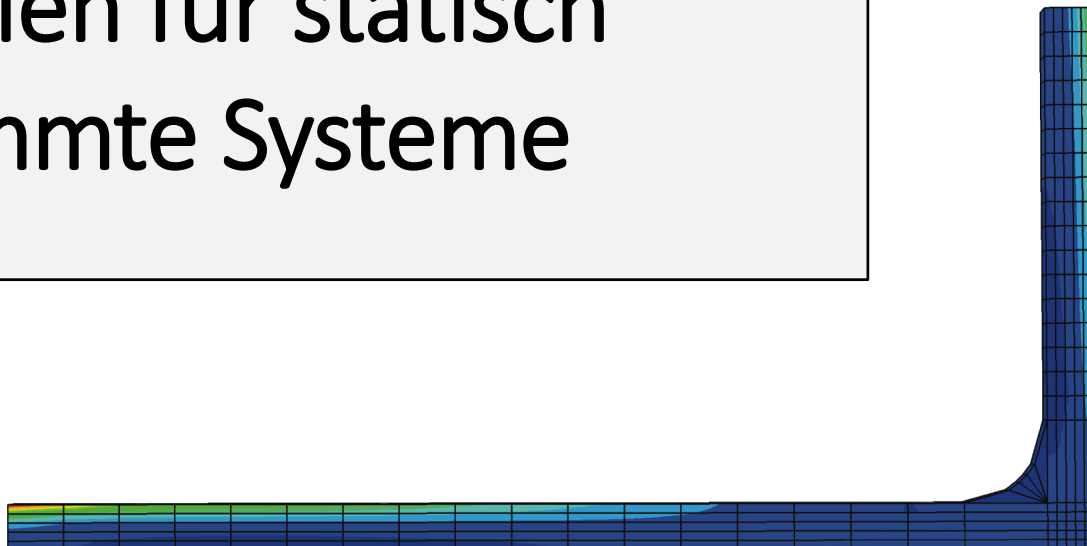
Baustatik II

Kapitel IV

Einflusslinien für statisch unbestimmte Systeme



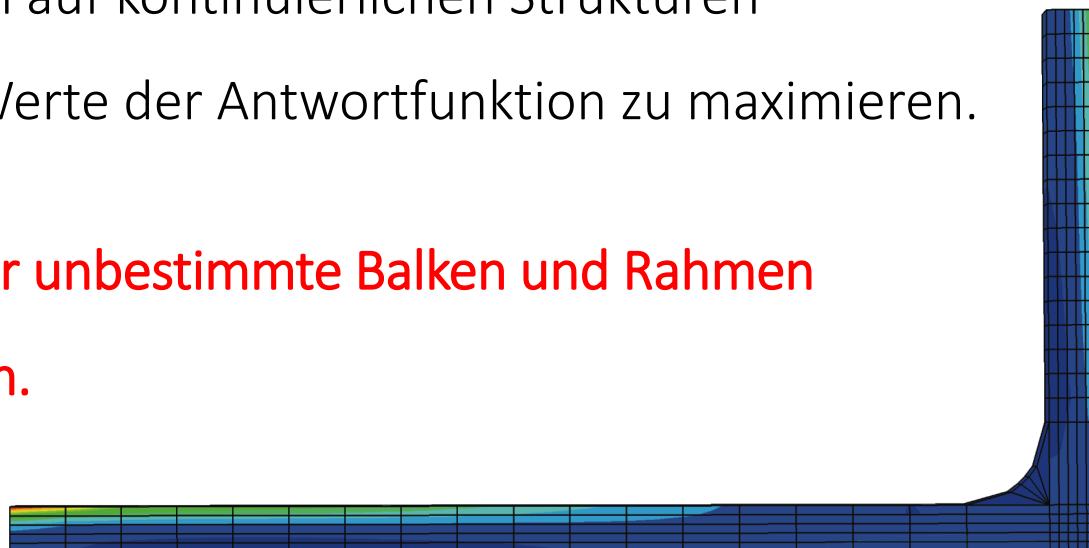
Lernziele dieses Kapitels

1. Sich mit der Form von Einflusslinien für die Stützreaktionen und innere Kräfte in Durchlaufträger und Rahmen vertraut machen.

2. Die geeignete Form von Einflusslinien für unbestimmte Balken und Rahmen qualitativ skizzieren zu können.

3. Wie man verteilte Nutzlasten auf kontinuierlichen Strukturen positionieren muss um die Werte der Antwortfunktion zu maximieren.

Nicht diskutiert: Einflusslinien für unbestimmte Balken und Rahmen quantitativ berechnen zu können.

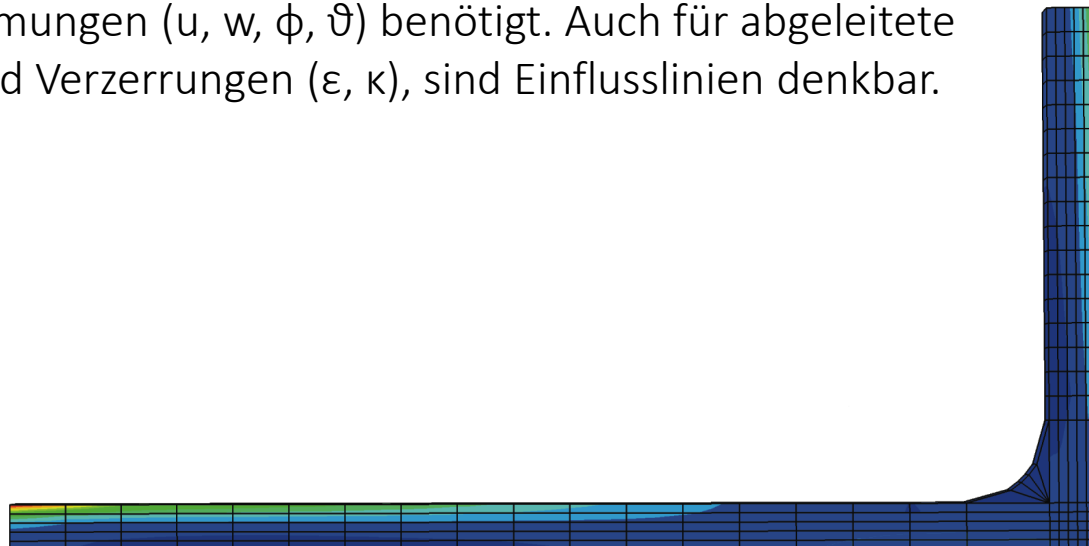


Einflusslinien

Eine Einflusslinie unterscheidet sich begrifflich wesentlich von einer Zustandslinie. Die Zustandslinie gibt die Werte einer bestimmten Zustandsgröße **Z**, z.B. eines Biegemoments, in allen Systempunkten infolge einer vorgegebenen ortfesten Beanspruchung an.

Die Einflusslinie dagegen beschreibt den Einfluss einer Einheitslast mit variablem Angriffspunkt k auf eine Zustandsgröße Z an einem bestimmten Punkt i des gegebenen Systems.

Einflusslinien werden sowohl für Schnittgrößen (M, Q, N, MT) und entsprechende Auflagerreaktionen als auch für Verformungen (u, w, ϕ, ϑ) benötigt. Auch für abgeleitete Größen, wie z.B. Spannungen (σ, τ) und Verzerrungen (ε, κ), sind Einflusslinien denkbar.

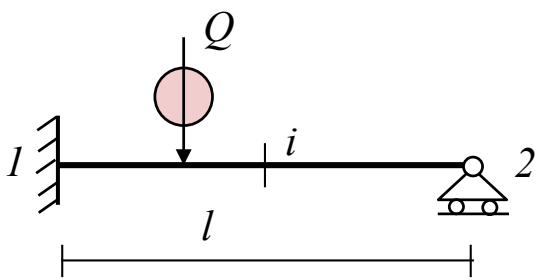


Einflusslinien

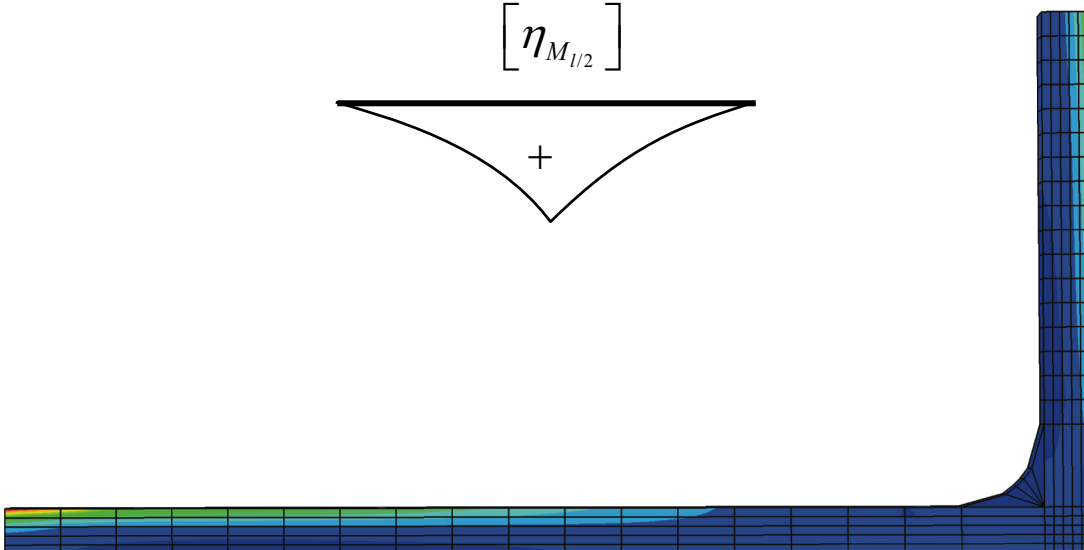
Definition: *Einflusslinie für eine Zustandsgrösse S_i an der Stelle i*

Einflusslinien zeigen den Einfluss einer wandernden Last $Q=1$ auf eine bestimmte Zustandsgrösse. Die Einflussordinate beschreibt den funktionalen Verlauf des Einflusses einer Einzelkraft $Q=1$ in einer festgelegten Wirkungsrichtung an einer beliebigen Stelle k auf eine Zustandsgrösse S_i an der Stelle i.

Aus der Verbindung sämtlicher Einflussordinaten η_{ik} ergibt sich die Einflusslinie für eine Zustandsgrösse S_i an der Stelle i.



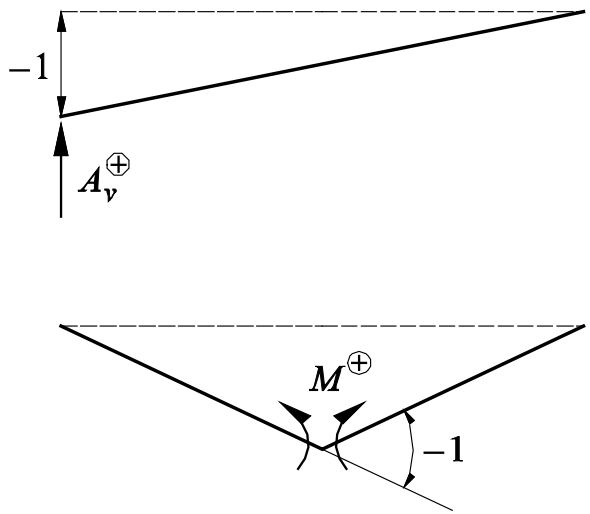
tatsächliches System mit der wandernden Einheitslast

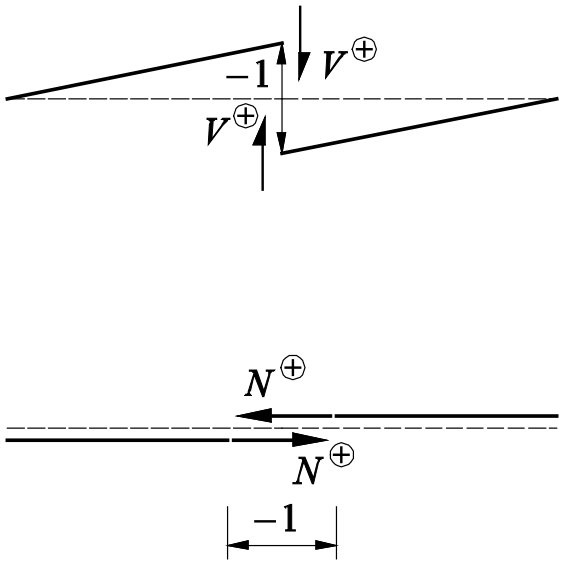


Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

Methode nach Land (kinematische Ermittlung)
Einführen einer Verformung $\delta=-1$ am Ort und in Richtung von S_i. Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{Si}.

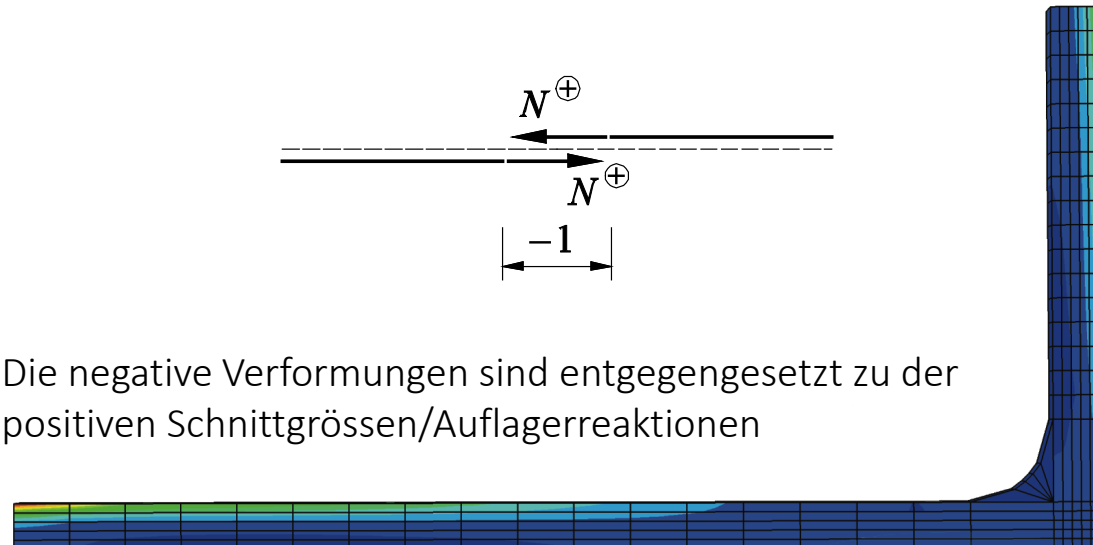
Positive Schrittgrössen und entsprechende Einheitsverschiebungen:





⊕ zeigt die positive Orientierung jeder Zustandsgrösse nach der klassischen Konvention

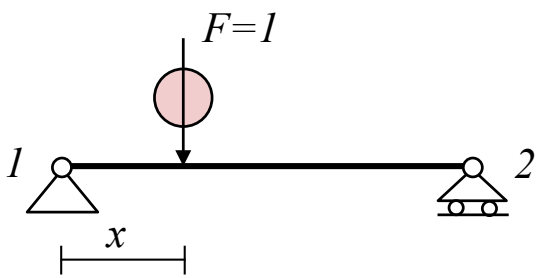
Die negative Verformungen sind entgegengesetzt zu der positiven Schnittgrössen/Auflagerreaktionen



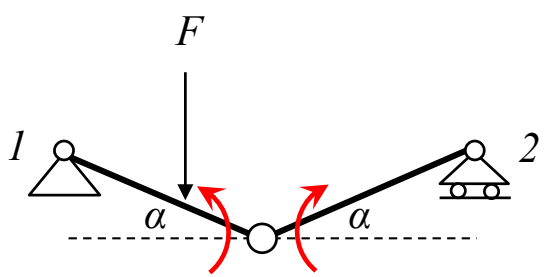
Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

Beispiel – einfacher Balken

Berechnung der Einflusslinie für das Biegemoment in der Feldmitte



tatsächliches System mit der wandernden Einheitslast



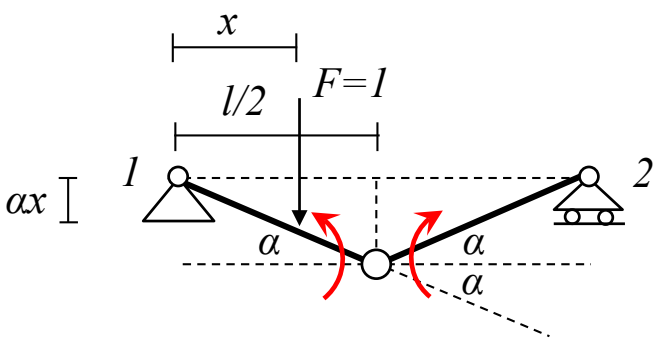
modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse

Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

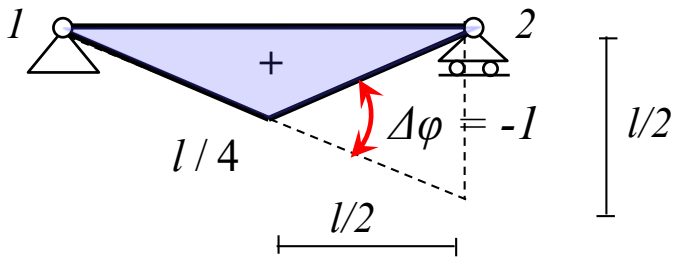
Methode 1: Methode nach Land (kinematische Ermittlung)
Einführen einer Verformung δ=-1 am Ort und in Richtung von S_i . Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{Si}.

Beispiel – einfacher Balken: Einflusslinie für das Biegemoment (bei *l/2*)

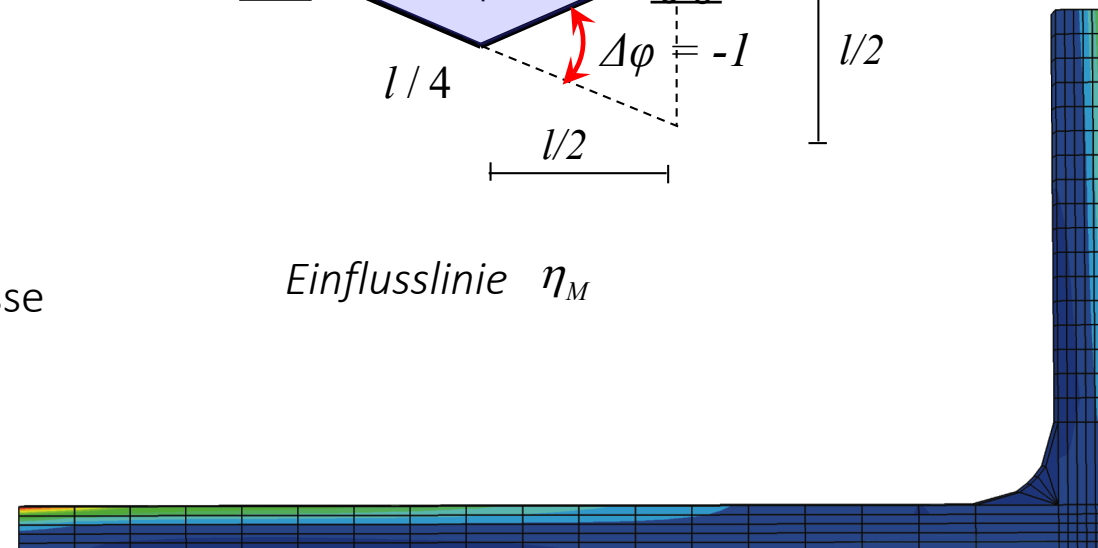
Berechnung der Einflusslinie für das Biegemoment in der Feldmitte aus der Geometrie.



modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse



Einflusslinie η_M



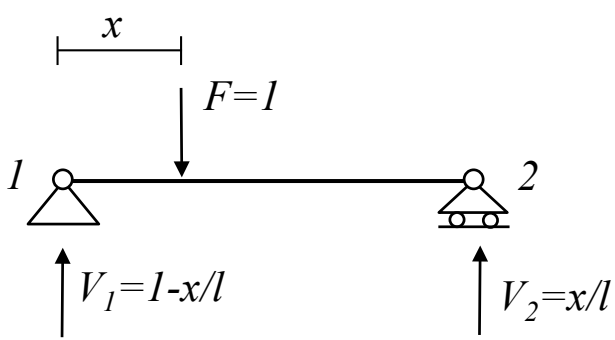
Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

Methode 2: Durch Berechnung des bestimmten Systems

Durch Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen oder des PVA

Beispiel – einfacher Balken: Einflusslinie für das Biegemoment

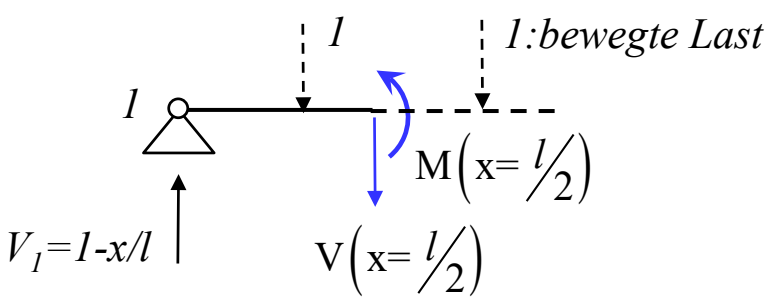
Berechnung der Einflusslinie für das Biegemoment in der Feldmitte *x=l/2*

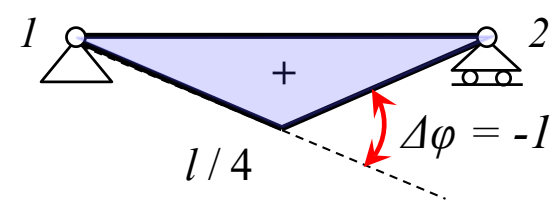


Aus der Gleichgewicht

$$M\left(x=\tfrac{l}{2}\right)=V_1\frac{l}{2}-F\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{x}{2} \quad \text{für} \quad 0\le x\le l/2$$

$$M\left(x=\tfrac{l}{2}\right)=V_1\frac{l}{2}=\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{l}{2} \quad \text{für} \quad l/2\le x\le l$$





Einflusslinie η_M

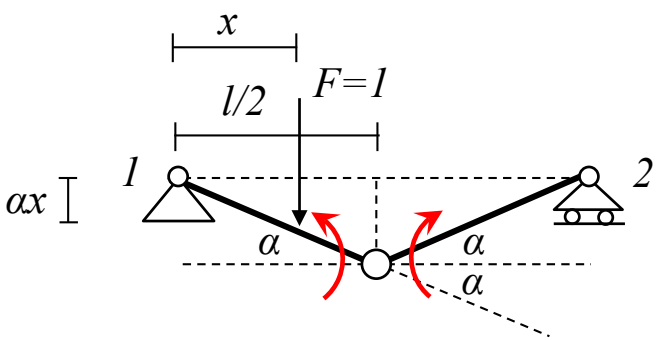
Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

Methode 2: Durch Berechnung des bestimmten Systems

Durch Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen oder des PVA

Beispiel – einfacher Balken: Einflusslinie für das Biegemoment

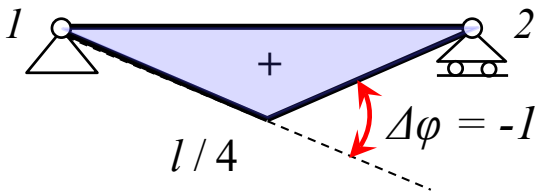
Berechnung der Einflusslinie für das Biegemoment in der Feldmitte



modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse

Aus dem **PVA** folgt

$$W_e = Fxa - 2Ma = 0 \Rightarrow M = \frac{x}{2} \text{ für } 0 \le x \le l/2$$



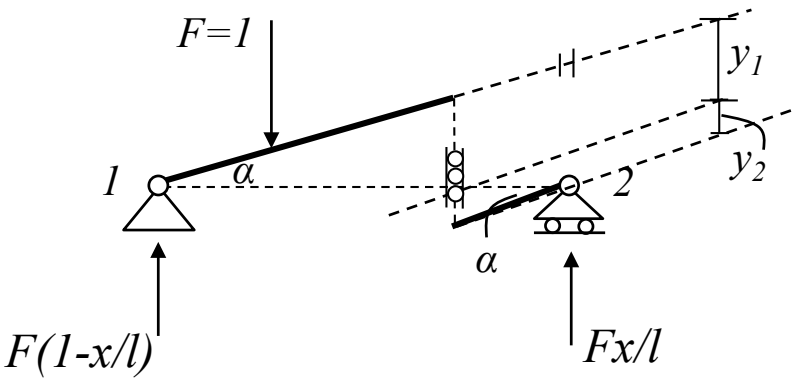
Einflusslinie η_M

Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

Methode 1: Methode nach Land (kinematische Ermittlung):

Berechnung der **Einflusslinie für die Querkraft** an der Stelle $x_V = 3l/4$ durch das Einführen einer Verformung $\Delta = -1$ am Ort und in Richtung von V_i . Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{Vi}

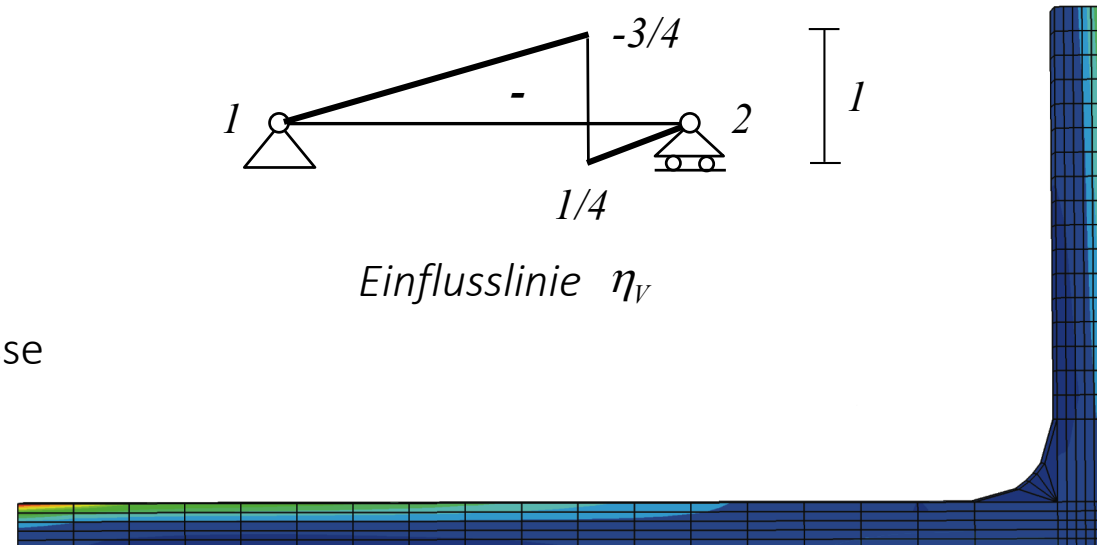
Berechnung der Einflusslinie für die Querkraft an der Stelle $x_V = 3l/4$ aus der Geometrie.



$$y_1 + y_2 = 1,\ \ y_1 = \tan a \frac{3l}{4},\ \ y_2 = \tan a \frac{l}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{3l}{4}, y_2 = \frac{l}{4}$$

Einflusslinie η_V

modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse



Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

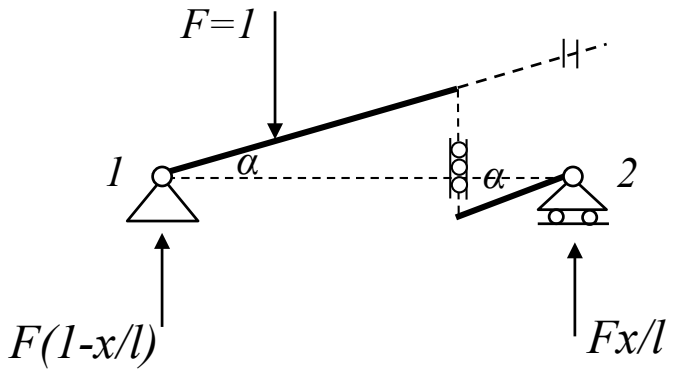
oder durch Verwendung der PVA

$$Fax - V(a3l/4 + al/4) = 0 \xrightarrow{F=1} V = \frac{x}{l} \text{ für } 0 \le x \le 3l/4$$

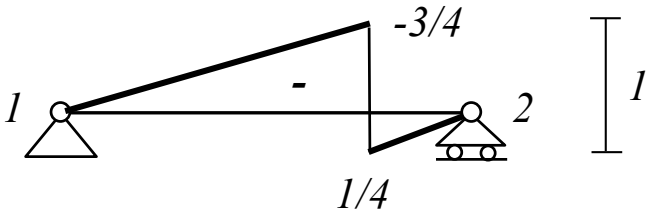
$$Fa(l-x) - V(a3l/4 + al/4) = 0 \xrightarrow{F=1} V = 1 - \frac{x}{l} \text{ für } 3l/4 \le x \le l$$

Beispiel – einfacher Balken

Berechnung der Einflusslinie für die Querkraft an der Stelle $x_V = 3l/4$



modifiziertes System mit zugeordnetem Mechanismus zur gesuchten Schnittgrösse



Einflusslinie η_V

Einflusslinien

Einflusslinien für Verformungen

Definition*: Einflusslinie für eine Verformung* $\boldsymbol{\delta}$ *in* i

$\eta_{\delta_i} = \delta_{ix}$ **EL** (Einflusslinie) für δ_i in i

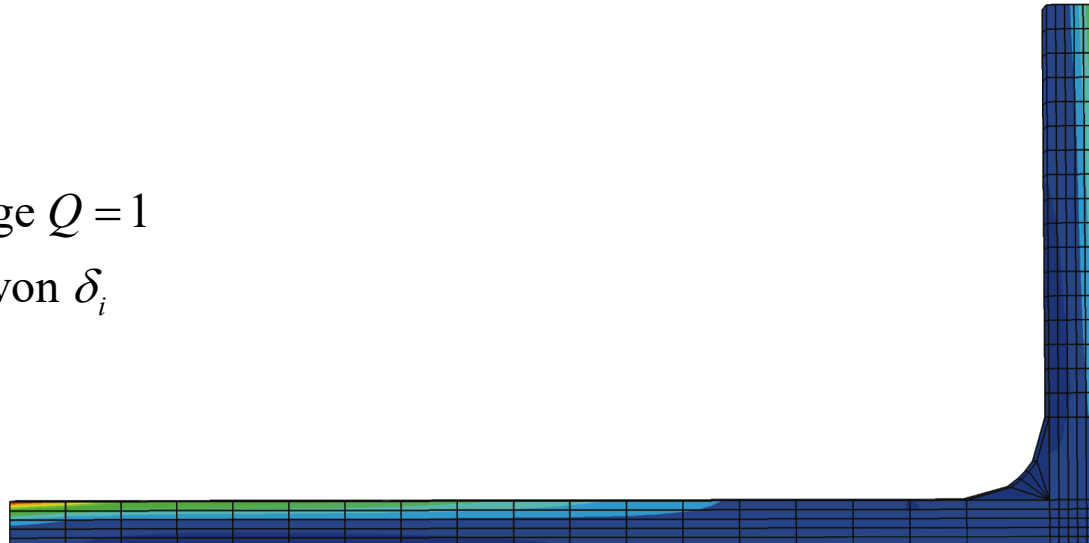
δ_{xi} **BL** (Biegelinie) infolge $Q=1$ am Ort und in Richtung von δ_i

(1. Index: Ort und Richtung, 2. Index: Ursache)

Maxwell $\rightarrow$ $\delta_{xi} = \delta_{ix}$

EL für δ_i in $i \equiv BL$ infolge $Q = 1$

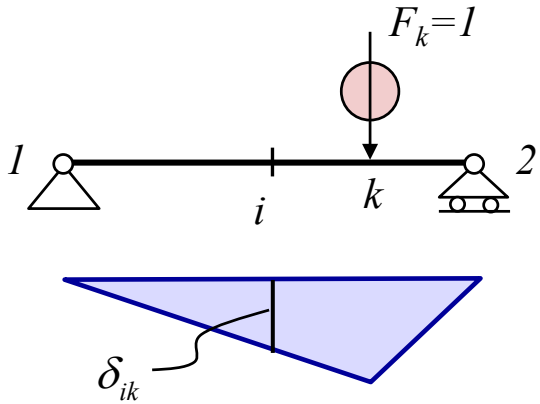
am Ort und in Richtung von δ_i

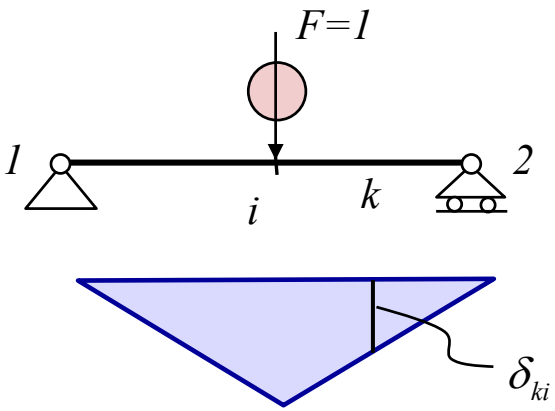


Einflusslinien an statisch bestimmten Systemen

Einflusslinien für Verformungen

Beispiel – einfacher Balken

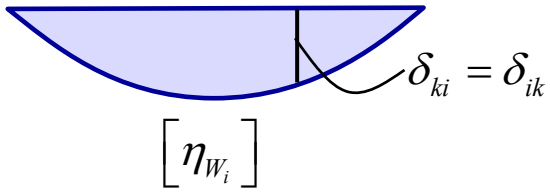




Die Ermittlung von Einflusslinien für die Verformung bzw Verdrehung lässt sich mithilfe des Satzes von Maxwell bewerkstelligen.

$$\delta_{ki} = \delta_{ik} \Rightarrow EL \equiv BL \text{ infolge F=1 @Punkt i}$$

Einflusslinie für die Durchbiegung

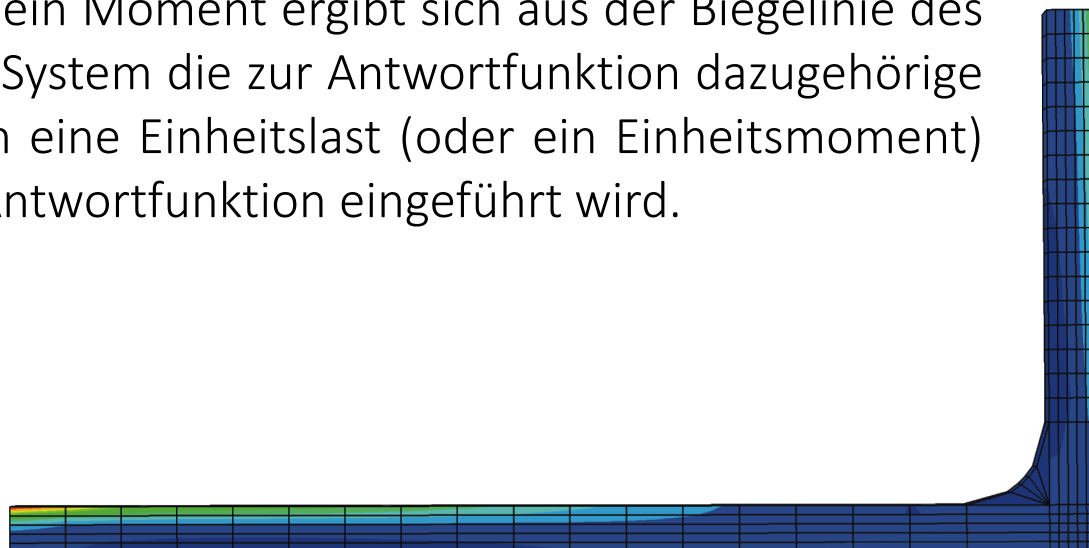


Einflusslinien an statisch unbestimmten Systemen

Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen: Prinzip von Müller-Breslau (oder Land)

In vielen praktischen Anwendungen ist es normalerweise ausreichend nur die qualitativen Einflusslinien zu zeichnen. So kann man entscheiden wo die Nutzlasten platziert werden sollen, um die relevanten Antwortfunktionen zu maximieren. Das Müller-Breslau-Prinzip bietet ein einfaches Verfahren zum Aufbau der qualitativen Einflusslinien, der wie folgt angegeben wird:

Die Einflussline für eine Kraft oder ein Moment ergibt sich aus der Biegelinie des Systems, wobei im ursprünglichen System die zur Antwortfunktion dazugehörige Bindung gelöst wird und zusätzlich eine Einheitslast (oder ein Einheitsmoment) im Punkt und in der Richtung der Antwortfunktion eingeführt wird.



Einflusslinien an statisch unbestimmten Systemen

Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen: Prinzip von Müller-Breslau

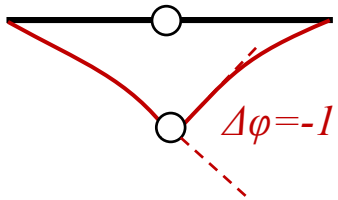
Das Verfahren zum Konstruieren von qualitativen Einflusslinien für unbestimmte Strukturen ist:

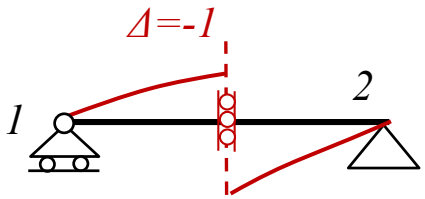
(1) Der Struktur die Bindung entfernen, welche zur gefragten Antwortfunktion gehört,

(2) eine negative Einheitsverschiebung oder Rotation auf die entbundene Struktur in der gewünschten Antwortfunktionsrichtung einführen

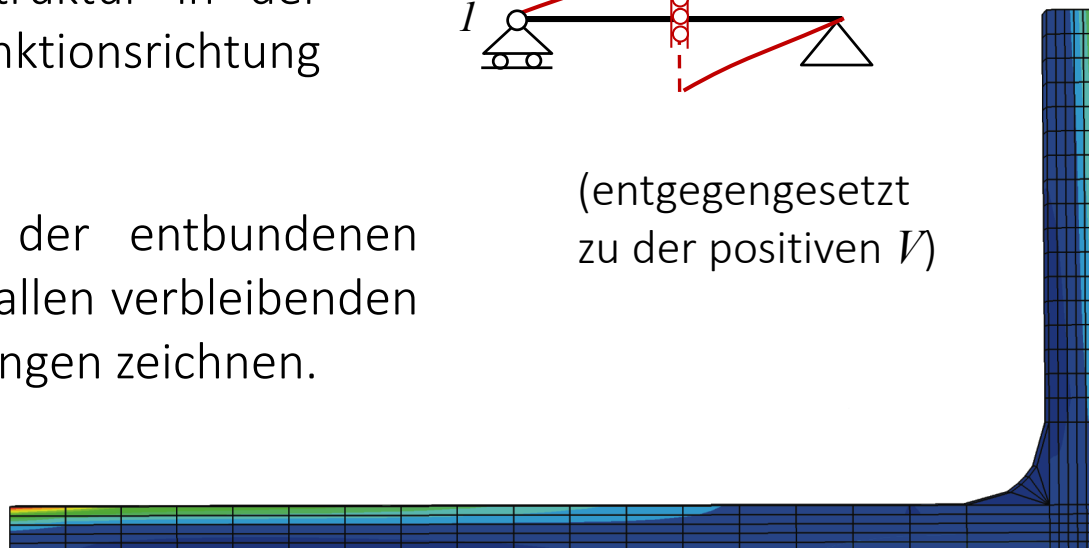
(3) die qualitative Einflusslinie der entbundenen Struktur in Übereinstimmung mit allen verbleibenden Auflager- und Kontinuitätsbedingungen zeichnen.

(entgegengesetzt zu der positiven M)





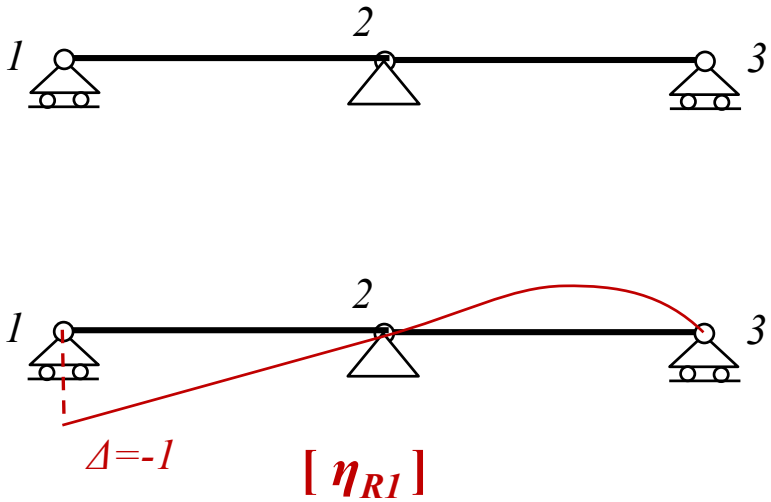
(entgegengesetzt zu der positiven V)



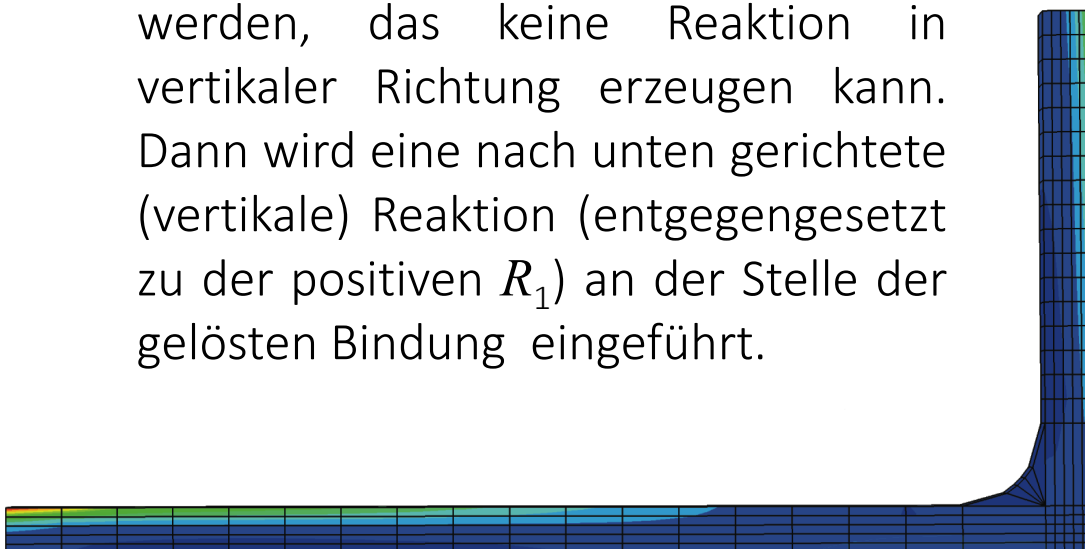
Einflusslinien an statisch unbestimmten Systemen

Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen: Prinzip von Müller-Breslau

Um zu verstehen, wie sich der Balken infolge einer spezifischen Funktion (z.B. M,Q,N) verformt, ist es nötig, dem Balken diesen Widerstand zu nehmen.



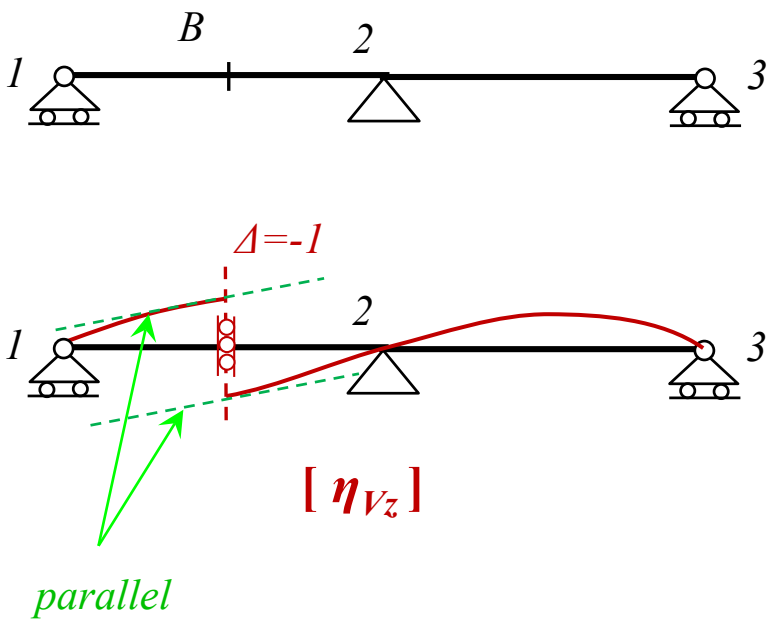
Um die Auflagerreaktion zu bestimmen, muss das Auflager durch ein entsprechendes Auflager ersetzt werden, das keine Reaktion in vertikaler Richtung erzeugen kann. Dann wird eine nach unten gerichtete (vertikale) Reaktion (entgegengesetzt zu der positiven R_1) an der Stelle der gelösten Bindung eingeführt.



Einflusslinien an statisch unbestimmten Systemen

Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen: Prinzip von Müller-Breslau

Um zu verstehen, wie sich der Balken infolge einer spezifischen Funktion (z.B. M,Q,N) verformt, ist es nötig, dem Balken diesen Widerstand zu nehmen.



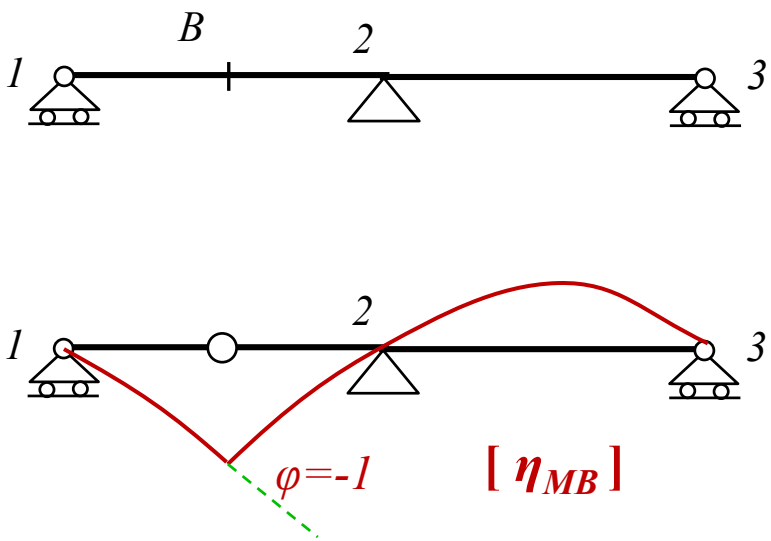
Um die Querkraft an einem Punkt B entlang des Balkens zu bestimmen, schneide den Balken an der Stelle B frei und führe ein Rolllager ein, welches Momente aber keine Querkräfte aufnehmen kann.

Dann führe eine negative Verformung Δ=-1 (entgegengesetzt zu der positiven V_z) an diesem Punkt ein und zeichne die Verformungsfigur. Daraus resultiert eine kontinuierliche Einflusslinie.

Einflusslinien an statisch unbestimmten Systemen

Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen: Prinzip von Müller-Breslau

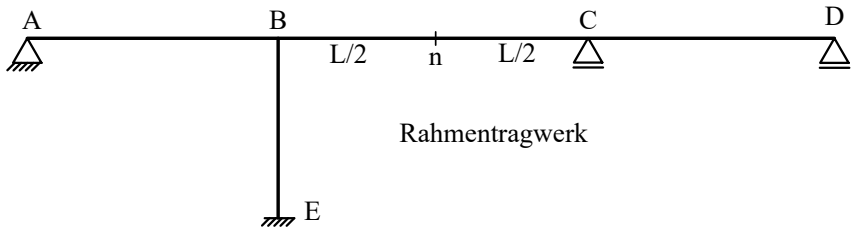
Um zu verstehen, wie sich der Balken infolge einer spezifischen Funktion (z.B. M,Q,N) verformt, ist es nötig, dem Balken diesen Widerstand zu nehmen.

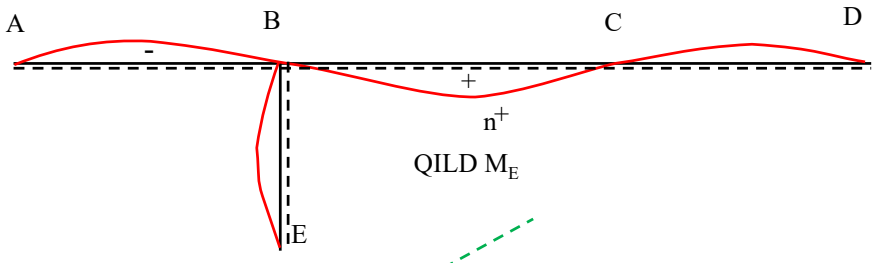


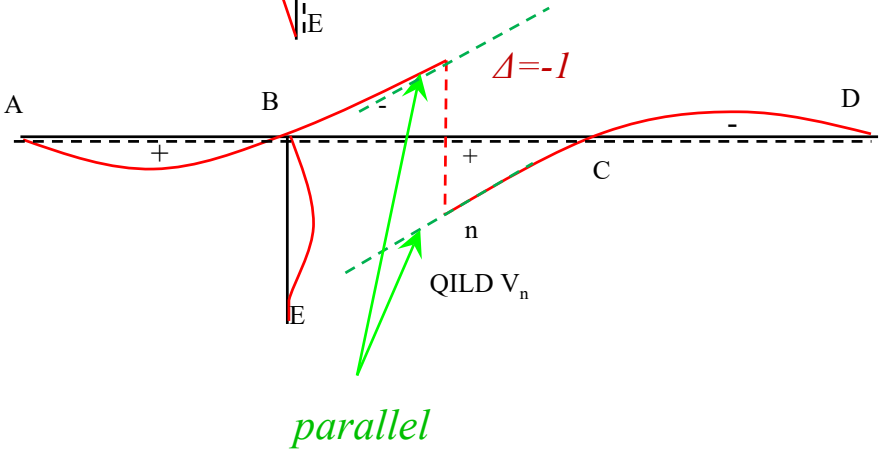
Um das Moment an einem Punkt B entlang des Balkens zu bestimmen, schneide den Balken an der Stelle B frei und führe ein Gelenk ein, welches Querkräfte aber keine Momente aufnehmen kann.

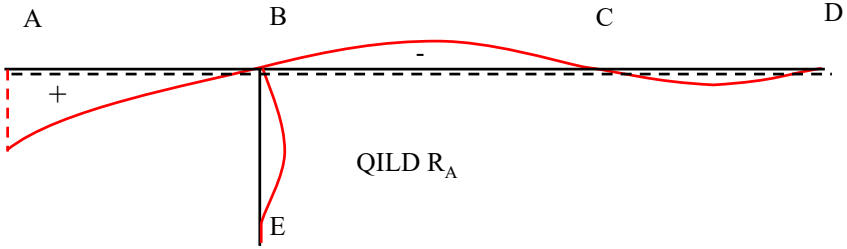
Dann führe eine negative Verformung ϕ=-1 (entgegengesetzt zu der positiven M_B) an diesem Punkt ein und zeichne die Verformungsfigur. Das Resultat ist die Einflusslinie.

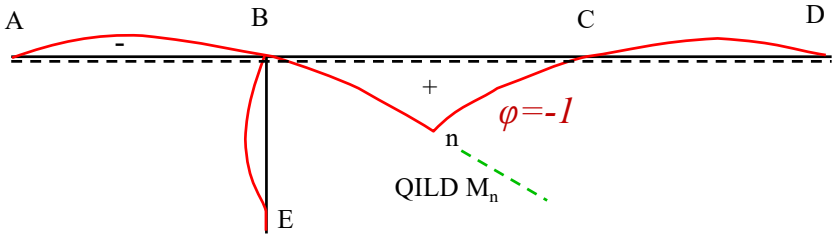
Qualitative Einflusslinien für statisch unbestimmte Strukturen:

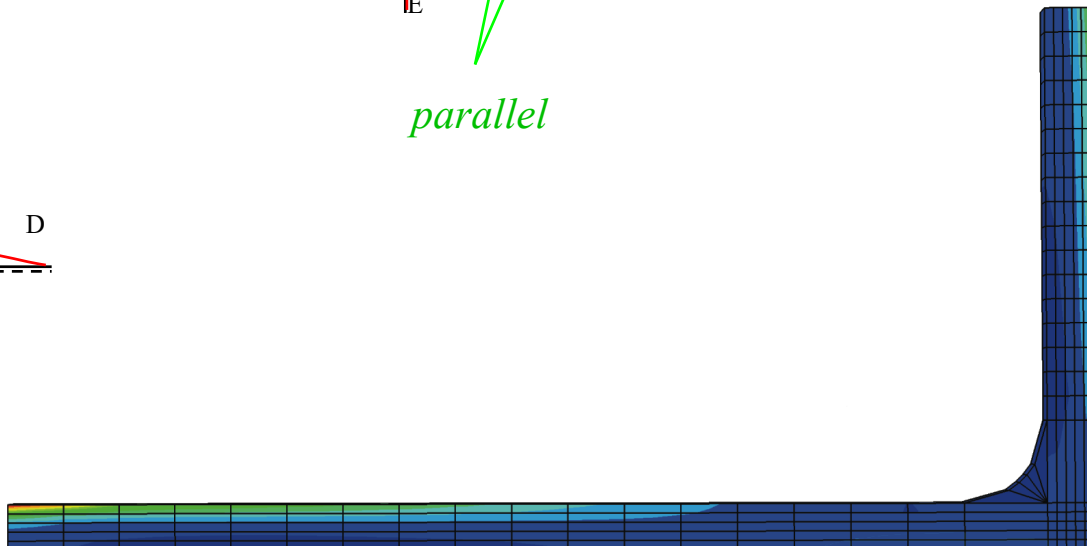




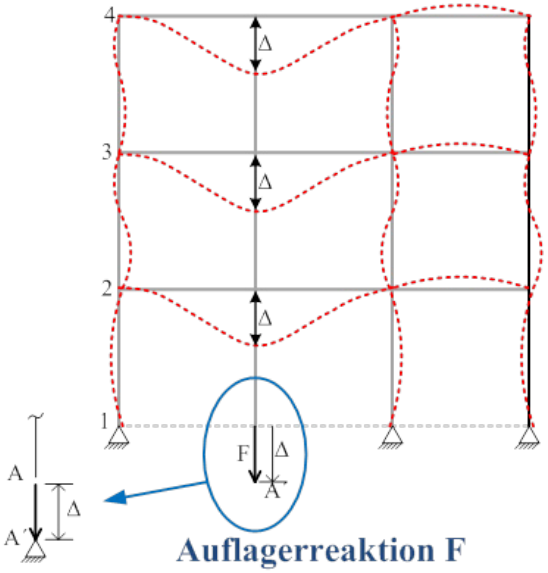


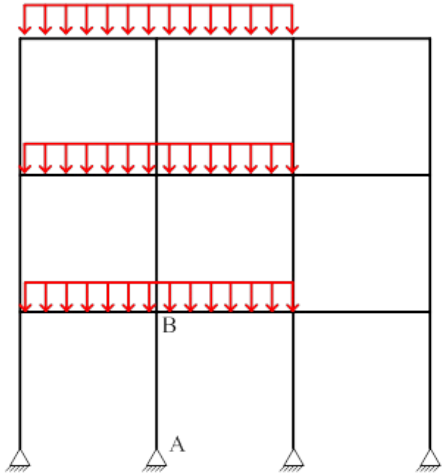


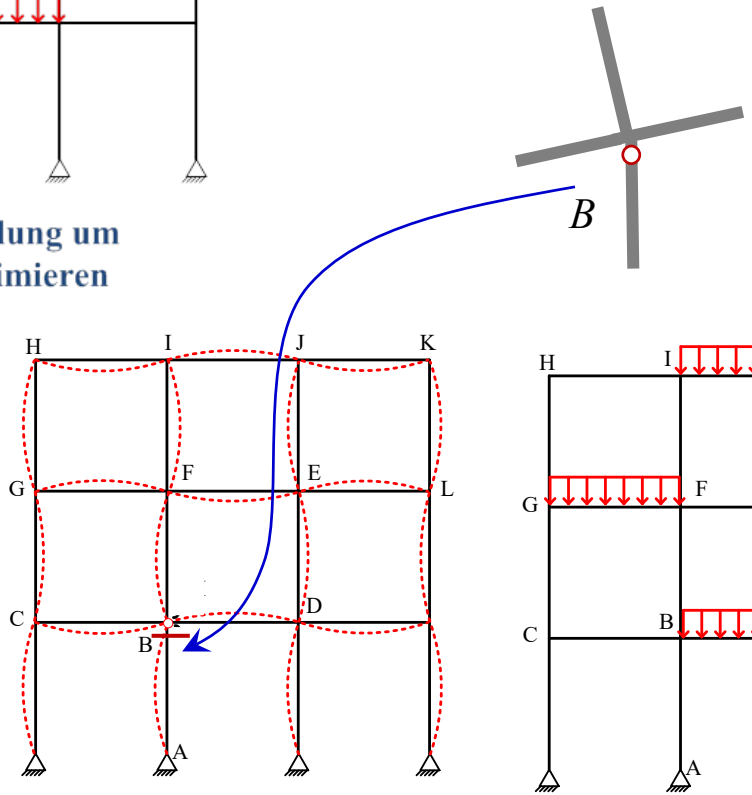




Positionierung von verteilten Nutzlasten

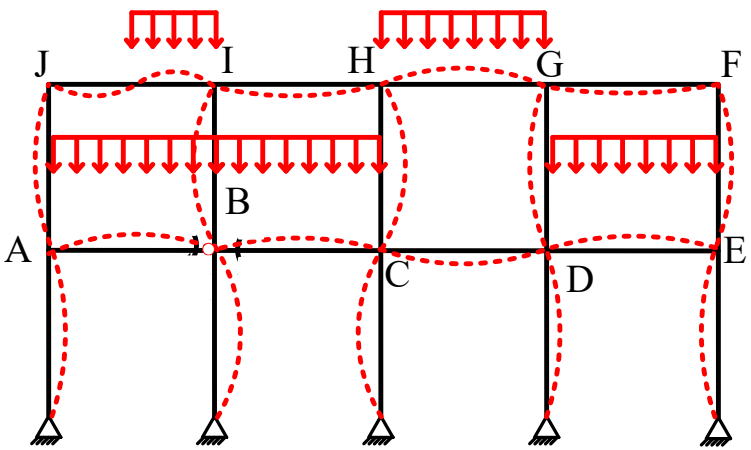




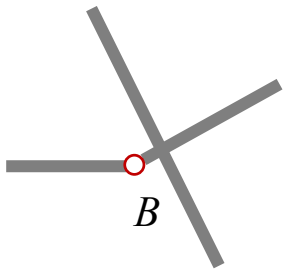


- für Einzellasten Q_k : $S_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot \eta_{ik}$
- für verteilte Lasten q : $S_i = \int q(x) \cdot \eta_i(x) \cdot \mathrm{d}x$

Positionierung von verteilten Nutzlasten

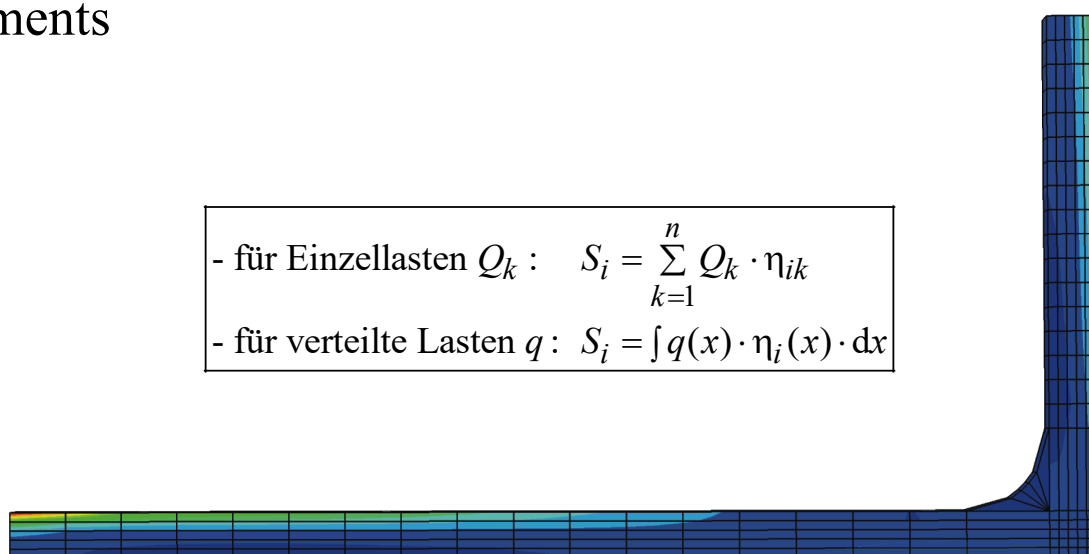


Qualitative EI und Lastverteilung zur Maximierung des negativen Moments am Balkende $M_{B,links}$



Detail für das Moment am Balkenende $M_{B,links}$

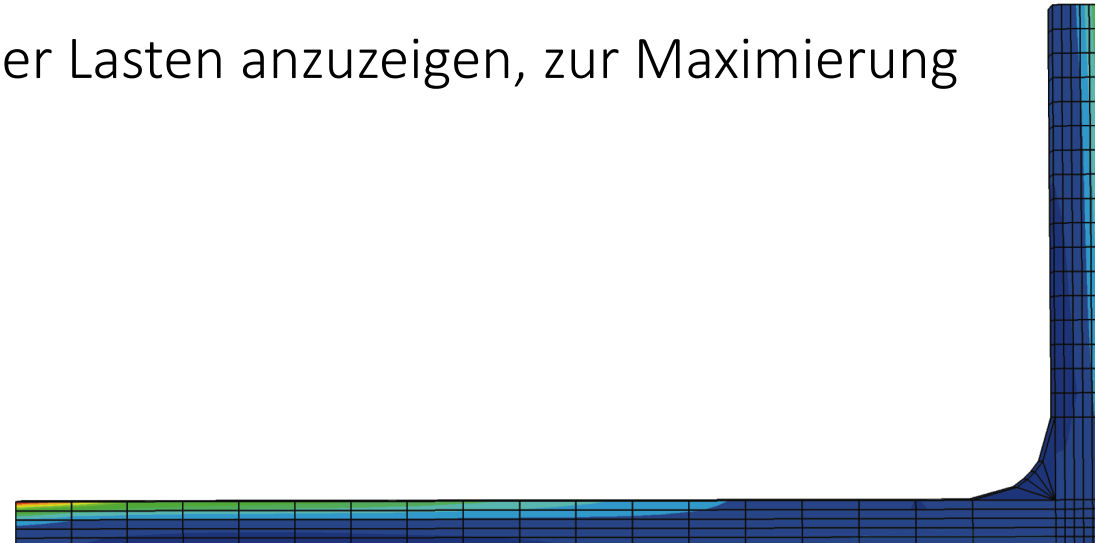
- für Einzellasten Q_k : $S_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k \cdot \eta_{ik}$
- für verteilte Lasten q : $S_i = \int q(x) \cdot \eta_i(x) \cdot \mathrm{d}x$



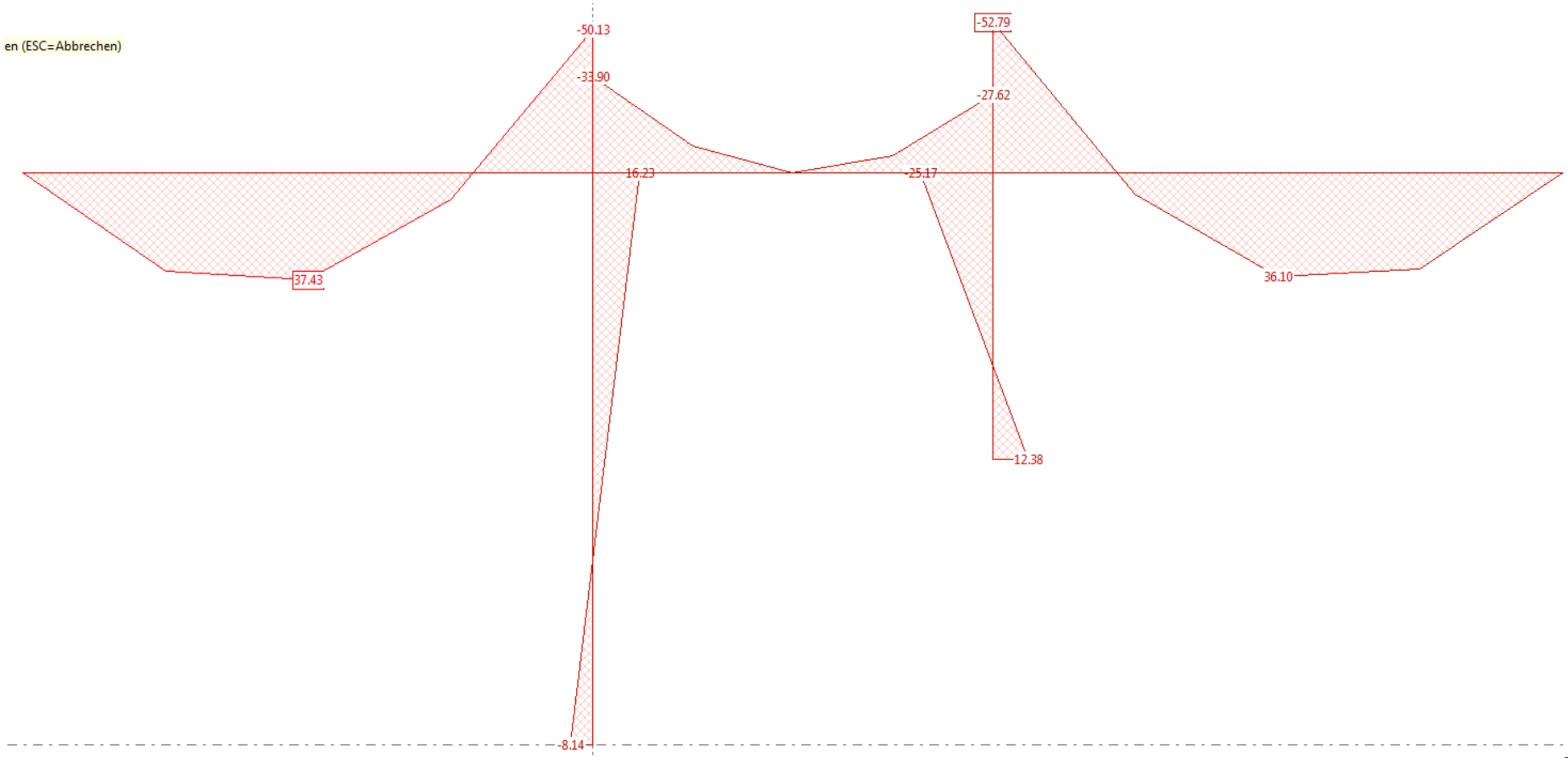
Zusammenfassung dieses Kapitels

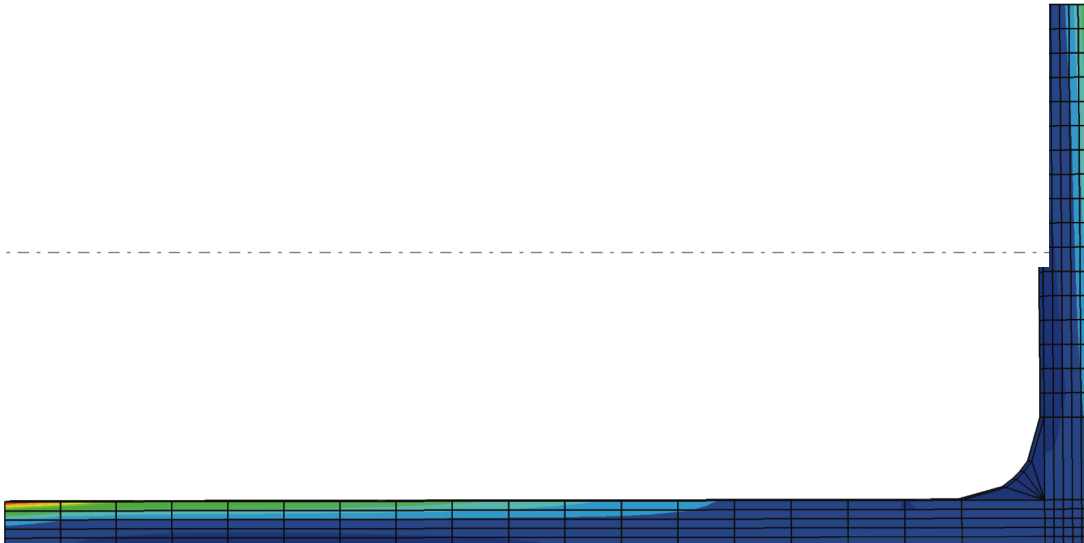
1. Bei der qualitativen Ermittlung von Einflusslinien wird die Methode nach Land verwendet: Einführen einer Verformung $\delta=-1$ am Ort und in Richtung von S_i. Die daraus resultierende Biegelinie entspricht der Einflusslinie η_{Si}

2. Einflusslinien können verwendet werden, um die Platzierung konzentrierter oder verteilter Lasten anzuzeigen, zur Maximierung der Schrittgrößen

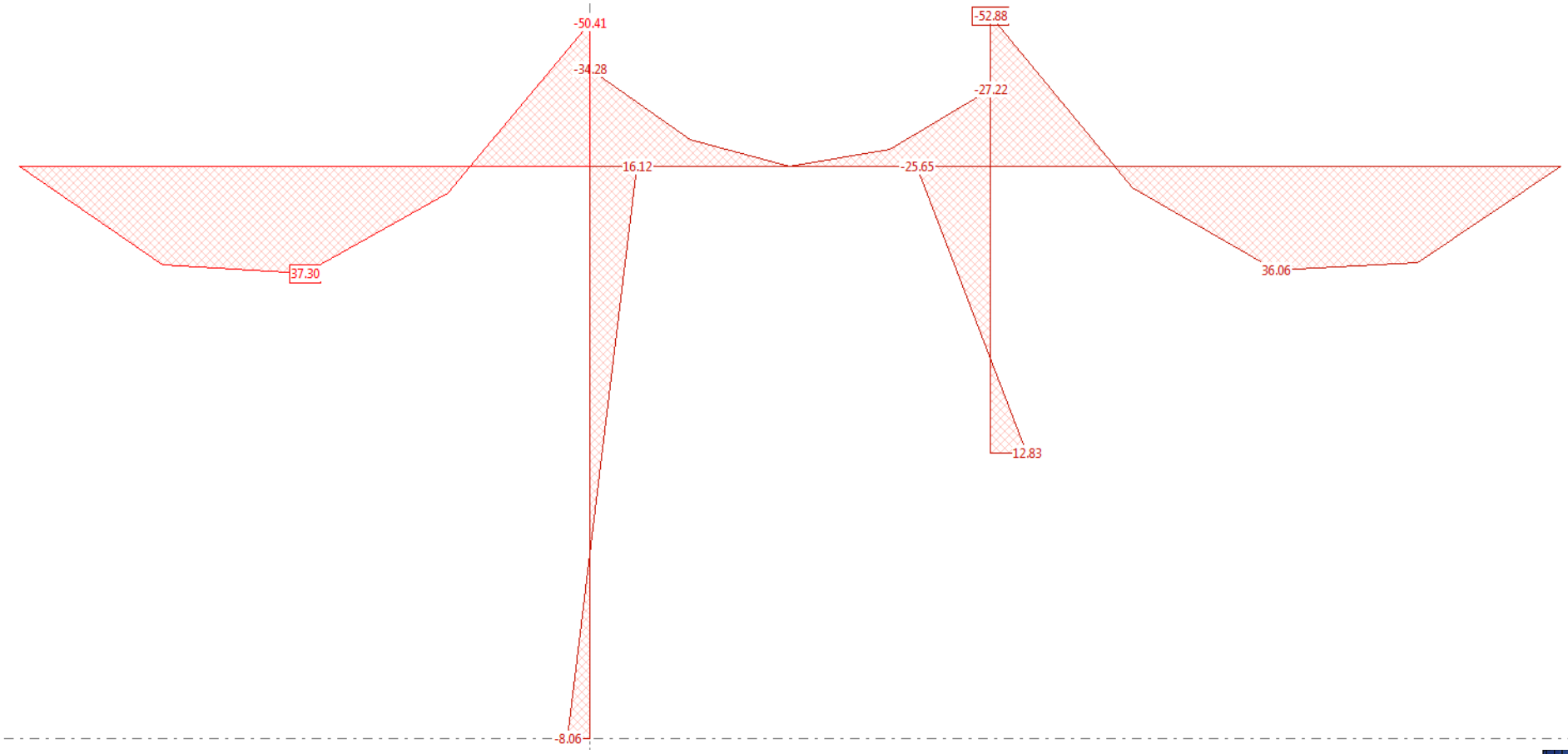


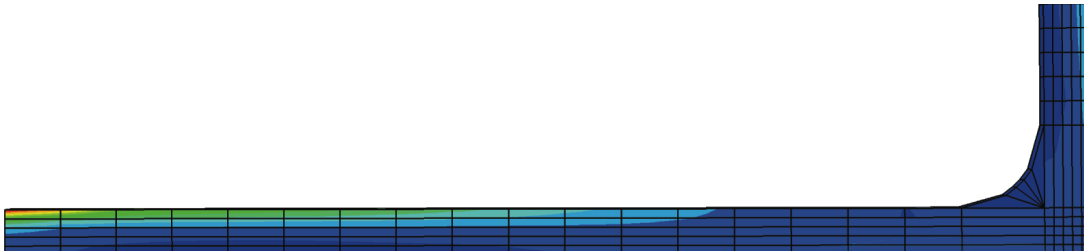
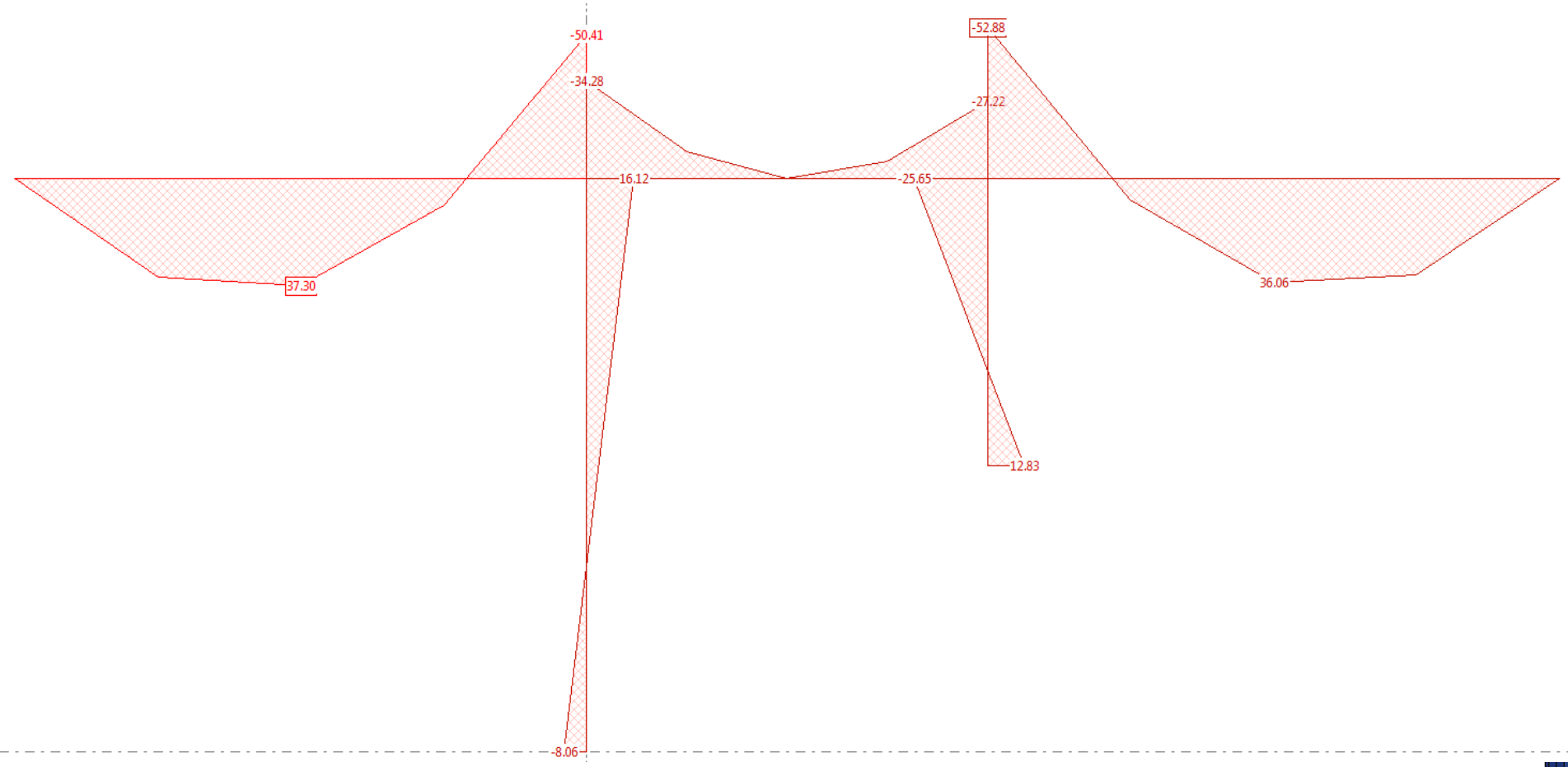
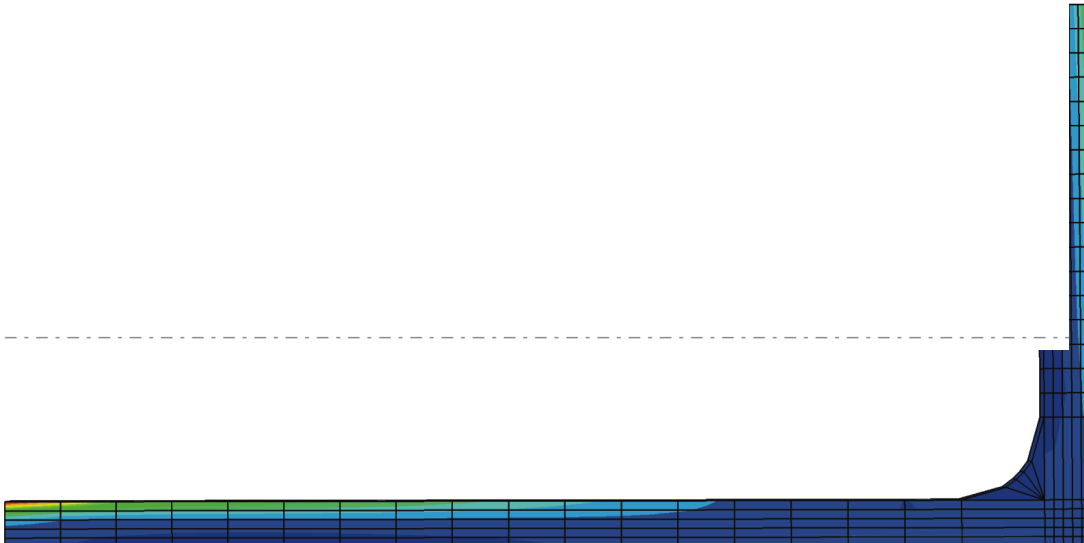
Dehnbahre Stäbe





Dehnstarre Stäbe





Dehn- und Schubstarre Stäbe