

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Institut für Baustatik und Konstruktion

Übungsunterlagen Baustatik III
Aufgabenstellungen und Lösungen

Sommersemester 1992

Vorwort

Diese Abhandlung beinhaltet Übungsaufgaben und deren Lösungen, welche im Rahmen der Lehrveranstaltung Baustatik III den Studenten angeboten wurden. Der in den Vorlesungen behandelte Stoff wurde in den vier Hausübungen weiter verarbeitet. Diese Übungen sollen die Anwendung der Plastizitätstheorie im Ingenieur-Alltag erläutern.

Im Sommersemester 1992 wurden besonders behandelt: elasto-plastische Analyse einfacher Systeme, elasto-plastische Torsion, Stahlbeton-Interaktionsdiagramme, Anwendung der Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie bei Balken, Rahmen und Platten.

Zürich, im Juli 1992

N. Mojsilovic

Inhaltsverzeichnis

Übung 1	
<i>Elastisch-plastisches Verhalten eines Systems</i>	3
Übung 2	
<i>Elasto-plastische St. Venantsche Torsion eines Querschnittes</i>	
<i>Momenten-Normalkraft-Interaktion eines Stahlbetonquerschnittes</i>	12
Übung 3	
<i>Traglast eines einfachen Systems</i>	
<i>Traglast eines Rahmens</i>	19
Übung 4	
<i>Oberer Grenzwert der Traglast eines unendlichen Plattenstreifens</i>	28
Anhang	
<i>Elastische St. Venantsche Torsion eines Vollquerschnittes</i>	33

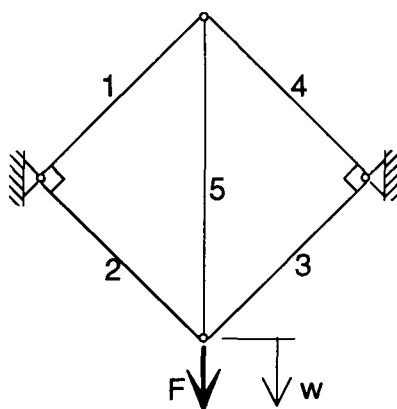
BAUSTATIK III
(20 - 116)

Übung 1

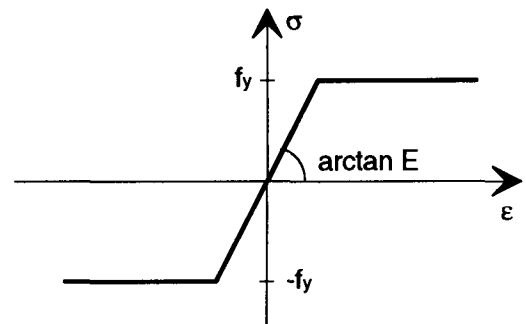
Aufgabe

Elastisch-plastisches Verhalten eines Systems

- Gegeben: - System
 - Stabquerschnitt: alle Stäbe haben die Querschnittsfläche **A**
 - Materialverhalten: linear elastisch - ideal plastisch
 - keine Stabilitätsprobleme



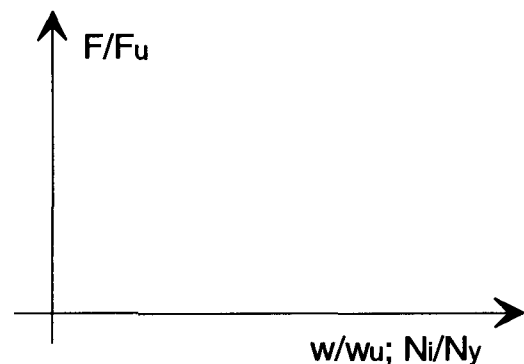
Stäbe 1 bis 4 bilden ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 1.



Gesucht:

a) Das System ist anfänglich eigenspannungsfrei. Die Last F wird monoton bis zum Kollapszustand des Systems gesteigert ($F=F_u$). Bestimme die Fließlast F_y und die Traglast F_u . Man erstelle:

- Normiertes $F - N$ Diagramm (Achsen F/F_u und N_i/N_y , wobei N_y die Stabfließkraft ist).
- Normiertes $F - w$ Diagramm (Achsen F/F_u und w/w_u , wobei w_u die Durchbiegung bei Erreichen der Traglast ist).



b) Entlastung. System wird vollständig entlastet ($F=0$). Ermittle den zugehörigen Eigenspannungszustand und kontrolliere das Gleichgewicht.

c) Vorspannung. Stab 5 wurde zu lang geliefert, bei der Montage ist eine Stabdruckkraft $N_5 = -0.5 N_y$ erforderlich. Das System wird bis zum Kollapszustand belastet. Man finde dieselben Diagramme wie unter a) und vergleiche sie mit denjenigen von a).

Lösung zur Übung 1

Das gegebene System mit allen Bezeichnungen ist im Bild 1. dargestellt.

Konvention für die Stabkräfte:

Zugkräfte sind positiv.

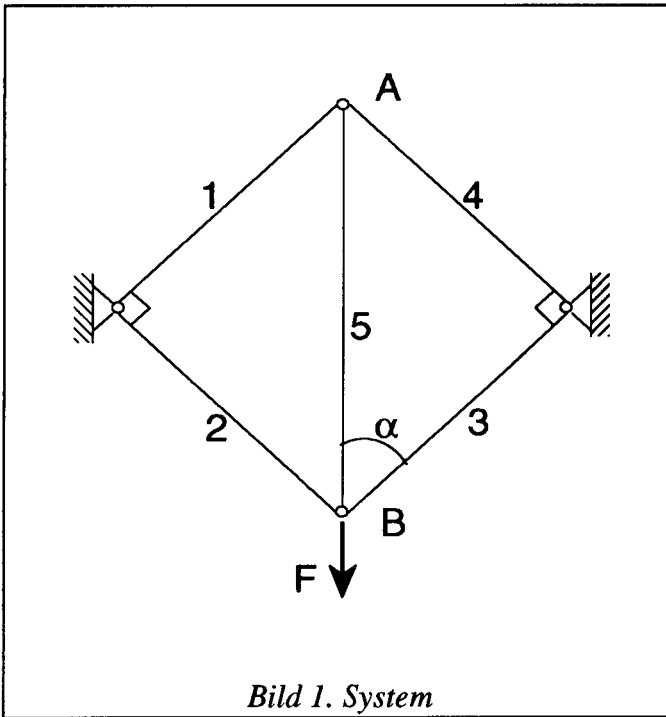


Bild 1. System

Aus der Fachwerkgeometrie sind die Stablängen ersichtlich:

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$$

$$l_5 = l\sqrt{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

a) *Elastisches Verhalten*

Aus den Gleichgewichtsbedingungen in den Knoten A und B gewinnen wir folgende vier Beziehungen zwischen den Stabkräften N_i , $i=1,2,3,4,5$ und der Belastung F :

$$N_4 - N_1 = 0$$

$$N_3 - N_2 = 0$$

$$2N_2 \cos \alpha + N_5 - F = 0$$

$$2N_1 \cos \alpha + N_5 = 0$$

Ferner können wir schreiben:

$$2(-N_1 + N_2) \cos \alpha - F = 0.$$

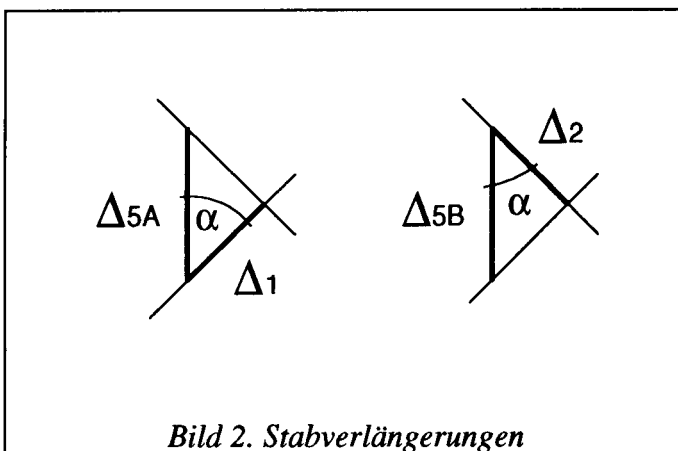


Bild 2. Stabverlängerungen

Eine weitere Gleichung liefert uns die Kompatibilität (Bild 2.). Sie lässt sich so beschreiben:

$$\Delta_{5B} = \frac{\Delta_2}{\cos \alpha} \quad \Delta_{5A} = \frac{\Delta_1}{\cos \alpha}$$

$$\Delta_5 = \Delta_{5B} - \Delta_{5A} = \frac{1}{\cos \alpha} (\Delta_2 - \Delta_1)$$

dass heißt:

$$\frac{N_5}{EA} \frac{l}{\cos \alpha} = \frac{l}{EA} (N_2 + N_1) \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Daraus erhalten wir die folgende Beziehung:

$$N_5 = N_2 + N_1.$$

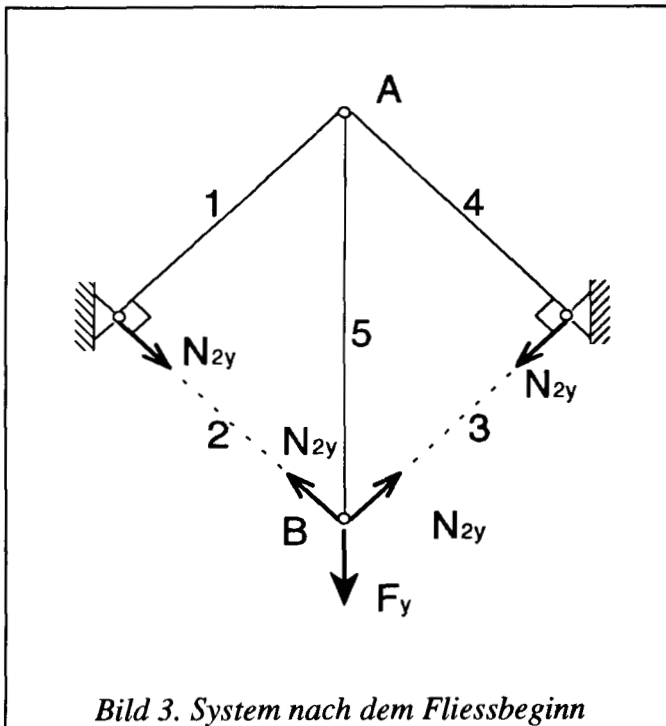
Da nun die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist, sind wir in der Lage, die elastischen Stabkräfte zu ermitteln.

$$N_1 = -\frac{F}{4 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)} \qquad N_2 = \frac{F}{2(1 + \cos \alpha)} \left(1 + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right)$$

$$N_5 = \frac{F}{2(1 + \cos \alpha)}$$

FlieSSLast: die FlieSSLast wird zuerst im Stab 2 bzw. 3 erreicht (FlieSSLen im Zug)

$$N_y = A f_y = N_2 = \frac{F_y}{2(1 + \cos \alpha)} \left(1 + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right)$$



Daraus folgt die FlieSSLast

$$F_y = N_y \frac{4 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha + 1} = 2.00 N_y,$$

und sowohl die verbleibenden Stabkräfte (Bild 3) als auch die Verschiebung w des Knotens B

$$N_1 = -F_y \frac{1}{4 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)} = -N_y \frac{1}{2 \cos \alpha + 1} = -0.4142 N_y$$

$$N_5 = F_y \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} = N_y \frac{2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha + 1} = 0.5858 N_y$$

$$w_y = \frac{\Delta_2}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{N_y l}{EA} = 1.4142 \frac{N_y l}{EA}.$$

Traglast: Fachwerk wird weiter belastet bis zum Kollaps bzw. FlieSSLen des Stabes 5. Wir stellen die Gleichgewichtsbedingungen wie vorher auf und ermitteln so die Traglast F_u und die Kraft im Stab 1.

$$N_5 - 2N_y \cos \alpha - F_u = 0$$

$$N_5 - 2N_1 \cos \alpha = 0$$

$$N_5 = N_y = F_u - 2N_y \cos \alpha$$

$$F_u = N_y(1 + 2 \cos \alpha) = 2.4142N_y$$

$$N_1 = -\frac{N_5}{2 \cos \alpha} = -\frac{N_y}{2 \cos \alpha} = -0.7071N_y$$

$$\frac{F_y}{F_u} = \frac{N_y \frac{4 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha + 1}}{N_y (2 \cos \alpha + 1)} = \frac{4 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}{(1 + 2 \cos \alpha)^2} = 0.8284$$

Das Inkrement der Verschiebung w im Knoten B, verursacht durch die Kraftdifferenz $F_u - F_y$ kann wie folgt beschrieben werden:

$$\delta w = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{EA} \left(\frac{N_y}{2 \cos \alpha} - \frac{N_y}{1 + 2 \cos \alpha} \right) + \frac{(F_u - F_y)l}{EA} \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\delta w = \frac{N_y}{EA} \left[\frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{2 \cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} + \frac{1}{1 + 2 \cos \alpha} \sqrt{2} \right]$$

$$\delta w = \frac{N_y}{EA} \left[(0.4142 + 0.4142\sqrt{2}) \right] = \frac{N_y}{EA} \cdot 1$$

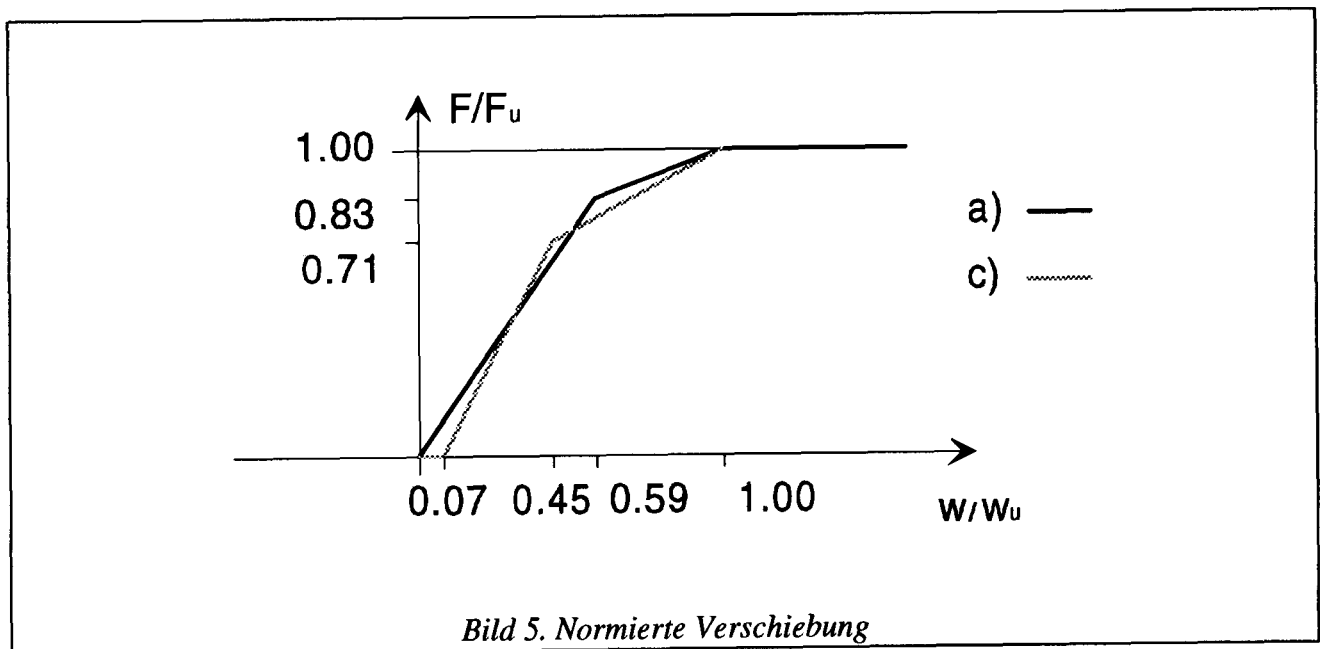
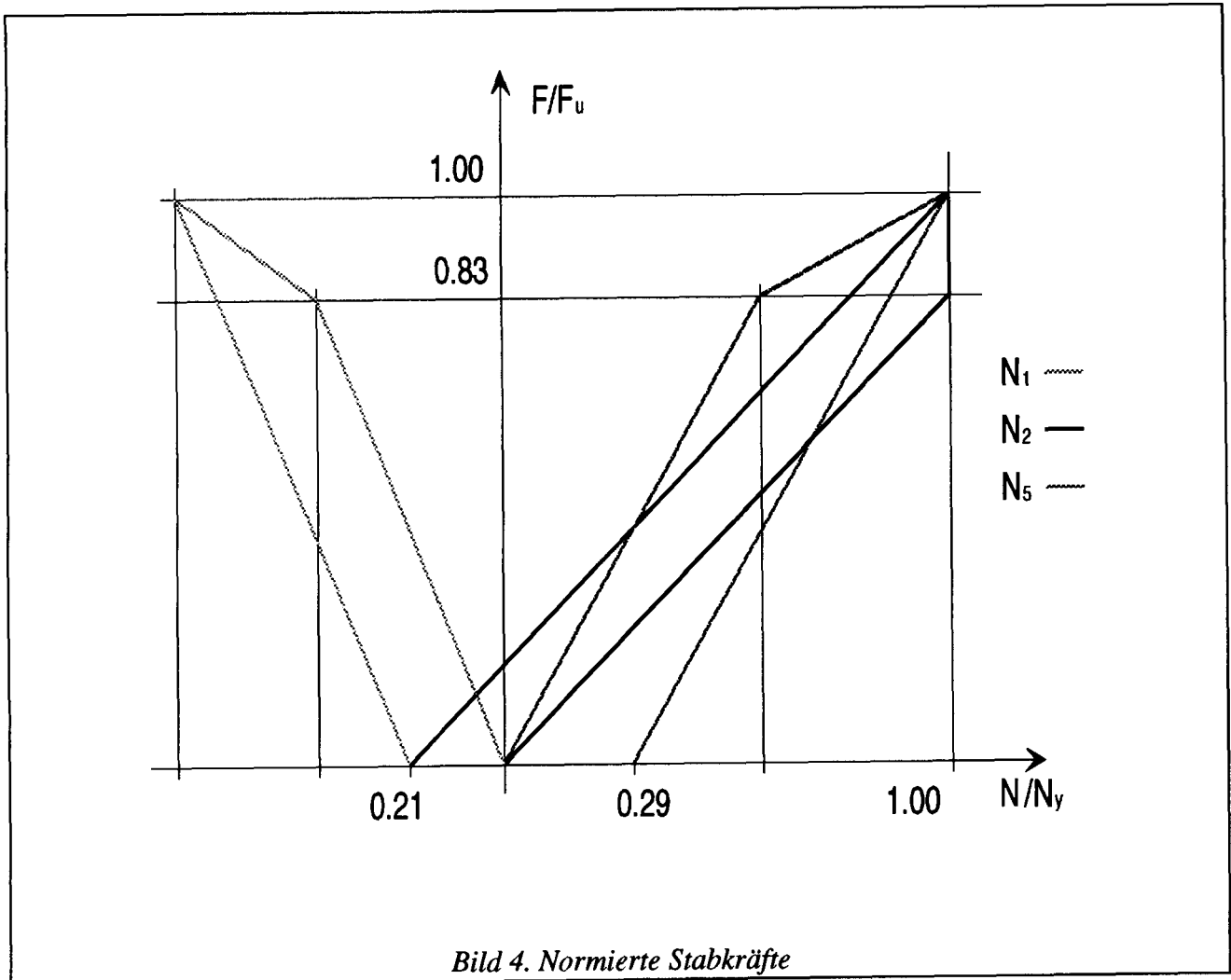
Ferner schreiben wir die totale Verschiebung w_u als

$$w_u = w_y + \delta w = \frac{N_y}{EA} \cdot (1.4142 + 1.00) = 2.4142 \frac{N_y}{EA} \cdot l$$

Es gilt dann

$$\frac{w_y}{w_u} = \frac{1.4142 \frac{N_y}{EA} \cdot l}{2.4142 \frac{N_y}{EA} \cdot l} = 0.5858$$

Normierte Stabkräfte und normierte Verschiebung sind in den Bildern 4. und 5. dargestellt.



b) Entlastung:

System wird entlastet. Die bleibenden Stabkräfte sind (siehe auch Bild 4):

$$N_{2r} = -\frac{N_y}{0.8284} + N_y = -0.2071N_y$$

$$N_{5r} = N_y \left(1 - \frac{0.5858}{0.8284} \right) = 0.2927N_y$$

$$N_{1r} = -N_y \left(0.7071 - \frac{0.4142}{0.8284} \right) = -0.2071N_y$$

Gleichgewicht ist erfüllt:

$$N_{1r} - N_{2r} = 0$$

$$2N_{1r} \cos \alpha - N_{5r} = 0$$

$$2N_{2r} \cos \alpha - N_{5r} = 0$$

c) Vorspannung:

Die Stabkräfte und die Verschiebung w_v infolge der Vorspannung finden wir aus der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen:

$$2N_{1v} \cos \alpha - N_{5v} = 0$$

$$2N_{2v} \cos \alpha - N_{5v} = 0$$

$$\frac{-N_{5v} + 0.5N_y}{EA} \frac{l}{2 \cos \alpha} = \frac{N_{1v}}{\cos \alpha} \frac{l}{EA}$$

Die Stabkräfte und die Verschiebung w_v sind:

$$N_{5v} = -\frac{N_y \cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)} = -0.2071N_y$$

$$N_{2v} = N_{1v} = \frac{0.5N_y}{2(1 + \cos \alpha)} = 0.1464N_y$$

$$w_v = \frac{\Delta_2}{\cos \alpha} = 0.2071 \frac{N_y l}{EA}$$

Belastung: Nach der Belastung ermitteln wir gemäss a) die benötigten Grössen:

$$N_1 = -\frac{F}{4 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)} + \frac{0.5N_y}{2(1 + \cos \alpha)}$$

$$N_2 = \frac{F}{2(1 + \cos \alpha)} \left(1 + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) + \frac{0.5N_y}{2(1 + \cos \alpha)}$$

$$N_5 = \frac{F}{2(1+\cos\alpha)} - \frac{N_y \cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$$

Flie遥beginn: das Flie遥en wird zuerst im Stab 2 bzw. 3 erreicht (Flie遥en im Zug)

$$N_y = Af_y = N_2 = \frac{F_y}{2(1+\cos\alpha)} \left(1 + \frac{1}{2\cos\alpha}\right) + \frac{0.5N_y}{2(1+\cos\alpha)}$$

$$F_y = N_y \frac{[4(1+\cos\alpha) - 1]\cos\alpha}{2\cos\alpha + 1} = 1.7071N_y$$

$$N_1 = -N_y \frac{(3+4\cos\alpha)\cos\alpha}{(1+2\cos\alpha)} \frac{1}{4\cos\alpha(1+\cos\alpha)} + \frac{N_y}{4(\cos\alpha+1)} =$$

$$= \frac{N_y}{4(1+\cos\alpha)} \left[1 - \frac{4\cos\alpha+3}{(2\cos\alpha+1)}\right]$$

$$N_1 = -N_y \frac{1}{2(1+2\cos\alpha)} = -0.2071N_y$$

$$N_5 = \frac{F_y}{2(1+\cos\alpha)} - \frac{N_y \cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)} = N_y \left[\frac{(3+4\cos\alpha)\cos\alpha}{(2\cos\alpha+1)} - \cos\alpha \right]$$

$$N_5 = N_y \frac{\cos\alpha}{(1+2\cos\alpha)} = 0.2929N_y$$

$$w_y = \frac{\Delta_2}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} \frac{N_y l}{EA} = 1.4142 \frac{N_y l}{EA}$$

Traglast: Fachwerk wird weiter belastet bis zum Kollaps bzw. Flie遥en des Stabes 5. Wir ermitteln die Traglast F_u und die Kraft im Stab 1:

$$N_5 = N_y = F_u - 2N_y \cos\alpha$$

$$F_u = N_y(1+2\cos\alpha)$$

$$N_1 = -\frac{N_5}{2\cos\alpha} = -\frac{N_y}{2\cos\alpha} = -0.7071N_y$$

$$\frac{F_y}{F_u} = \frac{N_y \frac{(4\cos\alpha+3)\cos\alpha}{2\cos\alpha+1}}{N_y(1+2\cos\alpha)} = \frac{(4\cos\alpha+3)\cos\alpha}{(1+2\cos\alpha)^2} = 0.7071$$

Normierte Stabkräfte und normierte Verschiebung sind in den Bildern 6. und 5. dargestellt.

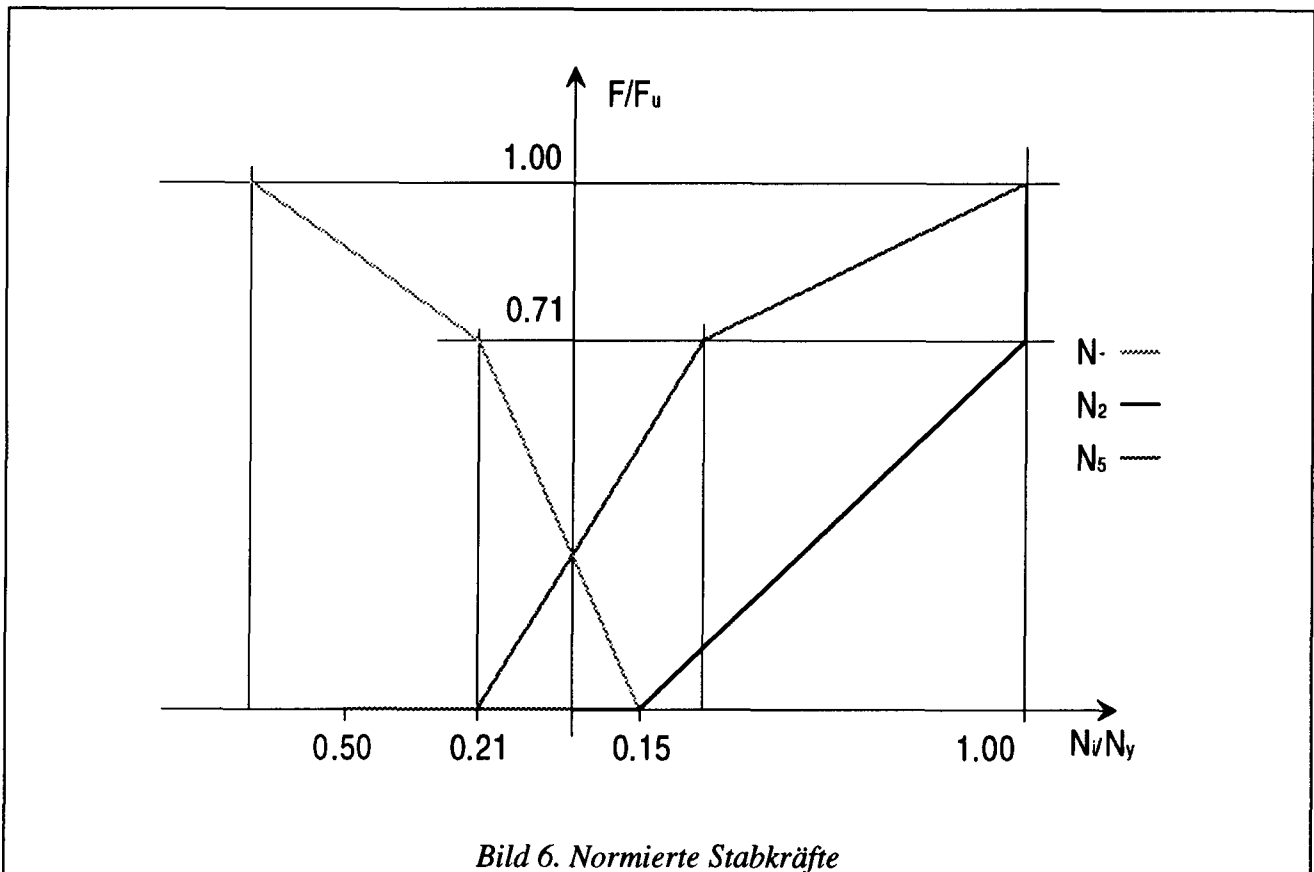


Bild 6. Normierte Stabkräfte

Das Inkrement der Verschiebung w im Knoten B, verursacht durch die Kraftdifferenz $F_u - F_y$, kann wie folgt beschrieben werden:

$$\delta w = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{N_y l}{EA} \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} - \frac{1}{2(1+2 \cos \alpha)} \right) + \frac{N_y l \sqrt{2}}{EA}$$

$$\delta w = \frac{N_y l \sqrt{2}}{EA} \left[\frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} + \frac{1 + \cos \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} \right]$$

$$\delta w = \frac{N_y l}{EA} \left| \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \right| = 1.7071 \frac{N_y l}{EA}$$

Ferner schreiben wir die totale Verschiebung w_u als

$$w_u = w_y + \delta w = \frac{N_y l}{EA} (1.4142 + 1.7071) = 3.1213 \frac{N_y l}{EA}$$

$$\frac{w_v}{w_u} = \frac{0.2071 \frac{N_y l}{EA}}{3.1213 \frac{N_y l}{EA}} = 0.0664 \quad \frac{w_y}{w_u} = \frac{1.4142 \frac{N_y l}{EA}}{3.1213 \frac{N_y l}{EA}} = 0.4531.$$

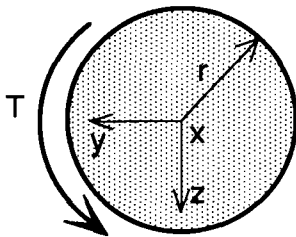
BAUSTATIK III
(20 - 116)

Übung 2

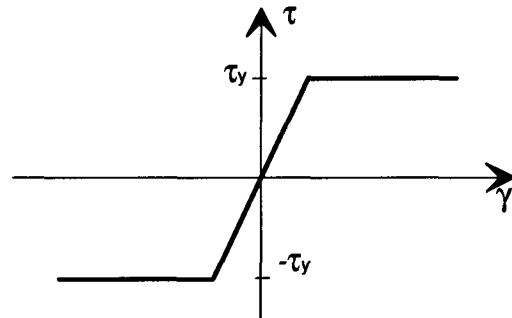
Aufgabe 1

Elasto-plastische St. Venantsche Torsion eines Querschnittes

- Gegeben: - Kreisförmiger Stahlquerschnitt (Radius r)
 - Fließbedingung von v. Mises
 - Materialverhalten: linear elastisch - ideal plastisch

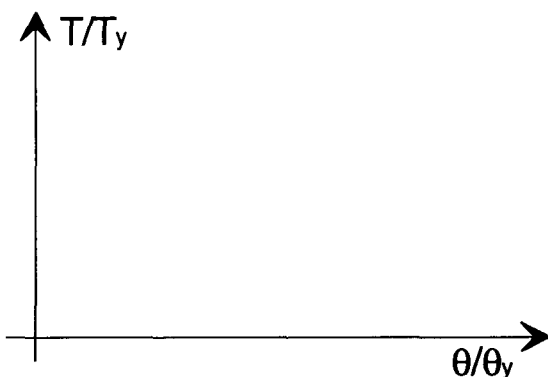


Fließbedingung
von v. Mises:
 $\tau_{zx}^2 + \tau_{yx}^2 = k^2 = \tau_y^2$



Gesucht:

Der Querschnitt ist am Anfang eigenspannungsfrei und wird nun monoton belastet. Ermittle die Beziehung zwischen dem Torsionsmoment und dem spezifischen Drehwinkel und stelle sie in untenstehendem Diagramm dar.

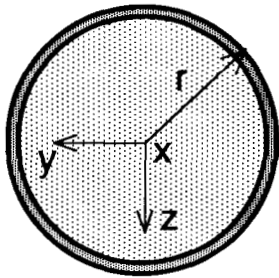


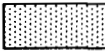
T_y - Fließmoment
 θ_y - entsprechender
 spezifischer Drehwinkel


Aufgabe 2

Momenten-Normalkraft-Interaktion eines Stahlbetonquerschnittes

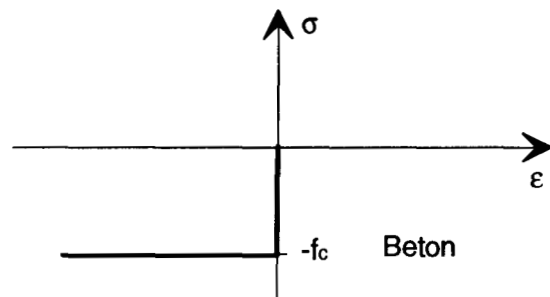
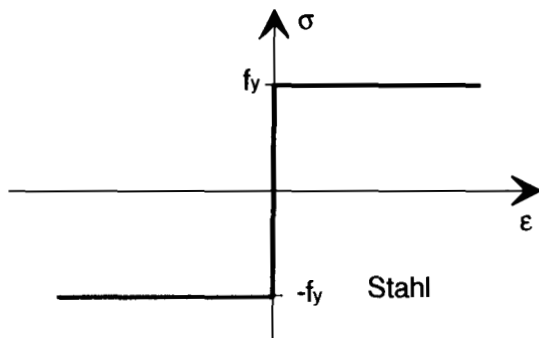
Gegeben: - Kreisförmiger Stahlbetonquerschnitt (Radius r)
 - Materialverhalten: starr-ideal plastisch



Beton: A_c, f_c 

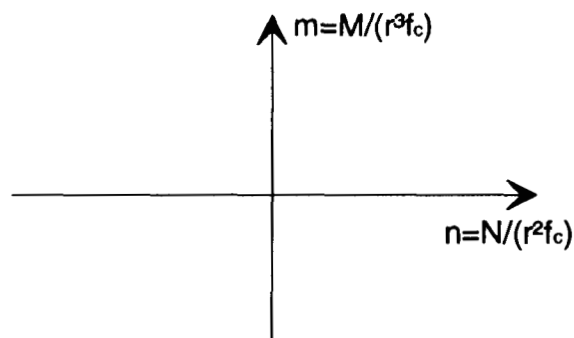
Stahl: A_s, f_y 

Betonüberdeckung $d \rightarrow 0$
 $\mu = A_s / (r^2 \pi)$ $\omega = \mu f_y / f_c = 0.50$



Gesucht:

Finde die Momenten-Normalkraft-Interaktion des Querschnittes und stelle sie in untenstehendem Diagramm dar.



Lösung zur Übung 2

Aufgabe 1

Infolge äussere Belastung T entstehen im Querschnitt zum Radius ρ tangential Schubspannungen τ (Bild. 1.). Deren Intensität ist von der Grösse ρ abhängig. Sie verlaufen linear proportional zu ρ im elastischen Bereich. Im Bereich wo Fliesen aufgetreten sind die tangential Schubspannungen gleich τ_y . Dieser Zusammenhang ist im Bild 2. dargestellt.

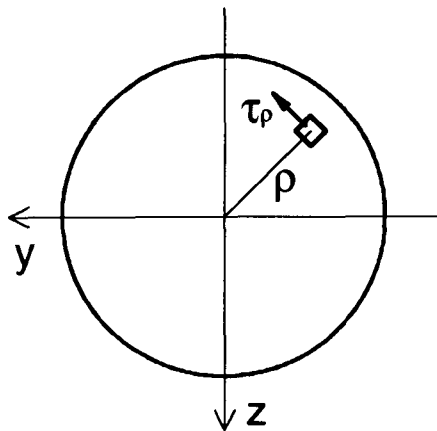


Bild 1. Tangentiale Schubspannungen

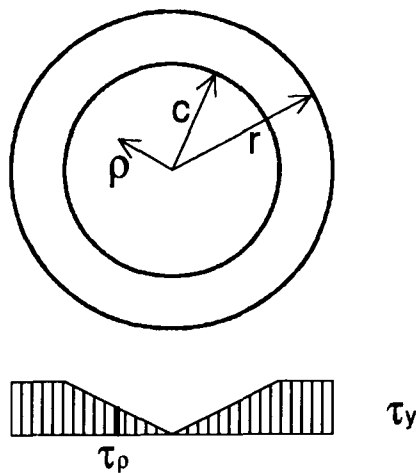


Bild 2. Spannungsverteilung

Nun, können wir die Schubspannungen τ_ρ folgenderweise beschreiben:

$$\tau_\rho = \begin{cases} \tau_y \frac{\rho}{c} & 0 \leq \rho \leq c \\ \tau_y & c \leq \rho \leq r \end{cases}$$

Der Wert c bezeichnet den Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich. Das Torsionsmoment muss gleich dem Integral der Schubspannungen über die Querschnittsfläche sein.

$$T = \int_F \tau_\rho \rho dF = 2\pi \int_0^r \tau_\rho \rho^2 d\rho$$

$$T = 2\pi \left[\int_0^c \tau_y \rho^2 \frac{\rho}{c} d\rho + \int_c^r \tau_y \rho^2 d\rho \right] = 2\pi \frac{\tau_y}{c} \left[\int_0^c \rho^3 d\rho + c \int_c^r \rho^2 d\rho \right]$$

$$T = 2\pi \frac{\tau_y}{c} \left(\frac{c^4}{4} + c \frac{r}{3} - \frac{c^4}{3} \right) = \frac{4}{3} \frac{r^3 \pi \tau_y}{2} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{c}{r} \right)^3 \right]$$

Setzen wir nun c gleich r , d.h. betrachten wir den Fließbeginn. In diesem Zustand ist T gleich dem Fließmoment T_y . Als nächstens, lassen wir c zu Null streben. Auf diese Weise ermitteln wir Das Bruchmoment T_u (der ganze Querschnitt fließt). Theoretisch bleibt immer ein unendlich kleiner elastischer Kern.

$$c = r \Rightarrow T = \frac{r^3 \pi \tau_y}{2} = T_y$$

$$c \rightarrow 0 \Rightarrow T = \frac{4}{3} \frac{r^3 \pi \tau_y}{2} = \frac{4}{3} T_y = T_u$$

Den spezifischen Drehwinkel beim Fliesen und die entsprechende Schiebung können wir so schreiben:

$$\theta_y = \frac{T_y}{G I_0} = \frac{\tau_y}{G r} \quad \gamma_y = \theta_y r = \frac{\tau_y}{G}$$

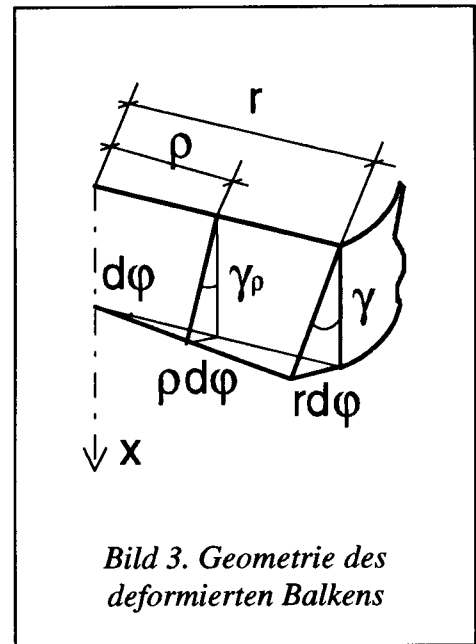
Aus der Geometrie des deformierten Balkens (siehe Bild. 3.) ist folgende Beziehung ersichtlich (Schiebungen sind linear verteilt entlang des Radius):

$$\frac{c}{r} = \frac{\gamma_y}{\gamma} = \frac{\theta_y}{\theta}$$

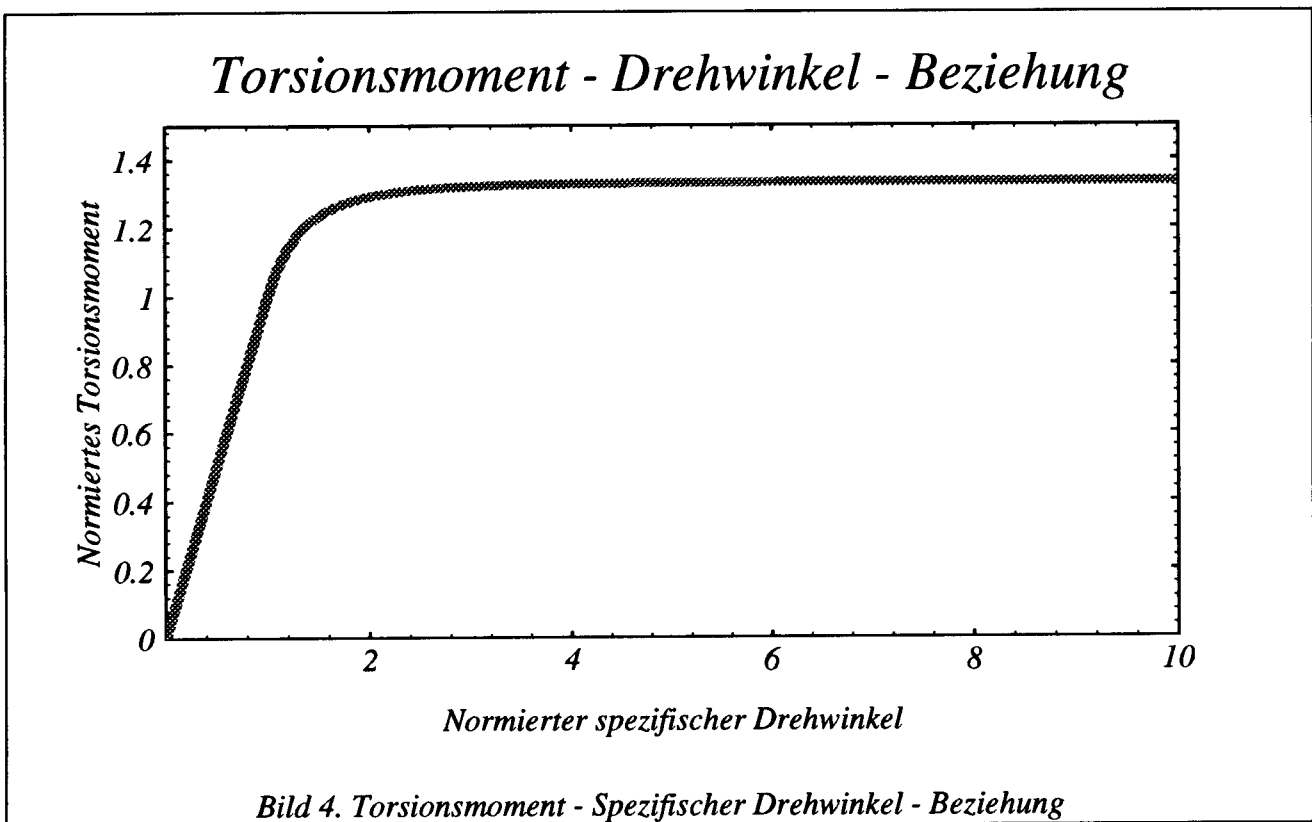
Nun lässt sich T als Funktion des spezifischen Drehwinkels beschreiben und ferner sind wir in der Lage, die gesuchte Beziehung zu ermitteln:

$$T = \frac{4}{3} \frac{r^3 \pi \tau_y}{2} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_y}{\theta} \right)^3 \right] = \frac{4}{3} T_y \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\theta}{\theta_y} \right)^{-3} \right]$$

$$\frac{T}{T_y} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\theta}{\theta_y} \right)^{-3} \right] & \theta \geq \theta_y \\ \frac{\theta}{\theta_y} & \theta \leq \theta_y \end{cases}$$

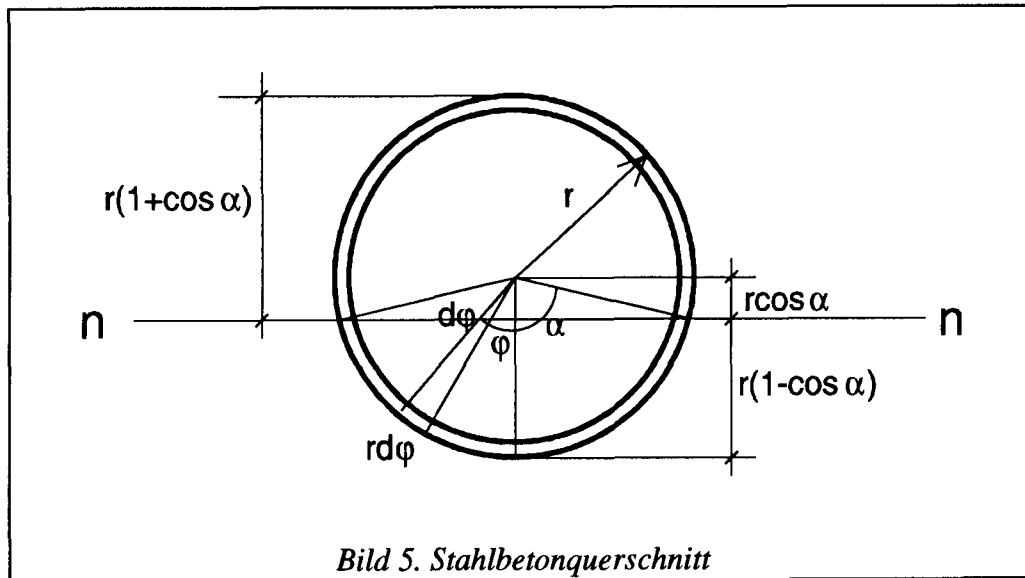


Diese Beziehung ist auch im Bild 4. dargestellt.



Aufgabe 2

Der gegebene Querschnitt mit den geometrischen Eigenschaften ist im Bild 5. dargestellt. Die Lage der neutralen Achse als auch die Betondruckzone sind durch Parameter - Winkel α bestimmt.



$$\mu = \frac{A_s}{r^2 \pi} \quad \omega = \mu \frac{f_y}{f_c}$$

Stahl

Aus dem Bild sind die Ausdrücke für Normalkraft und Biegemoment im Stahl ersichtlich:

$$N_s = \mu r^2 (\pi - 2\alpha) f_y = r^2 \omega f_c (\pi - 2\alpha)$$

$$M_s = 2 \int_0^\alpha r^2 \omega f_c r \cos \varphi d\varphi = 2r^3 \omega f_c \int_0^\alpha \cos \varphi d\varphi$$

$$M_s = \sin \varphi \Big|_0^\alpha 2r^3 \omega f_c = 2r^3 \omega f_c \sin \alpha$$

Nun führen wir die normierten Werte n_s und m_s ein:

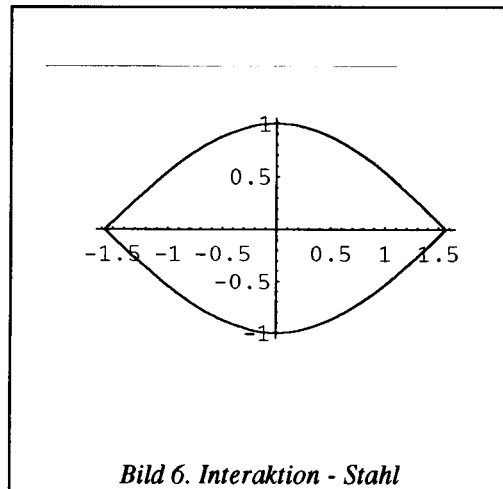
$$n_s = \frac{N_s}{r^2 f_c} = \omega (\pi - 2\alpha)$$

$$m_s = \frac{M_s}{r^3 f_c} = 2\omega \sin \alpha$$

Von den parametrisch definierten Ausdrücken für n_s und m_s (Parameter α) können wir Momenten - Normalkraft - Interaktion sowohl analytisch als auch grafisch herleiten (Bild 6.). Bild zeigt Interaktion für $\omega=0.50$.

$$m_s = 2\omega \sin\left[\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{n_s}{\omega}\right)\right]$$

$$n_s = \omega\left(\pi - 2 \arcsin\frac{m_s}{2\omega}\right)$$



Beton

Auf die selbe Art und Weise finden wir die Interaktion für Beton (siehe auch Bild 7.).

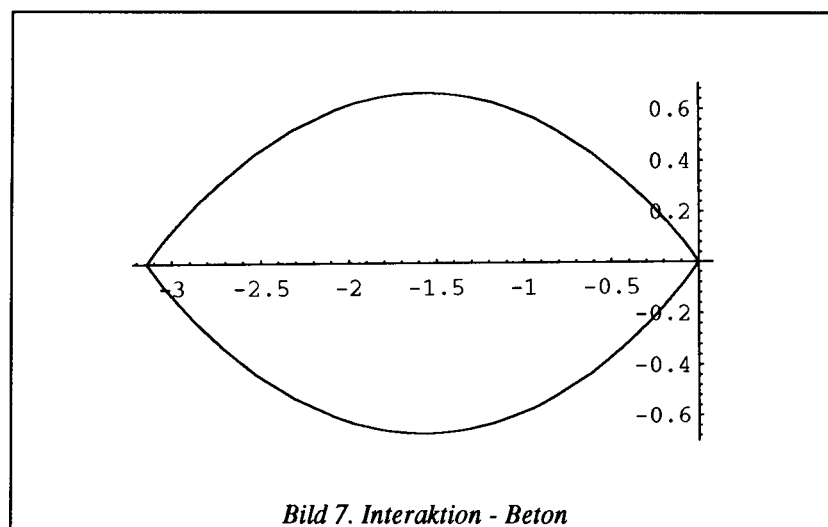
$$N_c = -\frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)f_c$$

$$M_c = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)f_c \frac{8r^3 \sin^3 \alpha}{12 \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)}$$

$$M_c = f_c \frac{8r^3 \sin^3 \alpha}{12} = \frac{2}{3}r^3 f_c \sin^3 \alpha$$

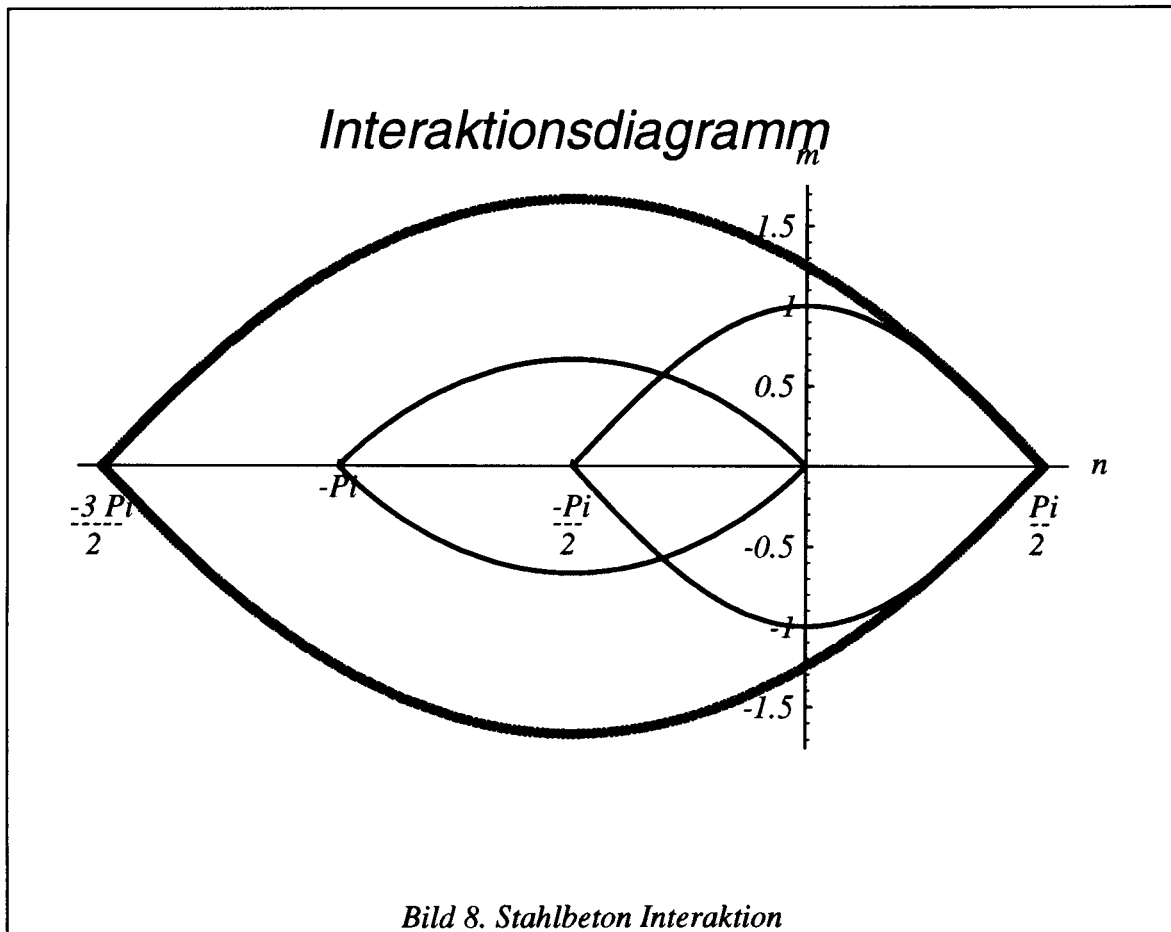
$$n_c = \frac{N_c}{r^2 f_c} = -\alpha + \sin \alpha \cos \alpha$$

$$m_c = \frac{M_c}{r^3 f_c} = \frac{2}{3} \sin^3 \alpha$$



$$n_c = -\arcsin \sqrt{\frac{3}{2} m_c} + \sqrt{\frac{3}{2} m_c} \left[1 - \left(\frac{3}{2} m_c \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Die gesamte Interaktion für Stahlbetonquerschnitte gewinnen wir als lineare Kombination (Summe) der Interaktionen für beide Stoffe. Sie ist für $\omega=0.50$ im Bild 8. dargestellt.



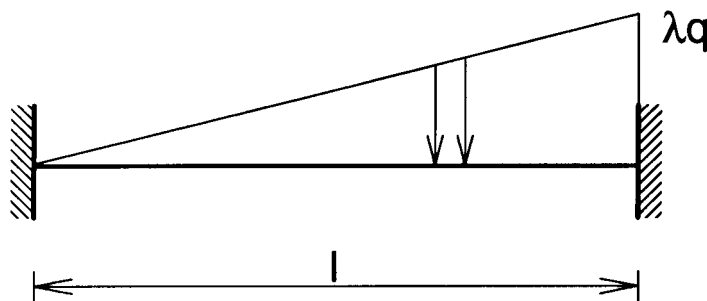
BAUSTATIK III
(20 - 116)

Übung 3

Aufgabe 1

Traglast eines einfachen Systems

- Gegeben: - System
- Stabquerschnitt: plastischer Widerstand M_u
 - Momenten-Krümmungs-Beziehung: starr-ideal plastisch
 - keine Stabilitätsprobleme



Gesucht: Finde den Traglastfaktor λ_u .

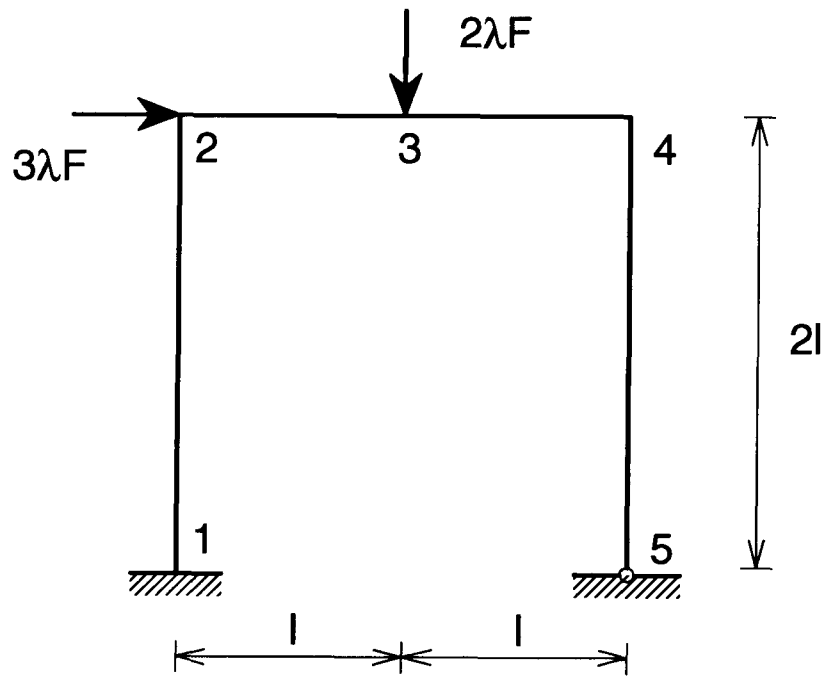
Aufgabe 2

Traglast eines Rahmens

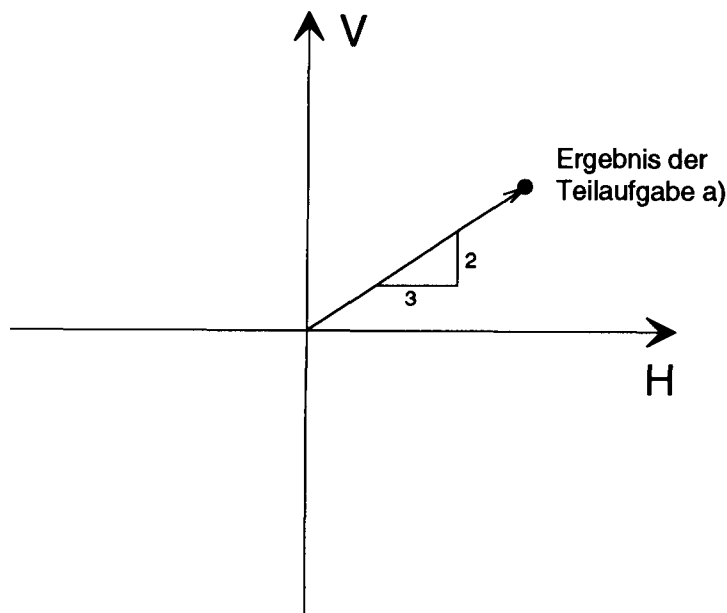
- Gegeben: - System
- Querschnitt: alle Stäbe haben den plastischen Widerstand M_u
 - Momenten-Krümmungs-Beziehung: starr-ideal plastisch
 - keine Stabilitätsprobleme

Gesucht:

- a) Finde eine Grenze für den Lastfaktor λ . Verwende die Methode der Ungleichungen. Ist der auf diese Weise gewonnene Lastfaktor eine obere oder untere Grenze des Lastfaktors? Zeichne den entsprechenden Mechanismus.



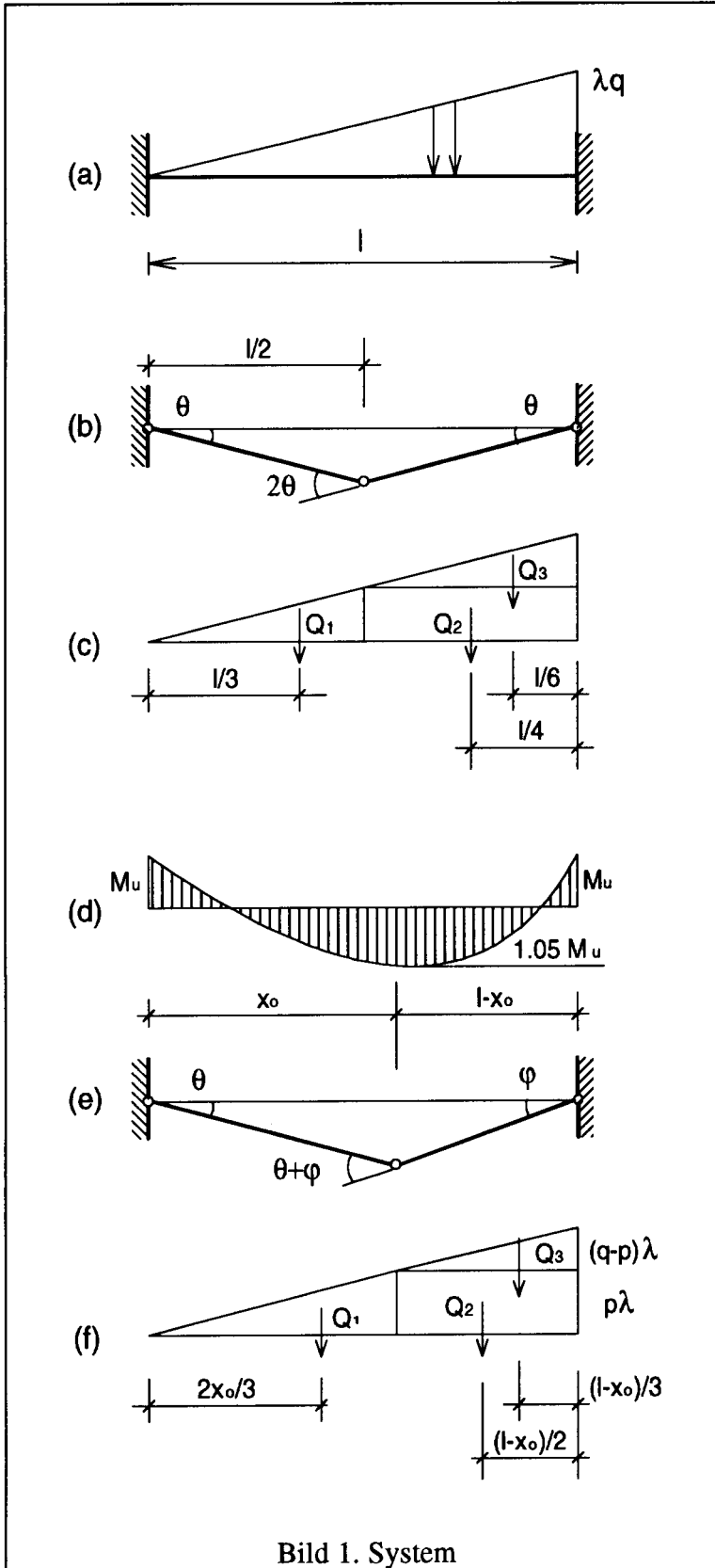
b) Nun lassen wir die Lasten unabhängig wirken, d.h. wir ersetzen die Beträge $3\lambda F$ und $2\lambda F$ durch die allgemeinen Parameter H und V .
 Finde das Interaktionsdiagramm für die zweiparametrische Belastung und stelle es in untenstehendem Diagramm dar.



Lösung zur Übung 3

Aufgabe 1

Das System mit der Belastung ist im Bild 1. (a) dargestellt.



Unsere erste Annahme sei, dass plastische Gelenke an den beiden Balkenenden und in der Mitte des Balkens auftreten werden. Die dabei entstehenden Gelenkrotationen sind im Bild 1. (b) dargestellt. Die Dissipation beträgt:

$$D = M_u \theta + 2M_u \theta + M_u \theta = 4M_u \theta$$

Die Leistung der äusseren Kräfte ist:

$$\begin{aligned} L &= Q_1 \frac{l}{3} \theta + Q_2 \frac{l}{4} \theta + Q_3 \frac{l}{6} \theta = \\ &= \theta \left(\frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{\lambda q l}{2} + \frac{1}{4} \frac{\lambda q l}{2} + \frac{1}{6} \frac{1}{2} \frac{\lambda q l}{2} \right) = \\ &= \theta \lambda q \frac{l}{4} \left(\frac{2+3+1}{12} \right) = \theta \lambda q \frac{l^2}{8} \end{aligned}$$

Weil die Dissipation der Leistung L gleich sein muss, bekommen wir:

$$D = L \Rightarrow 4M_u \theta = \frac{\lambda q l^2}{8} \theta$$

Nun haben wir eine obere Grenze des Lastfaktors:

$$\lambda = \frac{32M_u}{q l^2} \geq \lambda_u$$

Nach der Ermittlung des Lastfaktors ist es nötig zu kontrollieren, ob die Fließbedingung verletzt ist. Wir schreiben das Biegemoment in einem beliebigen Punkt x entlang der Balkenachse $M(x)$:

$$M(x) = -M_u + R_A x - \frac{x^3}{6l} \lambda q$$

Die Reaktion des linken Endes des Balkens R_A finden wir aus der Bedingung $M(l/2)=M_u$:

$$M(l/2) = M_u = -M_u + R_A \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^3 \frac{1}{6l} \lambda q \quad \Rightarrow R_A = \frac{4M_u}{l} + \frac{\lambda q l}{24}$$

Nun sieht der Ausdruck für das Moment so aus:

$$M(x) = -M_u + \left(\frac{4M_u}{l} + \frac{\lambda q l}{24}\right)x - \frac{x^3}{6l} \lambda q$$

Das maximale Moment befindet sich an der Stelle wo die Querkraft gleich Null ist:

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{4M_u}{l} + \frac{\lambda q l}{24} - \frac{x_0^2}{2l} \lambda q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Die Grösse dieses Momentes beträgt

$$M(x_0) = -M_u + \left(\frac{4M_u}{l} + \frac{\lambda q l}{24}\right) \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6l} \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^3 \lambda q = 1.05M_u > M_u$$

Weil die Fließbedingung verletzt ist, muss der Lastfaktor reduziert werden:

$$\lambda = 32 \frac{M_u}{q l^2} = 30.4 \frac{M_u}{q l^2} \leq \lambda_u \quad \text{d.h.} \quad 30.4 \frac{M_u}{q l^2} \leq \lambda_u \leq 32 \frac{M_u}{q l^2}.$$

Im zweiten Schritt nehmen wir an, dass das dritte plastische Gelenk gerade bei x_0 erscheint. Dann lauten die Dissipation und Leistung der äusseren Lasten:

$$D = M_u \theta + M_u (\theta + \psi) + M_u \psi = 2M_u (\theta + \psi)$$

$$\text{wobei} \quad \psi = \theta \frac{x_0}{l - x_0}$$

$$D = 2M_u \left(\theta + \theta \frac{x_0}{l - x_0} \right) = 2M_u \theta \frac{l}{l + x_0}$$

$$L = Q_1 \frac{2x_0}{3} \theta + Q_2 \frac{l - x_0}{2} \psi + Q_3 \frac{l - x_0}{3} \psi =$$

$$= \frac{x_0}{2} p \lambda \frac{2x_0}{3} \theta + p \lambda (l - x_0) \frac{l - x_0}{2} \frac{x_0}{(l - x_0)} \theta + (q - p) \lambda \frac{(l - x_0)}{2} \frac{l - x_0}{3} \frac{x_0}{(l - x_0)} \theta.$$

$$\text{wobei} \quad p = \frac{x_0}{l} q \quad \text{und} \quad q - p = q \left(\frac{l - x_0}{l} \right)$$

Weiter bekommen wir:

$$L = \lambda q \frac{x_0}{l} \theta \left(\frac{x_0^2}{3} + \frac{x_0 l}{2} - \frac{x_0^2}{2} + \frac{l^2}{6} - \frac{x_0 l}{3} + \frac{x_0^2}{6} \right) = \lambda q \frac{x_0}{6} (l + x_0) \theta$$

Eine neue obere Grenze ermitteln wir aus der Bedingung $D=L$, d.h.

$$2M_u \frac{l}{l-x_0} \theta = \lambda q \frac{x_0}{6} (l+x_0) \theta \Rightarrow \lambda = 12 \frac{M_u}{ql^2} \frac{l^3}{x_0(l^2-x_0^2)}$$

$$\text{mit } x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} \text{ ist } \lambda = 12 \frac{M_u}{ql^2} \frac{l^3}{\frac{l}{\sqrt{3}} \left(l^2 - \left(\frac{l}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)} = 18\sqrt{3} \frac{M_u}{ql^2} = 31.18 \frac{M_u}{ql^2}$$

Also

$$\lambda = 31.18 \frac{M_u}{ql^2} \geq \lambda_u$$

Aus den Bedingungen:

$$M(0) = -M_u \quad M(x_0) = M_u \quad M(l) = -M_u$$

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad R_A + R_B = \frac{\lambda ql}{2}$$

bekommen wir

$$\lambda = 31.18 \frac{M_u}{ql^2} \leq \lambda_u$$

Nach dem Verträglichkeitssatz ist dieser Wert der gesuchte Traglastfaktor.

Aufgabe 2

a) Lastfaktor λ

Der gegebene Rahmen mit einparametrischer Belastung, die durch den Faktor λ bestimmt ist, ist im Bild 1. dargestellt. Die Anzahl der unabhängigen Mechanismen ist $n=4-2=2$, wobei vier die Anzahl der kritischen Stellen ist in denen M_U erreicht werden kann. Die statische Unbestimmtheit beträgt zwei. Sowohl die unabhängigen Mechanismen I und II als auch der kombinierte Mechanismus III sind im Bild 1. gezeichnet.

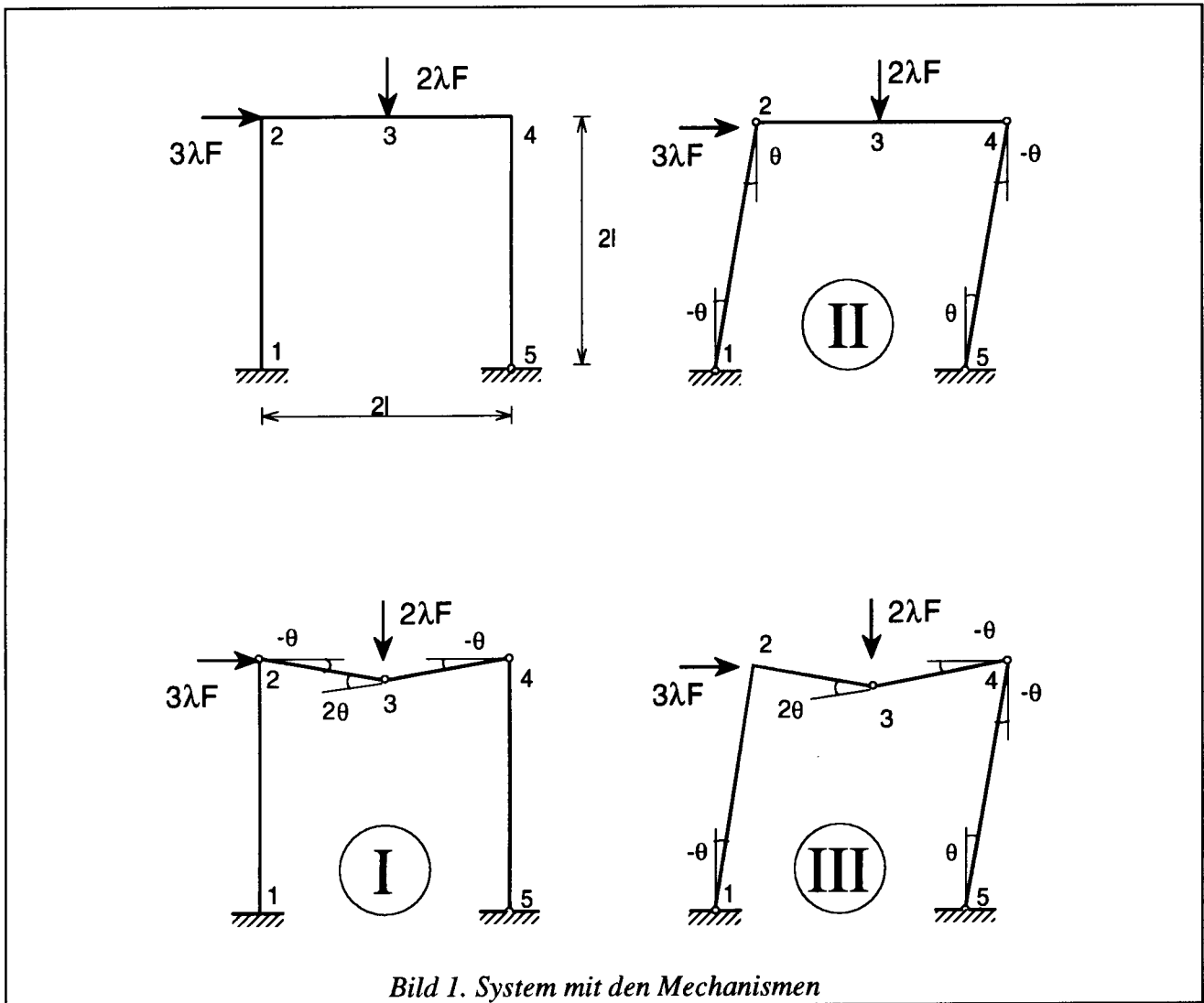
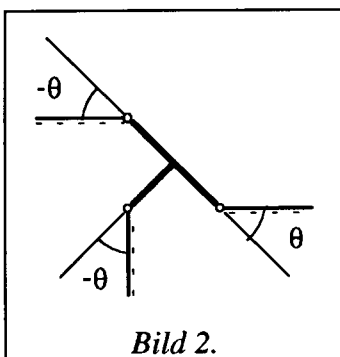


Bild 2. zeigt uns die angenommene Konvention für die Rotation θ : sie ist positiv, wenn das entsprechende Moment auf der vorher definierten Stabseite Zug erzeugt.



Der Balkenmechanismus I und Verschiebemechanismus II, sgn. Grundmechanismen, geben uns zwei Gleichgewichtsbedingungen:

$$-M_2\theta + 2M_3\theta - M_4\theta = 2\lambda F l \theta$$

$$-M_1\theta + M_2\theta - M_4\theta = 6\lambda F l \theta$$

oder, nach dem Eliminieren von θ :

$$-M_2 + 2M_3 - M_4 = 2\lambda F l$$

$$-M_1 + M_2 - M_4 = 6\lambda F l$$

Diese Gleichungen können wir durch normieren

$$m_i = \frac{M_i}{M_u} \quad \text{und} \quad f = \frac{\lambda F l}{M_u}$$

in anderer Form schreiben:

$$-m_2 + 2m_3 - m_4 = 2f$$

$$-m_1 + m_2 - m_4 = 6f$$

Weil die Fließbedingung nicht verletzt sein darf, müssen zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$|m_i| \leq 1.$$

Nun, eliminieren wir die Momente m_1 und m_3 aus dem anfänglichen Gleichungssystem:

$$m_3 = \frac{1}{2}(m_2 + m_4) + f$$

$$m_1 = m_2 - m_4 - 6f$$

Durch Kombinieren mit

$$-1 \leq m_i \leq 1$$

bekommen wie das erste Ungleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq m_1 \leq 1 \\ -1 \leq m_3 \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq m_2 - m_4 - 6f \leq 1 \\ -2 \leq m_2 + m_4 + 2f \leq 2 \end{array} \right\}$$

das heisst

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 + m_4 + 6f \leq m_2 \leq 1 + m_4 + 6f \\ -2 - m_4 - 2f \leq m_2 \leq 2 - m_4 - 2f \\ -1 \leq m_2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

Nun sind wir in der Lage, das Moment m_2 aus dem Ungleichungssystem zu eliminieren. Es muss immer die linke Seite der Ungleichung kleiner oder gleich der rechten Seite sein. Daraus folgt das neue Ungleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 + m_4 + 6f \leq 2 - m_4 - 2f \\ -2 - m_4 - 2f \leq 1 + m_4 + 6f \\ -1 \leq 1 + m_4 + 6f \\ -1 \leq 2 - m_4 - 2f \\ -2 - m_4 - 2f \leq 1 \\ -1 + m_4 + 6f \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2m_4 \leq 3 + 8f \\ -3 - 8f \leq 2m_4 \\ -2 - 6f \leq m_4 \\ m_4 \leq 3 - 2f \\ -3 - 2f \leq m_4 \\ m_4 \leq 2 - 6f \end{array} \right\}$$

und weiter

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 - 6f \leq m_4 \leq 2 - 6f \\ -3 - 2f \leq m_4 \leq 3 - 2f \\ -\frac{3}{2} - 4f \leq m_4 \leq \frac{3}{2} - 4f \\ -1 \leq m_4 \leq 1 \end{array} \right\}$$

Auf die selbe Art und Weise eliminieren wir m_4 und bekommen ein Ungleichungssystem das eine untere Grenze für den Traglastfaktor λ bestimmt:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 - 6f \leq \frac{3}{2} - 4f \\ -2 - 6f \leq 3 - 2f \\ -2 - 6f \leq 1 \\ -3 - 2f \leq 2 - 6f \\ -3 - 2f \leq \frac{3}{2} - 4f \\ -3 - 2f \leq 1 \\ -\frac{3}{2} - 4f \leq 2 - 6f \\ -\frac{3}{2} - 4f \leq 3 - 2f \\ -\frac{3}{2} - 4f \leq 1 \\ -1 \leq 2 - 6f \\ -1 \leq 3 - 2f \\ -1 \leq \frac{3}{2} - 4f \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{5}{4} \leq f \leq \frac{5}{4} \\ -\frac{9}{4} \leq f \leq \frac{9}{4} \\ \frac{7}{4} \leq f \leq \frac{7}{4} \\ -\frac{5}{8} \leq f \leq \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \\ -2 \leq f \leq 2 \end{array} \right\}$$

Die Lösung dieses Systems ist (maximaler Wert für f - unterer Grenzwertatz):

$$f = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{M_u}{2Fl}$$

Nun können wir auch das Moment m_4 bestimmen

$$\left\{ \begin{array}{l} -5 \leq m_4 \leq -1 \\ -4 \leq m_4 \leq 2 \\ -\frac{7}{2} \leq m_4 \leq -\frac{1}{2} \\ -1 \leq m_4 \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow m_4 = -1$$

und weiter die Grösse des m_2

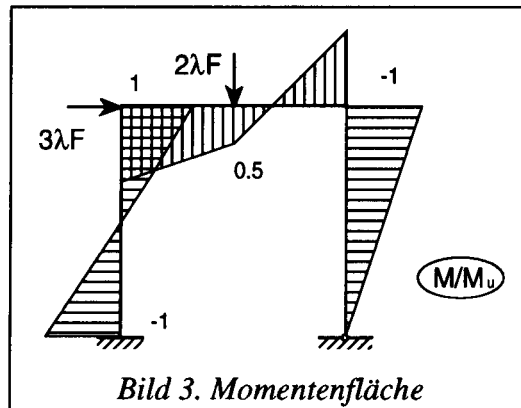
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq m_2 \leq 1 \\ -2 \leq m_2 \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow m_2 = 1.$$

Als nächstens ermitteln wir

$$m_3 = \frac{1}{2}(1-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

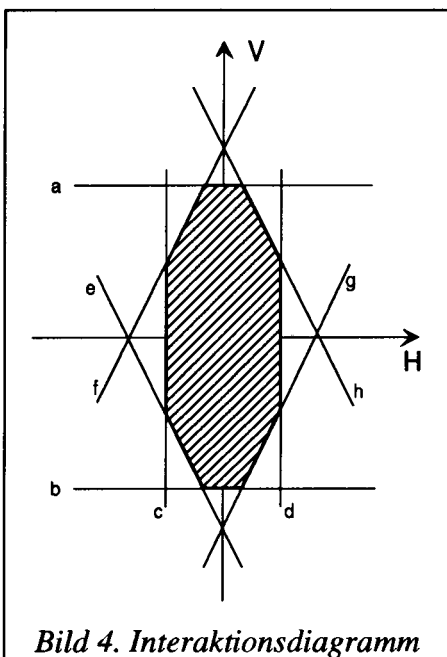
$$m_1 = 1 + 1 - 3 = -1$$

Die entsprechende Momentenfläche ist im Bild 3. dargestellt. Zugehöriger Mechanismus ist Mechanismus II (siehe Bild 1.).



b) Interaktion

Wenn wir alle drei Mechanismen betrachten und die Leistung der äusseren Kräfte gleich oder kleiner der Dissipation setzen, erhalten wir das folgende Ungleichungssystem:



$$\text{I } |V|\theta \leq 4M_u\theta \Rightarrow |V| \leq \frac{4M_u}{l}$$

$$\text{II } |H|\theta 2l \leq 3M_u\theta \Rightarrow |H| \leq \frac{3M_u}{2l}$$

$$\text{III } |H|\theta 2l + |V|\theta \leq 5M_u\theta \Rightarrow |H| + \frac{|V|}{2} \leq \frac{5M_u}{2l}$$

Die Lösung dieses Systems ist eine Fläche, die durch acht Geraden begrenzt ist. Diese Fläche nennen wir "aplastischer Bereich". Jeder Punkt innerhalb dieses Bereiches ist eine zulässige Kombination von H und V. Das Interaktionsdiagramm ist doppelsymmetrisch in bezug auf den Ursprung des Koordinatensystems. Das Diagramm ist im Bild 4. dargestellt.

BAUSTATIK III
(20 - 116)

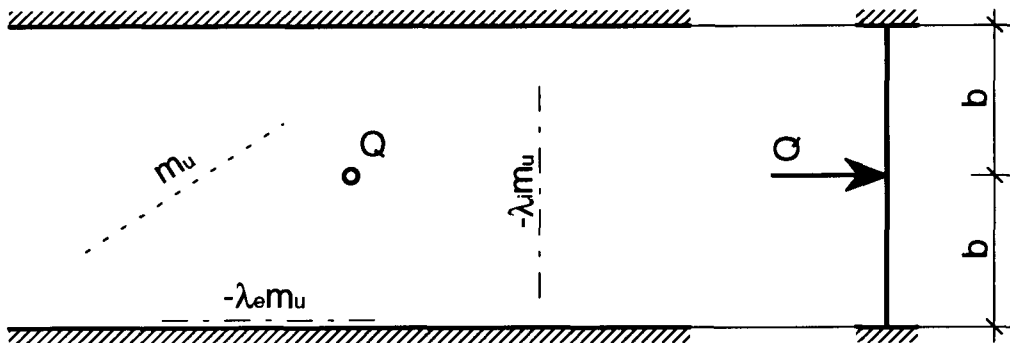
Übung 4

Aufgabe

Oberer Grenzwert der Traglast eines unendlichen Plattenstreifens

Gegeben: Unendlicher Plattenstreifen unter mittiger Einzellast Q . Die plastischen Widerstände seien konstant:

- innerhalb des Plattenstreifens m_u (positiv) und $\lambda_i m_u$ (negativ).
- an den Randeinspannungen $\lambda_e m_u$ (negativ).

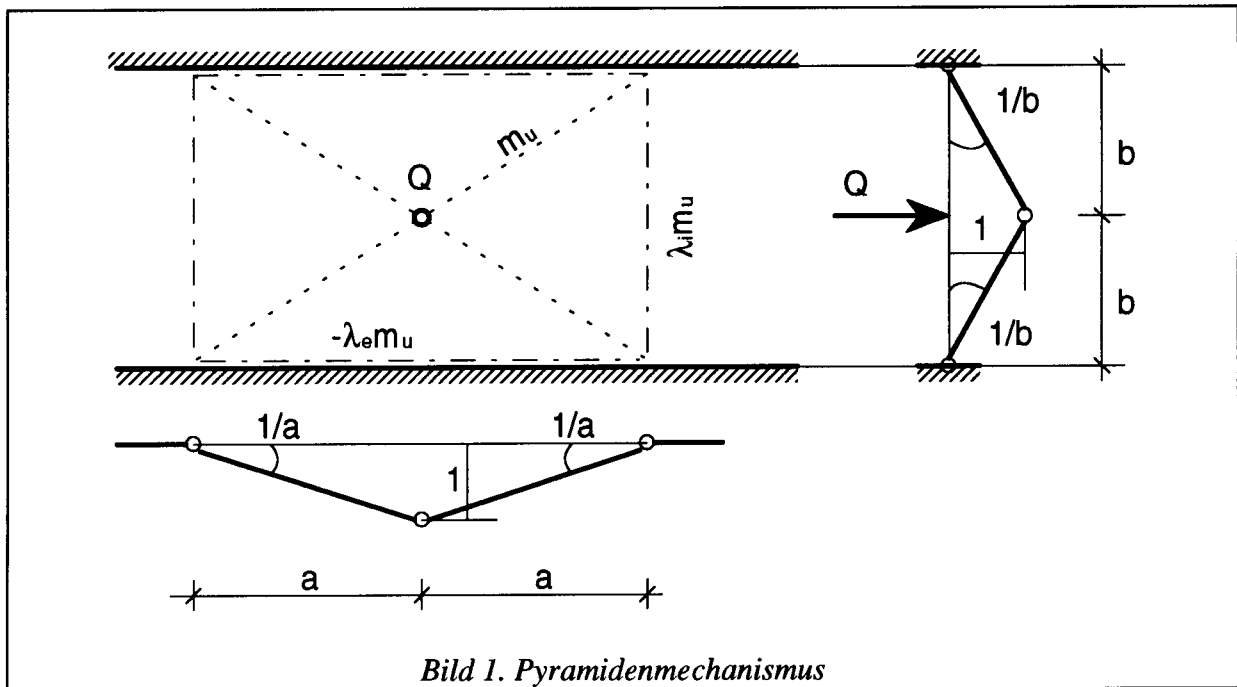


Gesucht: Finde einen oberen Grenzwert für die Traglast Q_u (betrachte einen Pyramiden- und einen Fächermechanismus). Untersuche anschliessend folgende Spezialfälle:

- a) $\lambda_e=0$ und $\lambda_i=0$ (Plattenstreifen einfach gelagert, nur untere Bewehrung)
- b) $\lambda_e=0$ und $\lambda_i=1$ (Plattenstreifen einfach gelagert, obere und untere Bewehrung)
- c) $\lambda_e=1$ und $\lambda_i=1$ (Plattenstreifen eingespannt, obere und untere Bewehrung)

Lösung zur Übung 4

a) Pyramidenmechanismus



Der Pyramidenmechanismus ist im Bild 1. dargestellt. Wenn wir dem Bild die allfälligen Rotationen und Verschiebungen des Mechanismus entnehmen, können wir Dissipation (innere Arbeit) der Momente D und Leistung (Arbeit) der äusseren Kräfte berechnen und sie gleichsetzen.

$$D = 2m_u \left(2a \frac{1}{b} + 2b \frac{1}{a} \right) + \lambda_0 m_u 2 \cdot 2a \frac{1}{b} + \lambda_1 m_u 2 \cdot 2b \frac{1}{a} =$$

$$2m_u \left[\left(\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \right) + \lambda_0 \frac{2a}{b} + \lambda_1 \frac{2b}{a} \right]$$

$$W = Q_u \cdot 1 \quad W = D$$

Als Ergebnis bekommen wir folgende Ausdruck für die Traglast Q_u :

$$Q_u = 2m_u \left[\left(\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \right) + \lambda_0 \frac{2a}{b} + \lambda_1 \frac{2b}{a} \right]$$

Weil wir die Traglast minimieren wollen, müssen wir obigen Ausdruck nach a (Länge des Pyramidenbasis) ableiten und anschliessend diese Ableitung zu Null setzen.

$$\frac{dQ_u}{da} = 2m_u \left[\left(\frac{2}{b} - \frac{2b}{a^2} \right) + \lambda_0 \frac{2}{b} - \lambda_1 \frac{2b}{a^2} \right] = 0$$

Die optimale Länge a beträgt:

$$(1+\lambda_b)\frac{2}{b} - (1+\lambda_l)\frac{2b}{a^2} = 0$$

$$a^2 = \frac{1+\lambda_l}{1+\lambda_b} b^2 \Rightarrow a = b \sqrt{\frac{1+\lambda_l}{1+\lambda_b}}$$

und daraus folgenden oberen Grenzwert der Traglast

$$Q_u = 2m_u \left[2 \sqrt{\frac{1+\lambda_l}{1+\lambda_b}} (1+\lambda_b) + \frac{2}{\sqrt{\frac{1+\lambda_l}{1+\lambda_b}}} (1+\lambda_l) \right]$$

und weiter

$$Q_u = 4m_u (\sqrt{1+\lambda_l} \sqrt{1+\lambda_b} + \sqrt{1+\lambda_b} \sqrt{1+\lambda_l}) = 8m_u \sqrt{1+\lambda_b} \sqrt{1+\lambda_l}.$$

Für die Spezialfälle bekommen wir entsprechend:

- a) $\lambda_b = \lambda_l = 0 \Rightarrow Q_u = 8m_u$
- b) $\lambda_b = 0 \quad \lambda_l = 1 \Rightarrow Q_u = 8\sqrt{2}m_u = 11.31m_u$
- c) $\lambda_b = 1 \quad \lambda_l = 1 \Rightarrow Q_u = 16m_u$

b) Fächermechanismus

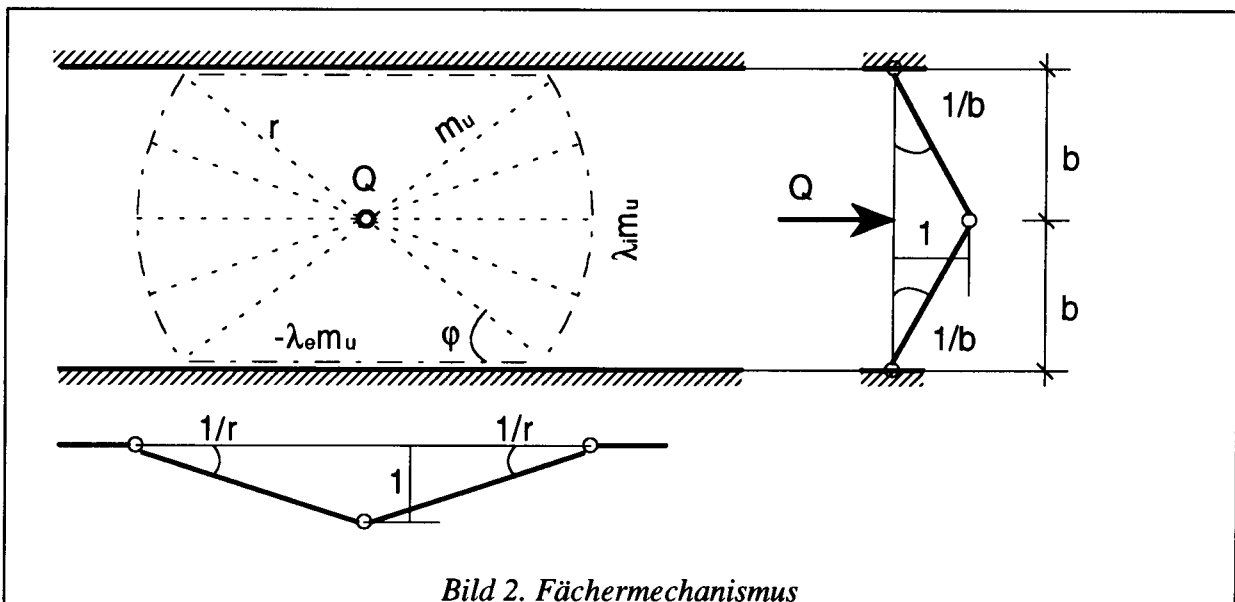
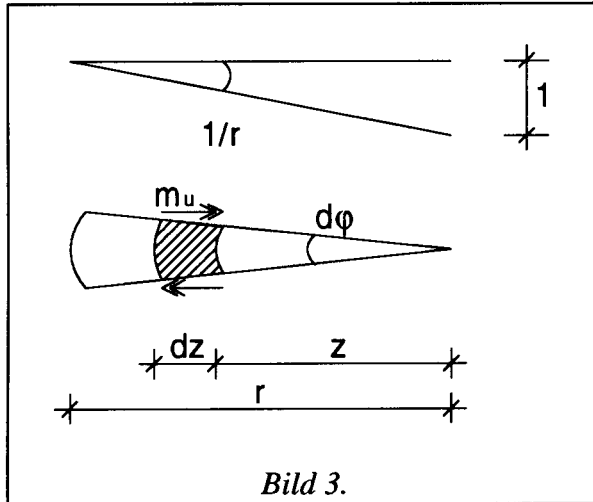


Bild 2. Fächermechanismus

Der Fächermechanismus ist im Bild 2. dargestellt. Auf die selbe Art und Weise wie beim Pyramidenmechanismus können wir Dissipation D und Leistung der äusseren Kräfte berechnen und sie gleichsetzen. Dazu müssen wir die Dissipation im Fächer definieren. Betrachten wir nun einen infinitesimalen Kreisabschnitt der durch Öffnungswinkel $d\varphi$ bestimmt ist (siehe Bild 3.). Aus dem Bild ist ersichtlich, dass die differentielle Dissipation gleich



$dD = m_u dz \frac{1}{zr} z d\varphi$ ist und dementsprechend die Dissipation im Fächer:

$$D = \int_0^\varphi \int_0^r \frac{m_u}{r} dz d\varphi = \frac{m_u}{r} r \varphi = m_u \varphi$$

Nach der Bestimmung der Dissipation im Fächer können wir die gesamte Dissipation ausrechnen und sie der Arbeit der äusseren Kräfte gleichsetzen.

$$D = m_u \left(2\varphi \cdot 2 + 2 \frac{1}{b} 2r \cos \varphi \right) + 2\lambda_1 m_u \int_0^\varphi \frac{1}{r} r d\varphi + 2 \frac{1}{b} \lambda_b m_u 2r \cos \varphi$$

$$D = 4m_u \left(\varphi + \frac{1}{b} b \cot \varphi \right) + 4\lambda_1 m_u \varphi + 2 \frac{1}{b} \lambda_b m_u 2b \cot \varphi$$

$$D = 4m_u \varphi (1 + \lambda_1) + 4m_u \cot \varphi (1 + \lambda_b)$$

$$W = Q_u \cdot 1 \quad W = D$$

$$Q_u = 4m_u \varphi (1 + \lambda_1) + 4m_u \cot \varphi (1 + \lambda_b)$$

Wie beim Pyramidenmechanismus leiten wir den Ausdruck für die Traglast nach dem Parameter - Öffnungswinkel φ ab. Durch Gleichsetzen dieser Ableitung zu Null bekommen wir den optimalen Winkel φ und eine weitere Grenze der Traglast Q_u .

$$\frac{dQ_u}{d\varphi} = 4m_u (1 + \lambda_1) - 4m_u (1 + \lambda_b) \frac{1}{\sin^2 \varphi} = 0$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 + \lambda_b}{1 + \lambda_1} \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{\frac{1 + \lambda_b}{1 + \lambda_1}}$$

$$Q_u = 4m_u \varphi (1 + \lambda_1) + 4m_u (1 + \lambda_2) \cot \left(\arcsin \sqrt{\frac{1 + \lambda_2}{1 + \lambda_1}} \right)$$

Für die Spezialfälle bekommen wir folgendes:

$$\text{a) } \lambda_2 = \lambda_1 = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Q_u = 4m_u \left(\frac{\pi}{2} + \cot \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi m_u = 6.28m_u$$

$$\text{b) } \lambda_2 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow Q_u = 4m_u \left(2 \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4} \right) = 4m_u \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = 10.28m_u$$

$$\text{c) } \lambda_2 = 1 \quad \lambda_1 = 1 \Rightarrow \sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Q_u = 4m_u 2 \left(\frac{\pi}{2} + \cot \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi m_u = 12.56m_u$$

Wenn wir nun die beiden Lösungen vergleichen sehen wir, dass der Fächermechanismus uns eine bessere obere Grenze für die Traglast gibt.

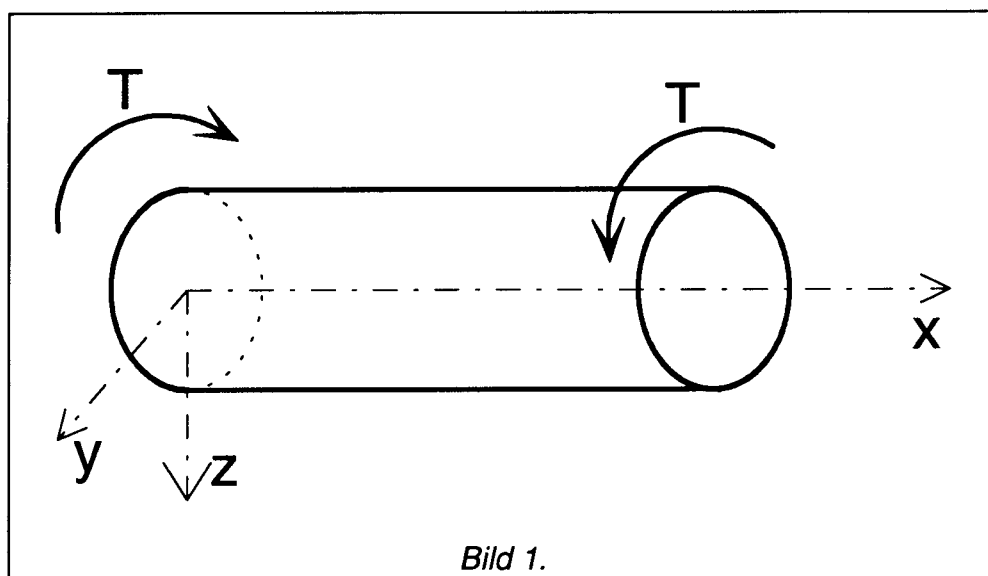
Anhang

Elastische St. Venantsche Torsion eines Vollquerschnittes

Unsere Aufgabe besteht in der Berechnung der Spannungen und Formänderungen in einem auf Torsion belasteten Stabe. Für Stäbe von beliebigem Querschnitt ist diese Aufgabe nicht so einfach wie zum Beispiel die der Biegung.

Der Stab sei prismatisch, d.h. er sei gerade und habe überall denselben Querschnitt. Welche Form der Querschnitt hat, ist gleichgültig.

Wenn wir die beiden Torsionsmomente T (siehe Bild 1.) an den Enden eines Stabes anbringen, drehen sich die Endquerschnitte relativ zueinander im Sinne dieser Momente. Die Stabachse bleibt dabei gerade, und alle Stabfasern winden sich in Form sehr steiler Schraublinien um diese Achse.



Nehmen wir an, dass alle Spannungen ausser τ_{xz} und τ_{xy} gleich Null sind. Ferner vernachlässigen wir die räumlichen Kräfte und schreiben die Naviersche Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Die ersten beiden Bedingungen zeigen uns, dass die Spannungsverteilung von der Koordinate x unabhängig ist.

Aus diesem Grund führen wir nun die sgn. Spannungsfunktion $\varphi(z,y)$ ein. Die dritte Gleichung wird erfüllt falls:

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{ist.} \quad (2)$$

Verzerrungen können wir wie folgt schreiben

$$\gamma_{xz} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (3)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$$

Hier ist G der Schubmodul.

Weil die Schiebungen γ_{xz} und γ_{xy} unabhängig von x sind, lauten die beiden Kompatibilitätsbedingungen, die nicht identisch erfüllt sind:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right)$$

Setzen wir nun (3) in (4) ein. So bekommen wir

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

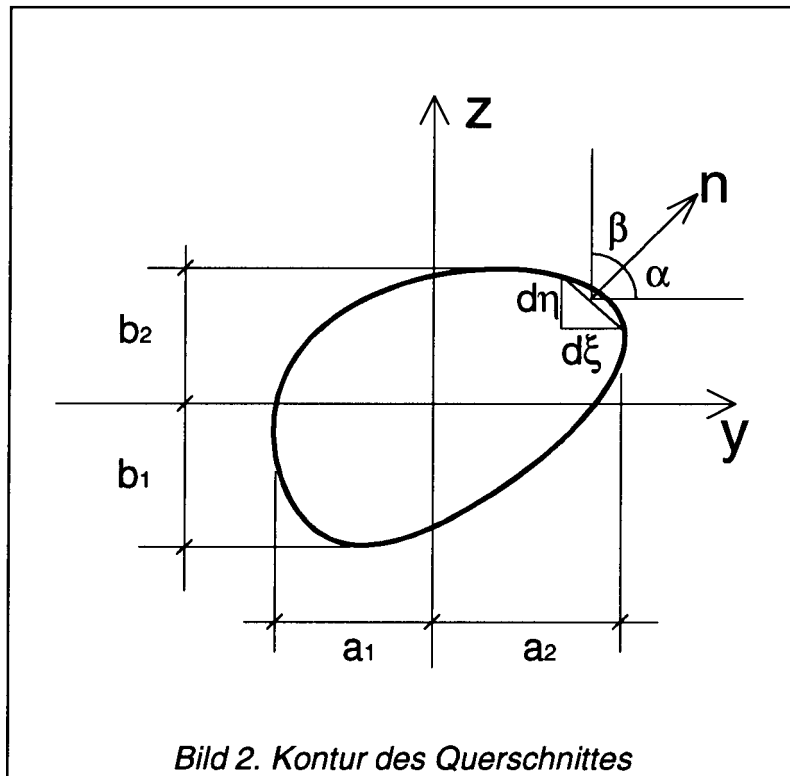
Diese Bedingungen sind nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \equiv \Delta \varphi = H \quad (6)$$

wobei H eine, im Moment beliebige Konstante ist. Damit haben wir die Differentialgleichung definiert. Wir müssen noch die Randbedingungen definieren.

Nehmen wir nun an, dass der Mantel von äusseren Lasten frei ist. Weil wir angenommen haben, dass der Stab prismatisch ist, bleibt uns nur eine Gleichgewichtsbedingung am Mantel:

$$p_{nx} = \tau_{xz} \cos \beta + \tau_{xy} \cos \alpha = 0 \quad (7)$$



Aus der Geometrie der Kontur, die durch Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$ definiert ist, ist ersichtlich:

$$\cos \alpha = \frac{d\eta}{ds} \quad \text{und} \quad \cos \beta = -\frac{d\xi}{ds} \quad (8)$$

Wenn wir (2) und (8) in (7) einsetzen, sehen wir dass am Mantel folgende Beziehung gilt:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{\substack{y=\xi \\ z=\eta}} \frac{d\eta}{ds} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{\substack{y=\xi \\ z=\eta}} \frac{d\xi}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad (9)$$

$$\varphi(\xi, \eta) = \text{const.}$$

Im Falle eines Querschnitts ohne Aussparungen ist diese Konstante frei wählbar und so setzen wir sie zu Null.

An den Stabenden schreiben wir die Gleichgewichtsbedingungen wie folgt:

$$p_{nz} = \tau_{xz} \quad p_{ny} = \tau_{xy} \quad p_{nx} = 0 \quad (10)$$

Dies bedeutet, dass die äussere Belastung genau gleich verteilt sein muss wie die inneren Spannungen. Das ist in der Wirklichkeit kaum erfüllt, aber nach St. Venantsche Hypothese reicht es, wenn diese inneren Kräfte (Spannungen) ein Kräftepaar ergeben welches dem Torsionsmoment entspricht:

$$\begin{aligned} T &= \int_F (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dF = - \int_F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} z \right) dF = \\ &= - \int_{b_1}^{b_2} dz \int_{y^-(z)}^{y^+(z)} y \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - \int_{a_1}^{a_2} dy \int_{z^-(y)}^{z^+(y)} z \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz - \\ &= - \int_{b_1}^{b_2} dz \left[y\varphi - \int \varphi dy \right]_{y^-(z)}^{y^+(z)} - \int_{a_1}^{a_2} dy \left[z\varphi - \int \varphi dz \right]_{z^-(y)}^{z^+(y)} = \\ &= \int_{b_1}^{b_2} dz \int_{y^-(z)}^{y^+(z)} \varphi dy + \int_{a_1}^{a_2} dy \int_{z^-(y)}^{z^+(y)} \varphi dz = 2 \iint \varphi dz dy \end{aligned}$$

d.h.

$$T = 2 \iint \varphi dz dy \quad (11)$$

Die anderen Kräfte in den Richtungen z und y sind gleich Null.
Die Bedingung (11) bestimmt die Grösse der Konstante H.

Wenn wir nun die Werte der Funktion $\varphi(z,y)$ in entsprechenden Punkten (z,y) als Höhen eintragen, bekommen wir eine räumliche Fläche über den Querschnitt. Dann ist das Torsionsmoment gleich dem doppelten Volumen, welches durch diese Fläche bestimmt ist. Ferner ist die Grösse der Schubspannungen proportional zur Neigung der Tangente an diese Fläche in der Richtung senkrecht zur gesuchten Schubspannungen.

Die Grösse der tangential Schubspannungen in einem beliebigen Punkt im Querschnitt bekommen wir als Summe der entsprechenden Komponenten in der Richtung der Tangente an sgn. Spannungslinien $[\varphi(z,y)=\text{const.}]$. In diesem Punkt gilt:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_{xz} \frac{dz}{ds} + \tau_{xy} \frac{dy}{ds} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \beta = \\ &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dn} = -\frac{d\varphi}{dn} = -\text{grad} \varphi\end{aligned}\quad (12)$$

Nun können wir sagen, dass wir die Torsionsbeanspruchung vollständig definiert haben:

$$\begin{aligned}\Delta \varphi &= H && \text{Differentialgleichung} \\ \varphi(\xi, \eta) &= 0 && \text{Randbedingungen.}\end{aligned}$$

Ferner, bestimmen wir die Formänderung bei der Torsion:

$$w = \frac{H}{2G} xy \quad v = -\frac{H}{2G} xz \quad u = u(y, z) \quad (13)$$

Diese Beziehungen zeigen uns, dass die Verschiebungen entlang den Punkten einer Geraden, die den Ursprung im Querschnittsschwerpunkt hat, proportional zum Abstand des Punktes vom Ursprung ist:

$$s = \sqrt{w^2 + v^2} = \frac{H}{2G} xr \quad (14)$$

Das bedeutet, dass die oben genannte Gerade (noch besser gesagt ihre Projektion auf die Querschnittsebene) nach der Deformation gerade bleibt. Weiter heisst das, dass der Querschnitt als starrer Körper sich um den Winkel $(-H/2G)x$ dreht. Hier führen wir den sgn. spezifischen Drehwinkel $\theta = -H/2G$ ein. Er entspricht dem obigen Winkel pro Längeneinheit.

Dieser spezifische Winkel gibt uns auch eine physikalische Bedeutung der Konstante H , d.h. $H = -2G\theta$.

Torsion eines elliptischen Querschnittes

Es sei die Querschnittskontur durch eine Ellipse definiert:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (15)$$

Die Funktion, welche die Differentialgleichung (6) erfüllt, kann ein Polynom zweiter Ordnung sein. Dieses Polynom muss dann auch die Randbedingungen erfüllen. Deswegen hat unsere Funktion folgende Form:

$$\varphi = A \left(\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \quad (16)$$

wobei A ein Koeffizient ist, der durch die Gleichung (6) bestimmt ist:

$$2A \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = H \Rightarrow A = \frac{H}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (17)$$

Unsere Spannungsfunktion für den elliptischen Querschnitt lautet also:

$$\varphi = \frac{H}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \quad (18)$$

Die Konstante H finden wir aus (11):

$$H = -\frac{2T(a^2 + b^2)}{a^3 b^3 \pi} \quad (19)$$

und dann bekommen wir

$$\varphi = -\frac{T}{ab\pi} \left(\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \quad (20)$$

Ferner ermitteln wir die Schubspannungen, den spezifischen Drehwinkel und die Formänderung:

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2T}{ab^3\pi}y \quad \tau_{xy} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{2T}{a^3b\pi}z \quad (21)$$

$$\theta = -\frac{H}{2G} = \frac{T(a^2 + b^2)}{Ga^3b^3\pi} = \frac{T}{G} \frac{4\pi^2 I_0}{F^4} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{H}{2G}xy = -\frac{T(a^2 + b^2)}{Ga^3b^3\pi}xy \\ v &= -\frac{H}{2G}xz = \frac{T(a^2 + b^2)}{Ga^3b^3\pi}xz \\ u &= \frac{T(b^2 - a^2)}{Ga^3b^3\pi}yz \quad \text{Verwölbung} \end{aligned} \quad (23)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für kreisförmige Querschnitte bekommen wir durch Einsetzen $a=b=r$ in den Gleichungen (15) bis (23).