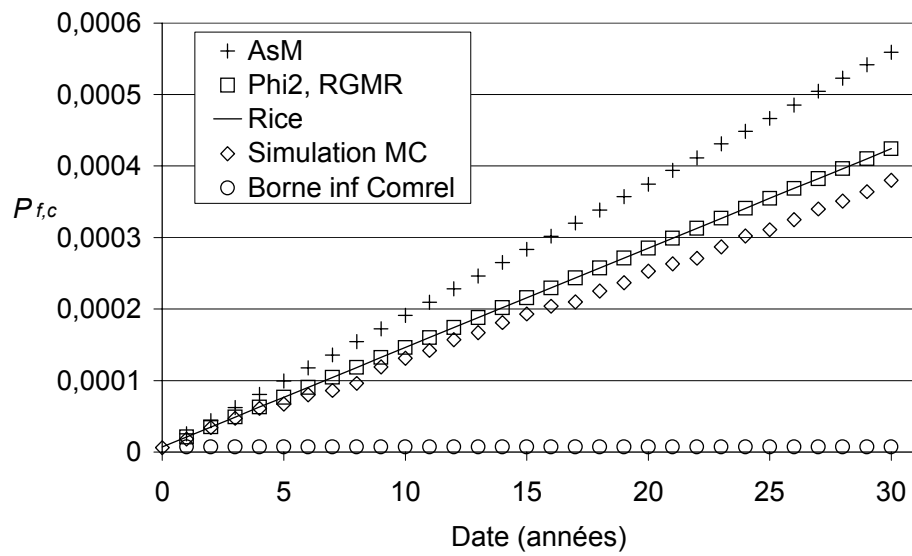
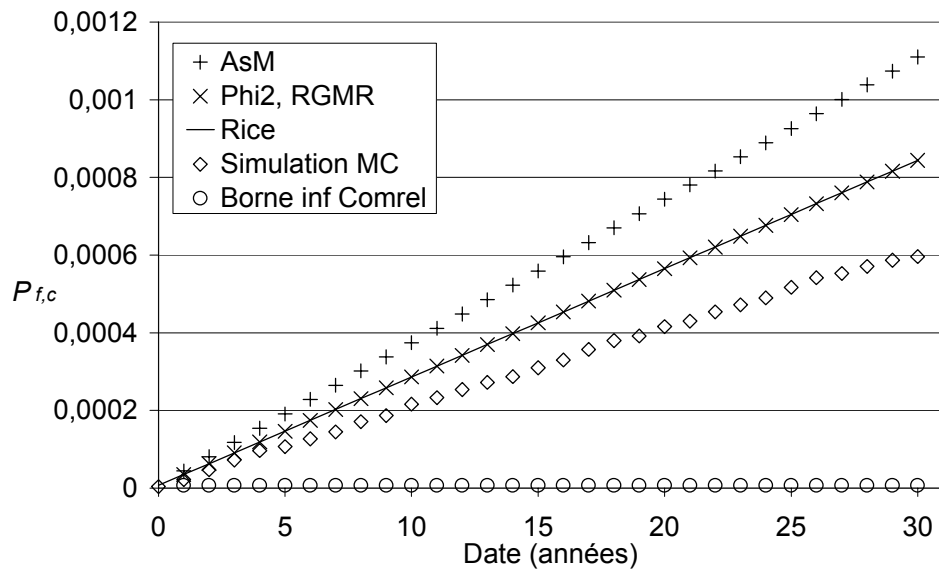
En ce qui concerne la simulation de Monte-Carlo, la décomposition EOLE présentée p.41 a été utilisée. Elle est basée ici sur 151 points, dont 36 termes ont été retenus. Cela correspond à une erreur de discrétisation (Eq. (1.26)) de 1%. 1 000 000 de trajectoires ont été simulées. Le coefficient de variation de la simulation¹ pour chaque longueur de corrélation est donné dans le tableau 4.2.

Les résultats concernant le taux de franchissements sont donnés dans le tableau 4.2. Il apparaît que les cinq méthodes (AsM, PHI2, RGMR, Rice, simulation MC) donnent des résultats similaires. Les taux de franchissements obtenus par les méthodes PHI2 et RGMR sont égaux à celui donné par la formule de Rice. Celui obtenu par AsM est conservatif dans les deux cas dans le sens où il surestime la probabilité de défaillance et donc joue dans le sens de la sûreté. Le taux de franchissements est ainsi surestimé jusqu'à 30% par rapport aux résultats donnés par Rice. La simulation de Monte-Carlo donne des résultats de même tendance que les autres méthodes mais sous-estime le taux de franchissements dans l'application effectuée, ce qui s'explique car la discrétisation EOLE permet d'obtenir un processus simulé dont la variance est sous-estimée par rapport au processus initial. Cette divergence tend vers zéro si l'estimateur d'erreur tend vers zéro, *i.e.* lorsque le nombre d'éléments dans la série augmente.

• Influence de l'incrément de temps $\Delta\tau$

Une étude paramétrique par rapport à l'incrément de temps $\Delta\tau$ est menée. Le taux de franchissements est tracé en fonction de $\Delta\tau$ sur la figure 4.3 (le cas $l = 1$ an est considéré).

¹La simulation de Monte-Carlo a été utilisée pour calculer $P_{f,c}(0, 30)$, à partir de laquelle le taux de franchissements est calculé en divisant le résultat par T , du fait de la stationarité du processus.

FIG. 4.1: probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 1 pour $l = 1$ an.FIG. 4.2: probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 1 pour $l = 0,5$ an.

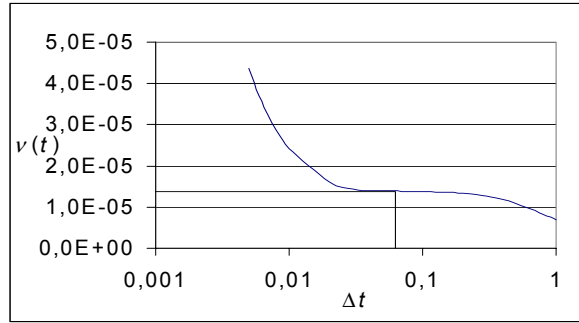


FIG. 4.3: étude de convergence pour le calcul de $\nu(t)$ pour $l = 1$ an dans le cas 1.

Dans le cas présent, le bon choix est $\Delta\tau = 0,07$ an, ce qui correspond au point d'inflexion présent sur la courbe. Une étude similaire est menée pour $l = 0,5$ an et aboutit au choix $\Delta\tau = 0,035$ an. Dans les deux cas, cela correspond à $\rho_{SS}(\Delta\tau) \approx 0,995$.

• **Influence de la précision de la discrétisation du processus (Monte-Carlo)**

Nb de termes r	Estimateur d'erreur (%)	Taux de franchissements $\tilde{\nu}_{MC}$	CV de la simulation (%)
23	10	$0,65 \cdot 10^{-5}$	7,20
27	5	$0,89 \cdot 10^{-5}$	6,13
36	1	$1,27 \cdot 10^{-5}$	5,13
80	10^{-8}	$1,37 \cdot 10^{-5}$	4,93

TAB. 4.3: étude de l'influence de la discrétisation EOLE sur le taux de franchissements dans le cas 1.

Une étude paramétrique par rapport au nombre de termes retenus dans la discrétisation EOLE est menée. Pour un nombre varié de termes, le tableau 4.3 présente l'estimateur d'erreur, le taux de franchissements correspondant et le coefficient de variation de la simulation. La figure 4.4 présente la probabilité de défaillance pour chaque valeur de l'estimateur d'erreur.

On remarque alors que le taux de franchissements ν_{MC} calculé par Monte-Carlo tend vers celui déterminé grâce à la formule de Rice (*i.e.* $1,39 \cdot 10^{-5}$) lorsque la précision de la discrétisation du processus augmente. Il ne faut pas pour autant en tirer des conclusions hâtives car le coefficient de variation de la simulation, quant à lui, diminue peu. On peut donc conclure que, pour obtenir un résultat satisfaisant par simulation, il faut que la discrétisation du processus soit extrêmement précise afin de minimiser le plus possible le coefficient de variation de la simulation. Cela peut engendrer des calculs très lourds (coûteux), ce qui signifie qu'ils ne peuvent être utilisés que pour un but de validation.

• **Efficacité des approches**

Il est maintenant intéressant de comparer le nombre d'appels à la fonction d'état-limite nécessaire pour PHI2 et ASM. COMREL a l'avantage de fournir cette information.

Une analyse indépendante du temps (en utilisant l'approximation FORM et le logiciel COMREL-TI v7.1) implique trois variables aléatoires, $R(\omega)$, $S_{t_1}(\omega)$ et $S_{t_2}(\omega)$. Cela nécessite 11 appels à G pour calculer l'indice de fiabilité β . Pour déterminer ν_{PHI2} , la méthode PHI2 nécessite deux analyses FORM, *i.e.* 22 appels. En fait, ce nombre peut sensiblement être diminué comme suit : dans la première analyse FORM, seules $R(\omega)$, $S_{t_1}(\omega)$ sont déclarées alors que $S_{t_2}(\omega)$ n'est déclarée que dans la seconde analyse. En utilisant cette astuce, le coût de la méthode PHI2 est réduit à $9 + 11 = 20$ appels à G . Il faut noter que ce nombre ne dépend pas du point de départ sélectionné par l'utilisateur pour l'algorithme de calcul mentionné dans la section 4.2. L'analyse dépendante du temps pour la même étude utilisant COMREL-TV nécessite 32 appels quel que soit aussi le point de départ donné. Lorsque l'étude est stationnaire, le taux de franchissements est constant et ne dépend pas de l'instant où il est calculé. Le logiciel prend donc par défaut la borne supérieure de l'intervalle de temps et donc le nombre d'appels est le même quel que soit le point de départ sélectionné. Des valeurs similaires sont obtenues pour la longueur de corrélation $l = 0,5$ an.

• Conclusion

Les résultats obtenus par PHI2 et RGMR sont plus précis (par rapport à la valeur théorique) que ceux obtenus par AsM. En terme de coût, PHI2 apparaît comme étant moins coûteuse, au moins pour les valeurs sélectionnées définissant R et S . Vient ensuite la méthode AsM puis RGMR.

4.4 Cas 2 : $R(\omega) - \delta.t - S(t, \omega)$

La fonction d'état-limite considérée dans cette section est :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - \delta.t - S(t, \omega)$$

Les caractéristiques des différentes données sont présentées tableau 4.1.

Comme dans le cas précédent, une solution analytique basée sur la formule de Rice et les intégrales d'Owen peut être déterminée. En définissant m_R (resp. m_S) et σ_R (resp. σ_S) comme étant la moyenne et l'écart-type de $R(\omega)$ (resp. $S(t, \omega)$), $\omega_0 = -\ddot{\rho}_{SS}(0)$ et $\Psi(x) = \phi(x) - x\Phi(x)$, le taux de franchissements est :

$$\nu(t) = \omega_0 \Psi\left(\frac{-\delta}{\sigma_S \omega_0}\right) \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \phi\left(\frac{m_R - \delta t - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right)$$

et la borne supérieure de la probabilité de défaillance sur $[0, t]$ est :

$$P_{f,c}^R(0, t) = P_{f,i}(0) + \omega_0 \frac{\sigma_S}{-\delta} \Psi\left(\frac{-\delta}{\sigma_S \omega_0}\right) \left\{ \Phi\left(\frac{m_R - \delta t - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) - \Phi\left(\frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) \right\}$$

• Résultats numériques

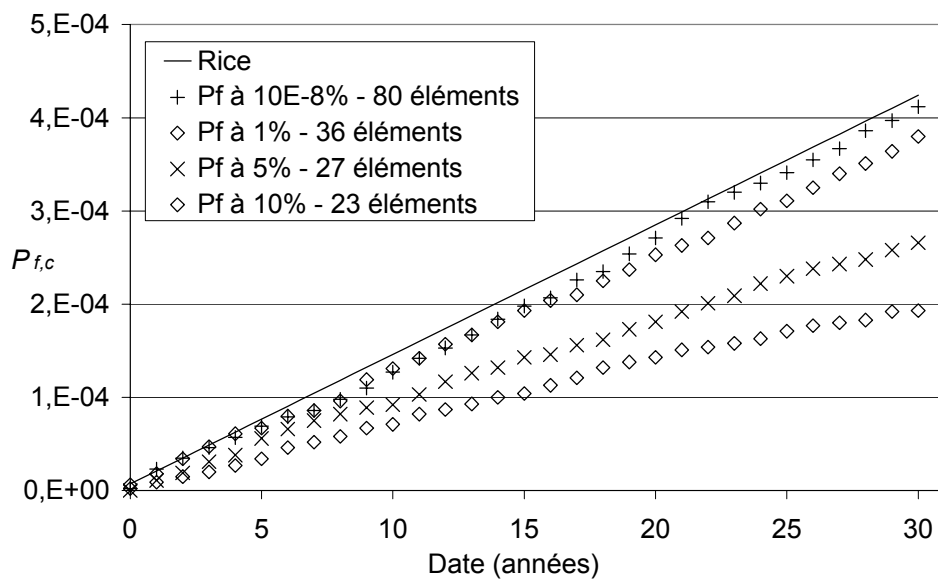


FIG. 4.4: étude de convergence de la simulation de MC en fonction de l'erreur de discrétisation de la décomposition EOLE dans le cas $l = 1$ an pour le cas 1.

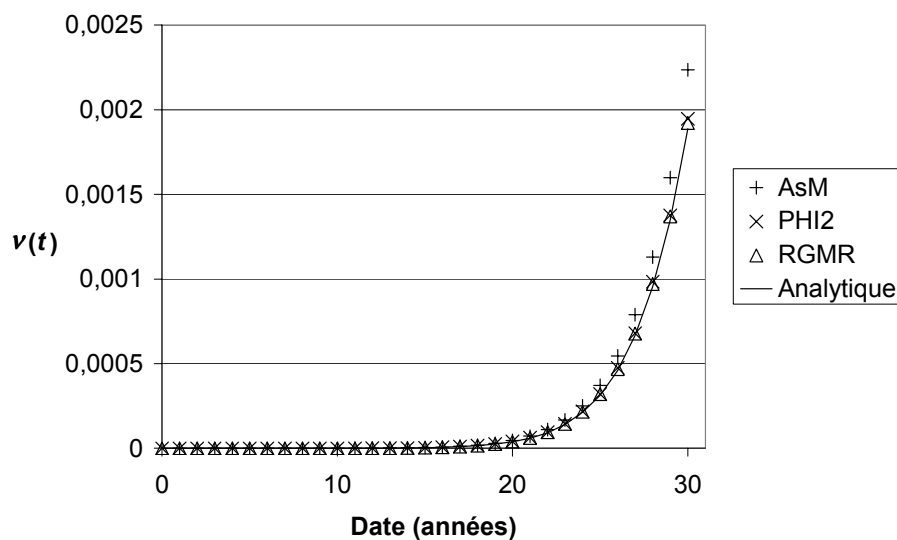
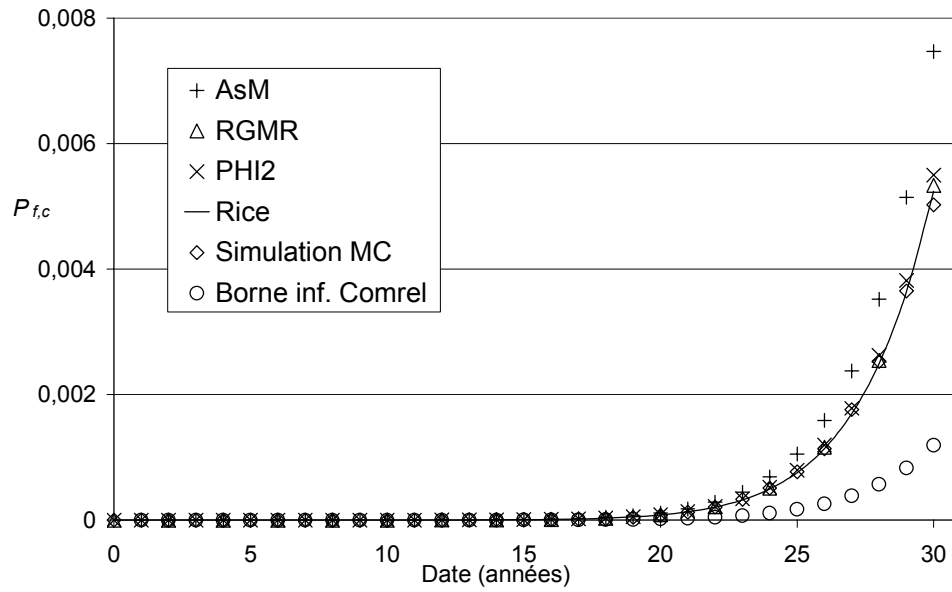
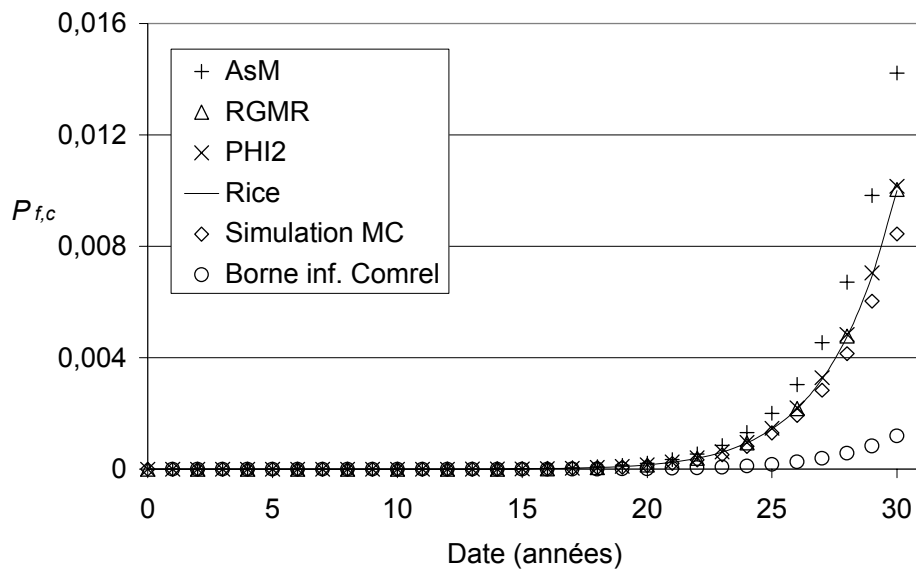


FIG. 4.5: cas 2 : taux de franchissements en fonction du temps ($l = 1$ an).

FIG. 4.6: probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 2 pour $l = 1$ an.FIG. 4.7: probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 2 pour $l = 0,5$ an.

Longueur de corrélation l (an)	0,5	1
Approche asymptotique (Borne sup. COMREL)	$1,42.10^{-2}$	$7,46.10^{-3}$
PHI2	$1,02.10^{-2}$	$5,38.10^{-3}$
RGMR	$1,00.10^{-2}$	$5,33.10^{-3}$
Rice intégré	$1,00.10^{-2}$	$5,24.10^{-3}$
Simulation MC tous les franchissements (CV)	$0,86.10^{-2}$ (1,04%)	$4,80.10^{-3}$ (1,44%)
Simulation MC premier franchissement (CV)	$0,72.10^{-2}$ (1,17%)	$4,56.10^{-3}$ (1,48%)

TAB. 4.4: probabilité de défaillance sur $[0,30]$ ans dans le cas 2 pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.

Le taux de franchissements en fonction du temps est tracé sur la figure 4.5. Il apparaît clairement que RGMR et PHI2 donnent des résultats quasi-identiques à ceux basés sur la formule de Rice le long de l'intervalle de temps. AsM, quant à elle, est toujours conservative.

La probabilité de défaillance est présentée à la figure 4.6 pour $l = 1$ an et à la figure 4.7 pour $l = 0,5$ an. Toutes les approches donnent des résultats de même tendance. Il apparaît que RGMR et PHI2 donnent des résultats quasi exacts, voire exacts dans le cas $l = 0,5$ an pour RGMR tout au long de l'intervalle de temps.

La simulation de Monte-Carlo a aussi été utilisée dans cet exemple. Le processus a été discrétisé en utilisant 36 termes dans la série, basée sur 151 points dans l'intervalle de temps. Cela correspond à un estimateur d'erreur de la discrétisation de 1%. Le coefficient de variation de la simulation est de l'ordre de 1%, donc les résultats en terme de valeur de la probabilité sont meilleurs que dans le cas précédent. Ceci s'explique par le fait que les valeurs calculées de probabilité sont plus élevées et donc il faut moins de simulations que dans le cas précédent pour un résultat plus précis.

On remarque sur les figures 4.6 et 4.7 que les résultats donnés par les méthodes RGMR, PHI2 et analytique sont très proches de ceux donnés par simulation. Comparativement, AsM donne des résultats conservatifs. Les résultats obtenus en terme de probabilité cumulée sur $[0,30]$ ans sont donnés dans le tableau 4.4.

En conclusion, AsM sur-estime $P_{f,c}(0,30)$ de 40% alors que PHI2 fournit une précision à 3% et RGMR à 2% par rapport aux résultats obtenus par la formule analytique.

• Efficacité des approches

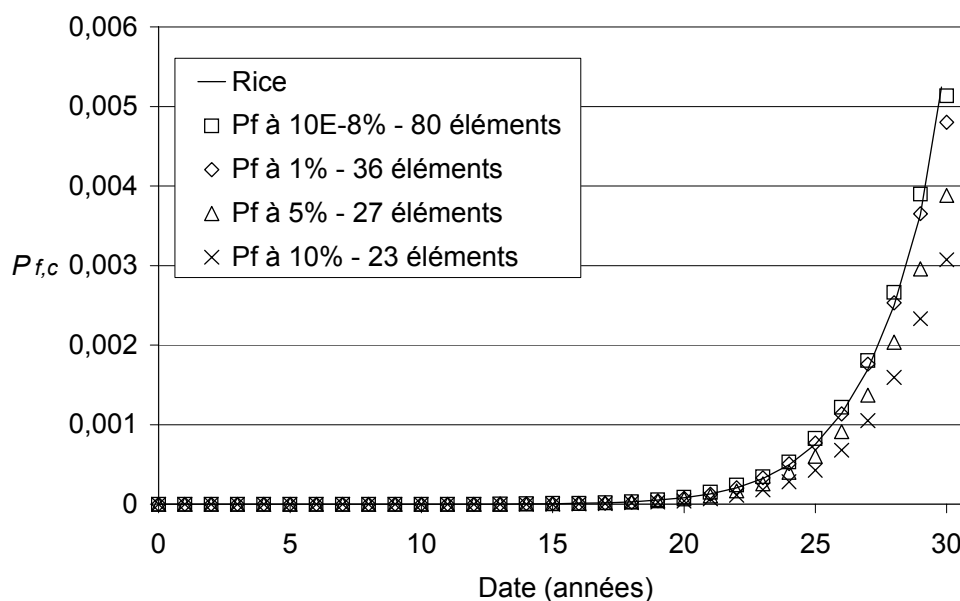
Date de départ	Nombre d'appels
1 an	339
15 ans	219
30 ans	34

TAB. 4.5: nombre d'appels nécessaires pour le calcul de la probabilité cumulée sur $[0,30]$ ans pour AsM.

Comparons maintenant le nombre d'appels à l'état-limite pour la longueur de corrélation $l = 1$ an. Une analyse indépendante du temps (approximation FORM avec COMREL-TI) demande

Nb de pts d'intégration N_{int}	$P_{f,c}(0, 30)$	Nb d'appels à G à t	Nb d'appels à G à $t + \Delta t$	Nb d'appels à G_{total}
3	$9,80.10^{-3}$	35	47	82
5	$7,61.10^{-3}$	59	87	146
7	$5,54.10^{-3}$	83	111	194
11	$5,40.10^{-3}$	131	175	306
31	$5,38.10^{-3}$	371	495	866

TAB. 4.6: influence du nombre de points d'intégration dans la méthode du PHI2.

FIG. 4.8: étude de convergence de la simulation de MC en fonction de l'erreur de discrétisation de la décomposition EOLE dans le cas $l = 1$ an pour le cas 2.

11 appels pour le calcul à la date t et 15 appels pour celui à la date $t + \Delta t$ (corrélée à la date t via le processus). Une étude paramétrique permettant d'obtenir l'indice de fiabilité et les cosinus directeurs à la date t pour $t = 0 \dots 30$ ans par pas de 1 an nécessite 371 appels et l'étude paramétrique à la date $t + \Delta t$ nécessite 495 appels soit 866 appels au total.

Une analyse dépendante du temps par COMREL-TV nécessite un nombre d'appels dépendant du point de départ t_0 de l'algorithme mentionné à la section 4.2. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.5. On remarque que le nombre d'appels peut changer de façon considérable suivant le point de départ de l'algorithme choisi. Plus on est loin du point t^* correspondant au point où le taux de franchissements est maximum, plus le nombre d'appels est important : on passe de 34 appels lorsque $t_0 = t^* = 30$ ans à 339 appels lorsque $t_0 = 1$ an. Si on veut donc limiter ce nombre, il faut pouvoir juger de l'évolution dans le temps du critère de défaillance. Lorsqu'il n'est pas simple de connaître l'évolution, le coût du calcul peut devenir très important.

Pour obtenir le même résultat avec la méthode PHI2, il faut déterminer le taux de franchissements $\nu_{PHI2}(t)$ en un certain nombre de points N_{int} sur l'intervalle de temps $[0, 30]$ ans et intégrer suivant la règle de Simpson. L'influence de ce nombre de points ainsi que les coûts qui

en résultent sont illustrés dans le tableau 4.6. Dans ce tableau, la colonne 3 (resp. 4) correspond au nombre total d'appels nécessaires à l'analyse FORM aux instants t_i (resp. $t_i + \Delta t$). La colonne 5 est la somme des colonnes 3 et 4 *i.e.* le nombre total d'appels nécessaires à la méthode PHI2 pour déterminer $P_{f,c}(0, 30)$

Il apparaît que la méthode PHI2 donne des résultats satisfaisant à partir de 7 points d'intégration soit 194 appels ; ce qui représente 6 fois plus d'appels qu'AsM si on choisit comme instant de départ $t_0 = 30$ ans et presque 2 fois moins si on choisit comme point de départ $t_0 = 1$ an. Cependant, ce nombre d'appels fournit directement $P_{f,c}(0, t_i)$, $t_i = \left[0, \frac{30}{N_{int}}, 2 \cdot \frac{30}{N_{int}}, \dots, 30\right]$ *i.e.* beaucoup plus d'informations que seulement $P_{f,c}(0, 30)$.

Si une étude paramétrique complète donnant $P_{f,c}(0, t)$ pour $t = 0, 1, \dots, 30$ ans est menée en utilisant COMREL-TV, 1136 appels seraient nécessaires contre 866 en utilisant la méthode PHI2. Dans ce cas aussi, PHI2 serait moins coûteuse en calcul d'environ 25%.

Il faut noter que l'intégration asymptotique utilisée dans AsM suppose que la variation dans le temps du taux de franchissements est lente, sinon le résultat obtenu est considéré comme grossier. Un tel inconvénient n'existe pas dans la méthode PHI2. En effet, le nombre de points d'intégration est sélectionné par l'utilisateur, qui autorise l'obtention d'une précision définie à l'avance, au prix d'un nombre de points d'intégration élevé et donc d'un coût de calcul élevé.

Quant au coût de RGMR, il résulte toujours du calcul de différentes dérivées et de la démarche pas à pas du calcul de l'intégrale.

• Conclusion

Dans ce second exemple, les méthodes PHI2 et RGMR apparaissent plus précises que la méthode AsM telle qu'implémentée dans COMREL-TV. En terme de coût, RGMR est la plus coûteuse quelle que soit la configuration choisie (étude à une date unique ou évolution dans le temps). La méthode AsM est plus efficace, mais moins précise, que PHI2 pour obtenir un résultat unique $P_{f,c}(0, 30)$ à condition que le point de départ t_0 soit correctement choisi. En ce qui concerne PHI2, il faut noter que le nombre de points d'intégration reporté dans le tableau 4.6 correspond à une intégration de Simpson du taux de franchissements, ce qui est adapté pour calculer l'évolution dans le temps de $P_{f,c}(0, t)$. En utilisant d'autres méthodes, par exemple la méthode des quadratures de Gauss, cela pourrait permettre de diminuer le nombre de points entre 3 et 5 et ainsi d'améliorer l'efficacité, dans le cas d'un calcul unique tel que $P_{f,c}(0, 30)$. Finalement, dès que l'évolution dans le temps de $P_{f,c}(0, 30)$ est recherchée, PHI2 demande moins d'appels à la fonction d'état-limite qu'AsM.

La même discussion peut être faite pour la longueur de corrélation $l = 0, 5$ an, elle mène aux mêmes conclusions.

4.5 Cas 3 : $R(\omega) - \delta(\omega) \cdot t - S(t, \omega)$

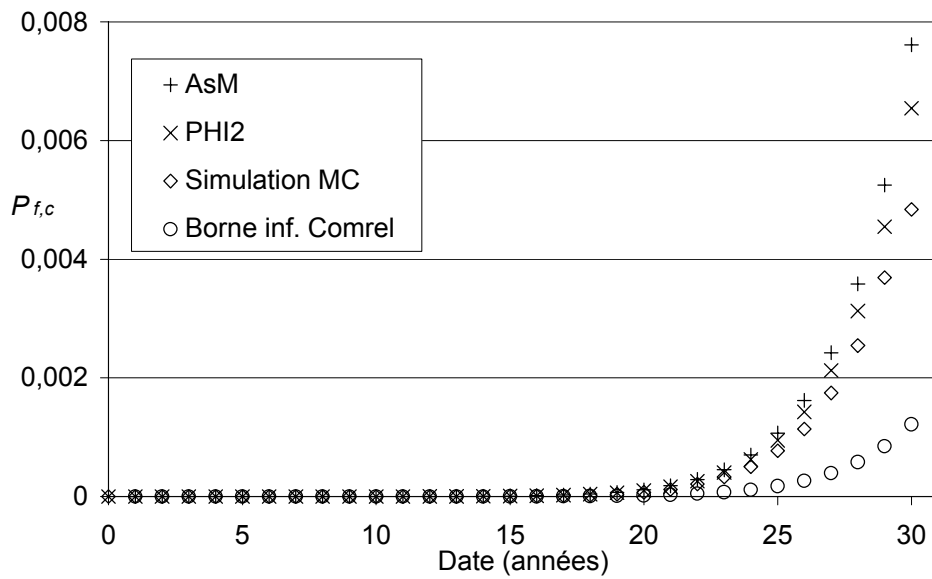
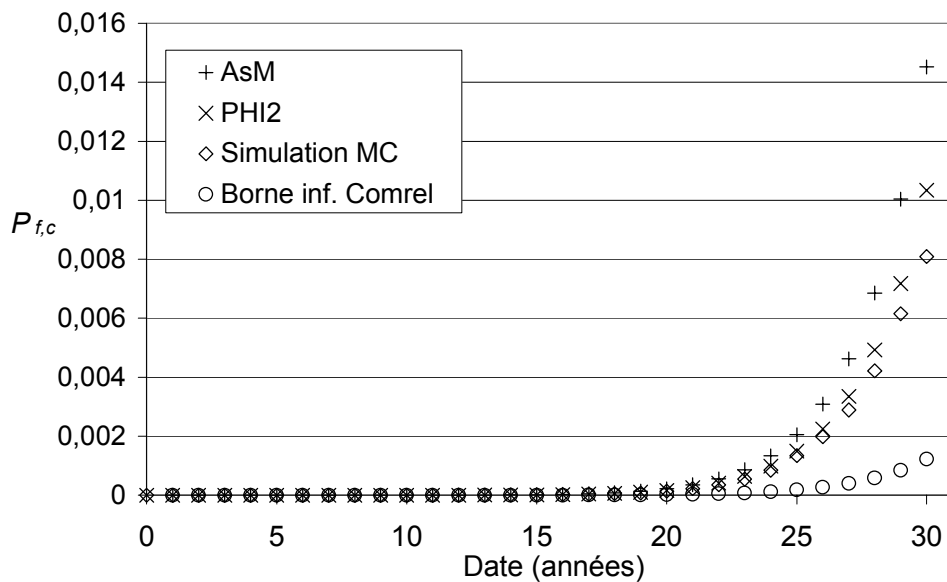
La fonction d'état-limite considérée dans cette section est :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) - \delta(\omega) \cdot t - S(t, \omega)$$

Les caractéristiques des différentes données sont présentées tableau 4.1.

Les résultats obtenus par les différentes méthodes - AsM, PHI2 et la simulation - sont donnés tableau 4.7 et figures 4.9 et 4.10.

Quelle que soit la valeur de la longueur de corrélation, il apparaît que les trois approches donnent des résultats ayant la même tendance. Plus la probabilité de défaillance a une valeur

FIG. 4.9: probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 3 pour $l = 1$ an.FIG. 4.10: probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 3 pour $l = 0,5$ an.

Longueur de corrélation l (an)	0,5	1
Approche asymptotique (Borne sup. COMREL)	$1,45.10^{-2}$	$7,61.10^{-3}$
PHI2	$1,03.10^{-2}$	$6,54.10^{-3}$
Simulation MC tous les franchissements (CV)	$0,82.10^{-2}$ (1,10%)	$4,85.10^{-3}$ (1,43%)
Simulation MC premier franchissement (CV)	$0,73.10^{-2}$ (1,16%)	$4,63.10^{-3}$ (1,47%)

TAB. 4.7: probabilité de défaillance sur [0,30 ans] dans le cas 3 pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.

élevée, plus la différence entre les deux approches (AsM - PHI2) est importante. A nouveau, pour cet exemple, la probabilité cumulée obtenue par PHI2 est plus faible que celle obtenue par AsM.

Une étude de coût identique au cas précédent conduit aux mêmes conclusions.

4.6 Cas 4 : $R(\omega) + \delta \cdot (t - T/2)^2 - S(t, \omega)$

La fonction d'état-limite considérée dans cette section est :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = R(\omega) + \delta \cdot (t - T/2)^2 - S(t, \omega)$$

Les caractéristiques des différentes données sont présentées tableau 4.1.

Une solution analytique, basée à la fois sur la formule de Rice et une intégrale à calculer numériquement, peut être déterminée. En définissant m_R (resp. m_S) et σ_R (resp. σ_S) comme étant la moyenne et l'écart-type de $R(\omega)$ (resp. $S(t, \omega)$), $\omega_0 = -\ddot{\rho}_{SS}(0)$ et $\Psi(x) = \phi(x) - x\Phi(x)$, le taux de franchissements est :

$$\nu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0 \phi\left(r - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)^2\right) \Psi\left(\frac{-2\delta}{\omega_0}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \frac{1}{\sigma_R} \phi\left(\frac{r - m_R}{\sigma_R}\right) dr$$

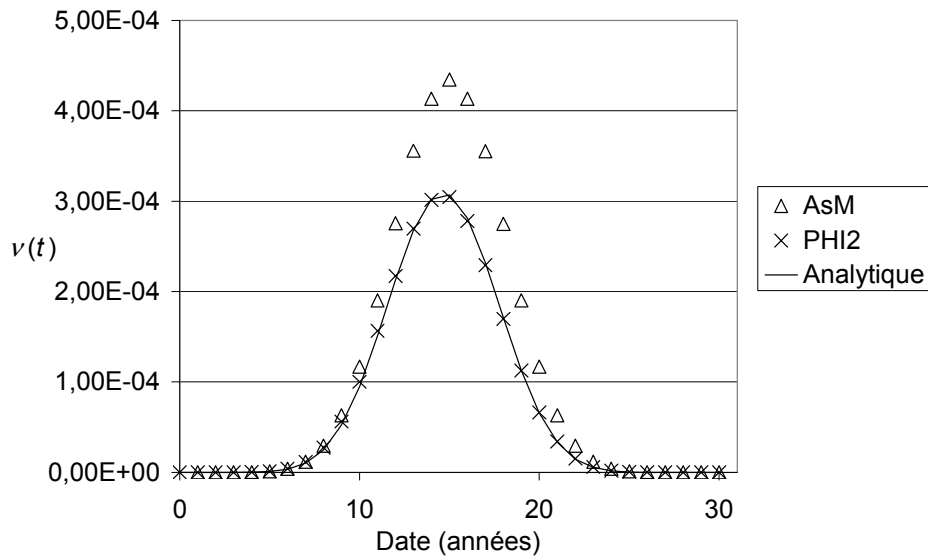
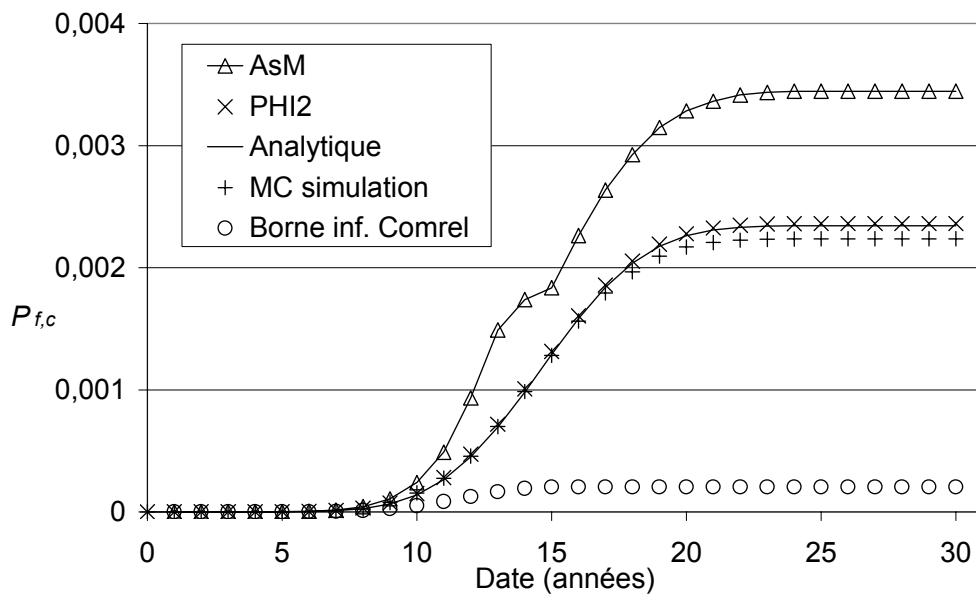
La borne supérieure de la probabilité est obtenue en substituant cette expression de $\nu(t)$ dans l'inéquation :

$$P_{f,c}(0, t) \leq P_{f,c}^R(0, t) = P_{f,i}(0) + \int_0^t \nu(\tau) d\tau$$

• Résultats numériques

Méthode	$P_{f,c}(0, 30)$
Approche asymptotique (Borne sup. COMREL)	$3,45.10^{-3}$
PHI2	$2,36.10^{-3}$
Analytique + intégration numérique	$2,34.10^{-3}$
Simulation MC tous les franchissements (1%) (CV)	$2,24.10^{-3}$ (2,11%)

TAB. 4.8: probabilité de défaillance sur [0,30 ans] dans le cas 4 pour différentes valeurs de la longueur de corrélation.

FIG. 4.11: taux de franchissements dans le cas 4 en fonction du temps pour $l = 1$ an.FIG. 4.12: probabilité de défaillance par différentes méthodes dans le cas 4 pour $l = 1$ an.

Le taux de franchissements est tracé figure 4.11. Il apparaît de façon claire que les résultats donnés par la méthode PHI2 sont quasi-identiques à ceux basés sur la relation analytique intégrée numériquement. AsM, quant à elle, donne des résultats toujours conservatifs supérieurs de 30% par rapport à la valeur référence (analytique).

La borne supérieure de la probabilité de défaillance est présentée à la figure 4.12. Toutes les approches donnent des résultats de même tendance : la probabilité présente une forte pente autour du point critique dans le temps $t = T/2$ et ensuite tend vers une asymptote. Ici encore, la méthode PHI2 donne des résultats quasi-exacts à ceux issus de l'intégration numérique tout au long de l'intervalle de temps.

On observe que la courbe correspondant aux résultats donnés par la méthode AsM présente un comportement étrange autour de $t = T/2$. En effet, un saut apparaît à $t = 15$ ans. Ceci s'explique de la façon suivante. La méthode AsM nécessite de trouver le point où le taux de franchissements est maximum, c'est à dire où $\beta(t)$ est minimum. Le calcul de la probabilité est ensuite effectué en ce point. Sur l'intervalle de temps $[0, t]$ avec $t < T/2$, le point critique déterminé par AsM est le point correspondant à la borne supérieure de l'intervalle de temps considéré c'est-à-dire t (cf. figure 4.11), ce qui conduit à utiliser une première formule pour l'intégration asymptotique de Laplace pour $E[N^+(0, t)]$. Sur l'intervalle de temps $[0, t]$ avec $t > T/2$, ce point est situé à $t = T/2$ ce qui correspond à un point intérieur à l'intervalle de temps (*i.e.* appartenant à $]0, t[$). L'intégration de Laplace utilise alors une seconde formule différente de la précédente. Comme indiqué dans le manuel de COMREL [RCP 98], il n'y a aucune continuité dans les formules, ce qui apparaît clairement autour de $T/2$ à la figure 4.12. Il faut noter qu'aucune discontinuité n'apparaît sur la courbe du taux obtenu par AsM présentée à la figure 4.11. Ceci prouve de nouveau que cette discontinuité est reliée à l'intégration asymptotique et que la borne supérieure de la probabilité cumulée de défaillance obtenue par COMREL-TV ne correspond pas *stricto-sensu* à l'intégration dans le temps du taux de franchissements.

La simulation de Monte-Carlo a aussi été utilisée sur cet exemple. Le processus est discrétisé en utilisant 36 termes dans la décomposition, basée sur 151 points dans l'intervalle de temps ; ce qui correspond à un estimateur d'erreur de 1%. Les résultats obtenus par les différentes méthodes sont donnés dans le tableau 4.8. La valeur obtenue pour $P_{f,c}(0, 30)$ est très proche de la valeur analytique.

• Conclusion :

Pour cet exemple à nouveau, AsM sur-estime $P_{f,c}(0, 30)$ de 47% alors que PHI2 a une précision de moins de 1% par rapport au résultat analytique. Ici encore, la simulation de Monte-Carlo fournit des résultats proches bien que légèrement plus faibles que la valeur analytique.

4.7 Comparaison premier franchissement – tous les franchissements

La simulation de Monte-Carlo donne une information supplémentaire comparée aux méthodes AsM et PHI2. En effet, l'approche par taux de franchissements permet le calcul de la probabilité d'occurrence de *tous* les franchissements, alors que la quantité qui nous intéresse à l'origine est la probabilité de *premier* franchissement. Au contraire, l'approche par taux de franchissements (PHI2 ou AsM) fournit une *borne supérieure* de la probabilité de défaillance. Par simulation, il est possible de faire la distinction entre ces deux quantités. Pour chaque

Cas étudié	$P_{f,c}(0, 30)$ (CV)	$P_{f,c}(0, 30)$ (CV)
	Premier franchissement	Tous les franchissements
$R(\omega) - S(t, \omega)$	$3,45 \cdot 10^{-4}$ (5,38%)	$3,80 \cdot 10^{-4}$ (5,13%)
$R(\omega) - \delta \cdot t - S(t, \omega)$	$4,56 \cdot 10^{-3}$ (1,48%)	$4,80 \cdot 10^{-3}$ (1,44%)
$R(\omega) - \delta(\omega) \cdot t - S(t, \omega)$	$4,63 \cdot 10^{-3}$ (1,47%)	$4,85 \cdot 10^{-3}$ (1,43%)
$R(\omega) - \delta \cdot (t - T/2)^2 - S(t, \omega)$	$2,07 \cdot 10^{-3}$ (2,20%)	$2,24 \cdot 10^{-3}$ (2,11%)

TAB. 4.9: probabilité de défaillance de premier franchissement contre tous les franchissements (Simulation MC)

trajectoire simulée, on peut calculer soit le nombre exact de franchissements (*i.e.* 1,2,3) ou la relation booléenne relative à l'événement "il y a un franchissement" (*i.e.* 0 ou 1); ce qui conduit aux deux valeurs de la probabilité de défaillance. Ces valeurs sont reportées dans le tableau 4.9 pour les 4 exemples considérés.

Ces résultats montrent qu'il y aurait au plus une différence de 10% entre les deux approches (1% au niveau des indices de fiabilité relatif); ce qui justifie d'une certaine manière l'utilisation de l'approche par taux de franchissements dans la pratique actuelle de la fiabilité dépendante du temps.

4.8 Conclusion

Les méthodes PHI2 et RGMR ont été comparées à la méthode dite asymptotique (*i.e.* COMREL-TV) sur des exemples académiques où des solutions analytiques donnant la borne supérieure de la probabilité cumulée de défaillance existent. Nous avons ainsi pu traiter un cas stationnaire, deux cas non-stationnaires avec la borne supérieure de l'intervalle de temps comme point critique et un cas non stationnaire avec comme point critique, un point à l'intérieur de l'intervalle de temps. Ces méthodes ont aussi été comparées à la simulation de Monte-Carlo.

Du point de vue des hypothèses, PHI2 est la méthode la moins exigeante car elle ne nécessite que la régularité du processus en jeu alors que RGMR et la méthode asymptotique demandent la dérivabilité du processus.

Du point de vue de la précision, RGMR et PHI2 donnent des résultats quasi-exacts lorsqu'une solution analytique est disponible. La méthode asymptotique donne des résultats toujours conservatifs (jusqu'à 40% en terme de probabilité de défaillance).

En terme de coût, mesuré ici par le nombre d'appels à la fonction d'état-limite, la méthode PHI2 apparaît toujours plus rapide, plus spécialement lorsque c'est l'évolution dans le temps de la probabilité de défaillance qui est recherchée. Le gain peut atteindre 25%.

Les résultats obtenus par la simulation permettent de valider un résultat lorsque le coefficient de variation de la simulation n'est pas trop élevé mais elle semble difficilement utilisable dans le cas de dimensionnement ou de planification de maintenance car non conservatifs et finalement trop coûteuse.

Enfin, avec les problèmes analysés, il est difficile de mettre RGMR correctement en avant car l'étude des structures en mode dégradé progressif implique généralement des domaines de défaillance de formes assez régulières. D'où, l'avantage réel de RGMR ne peut pas être vraiment exploité.

Dans les chapitres suivants, la méthode PHI2 va être appliquée à des problèmes de mécanique. Le premier concerne un réservoir en béton précontraint, le second une poutre soumise à un phénomène de fluage et à un effort extérieur.

Deuxième partie

Mise en oeuvre

Chapitre 5

Etude d'un modèle simplifié d'une enceinte en béton précontraint

Le but de cette application est de confirmer des résultats d'EDF publiés dans [Hei *et al.* 98]. Elle concerne l'étude d'une structure en béton armé appelée enceinte de confinement qui a pour objectifs de protéger le réacteur nucléaire des éventuelles agressions extérieures (par exemple chute d'avion ou tremblement de terre) et l'environnement des produits radioactifs qui pourraient être libérés en cas d'accident. Les calculs de fiabilité ont été effectués en utilisant le formalisme indépendant du temps. Notre travail est de montrer que l'on peut appliquer l'égalité des probabilités cumulée et instantanée car la fonction de performance est décroissante.

Les caractéristiques des matériaux utilisés pour la description du comportement du béton sous différentes sollicitations présentent une forte variabilité notamment au niveau du comportement différé (phénomènes de retrait et fluage). L'utilisation purement déterministe des différents modèles de prédiction du comportement vieillissant limite donc la qualité de l'information qu'ils peuvent fournir aux organismes chargés de leur maintenance. L'approche probabiliste, prenant en compte cette variabilité, est donc proposée pour l'analyse et la gestion des différentes problématiques liées au vieillissement de ces structures.

5.1 Modèle mécanique

La structure étudiée est une enceinte de confinement en béton à hautes performances, précontraint. Elle est illustrée figure 5.1. Seules les pertes de précontrainte par déformations différées du béton sont prises en compte dans cette étude. Un modèle simplifié de la zone courante d'une enceinte, développé pour les sollicitations de compression uniaxiale, est utilisé pour leur estimation.

• Les variables

Trois instants particuliers interviennent dans l'étude qui suit :

- $t = 28$ jours qui est la date caractéristique conventionnelle retenue pour estimer la résistance du béton ;
- t_c = date d'application du chargement ;
- t_s = âge du béton au début du séchage.

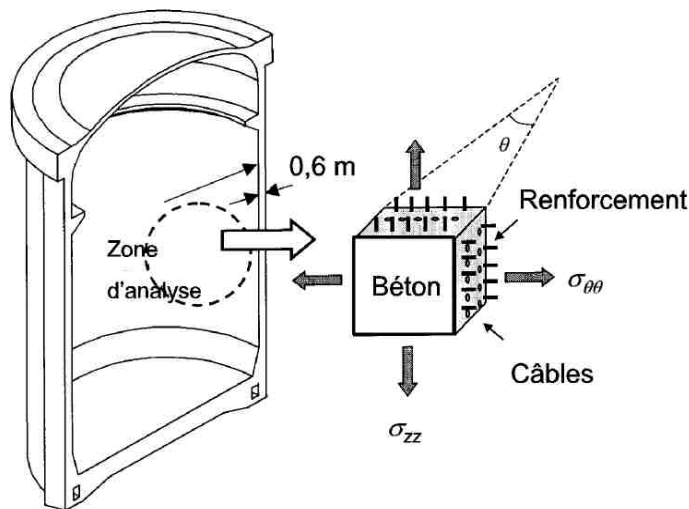


FIG. 5.1: structure concernée par l'étude.

Le béton voit son module d'Young évoluer en fonction du temps. Il faut donc le définir aux deux dates $t = t_c$ et $t = 28$ jours. Les notations utilisées sont les suivantes :

- $E(t_c)$ = module élastique du béton à t_c jours ;
- E_{28} = module élastique du béton à 28 jours ;
- E_S = module élastique de l'acier.

Les deux coefficients de Poisson en jeu dans cette étude sont :

- ν_{el} = coefficient de Poisson élastique ;
- ν_{fl} = coefficient de Poisson de fluage.

La résistance à la compression du béton f_c est également un paramètre important du modèle. Cette résistance du béton varie tout comme le module d'Young dans le temps. On la définit donc aux mêmes dates que ce dernier, soit :

- $f_c(t_c)$ = résistance en compression du béton à t_c jours ;
- f_{c28} = résistance en compression du béton à 28 jours.

Les relations donnant les déformations différées dépendent du milieu ambiant défini, ici, par la température et l'humidité. Ces variables sont notées :

- T = température ambiante ;
- h = humidité relative du milieu en %.

La structure (voir figure 5.1) ayant une forme simplifiée, elle est décrite par une seule donnée :

- r_m = épaisseur du mur de la structure étudiée.

L'état de contrainte dans la zone étudiée est défini comme suit :

- $\sigma_c^{\theta\theta}$ = contrainte initiale dans le béton dans la direction $\theta\theta$;

- σ_c^{zz} = contrainte initiale dans le béton dans la direction zz ;
- $\sigma_a^{\theta\theta}$ = contrainte initiale dans l'acier dans la direction $\theta\theta$.

Les déformations du béton et de l'acier sont notées :

- $\varepsilon_a^{\theta\theta}$ = déformation de l'acier dans la direction $\theta\theta$;
- $\varepsilon_c^{\theta\theta}$ = déformation du béton dans la direction $\theta\theta$.

Le béton armé est un matériau composite dont la matrice est cimentaire et les fibres sont des câbles d'acier pouvant être précontraints. Quatre quantités sont nécessaires pour caractériser cette précontrainte :

- A = section d'acier de précontrainte dans le plan perpendiculaire à $\theta\theta$.
- B = section de béton dans le plan perpendiculaire à $\theta\theta$, c'est à dire la section de béton précontrainte par les câbles.
- $\theta\theta \zeta_s^a$ = taux d'armatures passives dans la section $\theta\theta$. Les armatures passives sont les armatures non précontraintes qui servent à reprendre directement les efforts de traction que ne peut reprendre le béton. Le taux d'armatures passives est donc le rapport entre la section des barres d'armatures passives et la section de béton.
- $\theta\theta \zeta_s^p$ = taux d'armatures de précontrainte dans la section $\theta\theta$. Il représente le rapport entre la section des câbles de précontrainte et la section du béton.

• Décomposition de la déformation totale

Le comportement différé du béton armé sous sollicitations de compression uniaxiale utilisé ici a été proposé par [Ler 96], et repris par [Hei *et al.* 98]. La déformation totale ε_c se décompose en la somme :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{re} + \varepsilon_{rd} + \varepsilon_{fp} + \varepsilon_{fd} \quad (5.1)$$

où les différents termes décrivent chacun un phénomène clairement identifié.

- la déformation élastique ε_{el} correspond à la déformation instantanée sous chargement σ_c . Elle est linéaire et réversible lorsque le béton est sollicité à moins de 60% de sa résistance, et s'exprime comme suit :

$$\varepsilon_{el}(t) = \frac{\sigma_c}{E(t_c)}$$

- la déformation de retrait endogène ε_{re} est liée au durcissement de la pâte de ciment qui s'accompagne de variations dimensionnelles apparaissant dès les premières réactions chimiques, pouvant être un gonflement au cours des premières heures, mais qui se traduit presque toujours par un volume apparent final décroissant. Elle s'exprime par la relation :

$$\varepsilon_{re}(t) = (f_{c28} - 20) \cdot (2,8 - 1,1 \exp(-\frac{t}{96})) \cdot 10^{-6}$$

- la déformation de retrait de dessiccation ε_{rd} est provoquée par les variations hygrométriques (pourcentage d'humidité dans le milieu) du milieu extérieur. Lorsque le degré hygrométrique extérieur est inférieur à celui régnant dans la porosité du matériau, ce qui est le cas la plupart du temps, il s'agit effectivement d'un retrait. Dans la situation contraire, il s'agit d'un gonflement. Ce retrait est défini par :

$$\varepsilon_{rd}(t) = K_{rd} (72 \exp(-0,046 \cdot f_{c28}) + 75 - h) \cdot 10^{-6} \cdot \frac{t - t_s}{t - t_s + 2,8 r_m^2}$$

avec $K_{rd} = 30 - 0,21 f_{c28}$

- la déformation ε_{fp} est due au fluage propre qui représente les déformations différées du béton dues au chargement du matériau, lorsque celui-ci est protégé vis-à-vis de l'absorption ou la désorption de l'eau. Elle est prise égale à :

$$\varepsilon_{fp}(t) = \frac{3,6}{f_c(t_c)^{0,37}} \cdot \frac{\sigma_c}{E_{28}} \cdot \frac{\sqrt{t - t_c}}{\sqrt{t - t_c} + 0,37 \exp(2,8 \frac{f_c(t_c)}{f_{c28}})}$$

- la déformation ε_{fd} est due au fluage de dessiccation qui est le complément, par rapport au fluage propre, de la part de déformation due au chargement, lorsque le matériau est exposé aux variations hydriques du milieu extérieur. Elle est définie par :

$$\varepsilon_{fd}(t) = 10^3 \cdot \frac{\sigma_c}{E_{28}} [\varepsilon_{rd}(t) - \varepsilon_{rd}(t_c)]$$

Elles sont toutes définies dans un certain système d'unité tel que donné dans le tableau 5.1.

5.2 Modèle probabiliste

La sûreté assurée par l'enceinte de confinement est liée au fait qu'elle reste en état de compression y compris au cours d'un accident. L'état de compression évite l'apparition de fissuration et donc de perte potentielle d'étanchéité de la structure. Les déformations différées du béton estimées ci-dessus s'accompagnent d'une perte de précontrainte dans les câbles au cours du temps, qui pourrait s'avérer préjudiciable à long terme vis à vis de cette étanchéité. Le critère de défaillance adopté est donc lié à une perte de précontrainte circonférentielle de plus de 10% de la précontrainte initiale, ce qui s'écrit :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = \sigma_c^{\theta\theta}(t, \omega) - 0,9 \sigma_c^{\theta\theta}(t_c, \omega) \quad (5.2)$$

Les données utilisées pour traiter cet exemple sont résumées dans le tableau 5.1.

5.3 Résolution par la méthode de la fonction de performance décroissante

• Calcul de la dérivée de la fonction de performance

La présente étude reprend l'exemple présenté dans [Hei *et al.* 98]. La probabilité de défaillance instantanée avait été calculée et assimilée à la probabilité de défaillance cumulée sans prouver la décroissance de la fonction de performance présentée par la relation (5.2).

Variables	Loi	Moyenne	Ecart-type	c.v.
$E_{28} = E(t_c)$	Normale	36700 MPa	2600 MPa	7%
E_S	Normale	200000 MPa	6000 MPa	3%
ν_{el}	Normale	0,2	0,1	50%
ν_{fl}	Normale	0,2	0,1	50%
$f_c(t_c)$	Normale	75,7 MPa	7,57 MPa	10%
f_{c28}	Normale	64 MPa	6,4 MPa	10%
T	Normale	22,5°C	0,6°C	2,6%
h	Normale	52,5 %	1,5 %	2,9%
k_s^a	Normale	0,85	2, 1.10 ⁻²	2,5%
k_σ^p	Normale	0,96	2, 4.10 ⁻²	2,5%
k_{ret}^p	Normale	0,97	2, 4.10 ⁻²	2,5%
r_m	Déterministe	0,6 m	-	-
t_c	Déterministe	700 jours	-	-
t_s	Déterministe	21 jours	-	-
$\sigma_c^{\theta\theta}$	Déterministe	13,3 MPa	-	-
σ_c^{zz}	Déterministe	9,3 MPa	-	-
$\sigma_a^{\theta\theta}$	Déterministe	1237 MPa	-	-
A/B	Déterministe	0,0108	-	-

TAB. 5.1: paramètres de l'étude du réservoir.

Cette étude a donc pour but de vérifier qu'il s'agit bien d'un cas où la fonction de performance est décroissante et qu'il y a donc bien égalité entre la *probabilité cumulée* et la *probabilité instantanée*. Il faut donc étudier la monotonie de la *fonction de performance* pour les données qui apparaissent dans le tableau 5.1. L'étude est effectuée selon l'axe $\theta\theta$ et pour $t > t_c$.

Rappel (chap. 1, p 26) : une fonction de performance est dite décroissante jusqu'à un instant $T \leq \infty$ si :

$$\forall s, t \leq T, \quad \forall \omega_0 \in \Omega, \quad s < t \Rightarrow G(s, \omega_0) \geq G(t, \omega_0)$$

Les notations et les dénominations qui ont été utilisées dans [Hei *et al.* 98] ont été conservées.

Exprimons la fonction de performance (relation. (5.2)) en fonction des déformations définies section 5.1.

Les hypothèses prises sur les lois de comportement des deux matériaux (acier et béton) sont les suivantes :

1. Les aciers sont supposés parfaitement élastiques linéaires, ce qui revient à négliger la perte de tension dans les aciers due à la relaxation propre des câbles par rapport à celle due aux déformations différées du béton. Ce qui permet d'écrire :

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a}$$

2. l'équation d'équilibre de la section s'écrit :

$$B\sigma_c(t) + A\sigma_a(t) = 0$$

3. l'équation traduisant l'adhérence acier-béton est

$$\varepsilon_a(t) - \varepsilon_a(t_c) = \varepsilon_c(t) - \varepsilon_c(t_c)$$

La déformation élastique du béton seul en élasticité 2D vaut :

$$\varepsilon_{el}(t) = \frac{\sigma_c^{\theta\theta} - \nu_{el} \sigma_c^{zz}}{E(t_c)}$$

La déformation due au fluage $\varepsilon_{fp} + \varepsilon_{fd}$ s'écrit :

$$\varepsilon_f(t) = \frac{1}{E_{28}} \left(\sigma_c^{\theta\theta} - \nu_{fl} \sigma_c^{zz} \right) \cdot \phi(t - t_c, t_s)$$

où ϕ est lié aux déformations définies ci-dessus par la relation :

$$\phi(t - t_c, t_s) = (\varepsilon_{fp}(t) + \varepsilon_{fd}(t)) \frac{E_{28}}{\sigma_c}$$

La présence des armatures et de la précontraintes est prise en compte par l'intermédiaire de coefficient multiplicateur introduit au niveau des déformations :

- la déformation totale est multipliée par le facteur $k_s^a = \frac{1}{1+16^{\theta\theta} \zeta_s^a}$;
- la déformation de retrait est multipliée par le facteur $k_{ret}^p = \frac{1}{1+16^{\theta\theta} \zeta_s^p}$;
- la déformation de fluage est multipliée par le facteur $k_\sigma^p = \frac{1}{1+16^{\theta\theta} \zeta_s^p}$.

La déformation de retrait total $\varepsilon_{ret}(t)$ est la somme des déformations de retrait endogène $\varepsilon_{re}(t)$ et de dissecation $\varepsilon_{rd}(t)$.

Ainsi, dans le cas d'une structure en béton armé et précontraint, l'équation (5.1) devient [Gra 96] :

$$\varepsilon_c^{\theta\theta}(t) = k_s^a [k_{ret}^p \varepsilon_{ret}(t) + k_\sigma^p (\varepsilon_f(t) + \varepsilon_{el}(t))]$$

Ceci nous permettent d'obtenir l'expression de la dérivée de la contrainte en fonction de la déformation totale :

$$\frac{d}{dt} \sigma_c^{\theta\theta}(t) = -\frac{A}{B} E_S \frac{d}{dt} \varepsilon_c^{\theta\theta}(t)$$

La nouvelle expression de la dérivée de la fonction de performance en fonction de $\varepsilon_c^{\theta\theta}(t)$ (l'aléa n'est plus précisé pour ne pas alourdir les écritures) est :

$$\frac{d}{dt} G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = \frac{d}{dt} \left(\sigma_c^{\theta\theta}(t) - 0,9 \sigma_c^{\theta\theta}(t_c) \right) = -\frac{A}{B} E_S \frac{d}{dt} \varepsilon_c^{\theta\theta}(t)$$

• Résultats et analyse critique

Il est nécessaire d'étudier la probabilité d'avoir des trajectoires croissantes c'est à dire $P\left(\frac{d}{dt} G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) > 0\right)$. Cette probabilité peut être déterminée de plusieurs façons. La première consiste à simuler la dérivée. Cela peut s'avérer extrêmement onéreux si la probabilité cherchée est faible. Une autre solution est d'utiliser une approximation FORM afin de calculer

$P\left(-\frac{d}{dt}G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) \leq 0\right)$. Cela permet d'utiliser les outils classiques de la fiabilité. C'est cette dernière solution qui est choisie.

Les résultats, obtenus avec COMREL-TI, donnent un indice de fiabilité de 13 (!) minimum. Ce qui signifie bien que la probabilité d'avoir la dérivée de $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ par rapport au temps t positive est tout à fait négligeable. Ceci était prévisible. En effet, il est intéressant d'analyser la signification d'une trajectoire croissante : la structure récupérerait de la résistance, ce qui veut dire qu'elle se régénérerait. Or, physiquement, ce phénomène n'est pas concevable. La probabilité d'un tel événement ne peut être qu'extrêmement faible et fortement liée à notre modélisation par des variables Gaussiennes. Si les lois retenues avaient été, par exemple, des Gaussiennes tronquées, aucune trajectoire croissante n'aurait été possible.

La possibilité d'obtention de trajectoires croissantes représente le défaut d'adéquation qui peut exister entre le modèle mathématique et la physique.

Cette étude a permis de démontrer que la fonction de performance est toujours décroissante puisque la probabilité d'avoir une trajectoire croissante est extrêmement faible par rapport à la valeur de la probabilité elle-même ; elle peut être considérée comme négligeable. On peut donc dire qu'il y a égalité entre la probabilité instantanée et la probabilité cumulée. La probabilité est présentée figure 5.2.

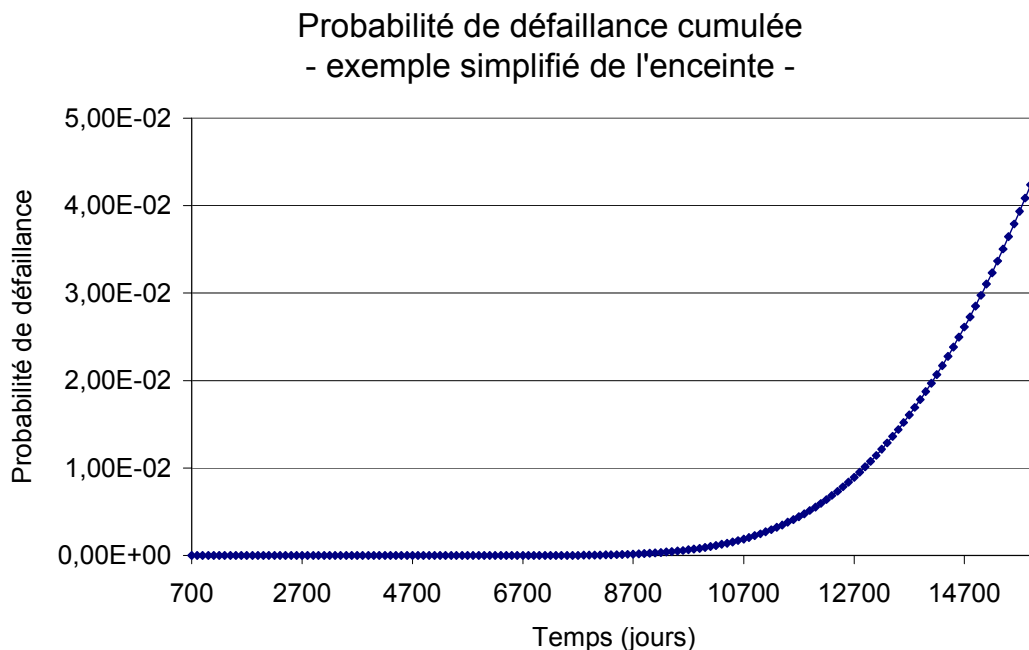


FIG. 5.2: cas simplifié de l'enceinte : probabilité cumulée par la méthode de la fonction de performance décroissante.

5.4 Conclusion

Les calculs justifiant la décroissance de la fonction de performance ont été effectués ce qui permet de confirmer que l'on peut appliquer l'égalité des probabilités cumulée et instantanée.

Cette étude fut assez facilement réalisable car la fonction de performance est analytique. Dans le cadre d'un modèle plus complexe, par exemple éléments finis, cette propriété serait très

coûteuse à vérifier. La propriété de décroissance de la fonction de performance permet donc de faciliter grandement les calculs des fiabilités dépendantes du temps mais sa justification peut s'avérer délicate.

Chapitre 6

Etude d'une poutre sous poids propre et chargement aléatoire

Cette application concerne l'étude d'une poutre soumise à son poids propre et à un chargement aléatoire. Elle a pour but de vérifier d'applicabilité de la méthode PHI2 à un cas se rapprochant d'un élément concret de structure.

Une poutre sur deux appuis supportant son poids propre et une action ponctuelle dont la date d'occurrence et l'intensité sont aléatoires peut paraître comme un exemple simple, voire simpliste. Il présente l'intérêt de raccrocher le raisonnement proposé, qui n'est pas trivial, à une situation élémentaire connue de tous les mécaniciens des structures. Une analyse plus fine montre que ce mode de fonctionnement est assez général et peut être appliqué à des situations diverses.

La première caractéristique à noter, c'est qu'il s'agit d'un système mécanique se dégradant dans le temps, apte à remplir sa mission dans des conditions de fiabilité tout à fait acceptables pendant une durée de service importante. Le système, même vieillissant, est donc très fiable tant qu'il se contente de satisfaire des exigences d'utilisation ordinaires. La difficulté vient du fait que ce système peut subir à des dates incertaines des événements exceptionnels et la question est de savoir s'il y survivra. De tels événements sont corrélés, c'est-à-dire que la situation à la date $t + \Delta t$ dépend de la situation à t .

De telles situations se trouvent dans les systèmes mécaniques placées dans des environnements pouvant présenter un caractère exceptionnel. Ainsi, une construction satisfait parfaitement un usage quotidien mais peut être victime d'un cyclone ou d'un séisme.

6.1 Structure étudiée



FIG. 6.1: modèle simplifié de la poutre sous poids propre et chargement aléatoire en milieu de travée.

La poutre considérée (figure 6.1) est une poutre de section rectangulaire sur deux appuis simples, en béton armé :

- de masse volumique $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$;
- de résistance à 28 jours $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$;
- de module d'Young "instantané" $E_{28} = 11000 \sqrt[3]{f_{c28}} = 34180 \text{ MPa}$.

Les dimensions de la poutre sont :

- la longueur $L = 10 \text{ m}$;
- la largeur $b = 0,2 \text{ m}$;
- la hauteur $h = 0,2 \text{ m}$.

En élasticité linéaire, la flèche maximale en milieu de travée est, sous poids propre :

$$\delta_W^0 = \frac{5}{384} \frac{p L^4}{E_{28} I}$$

où :

- $p = \rho b h = 1000 \text{ N/m}$;
- $I = b h^3 / 12$.

Ce qui donne une flèche initiale en milieu de travée de :

$$\delta_W^0 = 2,85 \text{ cm}$$

6.2 Phénomène de fluage

Le comportement différé du béton peut, en première approximation, être représenté par un modèle visco-élastique linéaire non vieillissant. Soit $J(t, t_c)$ la complaisance élastique associée qui dépend du temps t et de l'instant de mise en charge t_c . La déformation d'une pièce en béton sous contrainte uniaxiale σ s'écrit alors :

$$\varepsilon(t) = J(t, t_c) \cdot \sigma$$

Les modèles codifiés de déformation de fluage s'écrivent, en général, en introduisant une fonction φ , sous la forme :

$$J(t, t_c) = \frac{1}{E_{28}} (1 + \varphi(t, t_c))$$

La déformation a alors pour expression :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_{28}} + \frac{\sigma}{E_{28}} \varphi(t, t_c)$$

où on reconnaît le terme de déformation élastique instantanée ($\frac{\sigma}{E_{28}}$) et le terme de déformation due au fluage ($\frac{\sigma}{E_{28}} \varphi(t, t_c)$).

Ceci permet de définir un "module d'Young différé" (qui n'est qu'un module d'Young apparent et qui n'a rien d'élastique!) par :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t)} \longrightarrow E(t) = \frac{E_{28}}{1 + \varphi(t, t_c)}$$

La flèche sous poids propre à l'instant t s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\delta_W(t) &= \frac{5}{384} \cdot \frac{p L^4}{E(t) I} \\ &= \delta_W^0 (1 + \varphi(t, t_c))\end{aligned}$$

De façon simplifiée, les différents modèles codifiés de fluage s'écrivent :

$$\varphi(t, t_c) = \varphi_\infty f(t, t_c)$$

Pour l'étude, nous prenons $\varphi_\infty = 2$ mais en général φ_∞ peut être calculé précisément en fonction de la formulation du béton, des dimensions b, h , etc.).

Différentes cinétiques existent. On retient la forme proposée dans le BPEL91 [BPEL 91] (code français du Béton Précontraint aux Etats-Limites) :

$$f(t, t_c) = \frac{\sqrt{t - t_c}}{\sqrt{t - t_c} + K}$$

Ce qui conduit à la forme finale de la flèche sous poids propre :

$$\delta_W(t) = \delta_W^0 \left(1 + \varphi_\infty \frac{\sqrt{t - t_c}}{\sqrt{t - t_c} + K} \right)$$

Les valeurs des différents paramètres en jeu sont :

- $t_c = 28$ jours ;
- $K = 5\sqrt{r_m}$, avec r_m en centimètres, où :

$$r_m = 2 \cdot \frac{\text{Aire de la section étudiée}}{\text{Périmètre de cette même section}}$$

pour $r_m = 10$ cm, $K = 5\sqrt{10} = 15,8\sqrt{\text{cm}}$.

6.3 Chargement extérieur

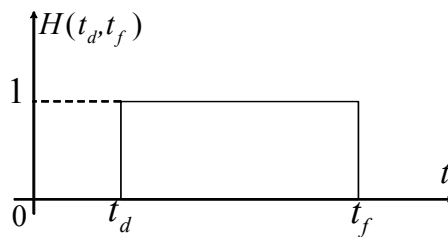


FIG. 6.2: représentation de la fonction $H(t_d, t_f)$.

Le chargement extérieur est un effort ponctuel appliqué en milieu de travée sur une durée $[t_d, t_f]$. Cette durée est modélisée via un échelon $H(t_d, t_f)$ illustré figure 6.2. La flèche $\delta_S(t)$ due à cet effort, si la durée d'application est courte, est :

$$\delta_S(t) = \frac{S L^3}{48 E_{28} I} (H(t - t_d) - H(t - t_f))$$

En prenant un effort S de 5000 N, la flèche due à cet effort est de 2,28 cm.

6.4 Analyse probabiliste

Variable	Loi	Moyenne	cv
p	Lognormale	1000 N/m	10 %
φ_∞	Lognormale	2	20 %
K	Lognormale	15,8	30 %
S	Normale	5000 N	20 %

TAB. 6.1: données probabilistes de l'étude de la poutre sous fluage.

Nous étudions la défaillance de cette poutre par dépassement d'une flèche limite $\delta_{\text{lim}} = 10$ cm. La fonction de performance s'écrit :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = \delta_{\text{lim}} - \delta_W(t) - \delta_S(t)$$

Les variables aléatoires en jeu sont données tableau 6.1. L'application est faite sur l'intervalle de temps $[0, 50]$ ans. Trois études sont menées. La première est une analyse de fiabilité classique, c'est à dire indépendante du temps (le temps est un simple paramètre). Les deux autres sont des analyses dépendantes du temps :

- **S variable aléatoire** : la force appliquée en milieu de travée est une variable aléatoire qui est appliquée à $t_d = 0, 10, \dots, 50$ ans pendant un an, $t_f = t_d + 1$ an.
- **S processus** : la force appliquée en milieu de travée est un processus aléatoire qui est appliqué à $t_d = 0, 10, \dots, 50$ ans pendant un an. La fonction de corrélation de ce processus est :

$$\rho_{SS}(t_1, t_2) = \exp\left(-\left(\frac{t_2 - t_1}{l}\right)^2\right) \quad \text{avec } l = 18 \text{ jours} \quad (6.1)$$

- **S processus** et la **date** t_d d'application de cette charge est une **variable aléatoire** de loi uniforme sur $[0, 49]$ ans. Elle est toujours appliquée pendant un an.

6.4.1 Cas S variable aléatoire

Cette étude est une étude de fiabilité au sens classique. Le temps est un simple paramètre d'étude. Les résultats sont obtenus en faisant une étude paramétrique en fonction du temps t avec COMREL-TI. Les résultats obtenus sont donnés figure 6.3.

On remarque que la probabilité de défaillance instantanée a une valeur très élevée au moment de l'application de l'effort extérieur. Cette étude montre que pour un seuil fixé de probabilité, par exemple 1%, il faudra intervenir avant 20 ans. Cependant, le défaut de l'approche est de supposer le système mécanique sans mémoire.

6.4.2 Cas S processus et t_d déterministe

Cette étude est moins triviale que la précédente car il faut déterminer la corrélation qui intervient dans la méthode PHI2, c'est-à-dire la corrélation entre l'état-limite à deux dates différentes. Lorsque le calcul des données nécessaires à la méthode PHI2 peut être effectué grâce à un logiciel tel que COMREL-TI, la procédure est la suivante :

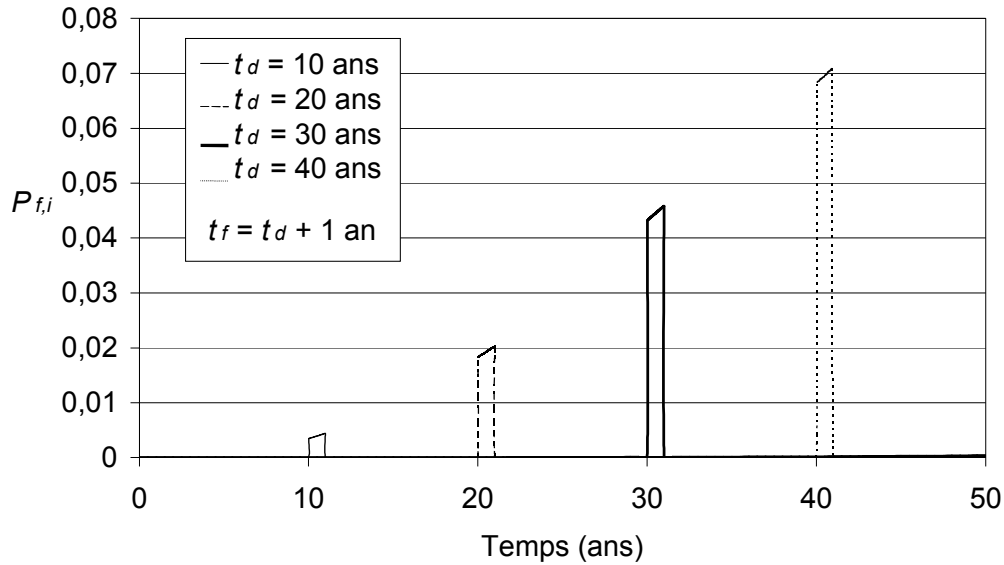


FIG. 6.3: probabilité de défaillance instantanée dans le cas de la poutre sous fluage.

- Définir les instants d'analyse t_i , $i = 1 \dots N$, avec $t_1 = 0$ et $t_N = 50$ ans.
- Définir l'état-limite $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ à la date t .
- Définir l'état-limite $G(t + \Delta t, \mathbf{X}(t + \Delta t, \omega))$ à la date $t + \Delta t$.
- Effectuer une série de calculs de fiabilité indépendante du temps (méthode FORM) avec $G(t_i, \mathbf{X}(t_i, \omega))$. Cela permet d'obtenir les indices de fiabilité instantanés $\beta(t_i)$ ainsi que les cosinus directeurs de l'état-limite à t_i . Les indices de fiabilité sont stockés dans un fichier `betat.txt`. Un programme de traitement des fichiers de monitoring de COMRELT permet d'extraire du fichier de monitoring un fichier `alphat.txt` comportant autant de colonnes qu'il y a de variables et/ou de processus.
- Effectuer une seconde série de calculs de fiabilité avec $G(t_i + \Delta t, \mathbf{X}(t_i + \Delta t, \omega))$ en introduisant la corrélation du processus (Eq. (6.1)) de façon à lier S_t et $S_{t+\Delta t}$. Cela permet d'obtenir les cosinus directeurs de l'état-limite à $t_i + \Delta t$ de façon analogue. Deux fichiers `betadt.txt` et `alphadt.txt` sont créés.
- Une procédure sous Mathcad permet de calculer le taux de franchissements par la méthode PHI2 à chaque instant. Il suffit d'importer les fichiers précédemment créés. La procédure crée un fichier `nu.txt` comprenant le taux de franchissements à chaque instant.
- Il ne reste plus qu'à intégrer le taux de franchissements pour obtenir la probabilité de défaillance. La méthode de Simpson est utilisée.

L'expérience a montré que prendre Δt de façon à avoir une corrélation du processus $\rho_{SS}(\Delta t)$ de l'ordre de 0,9 donne de bons résultats en terme de précision. Les résultats obtenus sont donnés figure 6.4. On voit nettement apparaître l'effet du chargement aléatoire ponctuel de par la pente très forte qu'il provoque au niveau de la valeur de la probabilité de défaillance à t_{d+} . Ensuite, la probabilité de défaillance continue à augmenter de façon très lente.

Les résultats montrent que réaliser une étude de fiabilité dépendante du temps permet de considérer le système comme ayant une mémoire, ce qui paraît plus juste que le cas précédent

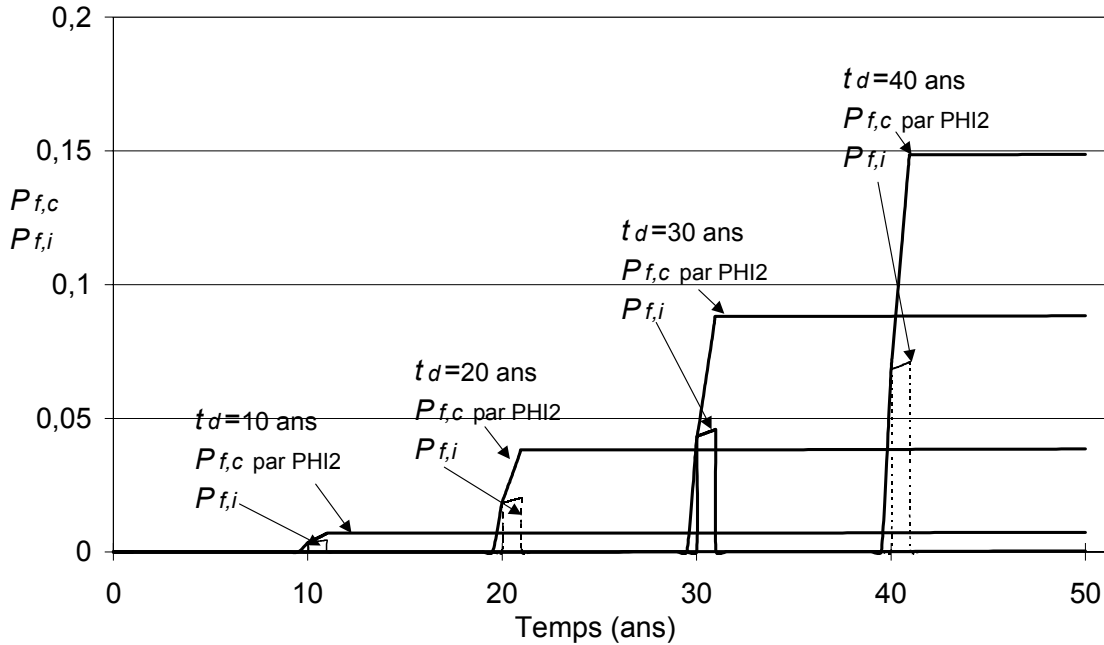


FIG. 6.4: probabilité de défaillance cumulée dans le cas S processus et t_d déterministe.

(*i.e.* S variable aléatoire). Par contre, fixer t_d suppose que l'on connaît la date à laquelle aura lieu l'événement exceptionnel, ce qui est contradictoire avec la définition même d'un tel événement.

6.4.3 Cas S processus et t_d variable aléatoire

Pour réaliser l'étude, il y a plusieurs étapes :

1. Déterminer les indices de fiabilité $\beta(t)$ et $\beta(t + \Delta t)$ aux différents instants t et $t + \Delta t$
2. Evaluer la corrélation $\rho_{GG}(t, t + \Delta t)$ des états-limites aux différents instants t .
3. Calculer le taux de franchissements et en déduire la probabilité cumulée de défaillance

Le calcul des indices de fiabilité et de la corrélation entre les états-limites est fait par simulation. En effet, la date aléatoire d'apparition de l'effort t_d n'est qu'une condition concernant l'existence de l'échelon et introduit une discontinuité au niveau de l'état-limite. En effet, l'état-limite peut se réécrire de la façon suivante :

$$G(t, \mathbf{X}(t, \omega)) = \begin{cases} \delta_{\text{lim}} - \delta_W(t) & \text{pour } t < t_d \text{ et } t > t_f \\ \delta_{\text{lim}} - \delta_W(t) - \delta_S(t) & \text{pour } t_d \leq t \leq t_f \end{cases}$$

Les algorithmes de recherche du point de conception en approximation FORM ne permettent pas de prendre en compte correctement l'influence de cette variable aléatoire. L'algorithme FORM des logiciels de fiabilité tels que COMREL-TI et COMREL-TV n'a pas pu être utilisé et donc, par voie de conséquence, la méthode asymptotique non plus. Les quantités nécessaires à la méthode PHI2 ne peuvent pas être obtenues en approximation FORM mais peuvent être déterminées par la simulation. Par conséquent, seule la méthode du PHI2 peut être appliquée dans ce cas.

- Calcul des indices de fiabilité intervenant dans PHI2

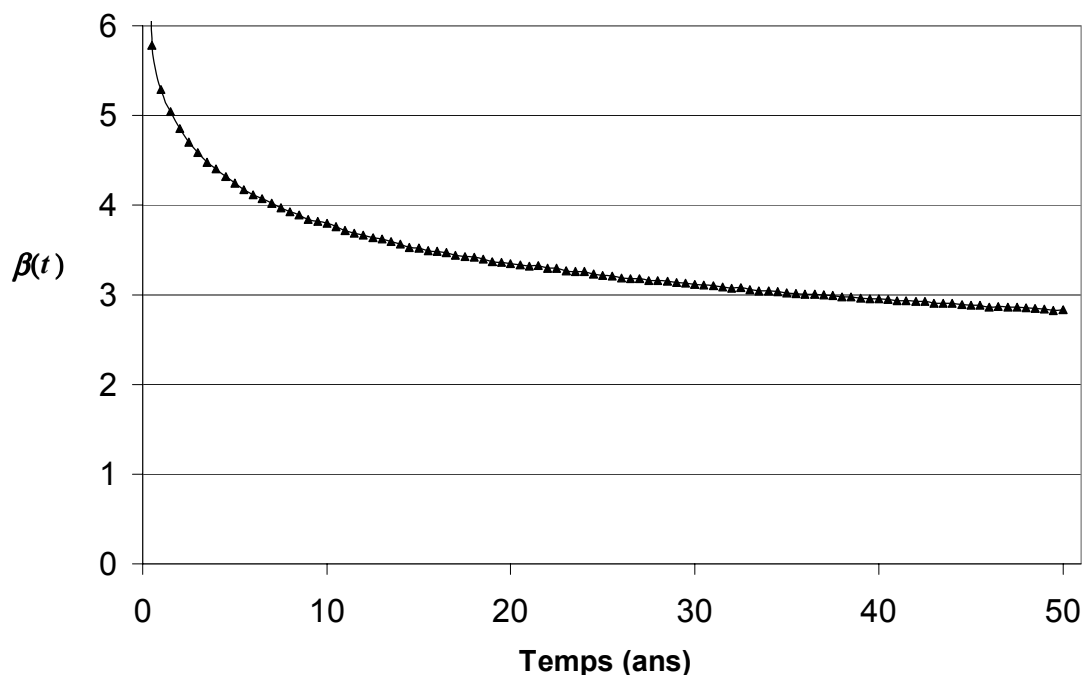


FIG. 6.5: indice de fiabilité intervenant dans la méthode PHI2 lorsque t_d est aléatoire, calculé par simulation.

Pour calculer l'indice de fiabilité en fonction du temps t intervenant dans la méthode PHI2, il n'est pas nécessaire d'introduire la corrélation entre les états-limites, cette dernière n'ayant une influence que sur les cosinus directeurs. L'indice de fiabilité au cours du temps est obtenu grâce à la méthode de simulation de Monte-Carlo. Cette méthode est implémentée dans COMREL-TI. 1 000 000 tirages ont été effectués à chaque pas de temps. C'est un nombre très important de tirages mais nécessaire pour obtenir un coefficient de variation de la simulation inférieur à 5%, qui est une valeur choisie classiquement. Ce nombre aurait pu être diminué en changeant le conditionnement mais c'est une donnée que l'on ne peut pas maîtriser dans COMREL-TI. La variation dans le temps de l'indice de fiabilité instantané est donnée figure 6.5. Le coefficient de variation de la simulation est donné figure 6.6.

- Introduction de la corrélation $\rho_{SS}(t, t + \Delta t)$ du processus dans l'expression de l'état-limite à $t + \Delta t$

Si on se place à une date t , l'état-limite, simple à définir, est fonction de variables aléatoires uniquement. A la date $t + \Delta t$, l'état-limite est encore une fonction de variables aléatoires. La différence avec l'état-limite à t est que la variable aléatoire représentant le processus à la date $t + \Delta t$ est corrélée avec celle représentant le processus à la date t .

On pose :

- S_t la variable aléatoire associée au processus à t ;
- $S_{t+\Delta t}$ la variable aléatoire associée au processus à $t + \Delta t$, non corrélée à S_t ;

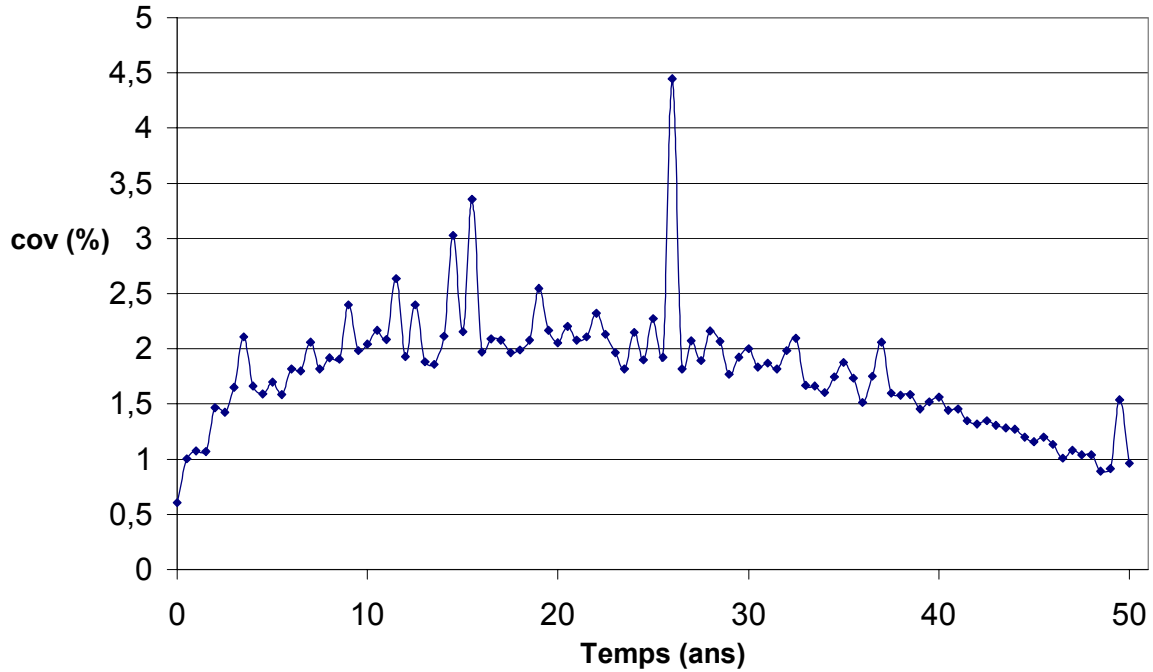


FIG. 6.6: coefficient de variation de la simulation au cours du temps dans le cas où t_d est aléatoire par la méthode des tirages d'importance.

- $\tilde{S}_{t+\Delta t}$ la variable aléatoire associée au processus à $t + \Delta t$, corrélée à S_t .

Sachant que le processus est Gaussien, la relation liant la réalisation du processus à t - S_t - à celle à $t + \Delta t$ - $\tilde{S}_{t+\Delta t}$ - fait intervenir la corrélation $\rho_{SS}(t, t + \Delta t)$ du processus et utilise la relation de décorrélation de variables Gaussiennes (chap 3, page 72) :

$$\tilde{S}_{t+\Delta t} = \rho_{SS}(\Delta t) S_t + \sqrt{1 - \rho_{SS}^2(\Delta t)} S_{t+\Delta t}$$

Cette relation nous permet par la suite de déterminer la corrélation $\rho_{GG}(t, t + \Delta t)$ entre l'état-limite à t et l'état-limite à $t + \Delta t$ en tenant compte de la présence du processus.

- **Calcul de la corrélation $\rho_{GG}(t, t + \Delta t)$ de l'état-limite aux différents instants t et $t + \Delta t$**

Etant donné que l'approximation FORM ne peut pas être utilisée pour déterminer les cosinus directeurs, le calcul de la corrélation $\rho_{GG}(t, t + \Delta t)$ entre les états-limites à chaque instant a été réalisé par simulation.

Pour déterminer cette corrélation, la relation de Pearson [Sap 90] est utilisée. Elle permet de calculer la corrélation entre les éléments de deux vecteurs $\mathbf{A} = \{A_i\}$ et $\mathbf{B} = \{B_i\}$ de dimension n . La moyenne des éléments de \mathbf{A} et \mathbf{B} doit tout d'abord être déterminée :

$$\tilde{m}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \text{ et } \tilde{m}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} B_i$$

ainsi que leur variance :

$$\widetilde{\text{var}}(\mathbf{A}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} [A_i - \widetilde{m}_{\mathbf{A}}]^2 \quad \text{et} \quad \widetilde{\text{var}}(\mathbf{B}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} [B_i - \widetilde{m}_{\mathbf{B}}]^2$$

et la covariance des éléments des deux vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} :

$$\widetilde{\text{cov}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} [A_i - \widetilde{m}_{\mathbf{A}}] [B_i - \widetilde{m}_{\mathbf{B}}]$$

En prenant \mathbf{A} le tableau des réalisations de $G(t, \mathbf{X}(t, \omega))$ et \mathbf{B} le tableau des réalisations correspondantes de $G(t + \Delta t, \mathbf{X}(t + \Delta t, \omega))$, la corrélation $\rho_{GG}(t, t + \Delta t)$ cherchée est alors définie par :

$$\rho_{GG}(t, t + \Delta t) = \frac{\widetilde{\text{cov}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{\sqrt{\widetilde{\text{var}}(\mathbf{A})} \sqrt{\widetilde{\text{var}}(\mathbf{B})}}$$

Pour pouvoir utiliser ces relations, il faut vérifier que le nuage de points défini par les couples (A_i, B_i) a un caractère linéaire. Les figures 6.7 et 6.8 montrent que ce caractère est confirmé.

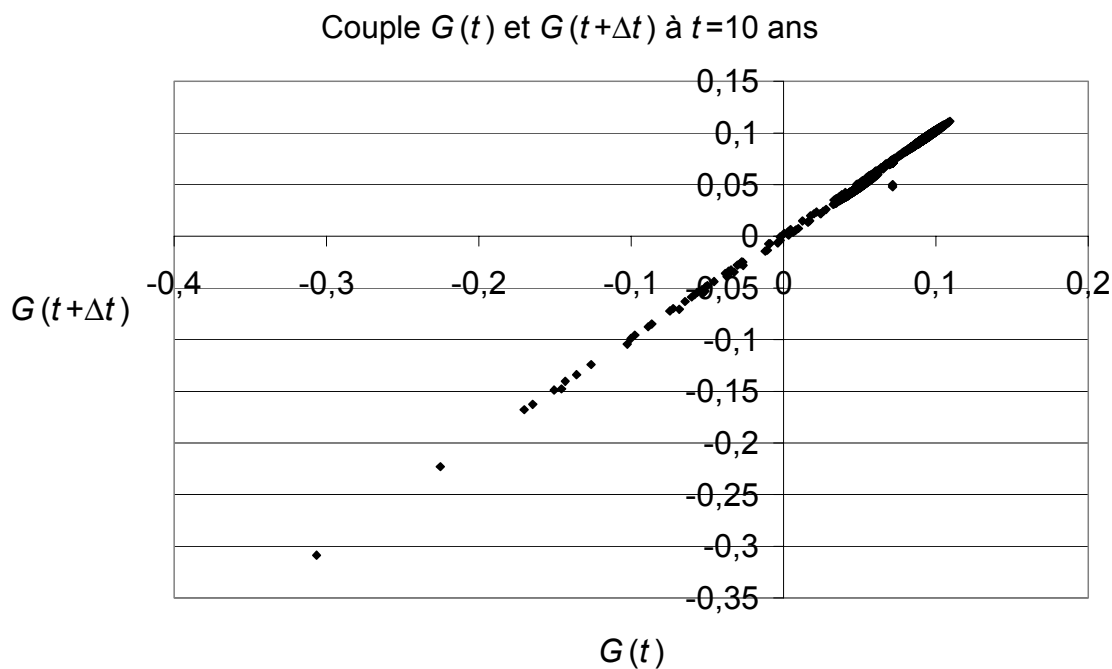


FIG. 6.7: nuage de points à $t = 10$ ans pour $\Delta t = 0,005$ an.

L'utilisation de cette méthode pour déterminer la corrélation est donc correcte. Dans le cas d'une fonction de performance analytique, cette méthode est tout à fait applicable. Par contre, dans le cas d'un modèle mécanique par éléments finis, il faudrait certainement trouver une autre façon de procéder afin de limiter le nombre de calculs de la fonction de performance.

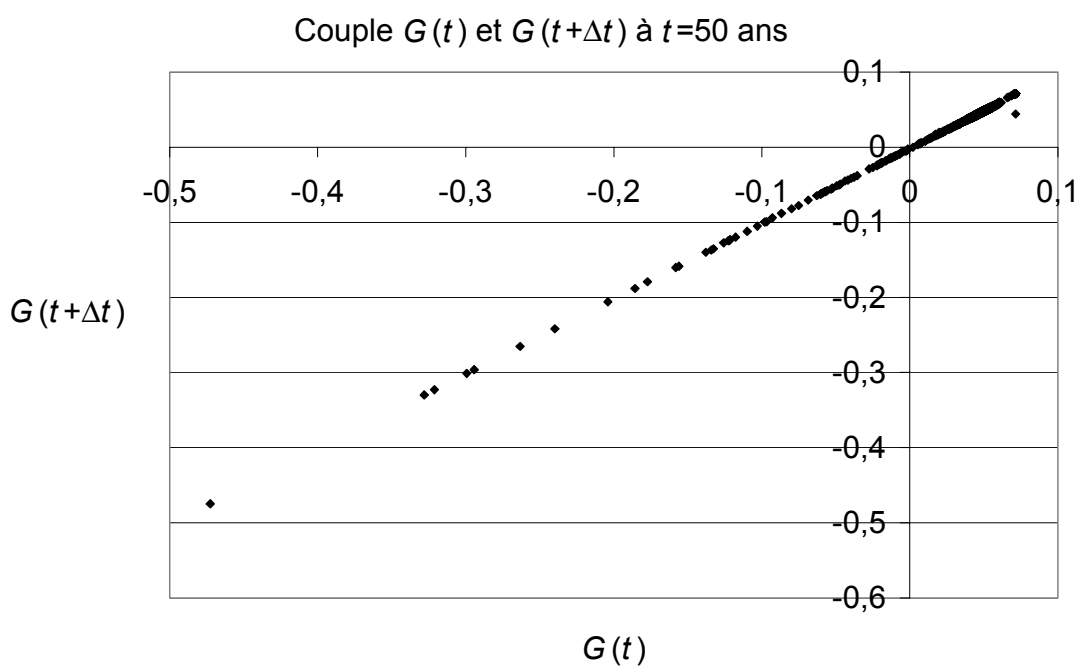


FIG. 6.8: nuage de points à $t = 50$ ans pour $\Delta t = 0,005$ an.

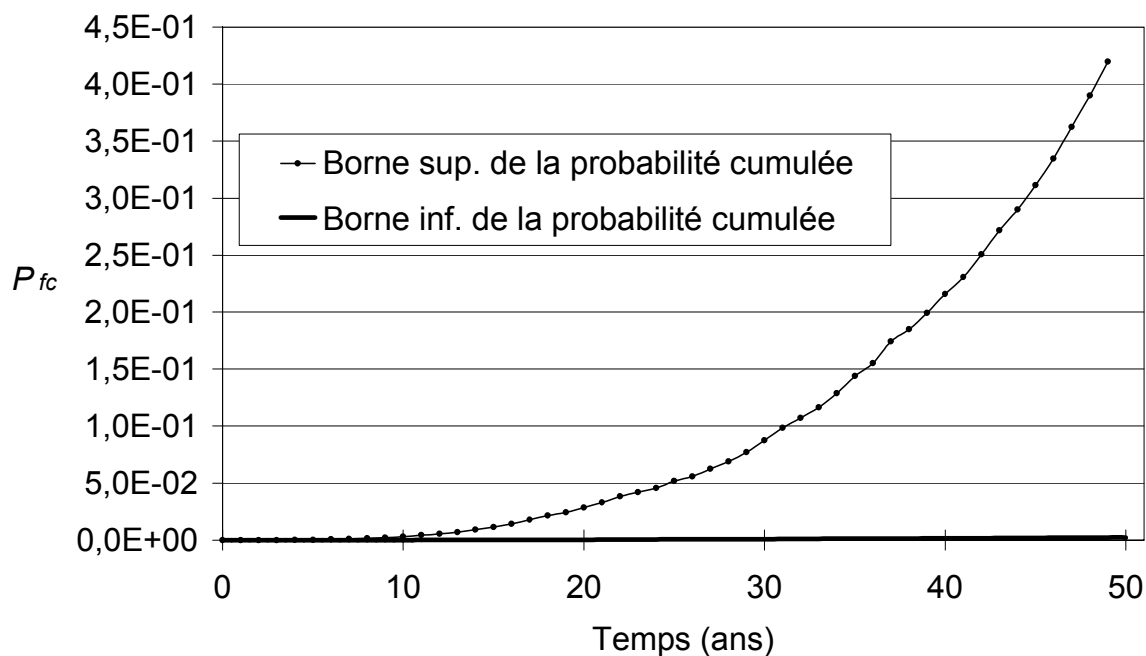


FIG. 6.9: probabilité de défaillance cumulée dans le cas où l'instant d'application de la charge ponctuelle est uniformément distribué.

- **Calcul du taux de franchissements par la méthode PHI2 et de la probabilité cumulée de défaillance.**

Comme nous venons de le voir, toutes les données nécessaires à l'application de la méthode PHI2 ont été déterminées. Le taux de franchissements est alors calculé grâce à cette dernière et la probabilité cumulée est déterminée via l'intégration de ce taux par la méthode de Simpson. Les résultats sont présentés figure 6.9.

On constate que l'évolution de la probabilité de défaillance est régulière et qu'elle est de valeur supérieure à la probabilité cumulée obtenue lorsque la date d'application de l'effort n'est pas aléatoire. Ceci ne semble pas étonnant vu que de l'aléa a été ajouté dans la fonction de performance via l'instant d'application de la charge ponctuelle extérieure.

Les résultats obtenus montrent que la modélisation du chargement et de sa date d'application prend en compte le fait qu'elle peut être appliquée à tout moment.

6.5 Conclusion

Trois études ont été menées. La première est classique, le temps ne joue pas un rôle actif, la seconde est dépendante du temps, ce dernier a donc une véritable importance, la troisième utilise un modèle affiné du chargement dans le sens où la date d'application de l'effort est aléatoire. Cette dernière utilise le modèle probabiliste le plus complet des trois. Elle montre que la méthode PHI2 reste valide même si l'approximation FORM n'est pas applicable, au prix de coûts de calcul beaucoup plus importants.

Cet exemple a montré que la méthode PHI2 peut prendre en compte un événement exceptionnel dans un mode de fonctionnement ordinaire. De plus, cette étude a été menée avec les outils classiques de la fiabilité. La méthode PHI2 a montré ici tout son intérêt.

Le dernier cas pourrait être traité en introduisant les processus intermittents. Cette piste reste à explorer dans le cadre de l'utilisation de la méthode PHI2. Cette dernière devrait en particulier être étendue pour cela aux processus à sauts.

Conclusion générale

Les méthodes de fiabilité des structures utilisées aujourd'hui sont robustes. Elles permettent de couvrir un éventail de situations de plus en plus large. Elles constituent un outil performant qui permet de prendre en compte les incertitudes sur la géométrie, les matériaux et les chargements des structures. Une nouvelle étape consiste maintenant à intégrer le temps dans ces calculs. On passe ainsi d'une modélisation par variables aléatoires à une modélisation par processus stochastiques. C'est une approche complètement différente qui demande l'utilisation de la notion de taux de franchissements. L'ensemble des travaux les plus avancés à ce jour est basé sur cette approche.

Cette thèse avait pour objectifs principaux :

- d'initier une discussion sur les aspects à maîtriser pour prendre en compte l'effet du temps dans les calculs de fiabilité ;
- de proposer de nouvelles méthodes permettant d'effectuer des calculs de fiabilité dépendante du temps, notamment en utilisant les outils classiques de fiabilité pour les problèmes indépendants du temps (notamment la méthode FORM).

Concernant les aspects à maîtriser, ils sont principalement conceptuels et font appel à des outils mathématiques délicats. Les méthodes de la fiabilité dépendante du temps commencent à être bien développées dans la littérature bien que certains points, comme les hypothèses de mise en œuvre, restent le plus souvent trop vagues. Un travail important de mise à plat des méthodes et d'approfondissement de la théorie a été nécessaire. On peut dire que la théorie et le calcul fiabiliste intégrant les processus ne sont pas simples, mais l'effort est récompensé car l'introduction des processus dans le calcul de la probabilité de défaillance apporte des résultats plus pertinents dans le sens de la défaillance et mieux représentatifs d'une réalité incertaine. Beaucoup de phénomènes ne peuvent être représentés que par des processus en raison de la nature de leur variabilité temporelle (température, trafic, vent, etc).

Comme cela a été souligné, les méthodes actuelles, dont la plus connue est l'approche asymptotique, sont basées sur la notion de taux de franchissements. Cette notion, apparue au début des années 1940 est toujours le point de départ des calculs actuellement. Un panel de relations permettant le calcul de la probabilité de défaillance a été développé. Celles-ci sont basées sur l'utilisation d'intégrations asymptotiques. L'implémentation actuelle de cette approche telle qu'elle est faite dans COMREL-TV implique la présence obligatoire d'au moins un processus dans la fonction de performance. Les processus de renouvellement à sauts, Gaussiens différentiables et la combinaison des deux peuvent être utilisés.

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire a conduit à la mise au point de trois méthodes.

La première concerne l'utilisation de la propriété de décroissance de la fonction de performance. Cette méthode est beaucoup utilisée mais, le cadre des hypothèses n'a jamais été

clairement exposé. Il en ressort que cette propriété simplifie de façon drastique les calculs mais que la vérification de l'hypothèse sous-jacente peut s'avérer extrêmement coûteuse, voire impossible dans le cas de modèles trop lourds.

La seconde méthode est la méthode PHI2. Elle répond au besoin d'une méthode de calcul de fiabilité dépendante du temps basée sur les outils classiques de fiabilité. Son premier avantage est de permettre le traitement des cas dont la dépendance envers le temps peut provenir aussi bien du chargement que de la dégradation des propriétés des matériaux et n'exige pas d'hypothèses particulières au delà de la régularité des processus considérés. Son second avantage est d'utiliser les outils de la fiabilité classique (méthode FORM, simulation d'importance), elle ne demande donc pas de logiciel spécifique.

La troisième méthode est basée sur l'utilisation d'une relation différentielle dont l'intégration est effectuée grâce à la méthode RGMR. Ce travail a été mené en collaboration avec J-C. Mitteau. Un de ses principaux avantages est de permettre des calculs pour des domaines de défaillance de forme complexe ou non connexes (éclatés en plusieurs parties). Son application nécessite la dérivabilité des processus éventuellement présents dans la fonction de performance.

Le tableau présenté p. 132 résume la situation des différentes méthodes abordées dans ce mémoire. Celles auxquelles nous avons apporté l'essentiel de notre contribution sont indiquées en grisé.

En restant dans le cadre classique du calcul de fiabilité pour des problèmes indépendants du temps, le calcul de $P_{f,i}$ permet de traiter simplement la probabilité de premier franchissement sous l'hypothèses des trajectoires décroissantes. La simulation de Monte-Carlo apporte une solution au calcul de la probabilité de premier franchissement $P_{f,c}$ à partir d'une décomposition du processus. Son intérêt est de fournir des résultats de comparaison dans des situations mécaniques très simples.

Pour aller plus loin vers le *time variant*, il est indispensable d'introduire la notion de taux de franchissements et le calcul est alors celui de la probabilité de *tous* les franchissements.

Les travaux de Bryla, Schall, Faber et Rackwitz constituent à ce jour la solution la plus élaborée mais elle est limitée, dans ses développements actuels, à deux types de processus et c'est une solution asymptotique.

L'introduction de la méthode PHI2 permet maintenant de prendre en compte directement les processus décomposés qui constituent une représentation souvent compatible avec les informations dont dispose l'ingénieur. Elle permet aussi d'aborder le traitement de processus réguliers du second ordre de manière plus générale sous ses différentes formes : relation différentielle ou différence finie ; FORM / SORM ou simulation.

Des exemples simples ont permis d'effectuer des comparaisons entre les méthodes proposées et celles issues de la littérature – approche asymptotique, Rice, simulation de Monte-Carlo. En fait, l'utilisation de l'une ou l'autre dépend du but à atteindre. Dans le cadre d'une étude relative à une durée de vie fixée à l'avance, l'approche asymptotique semblent apporter le meilleur compromis coût/précision. Lorsque l'évolution dans le temps de la probabilité de défaillance est recherchée, la méthode PHI2 montre son avantage, en s'affranchissant en outre du caractère asymptotique. La simulation de Monte-Carlo demande un pré-traitement du processus – décomposition – ainsi qu'un nombre de simulations de la fonction de performance qui peut s'avérer extrêmement coûteux. L'avantage d'une telle méthode est qu'elle permet de valider des résultats obtenus par d'autres méthodes.

Une première étape a été franchie grâce à ce travail. Il a ouvert beaucoup de portes qu'il reste à explorer. Citons en quelques-unes :

- il serait intéressant de développer l’approche SORM de la méthode PHI2. Une façon d’y parvenir pourrait être d’utiliser les travaux de Hohenbichler et Breitung basé sur la linéarisation des états-limites en plusieurs points et la prise en compte des courbures.
- des études sont à mener pour développer la méthode PHI2 pour des processus à sauts, qui sont, avec les processus Gaussiens différentiables, les plus utilisés aujourd’hui.
- nous avons utilisé la discrétisation EOLE pour pouvoir calculer les probabilités par simulation. D’autres méthodes existent, par exemple la transformée de Fourier. Il serait intéressant de comparer l’influence de ces méthodes sur la rapidité de convergence du coefficient de variation de la simulation et donc de la valeur de la probabilité. Il est aussi possible d’améliorer la technique de simulation en introduisant des méthodes du type tirage d’importance ou tirage adaptatif.

La fiabilité dépendante du temps est, à mon avis, une formidable invitation à la collaboration de personnes d’horizons différents. J’ai le sentiment d’avoir contribué, de façon significative j’espère, à la mise en place d’une discussion sur un sujet aussi vaste qu’intéressant. Prendre en compte l’effet du temps dans les calculs semble pour les grandes entreprises telles Electricité de France un enjeu pour ces prochaines années.

temps t	relation temps - aléa	fonction de performance	principe de calcul	Prob	méthodes
t fixé	pas de relation	$G(t, \mathbf{X}(\mathbf{w}))$		$P_{f,i}$	FORM / SORM simulations - RGMR
t paramètre	trajectoires de G décroissantes, $\forall t, \forall \mathbf{w}_0$	$G(t, \mathbf{X}(t, \omega_0)) >$ $G(t+\Delta t, \mathbf{X}(t+\Delta t, \mathbf{w}_0))$		$P_{f,c} = P_{f,i}$	FORM / SORM simulations - RGMR
	$X(t, \mathbf{w})$ décomposé en $\mathbf{X}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{f}(t)$	$G(t, \mathbf{X}(\mathbf{w}), \mathbf{f}(t))$	décomposition EOLE, FFT, K-L, ...	$P_{f,c}$	Simulations
<i>Taux de franchissements (Rice, Belayev)</i> $\mathbf{n}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(\{X(t, \mathbf{w}) \in D_s\} \cap \{X(t + \Delta t, \mathbf{w}) \in D_f\})}{\Delta t} \longrightarrow P_{f,c}(0, t) \leq P_{f,i}(0) + \int_0^t \mathbf{n}(t) dt = \tilde{P}_{f,c}(0, t)$					
t paramètre	$X(t, \mathbf{w})$ décomposé en $X(\mathbf{w}) \cdot f(t)$	$G(t, \mathbf{X}(\mathbf{w}), \mathbf{f}(t))$		$\tilde{P}_{f,c}$	FORM / SORM + PHI2
	$X(t, \mathbf{w})$ est un processus Gaussien ou à sauts	$G(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{w}))$	approximation asymptotique	majorant de $\tilde{P}_{f,c}$	Bryla, Schall, Faber Rackwitz
	$X(t, \mathbf{w})$ est un processus régulier du second ordre	$G(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{w}))$	formule différentielle	$\tilde{P}_{f,c}$	Intégration RGMR
	$X(t, \mathbf{w})$ est un processus régulier du second ordre appliqué à des dates aléatoires	$G(t, t(\mathbf{w}), \mathbf{X}(t, \mathbf{w}))$	différence finie	$\tilde{P}_{f,c}$	FORM / SORM + PHI2
dates aléatoires			différence finie	$\tilde{P}_{f,c}$	Simulations + PHI2

Bibliographie

- [Afn 88] AFNOR, NF X50-120, 1988.
- [AndLem 02] C. Andrieu et M. Lemaire - A new method to assess Reliability for a structure deteriorating with time. *In : Proc. IABMAS'02*, Barcelonne, Espagne, juillet 2002.
- [And et al. 02a] C. Andrieu, M. Lemaire et B. Sudret - The PHI2 method : a way to assess reliability for a structure deteriorating with time. *In Proc. European Safety and Reliability Conference ESREL'02*, pp472-479, Lyon, France, Mars 2002.
- [And et al. 02b] C. Andrieu, A. Rachad, J-C. Mitteau et M. Lemaire - Evaluation d'une structure au cours de sa dégradation dans le temps. *Revue Française de Génie Civil*, vol 6, 2002, pp 469-477, Hermès Paris.
- [And et al. 01] C. Andrieu, A. Rachad, J-C. Mitteau et M. Lemaire -. Evaluation d'une structure au cours de sa dégradation dans le temps. *In : Journées Nationales de Fiabilité 3* - Bordeaux, France, 1-2 Février 2001.
- [Bel 68] Y. Belayev - On the number of exits across a boundary of a region by a vector process. *Theory of Probability Applications*, 13, pp 320-324, 1968.
- [Bol 81] V.V. Bolotin - *Wahrscheinlichkeitsmethoden zur Berechnung von Konstruktionen*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1981.
- [BPEL 91] *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et construction en béton précontraint suivant la méthode des états limites : BPEL 91 révisé 99*, Eyrolles, 1999
- [Bre 88] K. Breitung - Asymptotic Crossing Rates for Stationary Gaussian Vector Processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 29, pp 195-207, 1988.
- [Bre 94] K. Breitung - *Asymptotic Approximations for probability Integrals*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Bry et al. 91] P. Bryla, M. Faber et R. Rackwitz - Second Order Methods in Time Variant Reliability Problems. *Proc. OMAE'91*, vol. II, pp143-150, 1991.
- [CraLea 67] H. Cramer et M. Leadbetter - *Stationary and Related Stochastic Processes*. Wiley, New-York, 1967.
- [DKiuLi 96] A. Der Kiureghian et C.C. Li - Nonlinear Random Vibration Analysis Through Optimization. *In : Proc. 7th IFIP WG 7.5 working conference on reliability and optimization of structural systems*, éd par D. Frangopol, R. Corotis et R. Rackwitz, pp 197-206, Pergamon Press, 1996.
- [DNV 00] Der Norske Veritas - *Proban user's manual*. 2000.
- [Dit 71] O. Ditlevsen - *Extremes and First Passage Times with applications in Civil Engineering*. - Thèse - Technical University of Denmark, 1971.

- [DitMad 96] O. Ditlevsen et H. O. Madsen - *Structural Reliability Methods*. John Wiley and sons, Inc, 1996.
- [EnrFra 00] Enright M. et Frangopol D. - Gharabeih E., Reliability of bridges under aggressive conditions. *In : Proc. Applications of Statistics and Probability*, éd. par R. Melchers et M. Stewart, vol 1, pp 323-335., Balkema, 2000.
- [GhaSpa 91] R. Ghanem et P. Spanos - *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [Gra 96] L. Granger - *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires - Analyse et modélisation OA21*. série ouvrage d'art, LCPC, Paris, 1996.
- [HagTve 91a] O. Hagen et L. Tvedt - Vector process out-crossing as parallel system sensitivity measure. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 121, n°10, pp 2201-2220, 1991.
- [HagTve 91b] O. Hagen et L. Tvedt - Parallel System Approach for Vector Out-Crossing. *Proc. OMAE'91*, vol. II pp 165-172, 1991.
- [HasLin 74] A.M. Hasofer et N.C. Lind - Exact and invariant second moment code format. *Joun. Eng. Mechanics div*, vol 100, pp 111-121, 1974.
- [Hei et al. 98] G. Heinfling, A. Courtois, et P. Hornet - Application des méthodes probabilistes à l'analyse du comportement des structures en béton armé vieillissantes : une approche industrielle. *In : Fiabilité des Matériaux et des Structures*, éd. par A. Mébarki, D. Boissier, et D. Breyse, pp 231-246. Hermès, Paris, 1998.
- [KreSoi 83] P. Krée et C. Soize - *Mécanique Aléatoire. Vibrations non linéaires, turbulences, séismes, houle, fatigue*. Dunod, 1983.
- [Lem et al. 01] M. Lemaire, J. Goyet, J.C. Mitteau et A. Mohamed - *Fiabilité des structures mécaniques - couplage mécano-fiabiliste statique*. Notes de cours IFMA, en cours de publication, 2001.
- [Lem et al. 96] M. Lemaire, J.-P. Muzeau, A. Mohamed, et J.-C. Mitteau - *Fiabilité et sûreté de fonctionnement des systèmes mécaniques*. LaRAMA, 1996.
- [Ler 96] R. Le Roy - *Déformations instantanées et différées des bétons à hautes performances*, série ouvrage d'art, LCPC, Paris, 1996
- [LiDKiu 93] C.C. Li et A. Der Kiureghian - Optimal discretization of random fields. *J. Eng. Mech.*, vol 119, n°6, pp.1136-1154, 1993.
- [LiDKiu 97] C.C. Li et A. Der Kiureghian - Mean Out-Crossing Rate of Nonlinear Response to Stochastic Input. *In : Application of Statistics and Probability - ICASP7*, éd par M. Lemaire, J-L. Favre, et A. Mébarki, vol 1, pp 295-302, Balkema, 1995.
- [Liu et al. 89] P. Liu, H. Lin et A. Der Kiureghian - *CalRel user's manual*. Tec. rep n°UCB/SEMM/89-18, University of California, Berkeley, 1989.
- [Mit 95] J.-C. Mitteau - *RGMR algorithm for the computation of reliability probability in structural mechanics*. Technical report, LaRAMA, 1995.
- [Mit 97] J.-C. Mitteau - *Communication personnelle / Comments on the computation of probability integral by RGMR method - 1997*. Technical report, LaRAMA, 1997.

- [Mit 99] J.-C. Mitteau - Reliability of Vibrating Structures. *In : Structural Dynamics EURODYN'99*, éd par L. Frýba et J. Náprstek, Vol 1, pp 43–54. A.A. Balkema/Rotterdam/Brookfield, Prague, juin 1999.
- [Mit 00] J.-C. Mitteau - *Communication personnelle / programme RGMR, version 3 - 2000*. Technical report, LaRAMA, 2000.
- [Mit 02] J.-C. Mitteau - *Communication personnelle / essai de preuve de la relation dans RGMR*. Technical report, LaRAMA, 2002.
- [MitAnd 02] J.-C. Mitteau et C. Andrieu - Time-Variant Reliability of structures by continuous parallel system approach. *In EURODYN'02*, Munich, Allemagne, Septembre 2002.
- [Mit et al. 02] J.-C. Mitteau, C. Andrieu, et M. Lemaire - Conception fiable des structures avec critère de défaillance dépendant du temps. *In : IDMME'02*, IFMA, Clermont-Ferrand, France, mai 2002.
- [Mit et al. 95] J.-C. Mitteau, A. Béakou, et M. Lemaire - Less approximations for SORM integrals. *In : Application of Statistics and Probability - ICASP7*, éd par M. Lemaire, J-L. Favre, et A. Mébarki, vol 2, pp 1003–1010. Balkema, 1995.
- [Moh 02] A. Mohamed - *PHIMECA users's manual*, PHIMECA engineering SA, Romagnat, France, 2002.
- [Mon 97] J.M. Monier - *Cours : analyse tome 4 - Cours et 500 exercices corrigés, 2ième année MP PSI PC PT*. Dunot, 1997.
- [Owe 80] D.B. Owen - A Table of Normal Integrals. *Commun. Statist. -Simula. Computa.* vol. B9, n°4, pp 389-419, 1980.
- [Rac 97] R. Rackwitz - Time-Variant Reliability for Non-Stationary Processes by the Outcrossing Approach. *Probabilistic Methods for Structural Design*, pp 245–260, 1997.
- [Rac 98] R. Rackwitz - Computational techniques in stationary and non-stationary load combination - A review and some extensions. *Journal of Structural Engineering*, vol. 25, n°1, pp 1-20, April 1998.
- [Rac 00] R. Rackwitz - Optimization - the basis of code-making and reliability verification. *Structural Safety*, vol 22, pp. 27-60, 2000.
- [RCP 98] RCP Consult - *STRUREL, a Structural Reliability Analysis Program-System, COMREL et SYSREL, Users Manual*, 1998.
- [Ric 44a] S. Rice - Mathematical analysis of random noise, part I and II. *Bell System Tech. J.*, vol. 32, pp 282–332, 1944.
- [Ric 44b] S. Rice - Mathematical analysis of random noise, part III and IV. *Bell System Tech. J.*, vol. 25, pp 46–156, 1944.
- [Sap 90] G. Saporta - *Probabilités, Analyse des Données et Statistique*. Editions Technip, 1990.
- [Sch et al. 91] G. Schall, M. Faber et R. Rackwitz - The Ergodicity Assumption for Sea States in the Reliability Estimation of Offshore Structures. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, n°113, pp 241–246, août 1991.
- [Shi 64] M. Shinozuka - Probability of Failure under Random Loading. *J. of Eng. Mech. Div.*, ASCE, vol. 90, n°EM5, pp 147-171, 1964.

- [Sud *et al.* 02] B. Sudret, G. Deraux, C. Andrieu et M. Lemaire - Comparison of methods for computing the probability of failure in time-variant reliability using the outcrossing approach. In *4th Int. Conf. on Comp. Sto. Mech. CSM4*, Corfou, 2002.
- [SudDKiu 00] B. Sudret et A. Der Kiureghian - *Stochastic Finite Element Methods and Reliability. A State-of-the-Art Report*. Report No. UCB/SEMM-2000/08, University of California Berkeley, 2000.

Annexe A

Decreasing performance function in time dependent reliability

Ce texte est un extrait de rapport d'activité rédigé en 2000 par A. Rachad, C. Andrieu-Renaud et M. Lemaire.

This contribution is devoted to both mathematical and practical considerations, about the reliability of non regenerating mechanical systems, under ageing effects. In such a case, the performance function can be modeled using a stochastic process with decreasing trajectories. Using this property we show that the cumulative and the instantaneous failure probabilities are almost equal. Examples in structural mechanics are given to illustrate the result.

Reliability of a mechanical system is involved whenever its evolution depends on some random parameters. Taking into account randomness requires various tools from dynamics, probabilities and stochastic processes theories. The aim is to provide answers to questions concerning ability of the structure to not endanger life, to perform a function for some period of time, to be kept in working state through inspection and maintenance operations.

Reliability is probabilistically quantified through measures of the risk linked with possible failures. In this context, two kinds of measure are distinguishable, the first concerns a failure at the present time, disregarding what happened before. Its probability is called instantaneous. The second takes into account all possible failures until the present time. Its probability is called cumulative.

When studying the physics involved by the system, it is possible to model its working state by a performance function. When this function is positive, the system is said to be reliable, otherwise it is in failure. Such a model takes into account the mechanical characteristics of the structure, its environment, various degradation phenomena, that are different facts leading to the ageing of the structure.

If during the process of ageing, possibilities of regeneration or decreasing load effects are excluded, then one expects the performance function to be a time decreasing function and hence *cumulative and instantaneous probabilities can be considered almost equal*.

This report is devoted to a deep study of this useful assertion. Its advantages are far from being negligible, both from a theoretical and a practical points of view :

1. Theoretically, performing cumulative probabilities of failure requires complex mathematical tools, see Soong and Grigoriu [SooGri 93]. The method of crossing stochastic processes uses ergodicity and mixing properties, see Schall and *al.* [Sch *et al.* 91], Mitteau [Mit 99]. Another analytical method uses the theory of stochastic differential equations, that is the study of extremes law by the averaging principle, see Rachad [Rac 99]. However, this method is drastically limited to one dimensional problems despite efforts to extending to higher dimension, Rachad et Roux [RacRou 00].
2. Practically, the results claimed in this report allow conclusions about the cumulative probability of failure, using only computations about instantaneous probabilities. The last can be obtained by software tools like (RYFES [Moh *et al.* 96], COMREL [RCP 98]).

A.1 Preliminaries

For the convenience of the reader, let us recall some classical results from stochastic processes theory, that will be used in the following.

A.1.1 Trajectories and law of a stochastic process

A stochastic process X is a family of random variables $X(t, \omega)$, indexed by time $t \in \mathbb{R}_+$ and with respect to a common probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. The set of values of the process X is called the state space, which can be \mathbb{R} or \mathbb{R}^d , or any set with sufficiently good geometrical and topological properties. For simplicity we suppose henceforward that the stochastic process X is scalar.

In stochastic processes theory, when we are dealing only with results in law, it is useful to consider the stochastic process X as a random variable, also denoted by X

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \quad (\text{A.1})$$

with $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ is the ensemble of all trajectories or maps from \mathbb{R}_+ to \mathbb{R} . If the process is continuous, the ensemble of trajectories reduces to $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. If the process is *càdlàg*, *i.e.* right continuous with left limits, then the ensemble of trajectories is denoted by $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. (The nonsensical word *càdlàg* is an acronym from the French “continu à droite, limites à gauche”.)

In all cases the random variable X induces a probability law on $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$. Let us consider, for instance the *càdlàg* case, the induced probability space is the following

$$(D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X), \quad (\text{A.2})$$

with $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ the Borel σ -algebra in the *càdlàg* space and \mathbb{P}_X the probability measure induced by X .

The last probability space is, by the fundamental Kolmogorov theorem, sufficient to describe entirely the law of the process X . Particularly, most of notions in reliability can be defined using this representation.

Example. Let us introduce an example of a stochastic process which will frequently appear in the following. Given a finite sequence of random variables X_1, \dots, X_n and a continuous function $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, then the law induced in $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ by the stochastic process $Y(t) = f(t, X_1, \dots, X_n)$ is entirely defined if the random vector (X_1, \dots, X_n) is characterized.

A.1.2 Reliability

Let us consider a mechanical system whose evolution is described by a stochastic process X , with càdlàg trajectories in \mathbb{R}^n . Suppose that for this system a performance function is defined by

$$G(t, \omega) = F(t, X(t, \omega)), \quad (\text{A.3})$$

with $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a continuous function. The system is said to be reliable if the following event is realized

$$\{\omega \in \Omega, \quad G(t, \omega) > 0\}, \quad (\text{A.4})$$

otherwise the system is said to be in failure.

Definition 1 (reliability) *The following probability, called reliability,*

$$R(\tau) = \mathbb{P}\{G(t, \omega) > 0, \quad \forall t \leq \tau\} \quad (\text{A.5})$$

provides a system performance measure during a projected lifetime τ .

Definition 2 (cumulative probability of failure) *It is defined by*

$$P_{f,c}(\tau) = \mathbb{P}\{\exists t \leq \tau, \quad G(t, \omega) \leq 0\}, \quad (\text{A.6})$$

which measures the probability that at some date before τ , the system is in failure.

Definition 3 (instantaneous probability of failure) *If during a period of time $[0, \tau]$, we are mainly interested in the state of the system at time τ , disregarding what happened before τ , it is convenient to define the probability*

$$P_{f,i}(\tau) = \mathbb{P}\{G(\tau, \omega) \leq 0\}. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Main results

As mentioned in the preliminary section, the preceding notions of reliability can be defined using a trajectories representation of the performance function G . Of course, this process must be sufficiently regular to give a sense to this representation

$$\text{Hypothesis : } G \text{ is càdlàg.} \quad (\text{A.8})$$

This hypothesis can be replaced by càglàd (left continuous with right limits). Obviously the continuous case is also involved.

Denoting by \mathbb{P}_G the probability induced by G (whose realization is g) on the càdlàg space, we have

$$R(\tau) = \mathbb{P}_G\{g(\cdot) \in D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad g(t) > 0, \quad \forall t \leq \tau\}, \quad (\text{A.9})$$

$$P_{f,c}(\tau) = \mathbb{P}_G\{g(\cdot) \in D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad \exists t \leq \tau, \quad g(t) \leq 0\}, \quad (\text{A.10})$$

$$P_{f,i}(\tau) = \mathbb{P}_G\{g(\cdot) \in D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \quad g(\tau) \leq 0\}. \quad (\text{A.11})$$

Using these new definitions, we derive the following lemmas.

Lemma 1

(i) The set $\{g(\cdot) \in D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), g(t) > 0, \forall t \leq \tau\}$ is measurable, besides
 $P_{f,c}(\tau) = 1 - R(\tau)$.

(ii) $\forall \tau$, we have

$$P_{f,i}(\tau) \leq P_{f,c}(\tau). \quad (\text{A.12})$$

Proof

(i) Let $\tau > 0$ and $n \in \mathbb{N}^*$, denote by E_τ and $E_{\tau,n}$ the sets

$$E_\tau = \{g(\cdot), g(t) > 0, \forall t \leq \tau\} = \bigcap_{t \leq \tau} \{g(\cdot), g(t) > 0\}, \quad (\text{A.13})$$

$$E_{\tau,n} = \bigcap_{t \leq \tau} \{g(\cdot), g(t) \geq \frac{1}{n}\}. \quad (\text{A.14})$$

We see easily that

$$E_\tau = \bigcup_{n \geq 1} E_{\tau,n}. \quad (\text{A.15})$$

Hence, to show that E_τ is measurable, it suffices to prove that $E_{\tau,n}$ is measurable. Indeed

$$E_{\tau,n} = \left(\bigcap_{t < \tau, t \in Q} \{g(\cdot), g(t) \geq \frac{1}{n}\} \right) \cap \{g(\cdot), g(\tau) \geq \frac{1}{n}\}, \quad (\text{A.16})$$

where we used the fact that G is càdlàg and the fact that Q (set of dates) is dense in \mathbb{R} .

Besides E_τ^c is also measurable

$$E_\tau^c = \bigcup_{t \leq \tau} \{g(\cdot), g(t) \leq 0\} = \{g(\cdot), \exists t \leq \tau, g(t) \leq 0\}. \quad (\text{A.17})$$

Particularly, we have

$$P_{f,c} = \mathbb{P}_G(E_\tau^c) = 1 - \mathbb{P}(E_\tau) = 1 - R(\tau). \quad (\text{A.18})$$

(ii) This property is an obvious consequence of

$$\{g(\cdot), g(\tau) \leq 0\} \subset E_\tau^c. \quad (\text{A.19})$$

The lemma 1 is proved.

Let us now discuss the main result of this report. In many situations in mechanics, it appears that the performance function is a time decreasing function. This property is a consequence of a physical nature of the considered system, that is a ageing without possible regeneration. In such a case we can derive the following useful result.

Theorem 1 *Suppose that the performance function G is decreasing until a time $T \leq \infty$, i.e.*

$$\forall s, t \leq T, \quad \forall \omega \in \Omega, \quad s < t \Rightarrow G(s, \omega) \geq G(t, \omega), \quad (\text{A.20})$$

then, for all $\tau \leq T$, the instantaneous and cumulative probabilities of failure are equal

$$P_{f,c}(\tau) = P_{f,i}(\tau). \quad (\text{A.21})$$

Proof

We use the same notations defined in lemma 1. We have

$$P_{f,c}(\tau) = \mathbb{P}_G(E_\tau^c). \quad (\text{A.22})$$

As the trajectories of G are decreasing, for all $t \leq \tau \leq T$, we have

$$\{g(\cdot), \quad g(t) \leq 0\} \subset \{g(\cdot), \quad g(\tau) \leq 0\}, \quad (\text{A.23})$$

which yields

$$E_\tau^c \subset \{g(\cdot), \quad x(\tau) \leq 0\}, \quad (\text{A.24})$$

hence

$$P_{f,c}(\tau) = \mathbb{P}_G(E_\tau^c) \leq \mathbb{P}_G\{g(\cdot), \quad g(\tau) \leq 0\} = P_{f,i}(\tau). \quad (\text{A.25})$$

Besides, by (ii) of lemma 1

$$P_{f,i}(\tau) \leq P_{f,c}(\tau). \quad (\text{A.26})$$

Combining the inequalities (A.25) and (A.26), we obtain (A.21).
Theorem 1 is proved.

A.3 Conclusion

This result is general as it was proved in section 3 under some hypotheses.

In the first step we make a choice of an adequate probability space, that is the space of trajectories of the corresponding performance function.

Then, assuming that these trajectories are regular enough (*càdlàg*) and under decreasiness condition, we proved that the cumulative and instantaneous probabilities of failure are equal (theorem 1). However decreasiness may not hold everywhere. In this case, the equality between the two probabilities is only approximative.

The order of the approximation corresponds exactly to the probability of non decreasing trajectories, that are possibilities of regeneration of the structure, or the probability of $\{\dot{G} > 0\}$ as shown in the example chap. 5.

Bibliographie

- [Mit 99] J.-C. Mitteau - Reliability of Vibrating Structures. *In : Structural Dynamics EURODYN'99*, éd par L. Frýba et J. Náprstek, Vol 1, pp 43–54. A.A. Balkema/Rotterdam/Brookfield, Prague, juin 1999.
- [Moh et al. 96] A. Mohamed, F. Suau et M. Lemaire - A new tool for reliability based design with ANSYS FEA. *In ANSYS conference & Exhibition*, pp 3.13-3.23, ANSYS INC., Houston, USA, 1996
- [Rac 99] A. Rachad - Principes de moyennisation pour des oscillateurs stochastiques non linéaires. *Thèse de l'université Blaise Pascal*, Clermont-Ferrand, FRANCE, 135 p., 1999.
- [RacRou 00] A. Rachad et D. Roux - Resonance of a stochastic oscillator. *Third international conference on applied mathematics and engineering sciences, CIMASI'2000*, 6 p. Casablanca, 2000.
- [RCP 98] RCP Consult - *STRUREL, a Structural Reliability Analysis Program-System, COMREL et SYSREL, Users Manual*, 1998.
- [Sch et al. 91] G. Schall, M. Faber et R. Rackwitz - The Ergodicity Assumption for Sea States in the Reliability Estimation of Offshore Structures. *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, n°113, pp 241–246, août 1991.
- [SooGri 93] T. Soong et M. Grigoriu - *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*. PTR Prentice Hall, 1993.

Annexe B

Rappels sur les processus indexés sur le temps

B.1 Introduction

L'étude de la fiabilité d'une structure en fonction du temps vise à prendre en compte les évolutions temporelles des matériaux, des chargements, etc. Les outils mathématiques nécessaires pour traiter de tels problèmes émanent de la théorie des processus stochastiques. Cette annexe est consacrée à des généralités sur ces processus sans prétendre à l'exhaustivité. Elle permet d'introduire les notions fondamentales nécessaires à une telle étude. Pour davantage de précisions, le lecteur pourra se reporter aux références [CraLea 67] et [KreSoi 83] où toutes les notions mathématiques sont approfondies.

Avant toute chose, il convient de mettre en place les notations nécessaires utilisées.

On appelle espace de probabilité la donnée d'un triplet Ω, F, P avec :

- Ω espace ou ensemble des aléas ω ;
- F tribu des événements, famille de parties de Ω vérifiant :
 1. $\forall A \in F, \bar{A} \in F$
 2. $A_i \in F \rightarrow \cup_{i \in I} A_i \in F, I$ est un ensemble dénombrable
 3. $\Omega \in F$
- P probabilité sur F , définie comme une application de F dans $[0, 1]$ telle que :
 1. $P(\Omega) = 1$
 2. $\forall (A_i)$ famille dénombrable d'événements deux à deux disjoints (*i.e.* $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$) on a $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

La moyenne stochastique d'une variable aléatoire réelle $X(\omega)$ définie sur (Ω, F, P) est notée $E[X(\omega)] = \int_{\Omega} X(\omega) dP$. Si X admet une densité $f_X(x)$, alors $E[X(\omega)] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$.

B.2 Processus stochastique scalaire

Nous donnons ici quelques définitions relatives à un processus stochastique scalaire.

B.2.1 Une première définition

Un processus stochastique, ou processus aléatoire, est un modèle mathématique d'évolution dont la dépendance envers le temps et/ou l'espace est gouvernée par des lois de probabilités [SooGri 93]. Dans toute la suite seule la dépendance envers le temps t est considérée.

La notation retenue ici pour un processus stochastique scalaire est :

$$X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega$$

- Pour t fixé, $X(t = t_1, \omega)$ est une fonction sur l'espace de probabilité Ω et donc une *variable aléatoire* que nous notons $X_{t_1}(\omega)$.
- Pour ω fixé, $X(t, \omega = \omega_1)$ définit une fonction de t et est une *réalisation*, une *fonction d'échantillonnage* ou encore une *trajectoire* du processus stochastique, nous la notons $x(t)$.

Soit $R_{XX}(t_1, t_2)$, la fonction d'autocorrélation du processus $X(t, \omega)$. Elle est définie par :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1, \omega) X(t_2, \omega)]$$

sous réserve de l'existence des intégrales de définition de $E[\]$.

La fonction de covariance normalisée (aussi appelée coefficient de corrélation) d'un processus est quant à elle définie en annexe D.

De nombreux phénomènes sont modélisables par un processus stochastique. Des exemples de tels phénomènes sont : les imperfections de matériaux, les charges dues au vent sur une structure, l'accélération du sol due à un tremblement de terre, etc.

B.2.2 Représentations mathématiques

Trois approches à caractère mathématique sont proposées dans la littérature.

Définition issue des travaux de Kolmogorov

Nous retenons tout d'abord la définition issue des travaux de Kolmogorov, telle qu'elle est rédigée par Soong *et al.*

Définition 1 [SooGri 93] : *consider the space S of all finite and real-valued functions defined on the index set T . Then, any realization of a stochastic process $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$ is a "point" in S . The stochastic process $X(t, \omega)$ can thus be viewed as a mapping from the probability space Ω to the realization space S . This mapping can be used to induce a probability measure on S and, in this way, fully define the stochastic process $X(t, \omega)$.*

Définition 1 (traduction) : *considérons l'espace S de toutes les fonctions finies à valeurs réelles définies sur l'ensemble T . Alors, chaque réalisation d'un processus stochastique $X(t, \omega)$, $t \in T$, qui correspond à un tirage de ω , est un "point" de S . Le processus stochastique peut ainsi être vu comme une application de l'espace des probabilités Ω vers l'espace S . Cette application peut être utilisée pour induire une mesure de probabilité sur S et, dans ce sens, définit complètement le processus stochastique $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$.*

Soong *et al.* précisent que cette définition donnée par Kolmogorov a des avantages dans les études théoriques mais que l'application de cette définition dans les problèmes d'ingénieurs est limitée. En effet, lorsqu'on observe des trajectoires, on est souvent amené à calculer des intégrales faisant intervenir les trajectoires ou à dériver celles-ci. Or, ceci demande de bonnes propriétés telles que l'intégrabilité ou la dérivabilité des trajectoires. Ceci peut être obtenu si l'on montre que la loi du processus est portée par un espace de fonctions régulières.

Définition basée sur les distributions multidimensionnelles finies

Les mêmes auteurs proposent une seconde définition basée sur les distributions multidimensionnelles finies :

Définition 2 [SooGri 93] : *a stochastic process can thus be characterized by the probabilistic behavior of a family of random variables, say $X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \dots$ indexed on T . Following this approach, to specify a stochastic process is to specify the joint probability distributions of $X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \dots$ for all finite sets $\{t_i\} \in T$. This set of distributions constitutes the probability law of $X(t, \omega), t \in T$*

Définition 2 (traduction) : *un processus stochastique peut être caractérisé par le comportement probabiliste d'une famille de variables aléatoires, $X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \dots$, indexées sur T . En utilisant cette approche, caractériser un processus stochastique, c'est caractériser les distributions conjointes de probabilité de $X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \dots$, pour tout ensemble fini $\{t_i\} \in T$. Cet ensemble de distributions constitue la loi de probabilité de $X(t, \omega), t \in T$.*

La définition 2 peut être reformulée plus simplement : supposons qu'à tout ensemble fini $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \in T$, il correspond un ensemble de variables aléatoires $X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)$ ayant une fonction de répartition conjointe bien définie :

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{X_{t_1}(\omega) \leq x_1 \cap \dots \cap X_{t_n}(\omega) \leq x_n\} \quad (\text{B.1})$$

appelée la $n^{\text{ième}}$ fonction de distribution de $X(t, \omega)$, alors cette famille de fonctions de distribution conjointes définit le processus stochastique $X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega$, en supposant qu'elle satisfait les conditions de compatibilité de Kolmogorov.

Ces conditions sont :

1. Une condition de consistance, *i.e.* pour tout $m > n$

$$F_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = +\infty, \dots, x_m = +\infty; t_1, \dots, t_n, \dots, t_m) = F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

ce qui indique que les distributions marginales peuvent être générées par simple projection à partir de distributions de plus grande dimension.

2. La propriété de symétrie c'est à dire l'invariance par n'importe quelle permutation arbitraire sur les indices $1, \dots, n$ *i.e.* :

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_n(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$$

où $\{i_1, \dots, i_n\}$ est une permutation arbitraire de $\{1, \dots, n\}$.

Kolmogorov a montré que pour tout système de fonctions de distributions satisfaisant ces deux conditions, il existe un processus stochastique $X(t, \omega)$ tel que $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ soit la distribution de probabilité conjointe de $X(t_1, \omega), \dots, X(t_n, \omega)$.

Exemple : *soit $C(s, t)$ une fonction de covariance donnée. Le processus $X(t, \omega)$ tel que, pour toute famille finie (t_1, \dots, t_n) d'instant, $(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega))$ suit une loi de Gauss centrée de matrice de variance-covariance*

$$C = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & \cdots & C(t_n, t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(t_n, t_1) & \cdots & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

est appelé processus Gaussien centré de covariance $C(t_1, t_2)$. La loi de $(X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega))$ a alors pour densité :

$$f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |C|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^t C^{-1} \mathbf{x}\right)$$

où :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_j \in (-\infty, +\infty) \quad j = 1 \dots n$$

et :

$$C = \begin{bmatrix} E[X_{t_1}(\omega) X_{t_1}(\omega)] & \cdots & E[X_{t_1}(\omega) X_{t_n}(\omega)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_{t_n}(\omega) X_{t_1}(\omega)] & \cdots & E[X_{t_n}(\omega) X_{t_n}(\omega)] \end{bmatrix}$$

Définition basée sur la notion de fonction aléatoire

Une définition est donnée par Krée et Soize dans [KreSoi 83] :

Définition 3 : soit l'espace de probabilité (Ω, F, P) . Une fonction aléatoire est une fonction numérique régulière définie sur T (partie ouverte de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 ou $\mathbb{R}^3 \dots$) à valeurs dans l'espace des variables aléatoires sur Ω à valeurs dans F .

Une remarque énoncée dans [SooGri 93] est :

Remarque : un processus stochastique peut être décrit par une expression analytique explicite (notée ici h) mettant en jeu comme paramètres un ensemble dénombrable de variables aléatoires $\{Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots\}$. Par exemple, une définition paramétrique possible d'un processus $X(t, \omega)$ est :

$$X(t, \omega) = h(t; Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots)$$

La loi de probabilité de $X(t, \omega)$ est complètement définie par les distributions de probabilités conjointes de ces variables aléatoires et la forme fonctionnelle de h .

Exemple : si on exprime le même processus que celui de l'exemple précédent mais suivant la définition 3, cela donne : soit $X(t, \omega)$ le processus défini par :

$$X(t, \omega) = Y_1(\omega).t + Y_2(\omega) \tag{B.2}$$

où $Y_1(\omega)$ et $Y_2(\omega)$ sont deux variables aléatoires indépendantes Gaussiennes de moyenne nulle et de variance σ^2 et t représente le temps. Le calcul montre que la définition du processus sous la forme (eq. (B.2)) constitue une donnée permettant d'identifier la matrice de covariance et que ce processus est Gaussien.

Le calcul de C peut être effectué :

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(t_i, \omega), X(t_j, \omega)) &= E[X(t_i, \omega) X(t_j, \omega)] \\ &= E[(Y_1(\omega).t_i + Y_2(\omega)) \cdot (Y_1(\omega).t_j + Y_2(\omega))] \\ &= \sigma^2 (1 + t_i t_j) \end{aligned}$$

d'où :

$$C = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 + t_1^2 & \cdots & 1 + t_1 t_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + t_n t_1 & \cdots & 1 + t_n^2 \end{bmatrix}$$

L'approche de la remarque précédente apparaît moins générale mais est plus facile à manipuler. Des méthodes permettent la décomposition d'un processus sur la base de produits de fonctions du temps et de variables aléatoires (ex. décomposition de Karhunen-Loève [GhaSpa 91]).

B.3 Propriétés d'un processus

B.3.1 La continuité en moyenne d'ordre deux (m.o.d.)

Il est nécessaire de donner tout d'abord la définition d'un processus du second ordre qui est, le type de processus le plus répandu dans les applications (Soize,[SoiLem 00]). Soize en donne la définition suivante :

Définition 4 : le processus stochastique $X(t, \omega)$ est du second ordre si :

$$\forall t \in T \quad \|X(t, \omega)\| = \left(\mathbb{E} \left[\|X(t, \omega)\|^2 \right] \right)^{1/2} < \infty$$

Ceci signifie que pour tout t fixé dans T , la variable aléatoire $X_t(\omega)$ est du second ordre.

Exemple : considérons un processus défini par des échantillons sinusoïdaux à déphasage aléatoire $\Psi(\omega)$ ayant comme densité de probabilité $p(\psi) = \frac{1}{2\pi}$ si $\psi \in [0, 2\pi]$:

$$X(t, \omega) = a \cos(2\pi f_0 t + \Psi(\omega))$$

Le calcul de $\mathbb{E} \left[\|X(t, \omega)\|^2 \right]$ peut alors être effectué :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X(t, \omega)^2 \right] &= a^2 \mathbb{E} \left[\cos^2(2\pi f_0 t + \Psi(\omega)) \right] \\ &= a^2 \int_{\mathbb{R}} \cos^2(2\pi f_0 t + \psi) P(d\psi) \\ &= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(2\pi f_0 t + \psi) d\psi \\ &= \frac{a^2}{2} < \infty \end{aligned}$$

Le processus $X(t, \omega)$ est donc du second ordre.

On note $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'espace des variables aléatoires définies sur (Ω, F, P) à valeurs dans \mathbb{R}^n , du second ordre.

Le même auteur donne une définition de la continuité en moyenne d'ordre deux :

Définition 5 : le processus stochastique $X(t, \omega)$ est continu en m.o.d. sur T si l'application $t \rightarrow X(t)$ est continu de T dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire si pour tout $t \in T$, on a :

$$\lim_{t' \rightarrow t} \|X(t') - X(t)\| = 0$$

B.3.2 La dérivabilité en moyenne d'ordre deux (m.o.d.)

Soize,[SoiLem 00] propose une définition de la dérivabilité en moyenne d'ordre deux :

Définition 6 : le processus du second ordre $X(t, \omega)$ est dérivable en moyenne d'ordre deux (m.o.d.) au point t de T si la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h, \omega) - X(t, \omega)}{h}$$

existe. Si cette limite existe, on la note $\dot{X}(t, \omega)$ et on l'appelle la dérivée en m.o.d. du processus $X(t, \omega)$ au point t de T . Si le processus $X(t, \omega)$ est dérivable en m.o.d. en tout point t de T , on dit qu'il est dérivable en m.o.d. sur T .

Pour qu'un processus $X(t, \omega)$ soit dérivable, son coefficient de corrélation $\rho_{XX}(t_1, t_2)$ doit vérifier les conditions suffisantes [DitMad 96] :

$$\begin{aligned} \rho_{XX}(t_1 = t_0, t_2 = t_0) &= 1 ; \\ \frac{\partial}{\partial t_1} \rho_{XX}(t_1, t_2)|_{t_1=t_2=t_0} &= \frac{\partial}{\partial t_2} \rho_{XX}(t_1, t_2)|_{t_1=t_2=t_0} = 0 ; \\ \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \rho_{XX}(t_1, t_2)|_{t_1=t_2=t_0} &< \infty \end{aligned} \tag{B.3}$$

B.3.3 La stationnarité

Les commentaires, définitions et exemples de ce paragraphe émanent de [SooGri 93].

Les processus stochastiques peuvent être stationnaires ou non stationnaires.

Beaucoup de processus stochastiques ayant lieu dans la nature ont la propriété suivante : leur comportement statistique ne varie pas de façon significative par rapport à leur paramètre d'indexation. La surface de la mer en coordonnées spatiale et temporelle, les impuretés dans les matériaux ont leurs fluctuations, en tant que fonction du temps ou de leur position spatiale, statistiquement à peu près les mêmes du point de vue de leur apparence. En tant qu'idéalisation, les processus stationnaires sont souvent utilisés tout comme leurs modèles mathématiques. Grâce à des outils mathématiques puissants existant pour traiter les processus stochastiques stationnaires, cette classe de processus a une importance pratique forte.

Deux types de stationnarité peuvent être définis :

Définition 7 : un processus stochastique $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$ est dit stationnaire ou stationnaire au sens strict ssi ses fonctions de distribution associées restent invariantes par une translation arbitraire du paramètre temps, c'est-à-dire pour chaque n et pour un τ arbitraire, on a :

$$\begin{aligned} F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= F_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) \\ t_j \in T \text{ et } (t_j + \tau) \in T, \quad j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Définition 8 : un processus stochastique $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$ est dit stationnaire au sens large (ou en moyenne d'ordre deux) ssi :

- la moyenne $E[X(t, \omega)] = \text{const} < \infty$;

– $E[X^2(t, \omega)] < \infty$ et $E[X(t+h, \omega)X(t, \omega)] = R_{XX}(h)$ ne dépend pas de t .

Remarque : si $t_2 = t_1 + h$ et que le processus $X(t, \omega)$ est stationnaire au sens large, on note $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_1 + h) = R_{XX}(h)$

Un processus stochastique stationnaire au sens large est quelquefois dit stationnaire au second ordre. Dans le cas Gaussien, on a équivalence entre la notion de stationnaire au sens strict et stationnaire au sens large, ce qui n'est généralement pas le cas.

Les processus qui ne sont pas stationnaires sont non-stationnaires.

Exemple : le mouvement Brownien (processus de Wiener)

C'est un processus Gaussien tel que :

– il est à accroissements indépendants :

$$\forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \quad W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

sont indépendants

- $E[W(t, \omega)] = 0$;
- $\text{cov}(W(t, \omega), W(s, \omega)) = \min(s, t)$;
- $W(t, \omega)$ est à trajectoires continues.

Ce processus n'est pas stationnaire car sa fonction de covariance ne dépend pas de $t - s$.

Exemple : reprenons l'exemple de la page 147 d'un processus défini par des échantillons sinusoïdaux à déphasage aléatoire :

$$X(t, \omega) = x_0 \cos(\omega_0 t + \Psi(\omega)) \tag{B.4}$$

où x_0 et ω_0 sont des constantes réelles et $\Psi(\omega)$ (notée Ψ dans la suite de l'exemple pour simplifier) est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Alors, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} E[X(t, \omega)] &= E[x_0 \cos(\omega_0 t + \Psi)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0 \cos(\omega_0 t + \Psi) d\Psi \\ &= \frac{1}{2\pi} [x_0 \sin(\omega_0 t + \Psi)]_0^{2\pi} = 0 \\ R_{XX}(t_1, t_2) &= E[x_0 \cos(\omega_0 t_1 + \Psi) x_0 \cos(\omega_0 t_2 + \Psi)] \\ &= \frac{x_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega_0 t_1 + \Psi) \cos(\omega_0 t_2 + \Psi) d\Psi \\ &= \frac{x_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\cos(\omega_0 (t_1 + t_2 + 2\Psi)) + \cos(\omega_0 (t_2 - t_1))] d\Psi \\ &= \frac{x_0^2}{4\pi} [\sin(\omega_0 (t_1 + t_2 + 2\Psi)) + \Psi \cos(\omega_0 (t_2 - t_1))]_0^{2\pi} \\ &= \frac{x_0^2}{2} \cos(\omega_0 (t_2 - t_1)) \end{aligned}$$

Le processus $X(t, \omega)$, tel que défini par B.4, est donc stationnaire au sens large.

B.3.4 L'ergodicité

D'après Soong *et al.* [SooGri 93], la théorie de l'ergodicité a tout d'abord été introduite en mécanique statistique classique et en théorie cinétique pour relier les propriétés de la moyenne, pour un système particulier de molécules dans un espace clos, au comportement global de toutes les molécules à tout instant donné. Dans notre contexte, l'ergodicité concerne la question spécifique de la relation des moyennes statistiques d'*un processus stochastique stationnaire* aux moyennes par rapport au temps. L'interchangeabilité entre les moyennes d'ensemble et de temps est souvent utilisée en pratique car, lorsque les moyennes statistiques pour un processus stochastique ont besoin d'être calculées, ce qui est généralement disponible est non pas une collection représentative de réalisations du processus mais plutôt des éléments de réalisations ou une longue et unique observation d'une unique réalisation.

Soit $x(t)$ une réalisation du processus stationnaire $X(t, \omega)$, $t \in T$, $\omega \in \Omega$. La moyenne temporelle $\overline{g(x(t))}$ d'une fonction $g(x(t))$ donnée de $x(t)$, est définie par :

$$\overline{g(x(t))} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x(t)) dt$$

si la limite existe.

La moyenne stochastique est définie par :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[g(X(t_1, \omega), \dots, X(t_n, \omega))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

où $f_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ est la densité de probabilité relative à $(X(t_1, \omega), \dots, X(t_n, \omega))$.

La définition donnée dans [SooGri 93] est :

Définition 9 : un processus stationnaire $X(t, \omega)$ $t \in T$, $\omega \in \Omega$, est ergodique relativement à G , si pour tout $g(X(t, \omega)) \in G$, G étant un domaine approprié de $g()$:

$$\overline{g(x(t))} = \mathbb{E}[g(X(t, \omega))]$$

Saporta affirme dans [Sap 90] que cela revient à dire qu'*un processus stationnaire est ergodique si toutes ses caractéristiques peuvent être déterminées à partir d'une seule trajectoire de ce processus* : en pratique ceci veut dire qu'une trajectoire observée pendant une durée assez longue suffit à calculer l'espérance, la variance et la fonction d'autocorrélation du processus $X(t, \omega)$.

Exemple : considérons un processus défini par des échantillons sinusoïdaux à déphasage aléatoire :

$$X(t, \omega) = a \cos(2\pi f_0 t + \Psi(\omega))$$

alors, cette fonction étant périodique et stationnaire, elle est ergodique. On a donc facilement :

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a \cos(2\pi f_0 t + \Psi) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cos(2\pi f_0 t + \Psi) d\Psi = 0$$

B.3.5 Les processus mélangeant ("mixing" en anglais)

La notion de processus mélangeant est complexe. Rackwitz mentionne cette propriété dans le manuel de COMREL [RCP 98] comme étant une propriété *sine qua non* des processus pouvant être utilisés dans les problèmes de fiabilité dépendante du temps. Rozanov [Roz 63] en parle en terme de "régularité complète" du processus. C'est d'ailleurs de cet ouvrage que viennent les aspects théoriques qui suivent. Ces aspects demanderaient à être davantage développés notamment au niveau de la mise en place de moyens de vérification de cette propriété dans le cas général.

Définition 10 : $\sigma(X(t, \omega))$ est défini comme étant la tribu engendrée par $X(t, \omega)$ correspondant à l'ensemble des événements observables liés au processus $X(s, \omega)$ pour $0 \leq s \leq t$.

Cette notion peut aussi être définie sur un intervalle et s'écrit alors : $\sigma(X(t, \omega), t_1 \leq t \leq t_2)$ qui correspond aux événements observables liés au processus $X(t, \omega)$ sur $[t_1, t_2]$.

Soit la tribu F_t définie par $F_t = \sigma(X(t, \omega))$. Lorsque $s < t$, $F_s \subset F_t$. Pour un intervalle $[t_1, t_2]$, nous notons :

$$F_{t_1}^{t_2} = \sigma(X(t, \omega) ; t_1 \leq t \leq t_2)$$

Pour les variables aléatoires, nous notons $X \in F_t$ si X est F_t -mesurable.

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cas stationnaire. Il faut noter que cette notion s'applique aussi au cas non stationnaire.

Rozanov [Roz 63] définit le coefficient de mélange $\alpha(\delta)$ pour un processus stationnaire $X(t, \omega)$ par :

$$\alpha(\delta) = \sup_{A \in F_0^t, B \in F_{t+\delta}^\infty} |\text{Prob}(A \cap B) - \text{Prob}(A)\text{Prob}(B)|$$

Définition 11 : le processus stationnaire $X(t, \omega)$ est dit mélangeant ssi $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow +\infty$.

L'interprétation est que, au fur et à mesure que le temps s'écoule, les événements concernant le "futur" du processus deviennent de moins en moins dépendants des événements du "passé".

Pour démontrer qu'un processus est mélangeant, il existe une relation faisant intervenir le coefficient de corrélation maximal. La théorie suivante est développée dans [Roz 63]; seul son résultat nous intéresse pour son côté pratique.

Soit le coefficient de corrélation maximum $\rho_{\max}(\delta)$ défini par :

$$\rho_{\max}(\delta) = \sup_{X \in F_0^t, Y \in F_{t+\delta}^\infty} \frac{\text{E}[(X - \text{E}[X])(Y - \text{E}[Y])]}{\left[\text{E}[(X - \text{E}[X])^2] \cdot \text{E}[(Y - \text{E}[Y])^2] \right]^{1/2}}$$

Rozanov [Roz 63] affirme alors que la relation :

$$0 \leq \alpha(\delta) \leq \rho_{\max}(\delta)$$

est toujours valable. D'où :

$$\text{si } \lim_{\delta \rightarrow \infty} \rho_{\max}(\delta) = 0 \implies \lim_{\delta \rightarrow \infty} \alpha(\delta) = 0$$

Pour un processus mélangeant, la troisième condition de dérivabilité de B.3 devient

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \rho_{XX}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=t_0} > 0$$

Tous les processus que nous utilisons sont supposés mélangeant.

B.3.6 La régularité

Une définition est donnée par Rackwitz dans [Rac 97] dans le contexte de la fiabilité dépendante du temps. Elle s'appuie sur la notion de nombre de franchissements.

On appelle $N(t_1, t_2)$ le nombre de franchissements sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ de $X(t, \omega)$ pour un niveau donné. La notion de franchissement est plus largement abordée en annexe C

Définition 12 : un processus $X(t, \omega)$ est dit régulier si :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(N(t, t + \Delta t) > 1) = 0$$

Ceci peut être interprété ainsi : un processus est considéré comme régulier lorsque, sur un intervalle du type $[t, t + h]$ avec h très petit, il présente au plus un seul franchissement d'un niveau donné (par exemple le passage dans le domaine de défaillance) sur cet intervalle.

Bibliographie

- [CraLea 67] H. Cramer et M. Leadbetter - *Stationary and Related Stochastic Processes*. Wiley, New-York, 1967.
- [DitMad 96] O. Ditlevsen et H. O. Madsen - *Structural Reliability Methods*. John Wiley and sons, Inc, 1996.
- [GhaSpa 91] R. Ghanem et P. Spanos - *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [KreSoi 83] P. Krée et C. Soize - *Mécanique Aléatoire. Vibrations non linéaires, turbulences, séismes, houle, fatigue*. Dunod, 1983.
- [Rac 97] R. Rackwitz - Time-Variant Reliability for Non-Stationary Processes by the Outcrossing Approach. *Probabilistic Methods for Structural Design*, pp 245–260, 1997.
- [RCP 98] RCP Consult - *STRUREL, a Structural Reliability Analysis Program-System, COMREL et SYSREL, Users Manual*, 1998.
- [Roz 63] Y. Rozanov - *Stationary Random Process*. Holden-Day, 1963.
- [Sap 90] G. Saporta - *Probabilités, Analyse des Données et Statistique*. Editions Technip, 1990.
- [SoiLem 00] C. Soize et M. Lemaire - *Sécurité probabiliste des Structures*. Collège de Polytechnique, 2000.
- [SooGri 93] T. Soong et M. Grigoriu - *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*. PTR Prentice Hall, 1993.

Annexe C

Les trois types de franchissements

C.1 Introduction

Plusieurs types de franchissements sont définis dans la littérature : les franchissements en croissant, en décroissant et ceux qui sont ni en croissant, ni en décroissant, les franchissements sortants. Cette annexe, basée sur les définitions données par Cramer et Leadbetter dans [CraLea 67], permet de mettre au clair ces notions et de les relier à la fiabilité dépendante du temps.

Les notations utilisées sont les suivantes : pour un niveau u , G_u est l'ensemble des fonctions continues pour $0 \leq t \leq 1$ tel que $f(t)$ ne soit pas identiquement égale à u sur tout sous-intervalle et $f(0) \neq u$, $f(1) \neq u$.

Nous avons alors les définitions suivantes concernant les franchissements pour toutes les fonctions $f \in G_u$. Elles sont généralisables à un intervalle quelconque $[t_1, t_2]$

C.2 Franchissement en croissant ou *upcrossing*

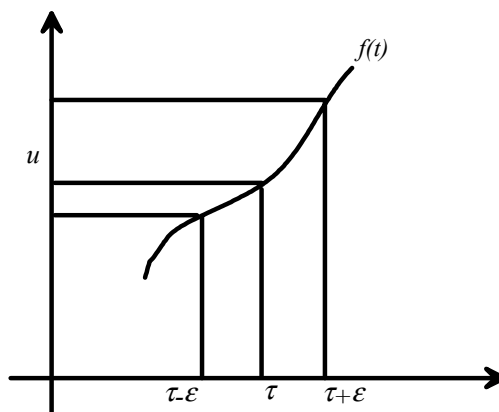
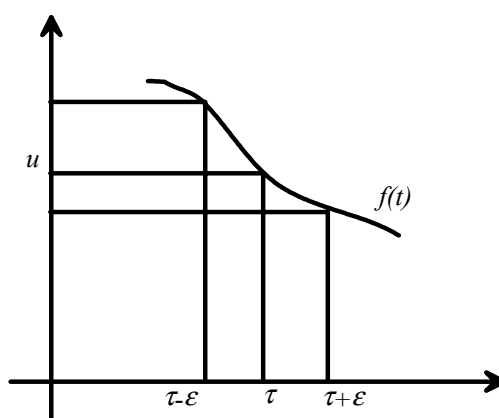
f a un franchissement en croissant de niveau u à τ (fig. C.1) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(t) \leq u$ sur $(\tau - \varepsilon, \tau)$, et $f(t) \geq u$ sur $(\tau, \tau + \varepsilon)$. Tant que $f \in G_u$, il doit y avoir des points sur $(\tau - \varepsilon, \tau)$ où $f(t) < u$ et des points sur $(\tau, \tau + \varepsilon)$ où $f(t) > u$. Notons U_u le nombre de franchissements en croissant par f sur $[0, 1]$.

C.3 Franchissement en décroissant ou *downcrossing*

f a un franchissement en décroissant de niveau u à τ (fig. C.2) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(t) \geq u$ sur $(\tau - \varepsilon, \tau)$, et $f(t) \leq u$ sur $(\tau, \tau + \varepsilon)$. Tant que $f \in G_u$, il doit y avoir des points sur $(\tau - \varepsilon, \tau)$ où $f(t) \geq u$ et des points sur $(\tau, \tau + \varepsilon)$ où $f(t) \leq u$. Notons D_u le nombre de franchissements en décroissant par f sur $[0, 1]$.

C.4 Franchissement ou *crossing*

f a un franchissement de niveau u à τ si à chaque voisinage de τ , il y a des points τ_1 et τ_2 tels que $[f(\tau_1) - u][f(\tau_2) - u] < 0$. Notons C_u le nombre de franchissements par f sur $[0, 1]$. De façon claire $C_u \geq U_u + D_u$. En effet, il peut y avoir des franchissements qui ne sont ni en croissant ni en décroissant (voir l'exemple d'illustration ci-après).

FIG. C.1: franchissement en croissant de niveau u .FIG. C.2: franchissement en décroissant de niveau u .

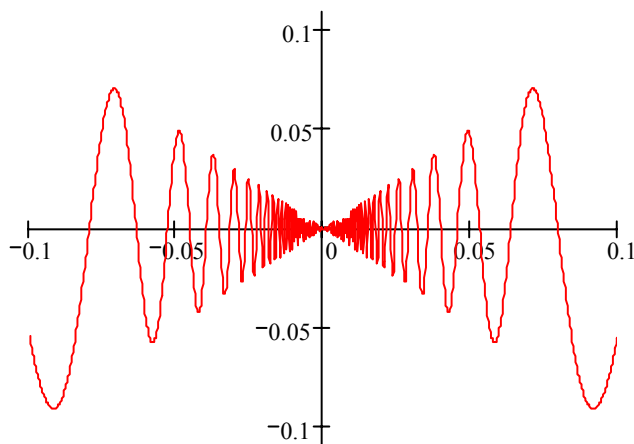
Exemple : montrons que la fonction $t \sin(1/t)$ présente un franchissement en 0 de niveau 0 qui n'est ni un franchissement en croissant, ni un franchissement en décroissant.

Au voisinage de 0 la fonction a l'allure donnée par la figure C.3.

La fonction $f(t)$ est paire et oscille autour de la valeur centrale $f = 0$. Quel que soit le voisinage $[-\varepsilon, 0[\cup]0, \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) que l'on prenne, on arrive toujours à trouver des points $\tau_1 < 0$ et $\tau_2 > 0$ tels que l'on ait $[f(\tau_1) - 0][f(\tau_2) - 0] < 0$ car on a toujours une infinité d'oscillations entre $-\varepsilon$ et 0 non inclus et entre 0 non inclus et ε .

Par contre, on ne peut pas trouver $\varepsilon > 0$ tel que $f(t) \leq u$ sur $(\tau - \varepsilon, \tau)$, et $f(t) \geq u$ sur $(\tau, \tau + \varepsilon)$. De même, on n'arrive pas à trouver $\varepsilon > 0$ tel que $f(t) \geq u$ sur $(\tau - \varepsilon, \tau)$, et $f(t) \leq u$ sur $(\tau, \tau + \varepsilon)$. Ceci est dû à l'infinité d'oscillations que présente la fonction autour de 0.

On peut donc conclure que la fonction f présente un franchissement en 0 qui n'est ni un franchissement en croissant, ni un franchissement en décroissant.

FIG. C.3: tracé de $t \sin(1/t)$ au voisinage de 0.

C.5 En fiabilité dépendante du temps : franchissement en sortant ou *outcrossing*

En fiabilité dépendante du temps, on considère une fonction de performance $G(t, X(t, \omega))$. On cherche l'instant où la fonction passe d'une valeur positive à une valeur négative ou nulle. Ceci peut s'apparenter à un franchissement en décroissant.

Si on peut mettre la fonction de performance sous la forme $G(t, X(t, \omega)) = R - S(t, \omega)$ où R est déterministe et $S(t, \omega)$ un processus, le franchissement considéré dans ce cas est celui du seuil R par $S(t, \omega)$. Cela revient à dire qu'on cherche l'instant où $S(t, \omega) \geq R$. Dans ce cas, on cherche le franchissement en croissant de $S(t, \omega)$.

Quel que soit le point de vue, il est clair que ce qui est recherché est le passage du domaine de sûreté \mathcal{D}_s (défini par $G(t, X(t, \omega)) > 0$ quelle que soit l'expression de G) dans le domaine de défaillance \mathcal{D}_f (de même $G(t, X(t, \omega)) \leq 0$). Ceci est en fait un franchissement sortant du domaine de sûreté. C'est pourquoi on utilise toujours le terme de franchissement sans davantage de précision car il n'y a aucune ambiguïté possible.

Une fois la notion de franchissement définie, il convient de définir N : comme indiqué en annexe B, N est le nombre de franchissements d'un seuil donné sur un intervalle de temps considéré. Soit $[t_1, t_2]$ cet intervalle de temps. Le nombre de franchissements sur $[t_1, t_2]$ de seuil R est noté $N(t_1, t_2, R)$. Lorsque la valeur du seuil est évidente, on peut omettre de la préciser. Le nombre de franchissements sur $[t_1, t_2]$ est alors noté $N(t_1, t_2)$.

Bibliographie

[CraLea 67] H. Cramer et M. Leadbetter - *Stationary and Related Stochastic Processes*. Wiley, New-York, 1967.

Annexe D

Un point sur les fonctions d'autocorrélation, de covariance et de covariance normalisée

D.1 Définitions

D.1.1 Fonction d'autocorrélation

Soit $R_{XX}(t_1, t_2)$, la fonction d'autocorrélation du processus $X(t, \omega)$. Elle est définie par :

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[X(t_1, \omega) X(t_2, \omega)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

D.1.2 Fonction de covariance

Soit $X(t, \omega)$ un processus de moyenne $m_X(t)$. Sa fonction de covariance $C_{XX}(t_1, t_2)$ est définie par :

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[[X(t_1, \omega) - m_X(t_1)] [X(t_2, \omega) - m_X(t_2)]] \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) - m_X(t_1) \cdot m_X(t_2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_X(t_1)) (x_2 - m_X(t_2)) f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

D.1.3 Fonction de covariance normalisée

Soit $X(t, \omega)$ un processus de moyenne $m_X(t)$ et d'écart-type $\sigma_X(t)$. Sa fonction de covariance normalisée $\rho_{XX}(t_1, t_2)$ est définie par :

$$\begin{aligned} \rho_{XX}(t_1, t_2) &= \frac{C_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)} \\ &= \frac{R_{XX}(t_1, t_2) - m_X(t_1) \cdot m_X(t_2)}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)} \end{aligned}$$

D.2 Quelques propriétés

D.2.1 Pour la fonction d'autocorrélation

La fonction est symétrique :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2, t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

A $t_1 = t_2 = t_0$, t_0 étant l'instant origine, elle est égale à :

$$R_{XX}(t_0, t_0) = \sigma_X^2(t_0) + m_X^2(t_0)$$

Par ailleurs, $R_{XX}^2(t_1, t_2) \leq R_{XX}(t_1, t_1) \cdot R_{XX}(t_2, t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in T$

D.2.2 Pour la fonction de covariance

Elle peut permettre de déterminer l'écart-type du processus. En effet :

$$C_{XX}(t_0, t_0) = \sigma_X^2(t_0)$$

Pour un processus $X(t, \omega)$ de moyenne nulle à tout instant, on a l'égalité évidente

$$R_{XX}(t_1, t_2) = C_{XX}(t_1, t_2)$$

C'est pourquoi, dans beaucoup d'ouvrages, pour un processus de moyenne nulle, on parle aussi bien de fonction d'autocorrélation que de covariance.

D.2.3 Pour la fonction de covariance normalisée

On peut démontrer les propriétés suivantes :

- $|\rho_{XX}(t_1, t_2)| \leq 1 \quad \forall t_1, t_2 \in T$
- à $t_1 = t_2 = t \quad \rho_{XX}(t, t) = 1$

Pour un processus $X(t, \omega)$ de moyenne nulle et d'écart-type constant et égal à l'unité (processus normalisé), on a l'égalité suivante :

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2)$$

D.3 Exemple

A travers un exemple simple, nous illustrons le calcul des différentes quantités définies ci-dessus.

Considérons un processus aléatoire défini par $X(t, \omega) = D(\omega) \sqrt{t}$ pour $t \geq 0$ où $D(\omega)$ est une variable aléatoire de loi Gaussienne, de moyenne a et d'écart-type b .

- Calcul de la moyenne

$$E[X(t, \omega)] = E[D\sqrt{t}] = E[D] \sqrt{t} = a\sqrt{t}$$

pour le calcul, \sqrt{t} est considéré comme une constante.

$$m_X = a\sqrt{t}$$

– Calcul de l'écart-type

$$\text{var}[X(t, \omega)] = \text{var}[D\sqrt{t}] = \text{var}[D] t = b^2 t$$

d'où

$$\sigma_X = b\sqrt{t}$$

pour le calcul, \sqrt{t} est considéré comme une constante.

– Calcul de la fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation est définie par :

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1, \omega) \cdot X(t_2, \omega)] = E[D^2] \sqrt{t_1 t_2}$$

Il nous reste à déterminer $E[D^2]$. Pour cela nous utilisons le calcul de la variance de D .

$$\begin{aligned} \text{var}[D] &= E[(D - a)^2] \\ &= E[D^2 - 2aD + a^2] \\ &= E[D^2] - 2aE[D] + a^2 \\ b^2 &= E[D^2] - a^2 \end{aligned}$$

d'où

$$E[D^2] = b^2 + a^2$$

La fonction d'autocorrélation est donc :

$$R(t_1, t_2) = (b^2 + a^2) \sqrt{t_1 t_2}$$

– Calcul de la fonction de covariance

La fonction de covariance est définie par :

$$C_{XX}(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m_X(t_1) \cdot m_X(t_2)$$

On vient de voir que :

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= (b^2 + a^2) \sqrt{t_1 t_2} \\ m_X &= a\sqrt{t} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= (b^2 + a^2) \sqrt{t_1 t_2} - (a\sqrt{t_1}) \cdot (a\sqrt{t_2}) \\ &= (b^2 + a^2) \sqrt{t_1 t_2} - a^2 \sqrt{t_1 t_2} \\ &= b^2 \cdot \sqrt{t_1 t_2} \end{aligned}$$

16 Un point sur les fonctions d'autocorrélation, de covariance et de covariance normalisée

– Calcul de la fonction de covariance normalisée

Elle est définie par :

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{C_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)}$$

On vient de voir que :

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= b^2 \sqrt{t_1 t_2} \\ \sigma_X(t) &= b\sqrt{t} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \rho_{XX}(t_1, t_2) &= \frac{b^2 \sqrt{t_1 t_2}}{b\sqrt{t_1} \cdot b\sqrt{t_2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

On observe que le processus ainsi défini a une fonction de covariance normalisée constante et égale à 1. Il s'ensuit que ce processus n'est pas mélangeant.

Annexe E

Définitions diverses

E.1 Fonction d'ordre o

Définition [Bre 94] : une fonction $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est d'ordre o de la fonction $g : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque $x \rightarrow x_0$ pour $x \in \mathbb{M}$ si, pour toutes les constantes $K > 0$, il existe un voisinage U_K de x_0 tel que :

$$|f(x)| \leq K |g(x)| \text{ pour tout } x \in U_K \cap \mathbb{M}$$

On écrit symboliquement :

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$$

E.2 Inégalité de Jensen

Définition [Rao 73] : L'inégalité de Jensen est :

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$$

si $g(\cdot)$ est une fonction convexe.

E.3 Difféomorphisme

Définition [Mon 97] : soient U (resp. V) un ouvert de E (resp. F), $\phi : U \rightarrow V$. On dit que ϕ est un C^1 difféomorphisme (de U dans V) ssi :

$$\begin{cases} \phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } U \\ \phi \text{ est bijective} \\ \phi^{-1} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } V \end{cases}$$

E.4 Concept de mesure

Définition¹ : ce concept mathématique généralise la notion de longueur, d'aire ou de volume. Il considère l'application μ qui associe à tout sous-ensemble E d'un espace F un nombre positif $\mu(E)$ appelé mesure de E , représentant sa taille et satisfaisant l'hypothèse d'additivité suivante : si (E_i) est une famille d'ensemble deux à deux disjoints alors :

$$\mu(\cup E_i) = \sum_i \mu(E_i)$$

¹http://www.sciences-en-ligne.com/Frames_dictionary.asp

E.5 Théorème de Fubini

Définition² : une intégrale double généralisée peut se calculer par la décomposition de deux intégrales simples permutables. Si une fonction de deux variables f est intégrable sur un domaine D de \mathbb{R}^2 , alors on a :

$$\int \int_D f(x, y) d\sigma = \int \left[\int f(x, y) dy \right] dx = \int \left[\int f(x, y) dx \right] dy$$

²vient de http://www.sciences-en-ligne.com/Frames_dictionary.asp

Bibliographie

- [Bre 94] K. Breitung - *Asymptotic Approximations for probability Integrals*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Mon 97] J.M. Monier - *Cours : analyse tome 4 - Cours et 500 exercices corrigés, 2ième année MP PSI PC PT*. Dunot, 1997.
- [Rao 73] C.R. Rao - *Linear Statistical Inference and its applications*. John Wiley and Sons, New-York, 2nd edition, pp 57-58, 1973.