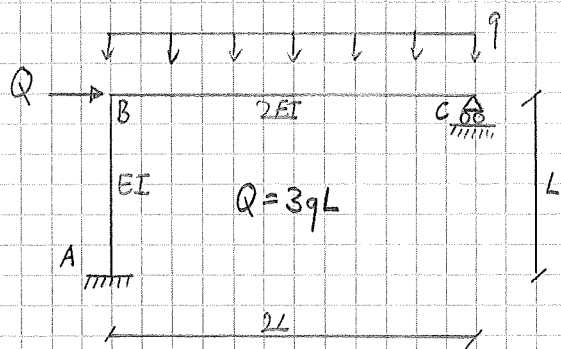


Mehrspanniges Beispiel



Variante 1: Lösen nach Kraftmethode

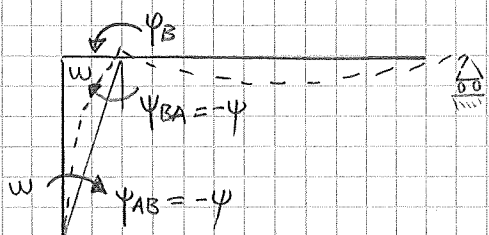
Variante 2: Lösen mit Drehwinkelverfahren

Variante 3: Lösen mit DSM

Vereinfachend nehmen wir an, dass $EA \rightarrow \infty$ und $GA_v \rightarrow \infty$

Adrian Eger
21.06.2018
Seite 1 von

V2: Drehwinkelverfahren



1) Das System ist verschieblich

2) ψ_B und ψ_{AB} , ψ_{BA} einführen

• Aus Symmetrie ist $\psi_{AB} = \psi_{BA}$

• Weil $\psi_{AB} \parallel \psi_{BA}$ gegen die Regel der Rechten Hand direkt rechnen wir mit einem negativen Vorzeichen: $-\psi = \psi_{AB} = \psi_{BA}$. Diese Wahl ist völlig beliebig, denn würde man mit $+\psi$ rechnen, käme das gleiche Resultat heraus, jedoch würde ψ einfach mit gewechseltem Vorzeichen herauskommen.

3) Es existieren zwei kinematische Unbekannte ψ_B , $-\psi$

Wir folgen nun dem DW-Lösungsschema:

Für jeden Stab M_{ij} , S_{ij} , t_{ij} : Stab AB

$$M_{AB}^0 = M_{BA}^0 = 0$$

$$S_{AB} = S_{BA} = 4EI/L ; t_{AB} = t_{BA} = 2EI/L$$

Stab BC

$$M_{BC}^0 = \frac{q(2L)^2}{8} = \frac{qL^2}{2} \text{ (Tabelle)} ; M_{CB}^0 = 0$$

$$S_{BC} = 3(2EI)/2L = 3EI/L ; S_{CB} = t_{CB} = t_{BC} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Für jeden Stab } M: \quad M_{AB} &= M_{AB}^0 + S_{AB} \cdot \psi_A + t_{AB} \cdot \psi_B - (S_{AB} + t_{AB}) \cdot \psi_{AB} \\ &= \frac{2EI}{L} \cdot \psi_B - \left(\frac{4EI}{L} + \frac{2EI}{L} \right) \cdot (-\psi) = \frac{2EI}{L} \psi_B + \frac{6EI}{L} \cdot \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{BA} &= M_{BA}^0 + S_{BA} \cdot \psi_B + t_{BA} \cdot \psi_A - (S_{BA} + t_{BA}) \cdot \psi_{BA} \\ &= \frac{4EI}{L} \cdot \psi_B - \left(\frac{4EI}{L} + \frac{2EI}{L} \right) \cdot (-\psi) = \frac{4EI}{L} \psi_B + \frac{6EI}{L} \cdot \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{BC} &= M_{BC}^0 + S_{BC} \cdot \psi_B + t_{BC} \cdot \psi_C - (S_{BC} + t_{BC}) \cdot \psi_{BC} \\ &= \frac{qL^2}{2} + \frac{3EI}{L} \cdot \psi_B \end{aligned}$$

$$M_{CB} = 0$$

Aufstellen zweier Gleichungen (da 2 Unbekannte φ_B und ψ):

$$\text{KGGW: } \sum M_B = 0 = M_{BA} + M_{Bc} = \frac{4EI}{L} \cdot \varphi_B + \frac{6EI}{L} \cdot \psi + \frac{qL^2}{2} + \frac{3EI}{L} \cdot \varphi_B$$

$$-\frac{qL^2}{2} = \frac{7EI}{L} \varphi_B + \frac{6EI}{L} \psi \quad \text{(I)}$$

$$\text{VGGW: } W_i + W_e = 0$$

$$W_e = Q \cdot w \cdot L = w \cdot 3qL^2$$

$$W_i = -w (M_{AB} + M_{BA}) = -w \left(\frac{2EI}{L} \varphi_B + \frac{6EI}{L} \cdot \psi + \frac{4EI}{L} \cdot \varphi_B + \frac{6EI}{L} \cdot \psi \right)$$

$$= -w \left(\frac{6EI}{L} \cdot \varphi_B + \frac{12EI}{L} \cdot \psi \right)$$

$$w (3qL^2) = -w \left(\frac{6EI}{L} \varphi_B + \frac{12EI}{L} \cdot \psi \right)$$

$$qL^2 = \frac{2EI}{L} \varphi_B + \frac{4EI}{L} \cdot \psi \quad \text{(II)}$$

Löse (II) nach φ_B :

$$qL^2 - \frac{4EI}{L} \cdot \psi = \frac{2EI}{L} \varphi_B$$

$$\frac{qL^3}{2EI} - 2\psi = \varphi_B \quad \text{(III)}$$

Einsetzen (III) in (I):

$$-\frac{qL^2}{2} = \frac{7EI}{L} \left(\frac{qL^3}{2EI} - 2\psi \right) + \frac{6EI}{L} \psi$$

$$= \frac{7qL^2}{2} - \frac{14EI}{L} \psi + \frac{6EI}{L} \psi$$

$$-4qL^2 = \frac{-8EI}{L} \psi \rightarrow \underline{\underline{\psi = \frac{qL^3}{2EI}}} \quad \text{(IV) In Drehrichtung wie ursprünglich gezeichnet!}$$

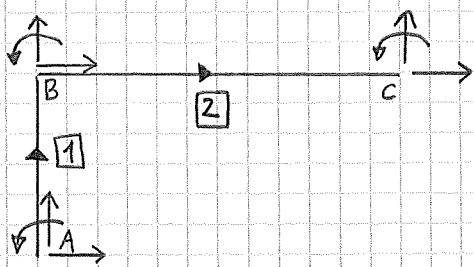
Einsetzen (IV)

$$\underline{\underline{\varphi_B}} = \frac{qL^3}{2EI} - 2\psi = \frac{qL^3}{2EI} - 2 \left(\frac{qL^3}{2EI} \right) = \underline{\underline{\frac{-qL^3}{2EI}}} \quad \text{(V) Entgegengesetzt der gezeichneten Drehrichtung!}$$

Ab hier ist es eigentlich nur noch "Nachrechnung". In einem späteren Teil zeigen wir, wie die Schnittkräfte errechnet werden können.

Nun wechseln wir zu DSM und fassen die entsprechenden Resultate so her.

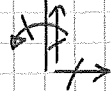
V3: DSM



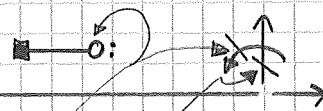
- 1) Wir wählen die Stäbe
 - Stab 1 von A nach B, Stab 2 von B nach C
- 2) Wir zeichnen alle DOF mal ein, damit wir keinen vergessen. In 2D-Rahmensysteme existieren pro Knoten $\begin{matrix} \uparrow \\ \rightarrow \end{matrix}$. Ob wir alle DOF behalten und wie wir sie weiterverwenden, entscheiden wir in einem weiteren Schritt.
- 3) Wahl der Elementtypen
 - Stab 1 $\blacksquare \rightarrow \blacksquare$, beidseitig eingespannt
 - Stab 2 $\blacksquare \rightarrow \circ$, am Ende gelenkig, am Anfang eingespannt
- 4) DOF Klassifizierung und Nummerierung

Infolge Lager in A:

Alle DOF in A gehalten ($\uparrow \rightarrow \hat{=}$ gehalten; $\rightarrow \hat{=}$ frei)



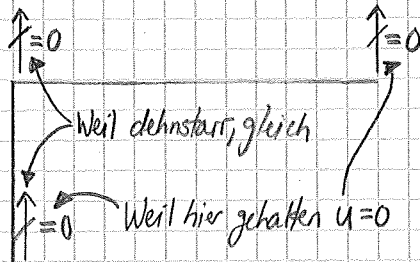
Infolge Lager in C + Elementtype



Lagerbedingung

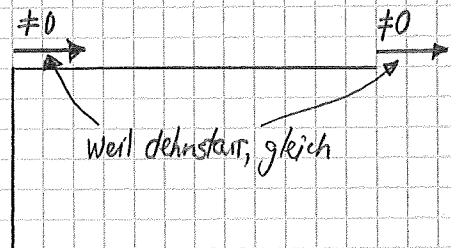
Elementtyp: Möglichkeit zu Rotieren ist infolge Stabengelenk bereits in der Elementformulierung enthalten. Somit muss der entsprechende DOF gehalten werden.

Weil $EA \rightarrow \infty$ für alle Stäbe (Dehnstarr!)



Weil dehnstarr, gleich

Weil hier gehalten $u=0$



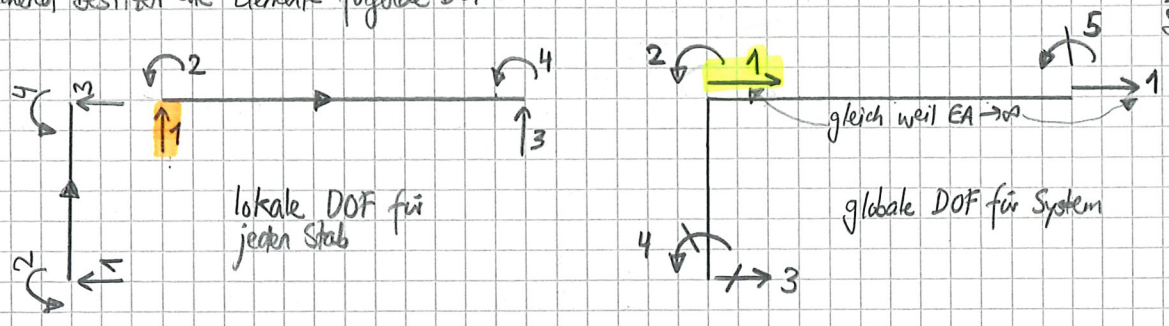
Weil dehnstarr, gleich

Wenn wir mit dehnstarreren 6x6 Rahmenelementen rechnen, eben eine Superposition von einer 2x2 Pindelstütze (alles mit EA) und eines 4x4 Balkenelements (alles mit EI), erkennen wir, dass die Pindelstützenanteile (EA) infolge $EA \rightarrow \infty$ Deformationen verhindern und daher das gleiche Resultat mit dem 4x4 Balkenelement erreicht werden kann. Ab hier rechnen wir anstatt mit 6x6, eben mit diesem 4x4 Balkenelement weiter; welches Sie aus dem Unterricht kennen:

$$k_{\text{Balken}} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Dieses Element erhalten Sie auch bequem, indem Sie die Zeilen und Spalten 1&4, welche die EA-Information beinhalten, aus der 6x6 Rahmenelementsteifigkeitsmatrix streichen!

Entsprechend besitzen die Elemente folgende DOF:



Steifigkeitsmatrizen für jeden Stab:

	NA	2	NA	5
$k_{loc}^2 = \frac{2EI}{(2L)^3}$		$3(2L)^2$		

$$k_{glob}^{2(2,2)} = \frac{2EI}{8L^3} \cdot 3 \cdot 4L^2 = \frac{3EI}{L}$$

NA, weil 1 in +Y-Richtung zeigt, dieser Knoten aber nur Translations-DOF in +X-Richtung berücksichtigt infolge $EA \rightarrow \infty$

	3	4	1	2
$k_{glob}^1 = \frac{EI}{L^3}$			12	$6L$
			$6L$	$4L^2$

Um diese Matrix zu erhalten, nehme ich die symbolisch rotierte Steifigkeitsmatrix vom Hilfsblatt und behalte nur die globalen X und Z DOF (Zeilen 1,3 und 4,6).
Mit $\cos(\theta) = \frac{x_e - x_i}{L} = \frac{0-0}{L} = 0$ und $\sin(\theta) = \frac{y_e - y_i}{L} = \frac{L-0}{L} = 1$ können wir diese reduzierte Matrix evaluieren. Weiter wissen wir, dass DOF 3 und 4 gehalten sind und somit müssen wir nur effektiv DOF 1 und 2 evaluieren.

Wir bilden nun via Überlagerung der entsprechenden DOF die Systemsteifigkeitsmatrix:

$$k_{sys} = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L + 3EI/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 7EI/L \end{bmatrix}$$

Knotenlastvektor und äquivalente Knotenkräfte folgen:

$$F_N^{sys} = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$F_{int}^{sys} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9L^2/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$P_{int}^{loc} = \begin{bmatrix} V_i - 3/2 M_i' \\ M_i - 1/2 M_j' \\ V_j + 3/2 M_j' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} X \\ 2 \\ X \\ 5 \end{matrix}$$

Wobei M_i und M_j aus Tabelle & Hilfsblatt

$$M_i - 1/2 M_j = \frac{9L^2}{12} - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{9L^2}{12} = \frac{39L^2}{24} = \frac{9L^2}{8} = \frac{49L^2}{8} = \frac{9L^2}{2}$$

Dadurch erhalten wir den Systemlastvektor:

$$F_{sys} = F_N^{sys} - P_{int}^{sys} = \begin{bmatrix} Q \\ -9L^2/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 39L \\ -9L^2/2 \end{bmatrix}$$

Nun lösen wir dieses System:

Wir lösen das System $K \cdot u = F$ auf Systemebene:

Adrian Egger
21.06.2018
Seite 5 von

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 3qL \\ 6EI/L^2 & 7EI/L & -9L^2/2 \end{array} \right] \cdot L/2 \quad (-) \quad \text{(I)} \cdot L/2 \rightarrow \text{(I)} \cdot L/2 \cdot (-1) + \text{(II)}$$

\hookrightarrow eliminiert $6EI/L^2$ aus (II)

$$\begin{array}{l} \hookrightarrow \\ \hookrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 6EI/L^2 - 12EI/L^3 \cdot L/2 & 7EI/L - 6EI/L^2 \cdot L/2 & -9L^2/2 - 3qL \cdot L/2 \\ 0 & 4EI/L & -2qL^2 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow 4EI/L \cdot u_2 = -2qL^2$$

$$\underline{u_2 = \frac{-qL^3}{2EI}} \quad \hat{=} \quad u_B = \frac{-qL^3}{2EI} \quad (\text{Kontrolle DWV})$$

Einsetzen in (I): $\frac{12EI}{L^3} \cdot u_1 + \frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{-qL^3}{2EI} = 3qL$

$$\frac{12EI}{L^3} u_1 - 3qL = 3qL$$

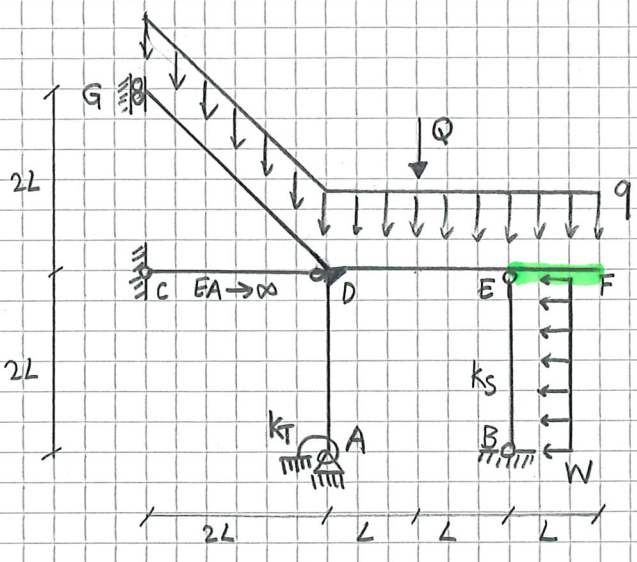
$$\frac{12EI}{L^3} u_1 = 6qL$$

$$\underline{u_1 = \frac{qL^4}{2EI}} \quad \hat{=} \quad u_1 = \psi \cdot L = \frac{qL^4}{2EI} \quad (\text{Kontrolle DW})$$

DSM - voll

Alle Stäbe besitzen die Steifigkeiten EA, EI und sind endlich, sofern nicht anders angegeben.

Die Stütze BE besitzt eine äquivalente Dehnsteifigkeit k_s .

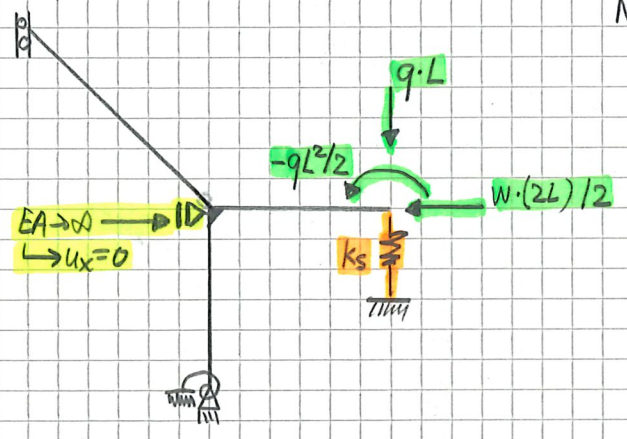


- $EA =$
- $EI =$
- $q =$
- $w =$
- $Q =$
- $L =$
- $k_s =$
- $k_T =$

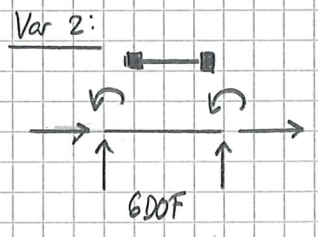
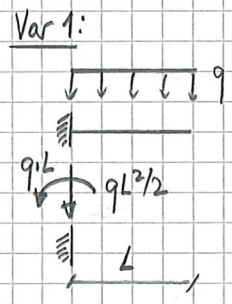
Gegeben: Obiges System und Belastung

Gesucht: Schnittkraftverläufe für M, V, N sowie Auflagerreaktionen.

1. Vereinfachung und Klassifizierung des Systems

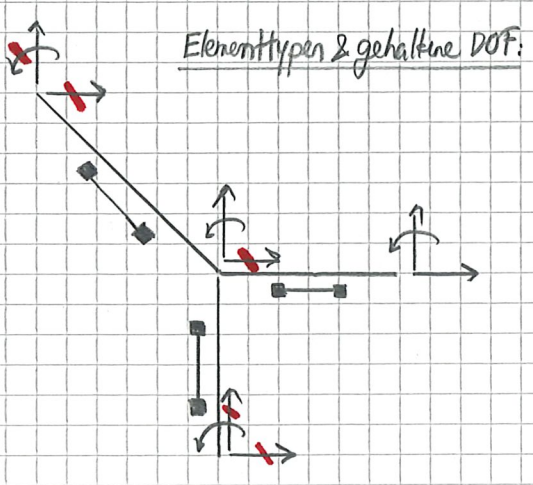


NB, Stat. bestimmte Teilsysteme:

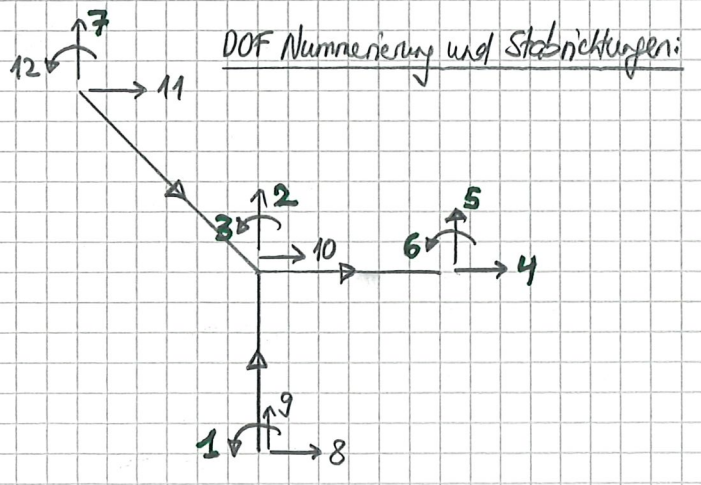


Reduktion in konzentrierte Knotenlasten!

Beibehalten, aber zusätzliche freie DOF zu lösen!



→ 7 freie DOF



7 DOF frei → f.DOF 1-7

2. Lastvektoren

Den Knotenlastvektor auf Systemebene können wir direkt aufstellen. Wir wissen weiter, dass er von Größe $f \cdot DOF \times 1$ ist.

$$F_N^{sys} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -w \cdot (2L)/2 \\ -q \cdot L \\ -qL^2/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

Die negativen Vorzeichen lassen sich damit erklären, dass die angreifenden Knotenkräfte entgegengesetzt zur globalen Koordinatenrichtung wirken.

Nun betrachten wir die internen Lastvektoren infolge Elementbelastungen.

Stab DE:

$$P_{int}^{loc, DE} = P_{int}^{loc, DE} + P_{int}^{loc, DE} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ Q/2 & 2 \\ QL/4 & 3 \\ 0 & 4 \\ Q/2 & 5 \\ -QL/4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 9 \cdot 2L/2 & 2 \\ 9(2L)^2/12 & 3 \\ 0 & 4 \\ 9(2L)/2 & 5 \\ -9(2L)^2/12 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{int}^{loc, DE} = P_{int}^{glob, DE}$$

(Tabellen)

Stab AD:

$$P_{int}^{loc, AD} = P_{int}^{glob, AD} = 0$$

Stab GD:

Anteil entlang Stab
Anteil senkrecht

$$P_{int}^{loc, GD} = P_{int}^{loc, GD} + P_{int}^{loc, GD} = \begin{pmatrix} -q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cdot L & 11 \\ 0 & 7 \\ 0 & 12 \\ \sqrt{2} \cdot L & 10 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \left(q \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ (2\sqrt{2}/2) \cdot L & 7 \\ (2\sqrt{2})^2/12 & 12 \\ 0 & 10 \\ (2\sqrt{2}/2) \cdot L & 2 \\ -(2\sqrt{2}L)^2/12 & 3 \end{bmatrix}$$

⊖ da entgegengesetzt zur Tabelle

Wir brauchen zuerst Stabrotationen & -Längen

$$L_{GD} = \sqrt{(2L)^2 + (2L)^2} = 2\sqrt{2}L$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_e - x_i}{L_{GD}} = \frac{2L - 0}{2\sqrt{2}L} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{y_e - y_i}{L_{GD}} = \frac{2L - 4L}{2\sqrt{2}L} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R^{GD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nun erhalten wir $P_{int}^{glob, GD}$ durch Rotation von $P_{int}^{loc, GD}$.

$$P_{int}^{loc, GD} = \begin{bmatrix} -9L \\ 9L \\ \sqrt{2/3}9L^2 \\ -9L \\ 9L \\ -\sqrt{2/3}9L^2 \end{bmatrix} \rightarrow P_{int}^{glob, GD} = R^T \cdot P_{int}^{loc, GD} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9L \\ 9L \\ \sqrt{2/3}9L^2 \\ -9L \\ 9L \\ -\sqrt{2/3}9L^2 \end{bmatrix}$$

$\cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 ↑
 Faktor von R

$$P_{int}^{glob, GD} = \begin{bmatrix} -9L + 9L \\ +9L + 9L \\ \sqrt{2/3}9L^2 \\ -9L + 9L \\ +9L + 9L \\ -\sqrt{2/3}9L^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}9L \\ 9L^2/3 \\ 0 \\ \sqrt{2}9L \\ -9L^2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 12 \\ 10 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nun können wir P_{int} auf Systemebene aufstellen:

$$P_{int}^{sys} = \begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 0 \\ Q/2 + 9L \\ QL/4 + 9L^2/3 \\ 0 \\ Q/2 + 9L \\ -QL/4 - 9L^2/3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} + 0 \\ + \sqrt{2}9L \\ + -9L^2/3 \\ + 0 \\ + 0 \\ + 0 \\ + \sqrt{2}9L \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \\ \text{Stab DE} & \text{Stab GD} & \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q/2 + (1+\sqrt{2})9L \\ QL/4 \\ 0 \\ Q/2 + 9L \\ -QL/4 - 9L^2/3 \\ \sqrt{2}9L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Somit können wir den Systemlastvektor $F^{sys} = F_N^{sys} - P_{int}^{sys}$ aufstellen:

$$F^{sys} = F_N^{sys} - P_{int}^{sys} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -wL \\ -9L \\ -9L^2/2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ Q/2 + (1+\sqrt{2})9L \\ QL/2 \\ 0 \\ Q/2 + 9L \\ -QL/2 - 9L^2/3 \\ \sqrt{2}9L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q/2 - (1+\sqrt{2})9L \\ -QL/2 \\ -wL \\ Q/2 \\ +QL/2 - 9L^2/6 \\ -\sqrt{2}9L \end{bmatrix}$$

→ Wie würden Sie vorgehen, falls Stab GD am rechten End geltend ausgeführt wäre?

3. Steifigkeitsmatrizen

Stab DE: keine Rotation nötig da lokale = globale Koordinaten $\rightarrow \cos(\theta)=1, \sin(\theta)=0 \Rightarrow R=I$

$k_{DE}^{loc} = k_{DE}^{glob} =$

10	2	3	4	5	6	10
	α	β	0	$-\alpha$	β	2
		2γ	0	$-\beta$	γ	3
			δ	0	0	4
				α	$-\beta$	5
					2γ	6

-Sym.

$$\alpha_{DE} = \frac{3EI}{2L^3}$$

$$\beta_{DE} = \frac{3EI}{2L^2}$$

$$\gamma_{DE} = \frac{EI}{L}$$

$$\delta_{DE} = \frac{EA}{2L}$$

Stab AD: Rotation um $90^\circ \rightarrow$ nehme symbolisch rotierte Steifigkeitsmatrix

$$\cos(\theta) = \frac{x_e - x_i}{2L} = \frac{0-0}{2L} = 0; \quad \sin(\theta) = \frac{y_e - y_i}{2L} = \frac{2L-0}{2L} = 1$$

$k_{AD}^{glob} =$

8	9	1	10	2	3	8
		2γ		$-\beta$	γ	1
				α	$-\beta$	2
					$\text{sym. } 2\gamma$	3

Sym.

$$\alpha_{AD} = \frac{EI}{(2L)^3} \cdot \frac{A(2L)^2}{I} \cdot \sin^2(\theta) + 12 \frac{EI}{(2L)^3} \cos^2(\theta) = \frac{EA}{2L}$$

$$\beta_{AD} = \frac{EI}{(2L)^3} \cdot 6(2L) \cdot \cos(\theta) = 0$$

$$\gamma_{AD} = \frac{EI}{(2L)^3} \cdot 2(2L)^2 = \frac{EI}{L}$$

Stab GD: Von vorher, $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k_{GD}^{stab} =$

11	7	12	10	2	3	11
	α			$-\alpha$	β	7
				α	$-\beta$	2
				$\text{sym. } 2\gamma$		3

Sym.

$$\alpha_{GD} = \frac{EI}{(2\sqrt{2}L)^3} \cdot \left(\frac{A(2\sqrt{2}L)^2}{I} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right)$$

$$= \frac{EA}{4\sqrt{2}L} + \frac{3EI}{8\sqrt{2}L^3}$$

$$\beta_{GD} = \frac{EI}{(2\sqrt{2}L)^3} \cdot 6(2\sqrt{2}L) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}EI}{16L^2}$$

$$\gamma_{GD} = \frac{EI}{(2\sqrt{2}L)^3} \cdot 4(2\sqrt{2}L)^2 = \frac{\sqrt{2}EI}{L}$$

Nun können wir die Systemsteifigkeitsmatrix aufstellen; indem wir die k_i^{glob} an den entsprechenden DOF überlagern.

$$K^{sys} = \begin{bmatrix} (2\gamma^{AD}) & (-\beta^{AD}) & (\gamma^{AD}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (\alpha^{DE} + \alpha^{AD} + \alpha^{GD}) & (\beta^{DE} - \beta^{AD} - \beta^{GD}) & 0 & (-\alpha^{DE}) & (\beta^{DE}) & (-\alpha^{GD}) & 2 & 2 \\ (2\gamma^{DE} + 2\gamma^{AD} + 2\gamma^{GD}) & 0 & (-\beta^{DE}) & (\gamma^{DE}) & (\beta^{GD}) & 3 & 3 \\ \delta^{DE} & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ (\alpha^{DE}) & (-\beta^{DE}) & 0 & 5 & 5 \\ (2\gamma^{DE}) & 0 & 6 & 6 \\ (\alpha^{GD}) & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

sym.

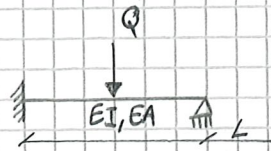
Addition der Federn:

- Feder k_s entlang DOF 5 $\rightarrow k_{(5,5)}^{sys} = (\alpha^{DE} + k_s)$
- Feder k_T entlang DOF 1 $\rightarrow k_{(1,1)}^{sys} = (2\gamma^{AD} + k_T)$

Nun haben wir sowohl die K^{sys} wie auch F^{sys} . Durch Evaluation der Matrizen/Vektoren mit Zahlenwerten können wir diese z.B. in Matlab nach $K \cdot u = F \rightarrow u^{sys} = (K^{sys})^{-1} \cdot F^{sys}$ auflösen.

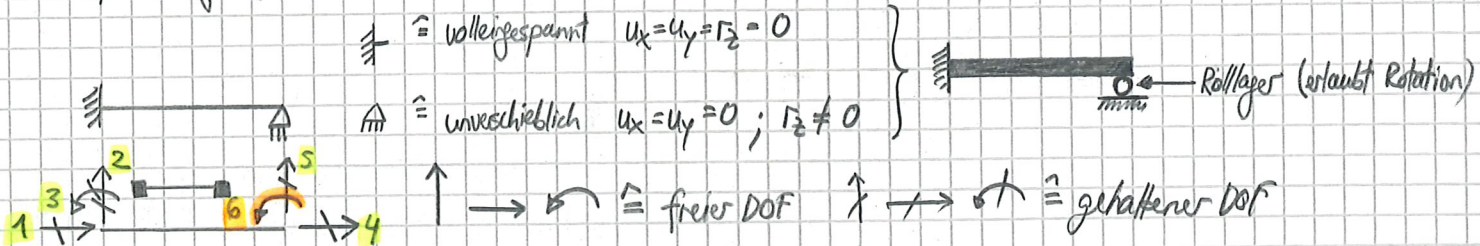
Die Wahl von unterschiedlichen Elementtypen

Wir betrachten das folgende, einfache System:



Während am linken Stabende die Lagerbedingungen eindeutig sind, gibt es zwei Varianten wie man diese am rechten Ende berücksichtigen kann. Bei beiden Varianten gilt aber $u_x = u_y = 0$ (unverschieblich) und Rotationen sind zugelassen. D.h. entweder berücksichtigen wir die Lagerbedingung effektiv als Lagerungen (V1) oder wir "verpacken" diese Information in die lokale Steifigkeitsmatrix (V2) indem wir mittels Kondensation diese DOF eliminieren bzw. umlagern und mit speziellen Elementtypen weiterrechnen.

V1 explizite Lager:



Basierend auf den Lagerbedingungen besteht nur ein einziger freier DOF in diesem System (DOF 6). Da die Lagerbedingungen explizit durch die Lager berücksichtigt werden (die DOF am Stabende gemäss $\mathbb{1}$ und $\mathbb{2}$), müssen wir den Elementtyp nicht verändern, wodurch wir mit dem beidseitig eingespannten Elementtyp rechnen ($\mathbb{1}-\mathbb{2}$).

Daher:

$$k_{loc} = (EI/L^3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ AL^2/I & 0 & 0 & -AL^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -AL^2/I & 0 & 0 & AL^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \text{ und } P_{loc}^{int} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Q/2 & 2 \\ Q \cdot L/8 & 3 \\ 0 & 4 \\ Q/2 & 5 \\ -Q \cdot L/8 & 6 \end{bmatrix} \text{ (Tabelle für) } \mathbb{1}-\mathbb{2}$$

Weil für diesen speziellen Fall das lokale Koordinatensystem mit dem globalen übereinstimmt, ist die Rotationsmatrix $R = I$, der Identitätsmatrix wodurch alle lokalen Größen automatisch gleich den globalen Größen sind.

Daher: $k_{loc} = k_{glob}$ und $P_{loc}^{int} = P_{glob}^{int}$

Wir bilden unsere Systemsteifigkeitsmatrix aus denjenigen Einträgen, welche den freien DOF (hier DOF 6) angehören.

Daher: $k_{sys} = (EI/L^3) \cdot (4L^2) = [4EI/L]$ und $P_{sys}^{int} = [-QL/8]$

Somit stellen wir die Systemgleichungsgleichung auf und lösen sie:

$$K \cdot u = F$$

$$k_{sys} \cdot u_{sys} = F_{sys}^N - P_{sys}^{int}$$

$$u_{sys} = (QL/8) / (4EI/L) = \frac{QL^2}{32EI} \quad (V1) \quad (u_{sys}) \text{ (Rotation am rechten Stabende)}$$

Nun wollen wir die Stabendkräfte ermitteln.

Die Stabendkräfte sind folgendermassen gegeben:

$$F_{loc}^N = k_{loc} \cdot u_{loc} + P_{loc}^{int}$$

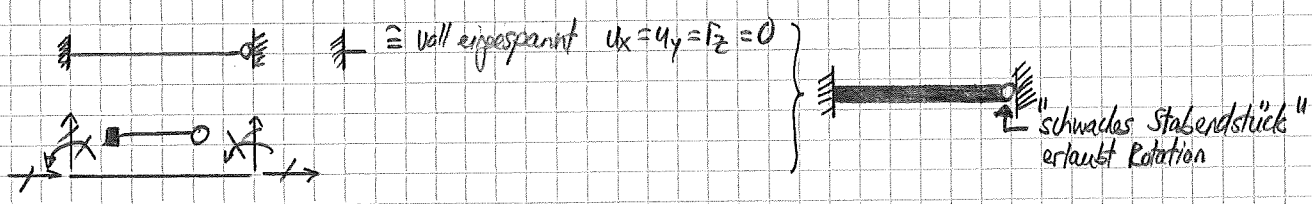
Das Element hier besitzt die DOF = [1, 2, 3, 4, 5, 6] wodurch sein globaler Verschiebungsvektor als $u_{glob}^T = [0, 0, 0, 0, 0, QL^2/32EI]$ gegeben ist. Weil $R=I$ gilt auch hier $u_{glob} = u_{loc}$, dadurch:

$$\begin{pmatrix} EI/L^3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} AL^2/I & 0 & 0 & -AL^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -AL^2/I & 0 & 0 & AL^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ QL^2/32EI \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q/2 \\ QL/8 \\ 0 \\ Q/2 \\ -QL/8 \end{bmatrix} = F_{loc}^N = \begin{bmatrix} 0 \\ 6L \cdot QL^2/32EI \cdot EI/L^3 + Q/2 \\ 2L^2 \cdot QL^2/32EI \cdot EI/L^3 + QL/8 \\ 0 \\ -6L \cdot QL^2/32EI \cdot EI/L^3 + Q/2 \\ 4L^2 \cdot QL^2/32EI \cdot EI/L^3 - QL/8 \end{bmatrix}$$

$$F_{loc}^N = \begin{bmatrix} 0 \\ 11Q/16 \\ 3QL/16 \\ 0 \\ 5Q/16 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Vergleich mit Tabelle} \rightarrow \text{korrekt})$$

Nun analysieren wir die Variante 2.

V2 eliminierte DOF, Lager umgekehrt:



Die gelöste Einspannung am rechten Ende ist bei diesem Elementtyp (■—○) bereits berücksichtigt. Der Rotations DOF von V1 wurde eliminiert indem er mittels des Kondensationsverfahrens ins Stabende (von ■—■ in ■—○) umgelagert wurde. Entsprechend gilt gemäss DSM Hilfsblatt, wobei P_{loc}^{int} aus V1 (■—■) $\hat{=} P_{loc}^{int} = [N_i, U_i, M_i, N_j, V_j, M_j]^T$:

$$P_{loc}^{int} = \begin{bmatrix} N_i \\ V_i - 3/2L M_j \\ M_i - 1/2 M_j \\ N_j \\ V_j + 3/2L M_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q/2 - 3/2L \cdot QL/8 \\ QL/8 - 1/2 \cdot QL/8 \\ 0 \\ Q/2 + 3/2L \cdot QL/8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8Q/16 + 3Q/16 \\ 2QL/16 + QL/16 \\ 0 \\ 8Q/16 - 3Q/16 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11Q/16 \\ 3QL/16 \\ 0 \\ 5Q/16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

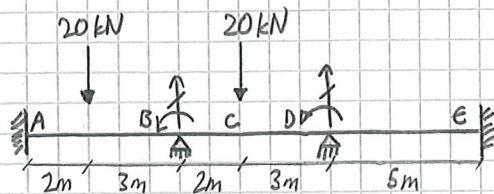
weil $F_{V2}^N = k \cdot u + P_{V2}^{int}$ und $u \hat{=} 0$ gilt $F_{V2}^N = P_{V2}^{int}$.

Wir erkennen, dass mit V1 und V2, die gleichen Stabendkräfte errechnet werden können!

Symmetrie / Antimetrie Beispiel:

Analysieren Sie das gegebene System.

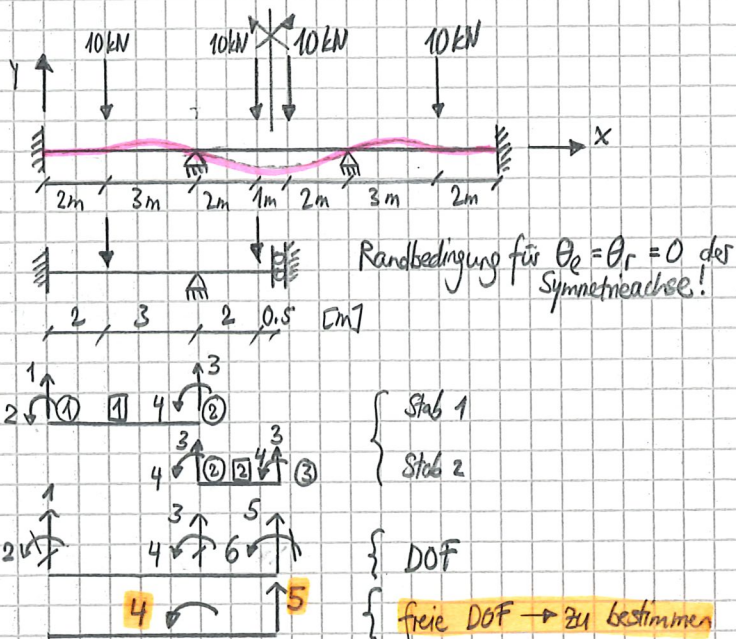
Für alle Stäbe gilt $I = 50 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ und $E = 200 \text{ GPa}$



Wir können zwar dieses System ohne weiteres "normal" analysieren, da nur 2 Rotationsfreiheitsgrade vorhanden sind, werden aber zwecks Illustrierung hier die Antimetrie des Systems ausnutzen.

Symmetrischer Anteil:

Wir teilen das System in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil, analysieren diese separat und superponieren diese um die Gesamtsystemreaktion zu erhalten.



Zuerst identifizieren wir Stäbe, Knoten und DOF.

Es existieren nur 2 freie DOF, nämlich 4, 5 für den symmetrischen Anteil. Weil das System in der Ebene liegt und keine Kräfte entlang der Stabachse wirken, verwenden wir die 4×4 Steifigkeitsmatrix.

Im folgenden Verlauf nehmen wir ein paar Abkürzungen, um uns den generellen Aufwand zu minimieren. D.h. wir konzentrieren uns nur auf die Einträge der freien DOF. Weiter erkennen wir, dass das lokale Koordinatensystem auch direkt gleich dem globalen ist und ersparen uns so den Rotationschritt. Wenn dies nicht der Fall wäre, würden wir einfach die globale, symbolisch rotierte Steifigkeitsmatrix verwenden, wie sie auf den Hilfsblättern steht.

Stab 1:

$$k_{loc}^1 = k_{glob}^1 = \frac{EI}{L_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^3 \end{bmatrix} \Rightarrow k_{glob}^{1(4,4)} = \frac{200 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 50 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{(5000 \text{ mm})^3} \cdot 4 \cdot (5000 \text{ mm})^2 = [8 \cdot 10^9] \text{ N/mm}$$

Stab 2:

$$k_{loc}^2 = k_{glob}^2 = \frac{EI}{L_2^3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ 12 & -6L & 0 & 0 & 0 \\ -6L & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_{glob}^{2(4,5)} = \frac{200 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2 \cdot 50 \cdot 10^6 \text{ mm}^4}{(2500 \text{ mm})^3} = 640 \text{ N/mm}$$

$$\Rightarrow k_{glob}^{2(4,5)} = \begin{bmatrix} 640 \cdot 25 \cdot 10^6 & 640 \cdot -15 \cdot 10^3 \\ \text{sym.} & 640 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \cdot 10^9 & -9.6 \cdot 10^6 \\ \text{sym.} & 7.68 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

System $k_{sys} = \bigoplus_{i=1}^2 k_{loc}^i = \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^9 + 16 \cdot 10^9 & -9.6 \cdot 10^6 \\ \text{sym.} & 7.68 \cdot 10^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \cdot 10^9 & -9.6 \cdot 10^6 \\ \text{sym.} & 7.68 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$

Wir haben nun die Systemsteifigkeitsmatrix evaluiert indem wir "nur" 5 relevante Einträge der entsprechenden Steifigkeitsmatrizen berechnet haben. Wie sie sehen, führt dies zu einer erheblichen Reduktion des Rechenaufwands! Am Schluss folgt die Zusammenstellung (Assembly) der Systemsteifigkeitsmatrix wie gewohnt. Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaft der Steifigkeitsmatrizen aus, um Ihren Schreibaufwand (und Fehlerquellen) weiter zu reduzieren.

Wir betrachten nun die Knotenreaktionen P_{int} . Die Knotenkräfte F_N sind ein Nullvektor, da keine Lasten in den freien DOF wirken. Aus der Tabelle gilt:

Stab 1

$$P_{int}^1 = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \frac{Q \cdot L_a \cdot L_b}{L^2} \\ \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \dots \end{matrix}$$

$$P_{int,loc}^1 = P_{int,glob}^1 = \frac{-10 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (2000 \text{ mm})^2 \cdot (3000 \text{ mm})}{(5000 \text{ mm})^2} = [-4.8 \cdot 10^6] \text{ Nmm}$$

Stab 2

$$P_{int}^2 = \begin{bmatrix} \dots \\ \frac{Q \cdot L_a \cdot L_b^2}{L^2} \\ \frac{Q \cdot L_a^2 \cdot (L_a + 3L_b)}{L^3} \\ \dots \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$P_{int,loc}^2 = P_{int,glob}^2 \Rightarrow P_{int,glob}^{2,(4-5)} = \begin{bmatrix} \frac{(10 \cdot 10^3) \cdot (2000) \cdot (500)^2}{(2500)^2} \\ \frac{10 \cdot 10^3 \cdot (2000)^2 \cdot (2000 + 3 \cdot 500)}{(2500)^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 800 \cdot 10^3 \\ 8960 \end{bmatrix}$$

System

$$P_{int}^{sys} = \begin{bmatrix} -4.8 \cdot 10^6 + 0.8 \cdot 10^6 \\ 8960 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.0 \cdot 10^6 \\ 8960 \end{bmatrix}$$

Wir stellen nun das Systemkräftegleichgewicht auf und lösen dies nach den Deformationen auf.

$$K \cdot u = F; \quad K^{sys} \cdot u^{sys} = F^{sys} = F_N^{sys} - P_{int}^{sys}$$

$$u^{sys} = (K^{sys})^{-1} \cdot F^{sys}$$

$$\rightarrow F^{sys} = F_N^{sys} - P_{int}^{sys}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4.0 \cdot 10^6 \\ 8960 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 \cdot 10^6 \\ -8960 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (K^{sys})^{-1} = \frac{1}{\|K^{sys}\|} \begin{bmatrix} k_{22}^{sys} & -k_{12}^{sys} \\ -k_{21}^{sys} & k_{11}^{sys} \end{bmatrix}, \quad \text{wobei } \|K^{sys}\| = k_{11}^{sys} \cdot k_{22}^{sys} - k_{12}^{sys} \cdot k_{21}^{sys}$$

$$= (24 \cdot 10^9) \cdot (7.68 \cdot 10^3) - (-9.6 \cdot 10^6)^2 = 92.16 \cdot 10^{12}$$

$$= \frac{1}{92.16 \cdot 10^{12}} \cdot \begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^3 & +9.6 \cdot 10^6 \\ \text{sym} & 24 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 83.333 \cdot 10^{-12} & +104.167 \cdot 10^{-9} \\ \text{sym.} & 260.417 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow u^{sys} = (K^{sys})^{-1} \cdot F^{sys}$$

$$= \begin{bmatrix} (83.333 \cdot 10^{-12})(4.0 \cdot 10^6) + (104.167 \cdot 10^{-9})(-8960) \\ (104.167 \cdot 10^{-9})(4.0 \cdot 10^6) + (260.417 \cdot 10^{-6})(-8960) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.600 \cdot 10^{-6} \\ -1.917 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_4 \hat{=} -0.600 \text{ mrad (weil N, mm)} \\ u_5 \hat{=} -1.917 \text{ mm} \end{matrix}$$

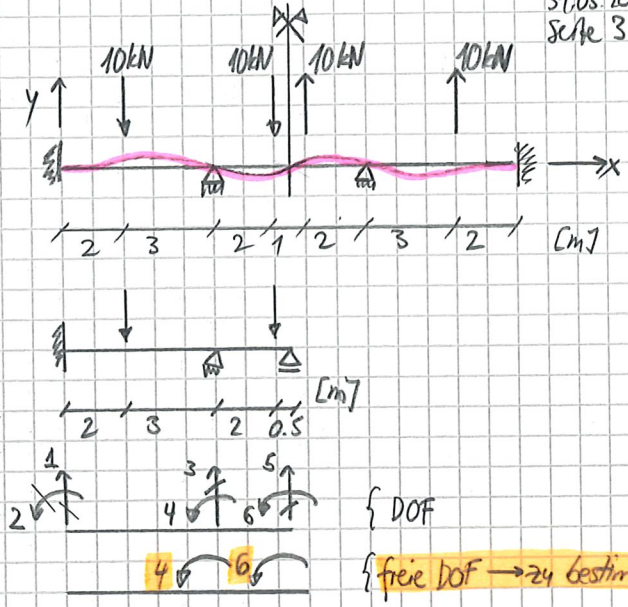
Wir haben nun die Deformationen des symmetrischen Anteils bestimmt. Im folgenden führen wir die gleichen Schritte für den antisymmetrischen Anteil durch. Einzig die Wahl der Randbedingung verändert sich, wodurch wir die kalkulierten Größen am Stab 1 und "links" am Stab 2 beibehalten und daher wiederverwenden können. Am "rechten" Ende des Stabs 2 werden die Randbedingungen infolge Wechsel von Symmetrie zu Antisymmetrie verändert, wodurch neue Größen errechnet werden müssen.

Antimetrischer Anteil:

Die antimetrische Belastung führt zu einer Verdrehung des Systems um die Antimetrieachse, wodurch $\theta_2 = +\theta_1$.

Die Verschiebung des Mittelpunktes bleibt aber gleich Null.

Das System lässt sich daher auf das rechts abgebildete Teilsystem reduzieren.



Wir verwenden die gleichen Abkürzungen wie beim symmetrischen Anteil und verwenden die Zwischenergebnisse wieder, die unverändert bleiben.

Stab 1 $k_{stab}^{1,4} = [8 \cdot 10^9] \text{ N/mm}$ (von vorher)

Stab 2 $k_{loc}^2 = k_{stab}^2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 4L^2 & & 2L^2 \\ & & & 4L^2 \\ & 2L^2 & & 4L^2 \\ & & & 6 \end{bmatrix}$ mit $\frac{EI}{L^3} = 640 \text{ N/mm}$ (von vorher)

$\Rightarrow k_{stab}^{2,(4,6);(4,6)} = \begin{bmatrix} 16 \cdot 10^9 & 8 \cdot 10^9 \\ \text{sym} & 16 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$

System $k_{sys} = \sum_{i=1}^2 k_{loc}^i = \begin{bmatrix} 8 \cdot 10^9 + 16 \cdot 10^9 & 8 \cdot 10^9 \\ \text{sym} & 16 \cdot 10^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \cdot 10^9 & 8 \cdot 10^9 \\ \text{sym} & 16 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$

Die Zusammenstellung (Assembly) der Systemsteifigkeitsmatrix geschah rasch, da wir Werte Teile wiederverwenden konnten und ähnliche Größen addiert wurden. Wir betrachten nun die Knotenreaktionen P_{int} .

Stab 1 $P_{int}^{1,(4)} = [-4.8 \cdot 10^6] \text{ Nm}$ (von vorher)

Stab 2 $P_{int}^2 = \begin{bmatrix} \dots & 3 \\ \frac{Q \cdot L_a \cdot L_b^2}{12} & 4 \\ \dots & 5 \\ -\frac{Q \cdot L_a \cdot L_b}{12} & 6 \end{bmatrix}$ $P_{int,loc}^2 = P_{int,stab}^2 \Rightarrow P_{int,stab}^{2,(4,6);(4,6)} = \begin{bmatrix} \frac{(10 \cdot 10^3)(2000)(500)^2}{(2500)^2} & 4 \\ -\frac{10 \cdot 10^3(2000)^2(500)}{(2500)^2} & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \cdot 10^3 \\ -3.2 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$

System $P_{int}^{sys} = \begin{bmatrix} -4.8 \cdot 10^6 + 0.8 \cdot 10^6 \\ -3.2 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.0 \cdot 10^6 \\ -3.2 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$

Daraus folgt der Systemlastvektor F_{sys} :

$F_{sys} = F_N^{sys} - P_{int}^{sys} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.0 \cdot 10^6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4.0 \cdot 10^6 \\ -3.2 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.0 \cdot 10^6 \\ 3.2 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$

Nun wollen wir die Deformationen des antimetrischen Anteils errechnen.

Zu diesem Zweck stellen wir das Systemkräftegleichgewicht auf und lösen es

$$u^{sys} = (k^{sys})^{-1} \cdot F^{sys} \quad (\text{von vorher})$$

$$(k^{sys})^{-1} \rightarrow \|k^{sys}\| = k_{11}^{sys} \cdot k_{22}^{sys} - k_{12}^{sys} \cdot k_{21}^{sys} \\ = 24 \cdot 10^9 \cdot 16 \cdot 10^9 - (8 \cdot 10^9)^2 = 320 \cdot 10^{18}$$

$$\rightarrow (k^{sys})^{-1} = \frac{1}{320 \cdot 10^{18}} \begin{bmatrix} 16 \cdot 10^9 & -8 \cdot 10^9 \\ \text{sym.} & 24 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1/20 & -1/40 \\ \text{sym.} & 3/40 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}$$

$$\rightarrow u^{sys} = (k^{sys})^{-1} \cdot F^{sys}$$

$$= (10^{-9}) \cdot \begin{bmatrix} 120 \cdot 4 \cdot 10^6 + -1/40 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \\ -1/40 \cdot 4 \cdot 10^6 + 3/40 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.120 \cdot 10^{-6} \\ 0.140 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_4 \hat{=} 0.120 \text{ mrad} \\ \theta_6 \hat{=} 0.140 \text{ mrad} \end{matrix}$$

Nun superponieren wir die zwei Teilsysteme und erhalten die vollständige Lösung. Hierzu interessiert uns das Verhalten an jedem Stabende, also an den Punkten A, B, C, D, E.

Die folgenden Verschiebungen und Rotationen sind gleich Null infolge der Randbedingungen:

$$u_A = u_B = u_D = u_E = 0$$

$$\theta_A = \theta_E = 0$$

Um die Vorzeichen für die Superposition zu bestimmen, betrachten wir die Verformungslinie des jeweiligen Teilsystems.

Auf der "linken" Seite verformen sich beide Teilsysteme in die gleiche Richtung (+1), während auf der "rechten" Seite sie sich entgegengesetzt verformen. Konkret heisst die für die zwei Teilsysteme:

$$\text{Symmetrie: } \theta_B = -\theta_D \quad u_C \neq 0$$

$$\text{Antimetrie: } \theta_B = +\theta_D \quad u_C = 0$$

Daher gilt via Superpositionsprinzip:

$$\text{Gesamtsystem: } \underline{\theta_B} = \theta_B^S + \theta_B^A = -0.6 \cdot 10^{-6} + 0.12 \cdot 10^{-6} = -0.48 \cdot 10^{-6} \hat{=} \underline{\underline{-0.48 \text{ mrad}}} \\ \underline{\theta_D} = -\theta_D^S + \theta_D^A = -\theta_B^S + \theta_B^A = +0.6 \cdot 10^{-6} + 0.12 \cdot 10^{-6} = 0.72 \cdot 10^{-6} \hat{=} \underline{\underline{0.72 \text{ mrad}}} \\ \underline{u_C} = u_C^S + u_C^A = u_C^S + 0 = \underline{\underline{-1.917 \text{ mm}}}$$

Dieses Resultat könnte nun weiterverwendet werden, um die Schnittkräfte zu bestimmen, was wir aber hier unterlassen.