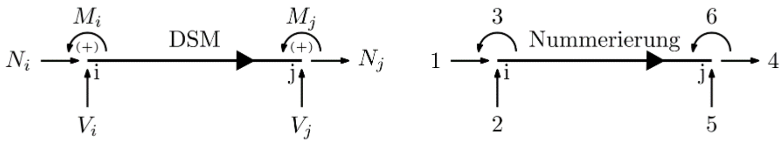
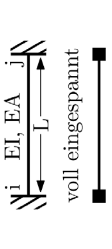
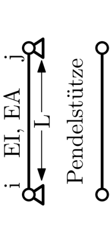
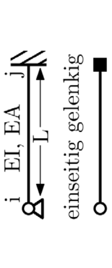
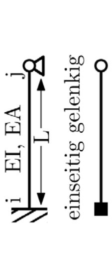
Direkte Steifigkeitsmethode

Konventionen:



Typ	$\boldsymbol{k_{loc}}$	$\boldsymbol{P_{loc}^{int}}$	$\boldsymbol{R}$
	$k_{loc}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0\\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L\\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2\\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0\\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L\\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2\end{bmatrix}$	$P_{loc}^{\text{int}}=\begin{bmatrix}N_i\\ V_i\\ M_i\\ N_j\\ V_j\\ M_j\end{bmatrix}$	$R=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
	$k_{loc}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$P_{loc}^{\text{int}}=\begin{bmatrix}N_i\\ V_i-\frac{1}{L}(M_i+M_j)\\ 0\\ N_j\\ V_j+\frac{1}{L}(M_i+M_j)\\ 0\end{bmatrix}$	
	$k_{loc}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3 & 3L\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 & -3L\\ 0 & 3L & 0 & 0 & -3L & 3L^2\end{bmatrix}$	$P_{loc}^{\text{int}}=\begin{bmatrix}N_i\\ V_i-\frac{3}{2L}M_i\\ 0\\ N_j\\ V_j+\frac{3}{2L}M_i\\ M_j-\frac{1}{2}M_i\end{bmatrix}$	
	$k_{loc}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3L & 0 & -3 & 0\\ 0 & 3L & 3L^2 & 0 & -3L & 0\\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0\\ 0 & -3 & -3L & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	$P_{loc}^{\text{int}}=\begin{bmatrix}N_i\\ V_i-\frac{3}{2L}M_j\\ M_i-\frac{1}{2}M_j\\ N_j\\ V_j+\frac{3}{2L}M_j\\ 0\end{bmatrix}$	

Symbolisch rotierte Steifigkeitsmatrizen:

<u>Typ: voll eingespannt</u>

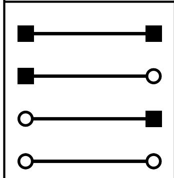
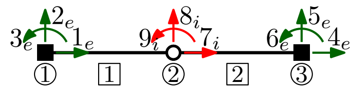
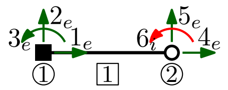
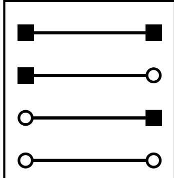
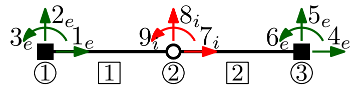
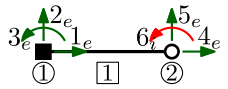
$$k_{glob}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}\frac{AL^2}{I}\cos^2(\theta)+12\sin^2(\theta) & \left(\frac{AL^2}{I}-12\right)\cos(\theta)\sin(\theta) & -6L\sin(\theta) & -\left(\frac{AL^2}{I}\cos^2(\theta)+12\sin^2(\theta)\right) & -\left(\frac{AL^2}{I}-12\right)\cos(\theta)\sin(\theta) & -6L\sin(\theta)\\ \left(\frac{AL^2}{I}-12\right)\cos(\theta)\sin(\theta) & \frac{AL^2}{I}\sin^2(\theta)+12\cos^2(\theta) & 6L\cos(\theta) & -\left(\frac{AL^2}{I}-12\right)\cos(\theta)\sin(\theta) & -\left(\frac{AL^2}{I}\sin^2(\theta)+12\cos^2(\theta)\right) & 6L\cos(\theta)\\ -6L\sin(\theta) & 6L\cos(\theta) & 4L^2 & 6L\sin(\theta) & -6L\cos(\theta) & 2L^2\\ -\left(\frac{AL^2}{I}\cos^2(\theta)+12\sin^2(\theta)\right) & -\left(\frac{AL^2}{I}-12\right)\cos(\theta)\sin(\theta) & 6L\sin(\theta) & \frac{AL^2}{I}\cos^2(\theta)+12\sin^2(\theta) & \left(\frac{AL^2}{I}-12\right)\cos(\theta)\sin(\theta) & 6L\sin(\theta)\\ -\left(\frac{AL^2}{I}-12\right)\cos(\theta)\sin(\theta) & -\left(\frac{AL^2}{I}\sin^2(\theta)+12\cos^2(\theta)\right) & -6L\cos(\theta) & \left(\frac{AL^2}{I}-12\right)\cos(\theta)\sin(\theta) & \frac{AL^2}{I}\sin^2(\theta)+12\cos^2(\theta) & -6L\cos(\theta)\\ -6L\sin(\theta) & 6L\cos(\theta) & 2L^2 & 6L\sin(\theta) & -6L\cos(\theta) & 4L^2\end{bmatrix}$$

<u>Typ: Pendelstütze</u>

$$k_{glob}=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}\cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta)\\ -\cos^2(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta)\\ -\cos(\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta)\end{bmatrix}$$

<u>Typ: senkrechte Verdrehung (90°) dehnstarres Stabes (EA→∞)</u>

$$k_{loc}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}\end{bmatrix}\overset{\theta=90^o}{\Rightarrow}k_{glob}=\begin{bmatrix}k_{11} & -k_{12} & k_{13} & -k_{14}\\ -k_{21} & k_{22} & -k_{23} & k_{24}\\ k_{31} & -k_{32} & k_{33} & -k_{34}\\ -k_{41} & k_{42} & -k_{43} & k_{44}\end{bmatrix}$$

#	Schritt	Grössen	VL	KO+HU
1	**Stabgrössen für jeden Stab**			m-files
	Stabeigenschaften L $cos(\theta)$ $sin(\theta)$ Rotationsmatrix R E A I_y DOF-Nummerierung	L R E A I_y DOF	**V5** 35-36 **V6** 35-36	**K5** 10,11 32,33
	Stabsteifigkeitsmatrix **Tabelle**  **oder** **Statische Kondensation** beginnt mit volleingespannten Grössen **Elementgruppe (EG)**  $k^{EG}_{loc} = k^{EG}_{ee} - k^{EG}_{ei}(k^{EG}_{ii})^{-1}k^{EG}_{ie}$ **Stabendgelenk einführen (SG)**  $k^{SG}_{loc} = k_{ee} - k_{ei}k^{-1}_{ii}k_{ie}$ wobei k^{EG} = assemblierte Steifigkeitsmatrix der Elementgruppe	k_{loc} $k_{glob} = R^T k_{loc} R$	**V5** 31-33 39-40 **V6** 18,19 20-24 **V5** 43,45	**K5** 14,15 27,28 37,38 **K6** 5 **K5** 16,17 39,40 **K6** 8 H5+H6 K5+K6
	Elementlastvektor **Tabelle**  **oder** **Statische Kondensation** beginnt mit volleingespannten Grössen **Elementgruppe (EG)**  $P^{EG}_{loc} = P^{EG}_{loc} - k^{EG}_{ei}(k^{EG}_{ii})^{-1}P^{EG}_{i}$ **Stabendgelenk einführen (SG)**  $P^{SG}_{loc} = P_{loc} - k_{ei}k^{-1}_{ii}P_i$ wobei k^{EG}, P^{EG} = assemblierte Steifigkeitsmatrix bzw. Elementlastvektor der Elementgruppe	P^{int}_{loc} $P^{int}_{glob} = R^T P^{int}_{loc}$	**V6** 6-9 **V6** 18,19	**K6** 5 H5+H6 K6
2	**Systemknotenlastvektor** Alle in den Knoten angreifenden Lasten in Komponenten entlang den DOF aufteilen Aufsummierung der Lastkomponenten für jeden ungehaltenen DOF	F^N_{glob} F^N_{sys} (Assembl.)	**V5** 53	**K5** 20 41
3	**Systemelementlastvektor** Aufsummierung der Lastkomponenten für jeden ungehaltenen DOF	P^{int}_{sys} (Assembl.)		H5+H6 K6
4	**Systemlastvektor** $F_{sys} = F^N_{sys} - P^{int}_{sys}$	F_{sys}		**K5** 20 H5+H6 K6
5	**Systemsteifigkeitsmatrix** Aufsummierung aller Steifigkeitskomponenten für jeden ungehaltenen DOF	K_{sys} (Assembl.)	**V5** 47-50	**K5** 18,19 42-46
6	**Federn** Federn auf der Diagonalen von K_{sys} im entsprechenden DOF addieren	(Assembl.)	**V6** 16,17	H6 K6
7	**Systemdeformationen** **Normal** $K_{sys}U_{sys} = F_{sys}$ $U_{sys} = K^{-1}_{sys}F_{sys}$ **Statische Kondensation** $K^*_{sys,ee}U_e = F^*_{sys,e}$ $K^*_{sys,ee} = K_{sys,ee} - K_{sys,ei}(K_{sys,ii})^{-1}K_{sys,ie}$ $F^*_{sys,e} = F_{sys,e} - K_{sys,ei}(K_{sys,ii})^{-1}F_{sys,i}$ $U_e = (K^*_{sys,ee})^{-1}F_{sys,e}$ $U_i = (K_{sys,ii})^{-1}F_{sys,i} - (K_{sys,ii})^{-1}K_{sys,ie}U_e$ $U_{sys} = [U_e; U_i]^T$	U_{sys}	**V5** 59	**K5** 22 48,49 H6 K6
8	**Nachrechnung Stabgrössen für jeden Stab** $u_{glob}(DOF) = U_{sys}$ $u_{loc} = Ru_{glob}$ $f_{loc} = k_{loc}u_{loc} + P^{int}_{loc}$ $f_{glob} = R^T f_{loc}$	u_{loc} f_{loc} f_{glob}	**V5** 61	**K5** 23-25 50-54 H5+H6 K5+K6
9	**Auflagerreaktionen** Aufsummierung aller f_{glob}-Komponenten entlang der gehaltenen DOF $\rightarrow F_R$	F_R (Assembl.)	**V6** 4,5	H6 K6

Version 1.01: 19.04.2018

Manipulation der Gleichgewichtsgleichung mittels statischer Kondensation

Ausgangslage Gleichgewicht	Aufteilen in zwei Gleichungen	Gleichgewicht am kondensierten System
$$\underset{K}{\begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ei} \\ K_{ie} & K_{ii} \end{bmatrix}} * \underset{u}{\begin{bmatrix} u_e \\ u_i \end{bmatrix}} + \underset{P}{\begin{bmatrix} P_e \\ P_i \end{bmatrix}} = \underset{F}{\begin{bmatrix} F_e \\ F_i \end{bmatrix}}$$ Wahl von internen DOF (i) deren Anteile zwar in den *-Grössen enthalten sind, aber nicht mehr explizit als DOF auftreten.	$K_{ee}u_e + K_{ei}u_i + P_e = F_e$ $K_{ie}u_e + K_{ii}u_i + P_i = F_i$ $u_i = K^{-1}_{ii}(F_i - P_i - K_{ie}u_e)$ (umformen und einsetzen)	$\boxed{K^*_{ee}u_e + P^*_e = F^*_e}$ Lösung liefert Deformationen an den verbleibenden externen DOF (e). $K^*_{ee} = K_{ee} - K_{ei}K^{-1}_{ii}K_{ie}$ mit $P^*_e = P_e - K_{ei}K^{-1}_{ii}P_i$ $F^*_e = F_e - K_{ei}K^{-1}_{ii}F_i$ (Umlagerungsbeziehungen)