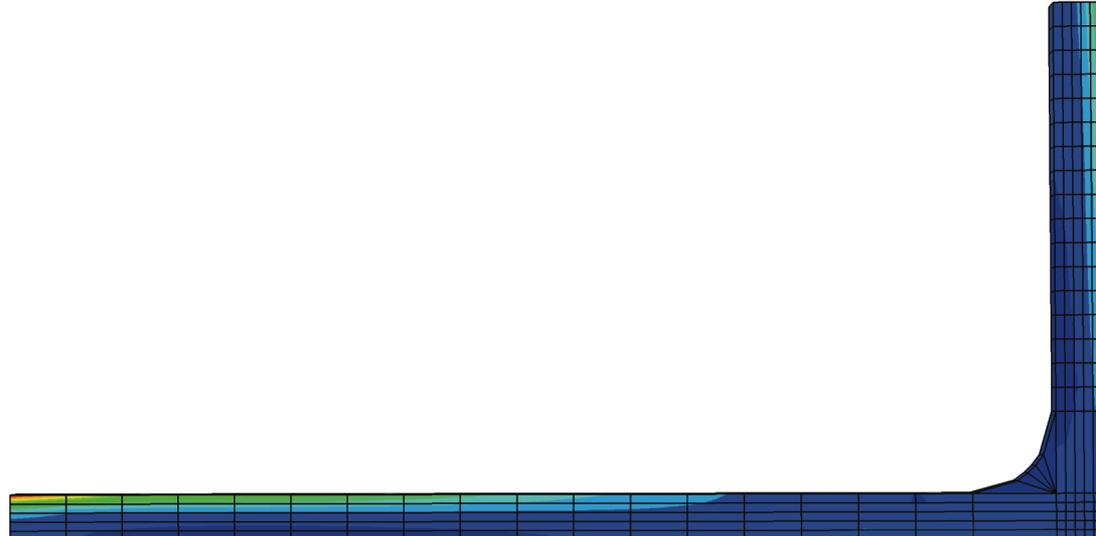


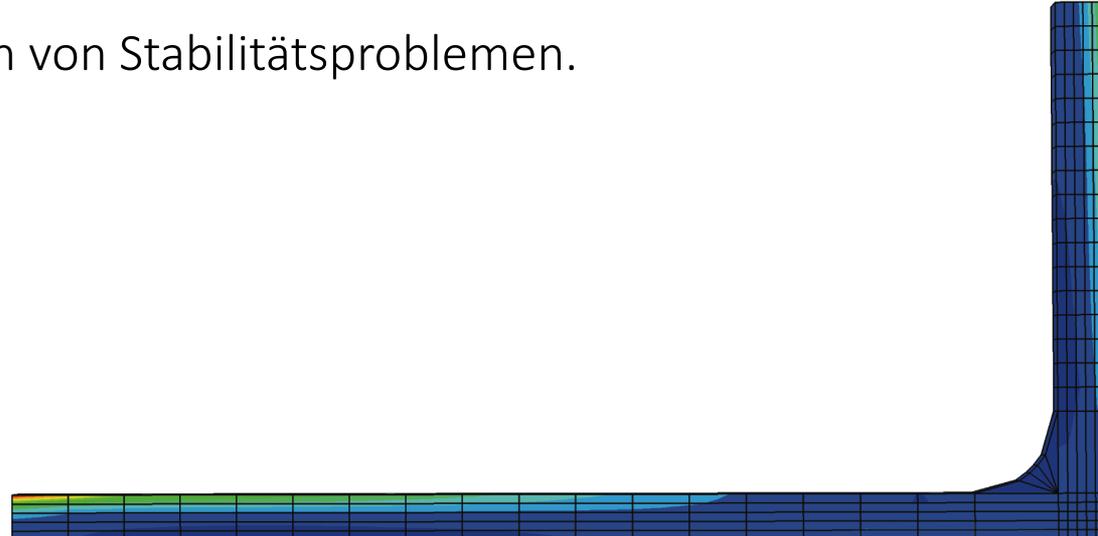
# Kapitel 10

# Stabilitätsprobleme



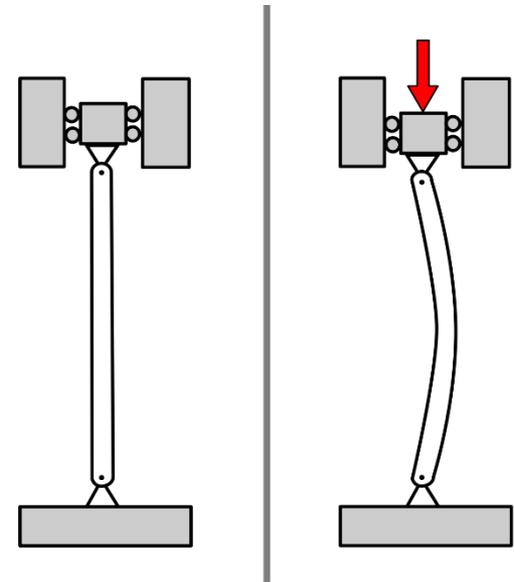
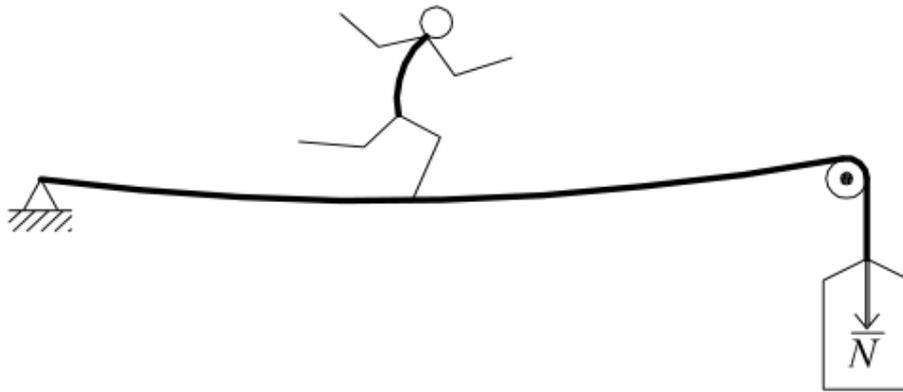
## Lernziele:

- Was ist Stabilität und wann ist ein System stabil
- Stabilitätsprobleme klassifizieren können
- Ausdruck von Stabilität in den Last-Verformungsdiagrammen
- Herleitung der Differentialgleichung nach Theorie 2.Ordnung
- Herleitung der Eulerknickkraft
- Zusammenfassung der Typen von Stabilitätsproblemen.



# Stabilitätsprobleme

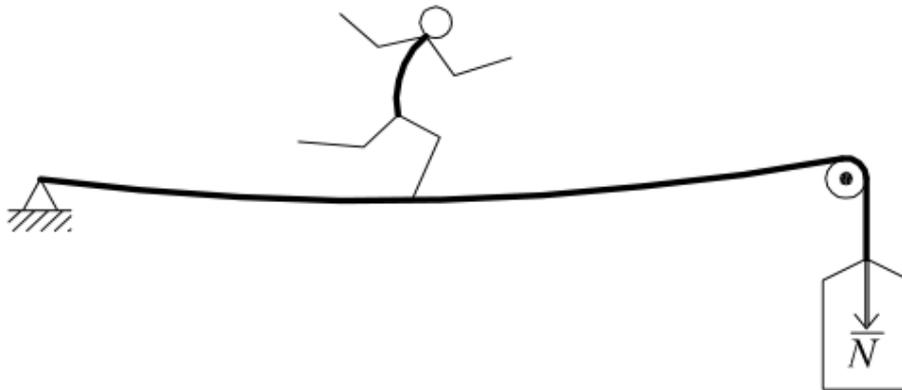
Oder der Einfluss von Normalkraft die Stabachse entlang



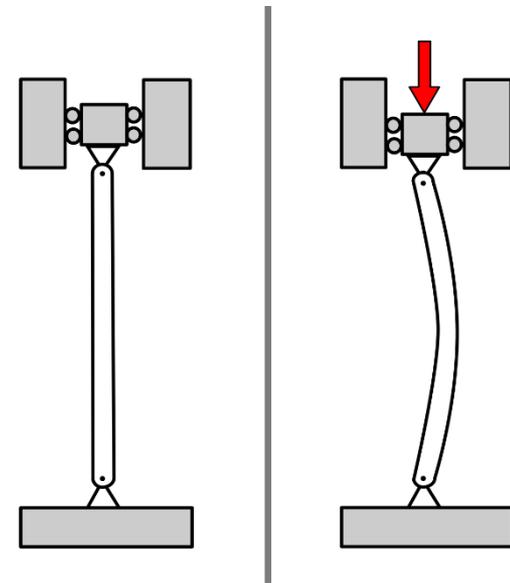
*Die Normalkraft modifiziert die Systemsteifigkeit!*

# Stabilitätsprobleme

Oder der Einfluss von Normalkraft die Stabachse entlang



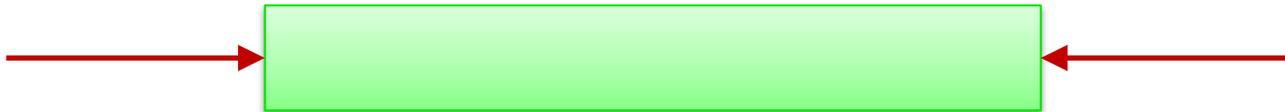
Zug  $\rightarrow$  Kein Stabilitätsproblem !



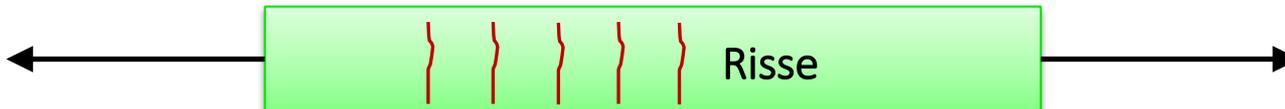
Druck  $\rightarrow$  Stabilitätsproblem !

## Warum ist Knicken gefährlich ?

Stab unter Druck (Knicken):  
Versagen ohne Vorankündigung!



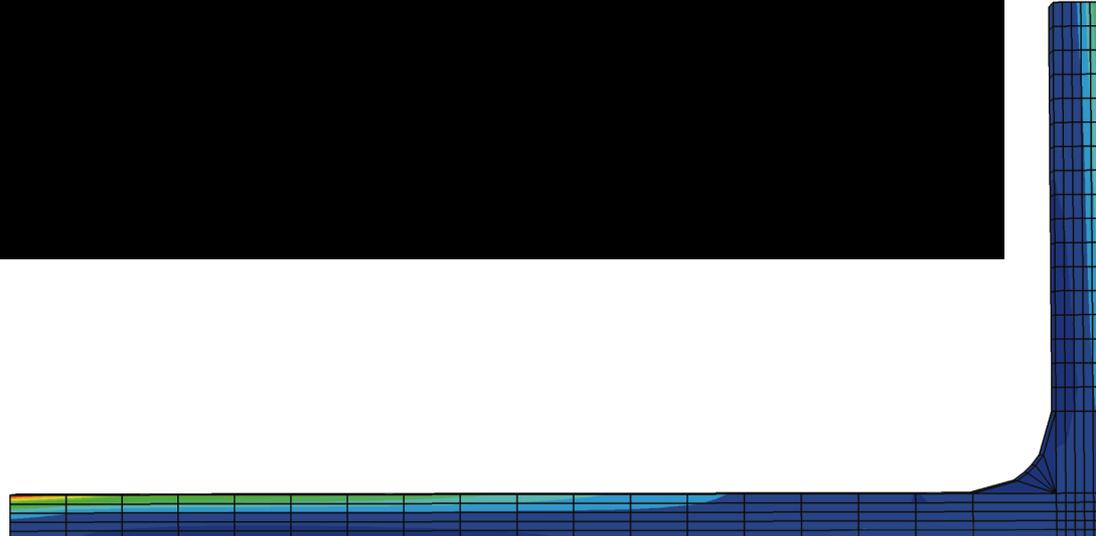
Stab unter Zug:  
Versagen mit Vorankündigung



[Source: Prof. Ch. Zhang / Elias Perras, Uni. Siegen](#)

## Knicken - Definition

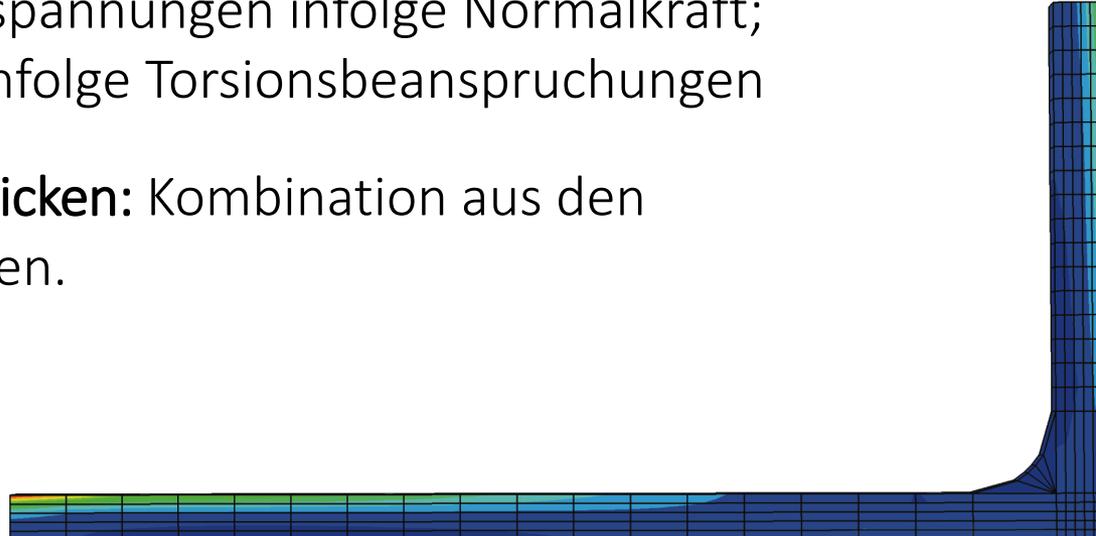
Das meist plötzliche Versagen von Stäben durch seitliches Ausweichen unter Druckbeanspruchung.



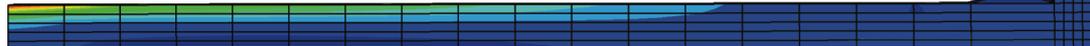
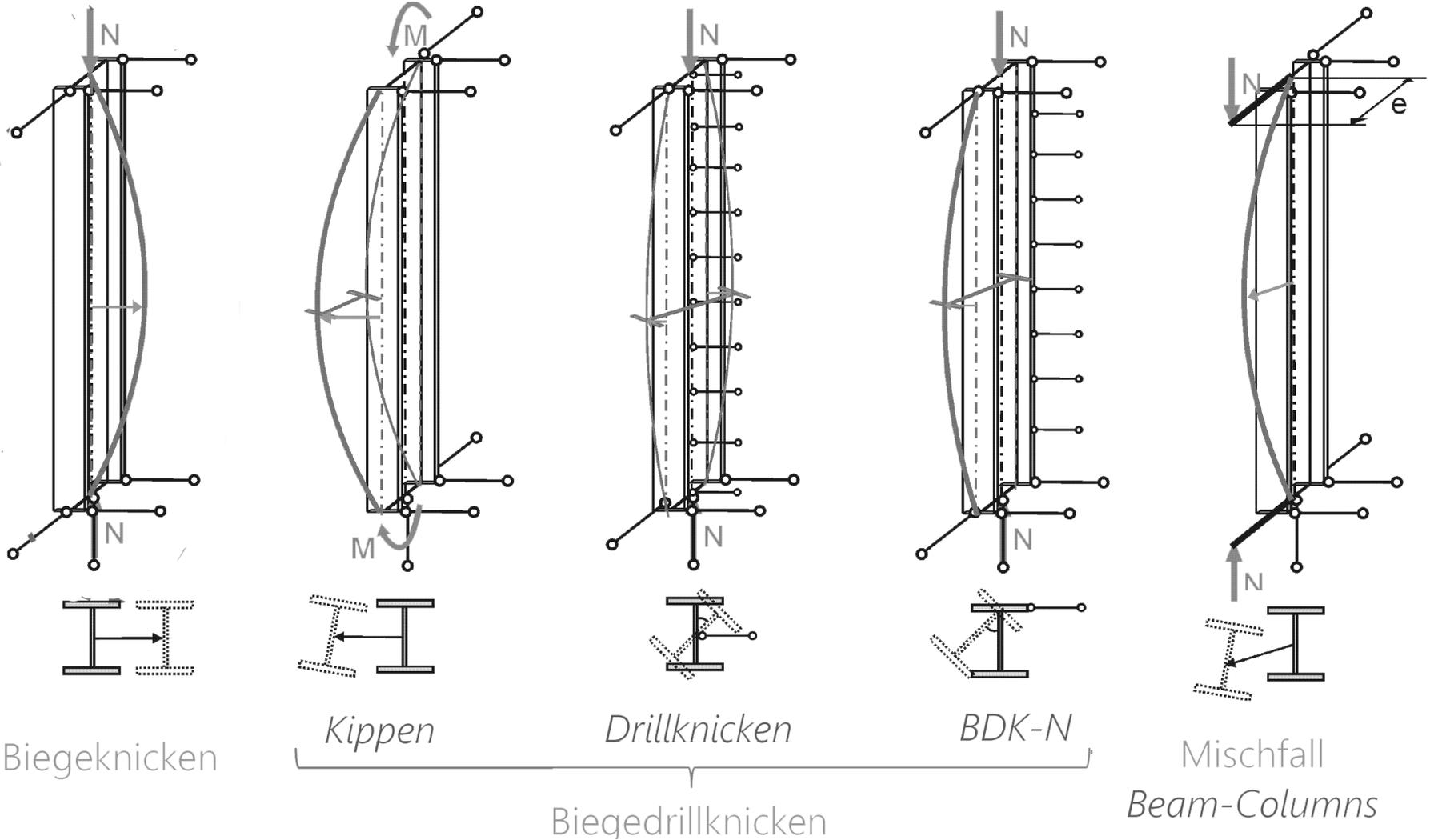
## Stabilitätsfälle

Bei Einzelstäben ist zwischen folgenden Stabilitätsproblemen zu unterscheiden:

- **Biegeknicken:** hohe Druckspannungen infolge Normalkraft; seitliches Ausknicken infolge Biegebeanspruchungen
- **Kippen:** hohe Druckspannungen infolge Biegung; seitliches Ausknicken des Druckflansches
- **Drillknicken:** hohe Druckspannungen infolge Normalkraft; Verdrehung des Stabes infolge Torsionsbeanspruchungen
- **Biegetorsion/Biegedrillknicken:** Kombination aus den aufgeführten Phänomenen.

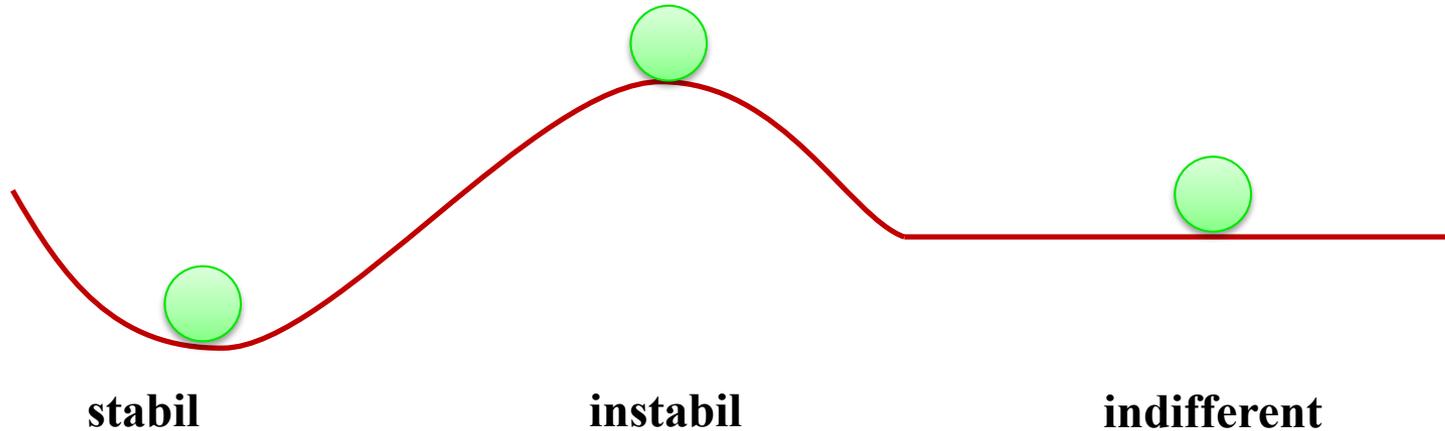


# Stabilitätsfälle



# Stabilitätsprobleme

## Mögliche Gleichgewichtslagen



**stabil**

Nach einer kleinen Störung kehrt es in die Ausgangslage zurück

**instabil**

Nach einer kleinen Störung kehrt es **nicht** in die Ausgangslage zurück

**indifferent**

Ausgelenkte Lage ist ebenfalls eine Gleichgewichtslage

[Source: Prof. Ch. Zhang / Elias Perras, Uni. Siegen](#)

# Stabilitätsprobleme

Grundsätzlich existieren zwei Arten der Instabilität:

## Knicken (Verzweigung)

Bei einem Verzweigungsproblem ist das Gleichgewicht mehrdeutig. Das System verlässt den primären Pfad und geht in einen sekundären Ast über.

## Durchschlagen

Bei einem Durchschlagproblem schlägt ein System bei Lastkontrolle schlagartig in eine Gleichgewichtslage durch.

## Verformungs- Spannungsprobleme nach Theorie 2. Ordnung

Diese werden normalerweise durch Vorverformungen induziert

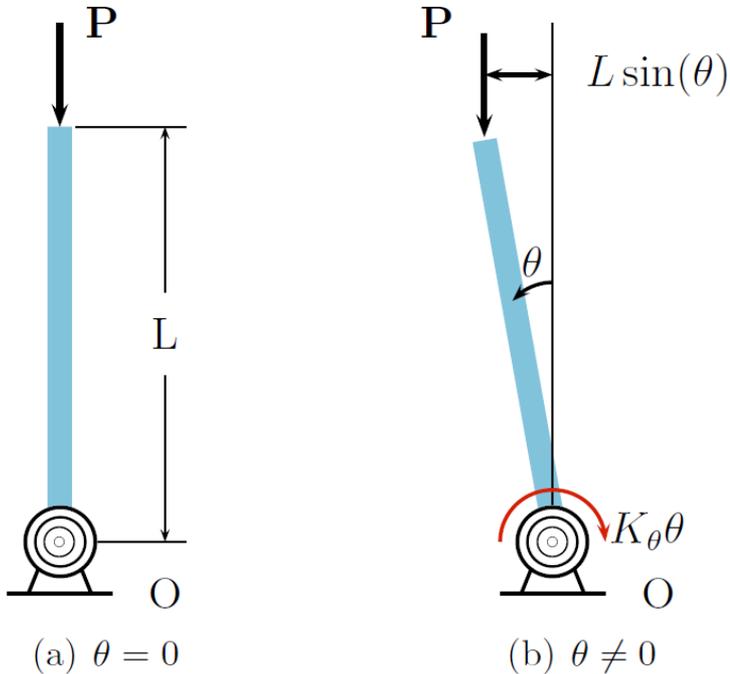
## Traglastprobleme & Instabilität

Berücksichtigung von Plastizität und Steifigkeitsänderungen

[Source: C. Felippa, Uni. Colorado](#)

# Verzweigungsstabilität - konzeptionelles Beispiel

## Starrstab mit Drehfeder



Gleichgewichtslagen eines starren Stabes mit einer Torsionsfeder, a) Ausgangslage b) (infinitesimal) verformter Lage

Gleichgewichtsgleichung in der verformten Konfiguration (b):

$$PL \sin \theta = K_{\theta} \theta$$

Annahme von infinitesimal verformter Lage (kleine Winkel):

$$\sin \theta \approx \theta \Rightarrow (PL - K_{\theta}) \theta = 0$$

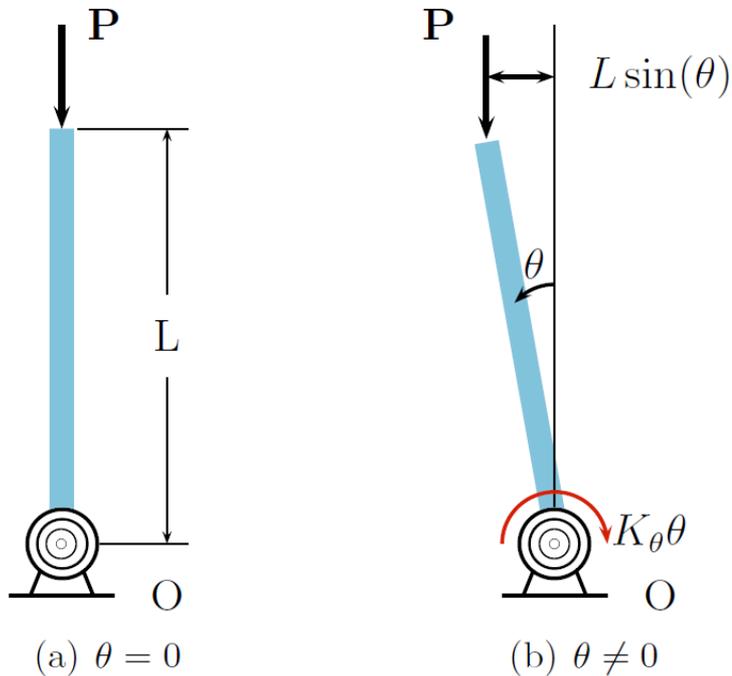
Unter welchen Bedingungen ist diese Gleichung erfüllt?

(a)  $\theta = 0 \quad \forall P$ : triviale Lösung

(b)  $P = P_{cr} = \frac{K_{\theta}}{L} \rightarrow \theta$  beliebig

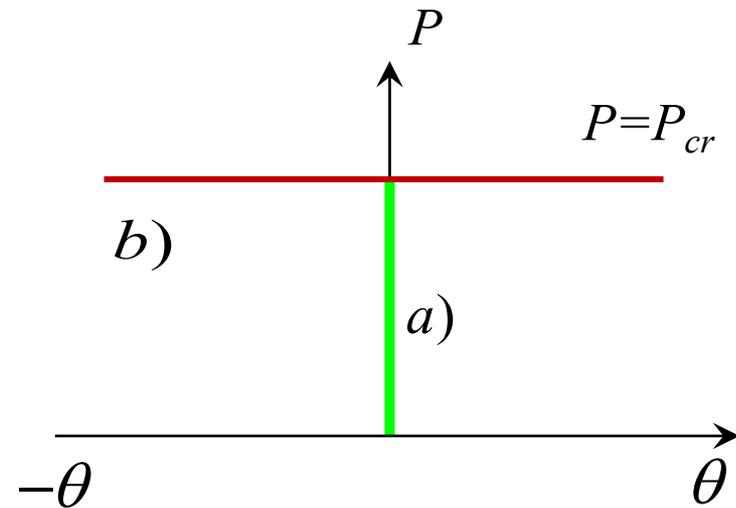
# Verzweigungsstabilität - konzeptionelles Beispiel

## Starrstab mit Drehfeder



Gleichgewichtslagen eines starren Stabes mit einer Torsionsfeder für a) eine triviale Lösung ( $\theta = 0$ ) und b) eine nicht triviale Lösung ( $\theta \neq 0$ ).

Das System verlässt den primären Pfad und geht in einen sekundären Ast über.



(a)  $P \neq P_{cr}$  stabiles Gl.

(b)  $P = \frac{K_{\theta}}{L} = P_{cr}$  instabiles Gl.

# Verzweigungsstabilität - konzeptionelles Beispiel

## Starrstab mit Drehfeder

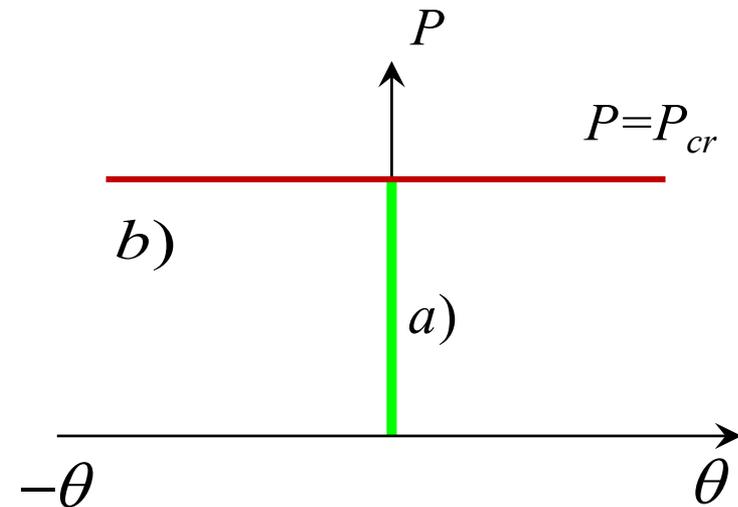
### Bemerkungen

- Für  $P < P_{cr}$  → Last-Verformungs-Pfad: eindeutig
- Für  $P = P_{cr}$  → Verzweigung des Gleichgewichts in mehreren möglichen Verformungspfaden

### Annahmen

- Starrer Stab
- Linear elastisches Material
- Kleine Verformungen ( $\theta \ll 1$ ) zur Bestimmung des alternativen Pfades

Das System verlässt den primären Pfad und geht in einen sekundären Ast über.



$$(a) \quad P \neq P_{cr} \quad \text{stabiles Gl.}$$

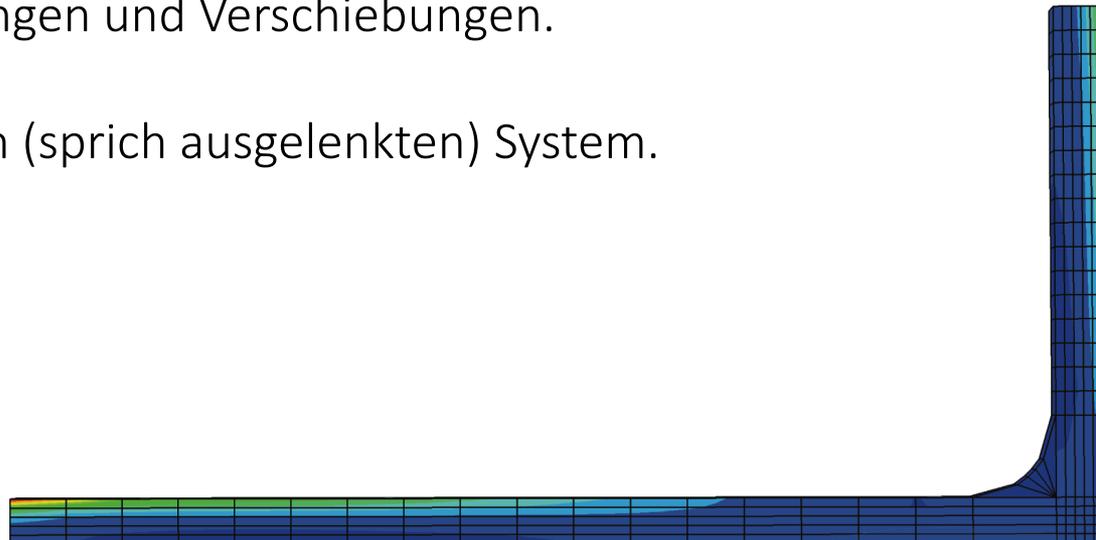
$$(b) \quad P = \frac{K_{\theta}}{L} = P_{cr} \quad \text{instabiles Gl.}$$

## Durchschlagen – grosse Verformungen

Um die Stabilität eines Systems unter großen Verformungen, (z.B. flache Bögen unter Drucknormalkräften) zu analysieren, muss die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt werden.

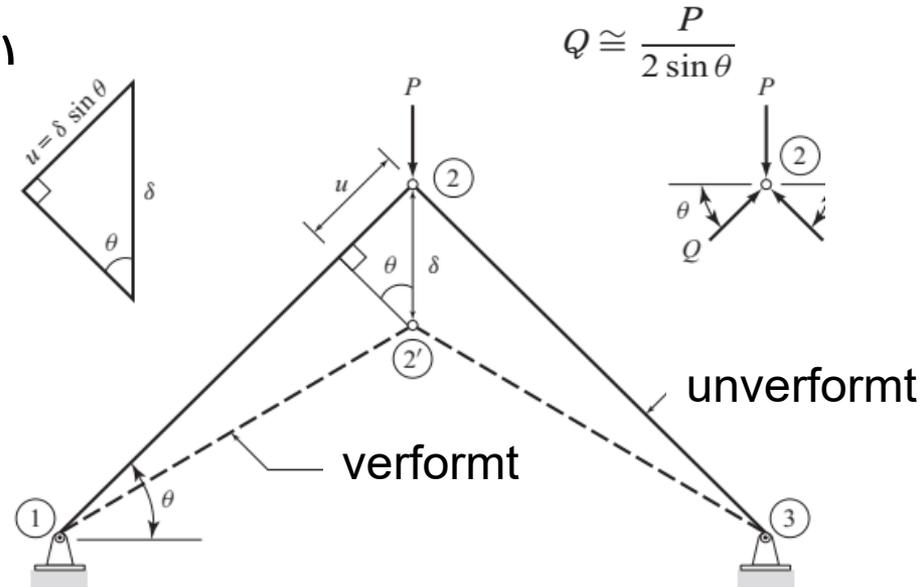
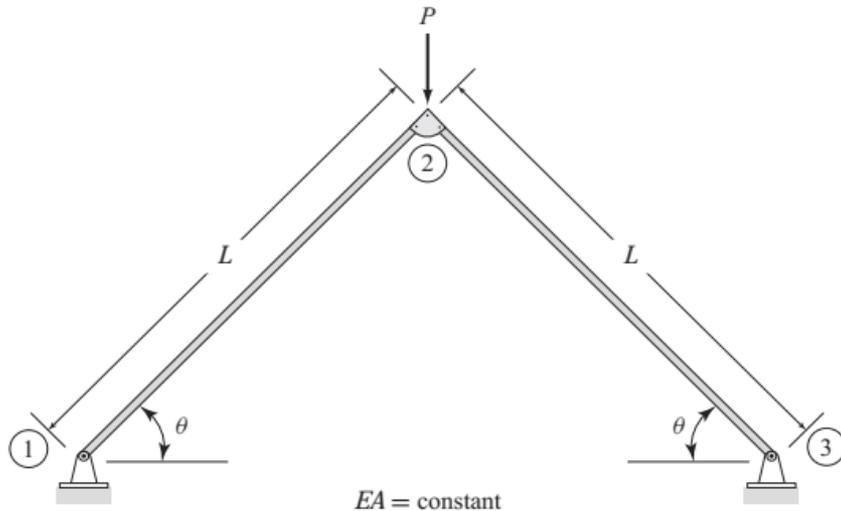
Dies bedeutet:

- Nichtlinearer Zusammenhang zwischen Lasten/Dehnungen/Verzerrungen und Verschiebungen.
- Gleichgewicht am verformten (sprich ausgelenkten) System.



# Berechnung des Last-Verformungsdiagramms

## Beispiel – zwei Pendelstützen (Fachwerk)



### A. Gleichgewicht am unverformten System

$$\varepsilon = \frac{u}{L} \cong \left( \frac{\sin \theta}{L} \right) \delta \quad \sigma = E\varepsilon \quad \sigma = \frac{Q}{A} \cong \frac{P}{2A \sin \theta}$$

$$\text{Mit: } u \cong \delta \sin \theta \quad Q \cong \frac{P}{2 \sin \theta}$$

wodurch:

$$P \cong \left( \frac{2EA \sin^2 \theta}{L} \right) \delta$$

# Beispiel – zwei Pendelstützen

## 2. Gleichgewicht am verformten System

a) Aus der Geometrie:

$$\bar{L} = \sqrt{(L \cos \theta)^2 + (L \sin \theta - \delta)^2} = L \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L}\right) \sin \theta}$$

$$\sin \bar{\theta} = \frac{L \sin \theta - \delta}{\bar{L}} = \frac{\sin \theta - \left(\frac{\delta}{L}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L}\right) \sin \theta}}$$

b) Verschiebungen und Dehnungen:

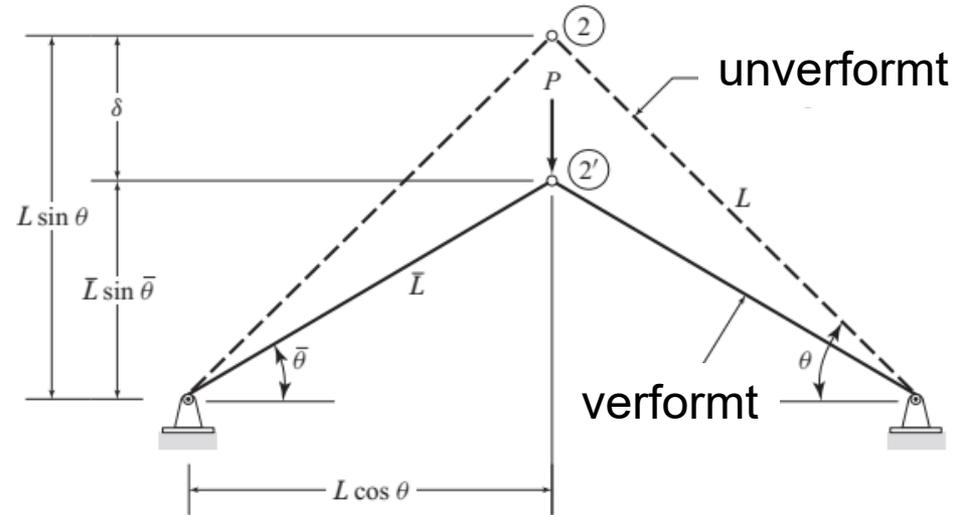
$$u = L - \bar{L} = L \left[ 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L}\right) \sin \theta} \right]$$

$$\varepsilon = \frac{u}{L} = 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L}\right) \sin \theta}$$

d) Last:

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$P = 2EA \left[ \sin \theta - \left(\frac{\delta}{L}\right) \right] \left[ \frac{1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L}\right) \sin \theta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L}\right) \sin \theta}} \right]$$



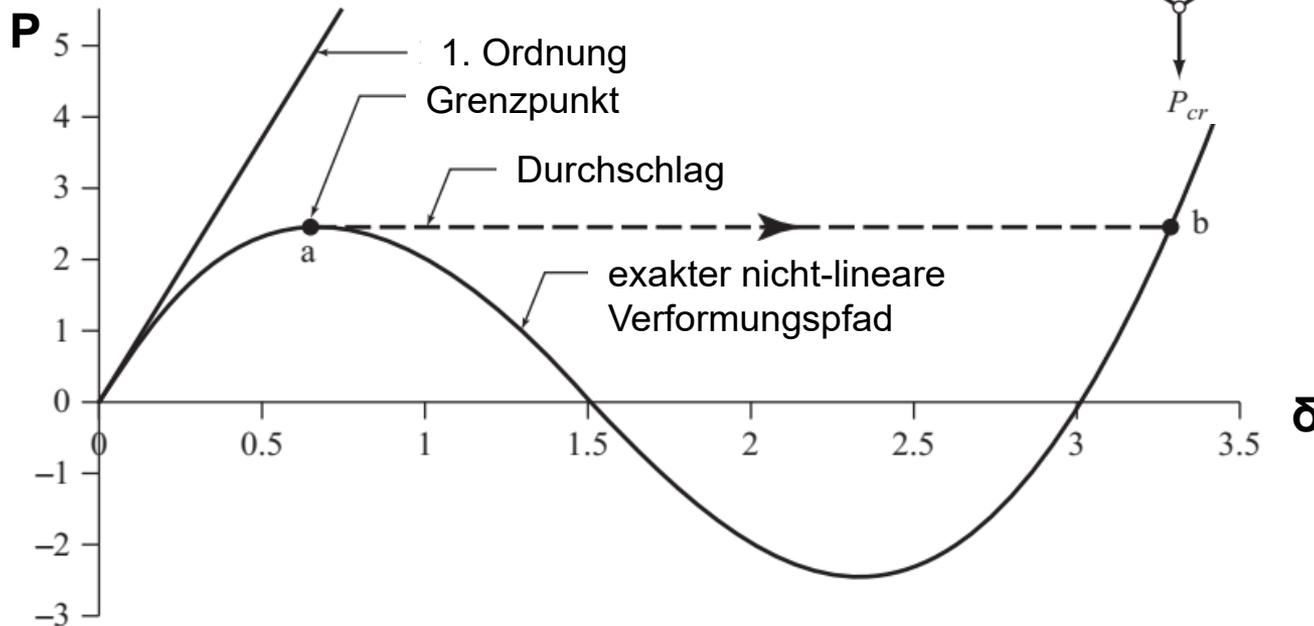
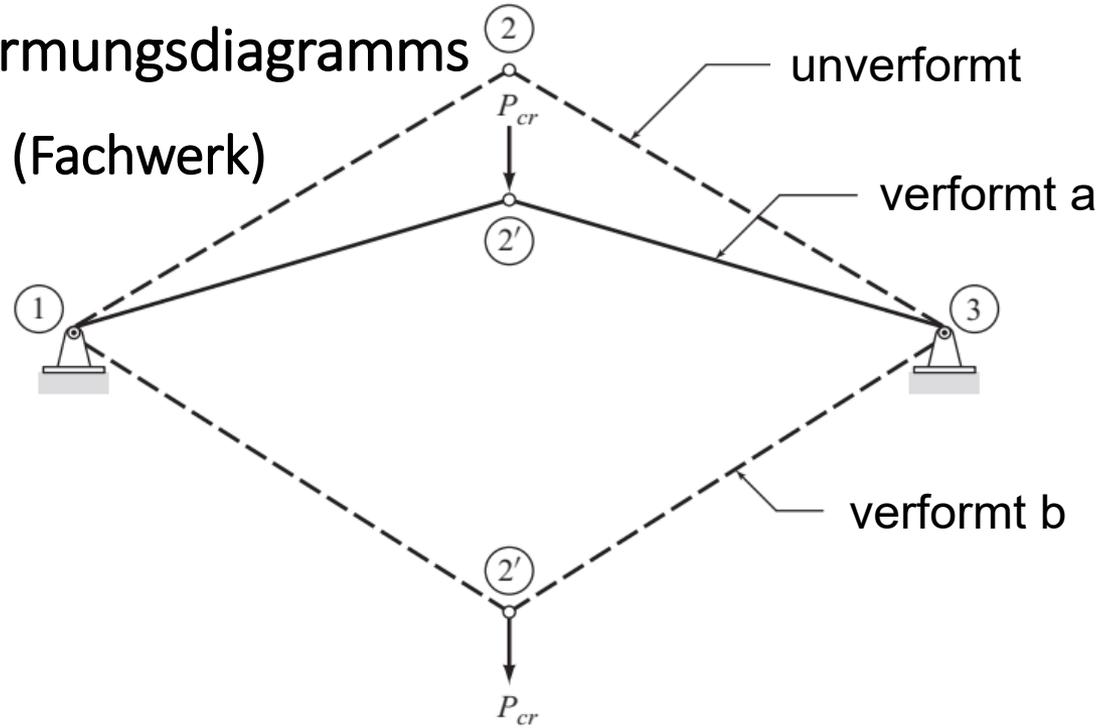
c) Normalkraft und Spannungen:

$$Q = \frac{P}{2 \sin \bar{\theta}} = \frac{P \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L}\right) \sin \theta}}{2 \left[ \sin \theta - \left(\frac{\delta}{L}\right) \right]}$$

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{P \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 - 2 \left(\frac{\delta}{L}\right) \sin \theta}}{2A \left[ \sin \theta - \left(\frac{\delta}{L}\right) \right]}$$

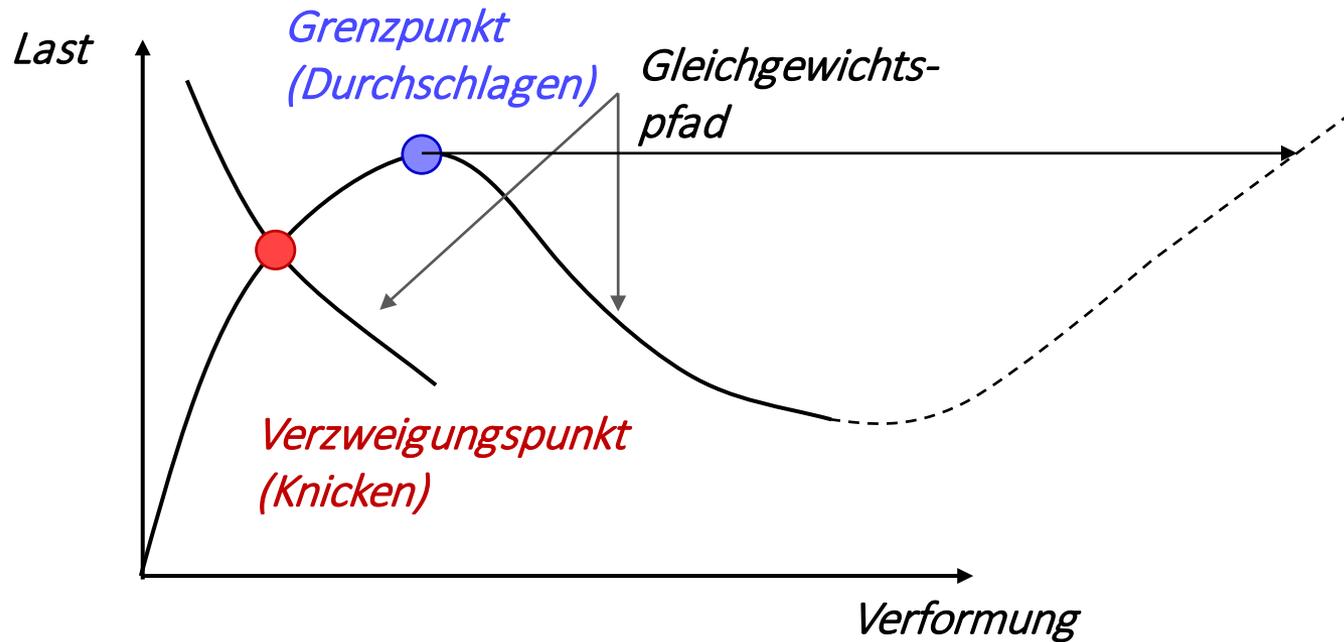
# Berechnung des Last-Verformungsdiagramms

## Beispiel – zwei Pendelstützen (Fachwerk)



# Stabilitätsprobleme

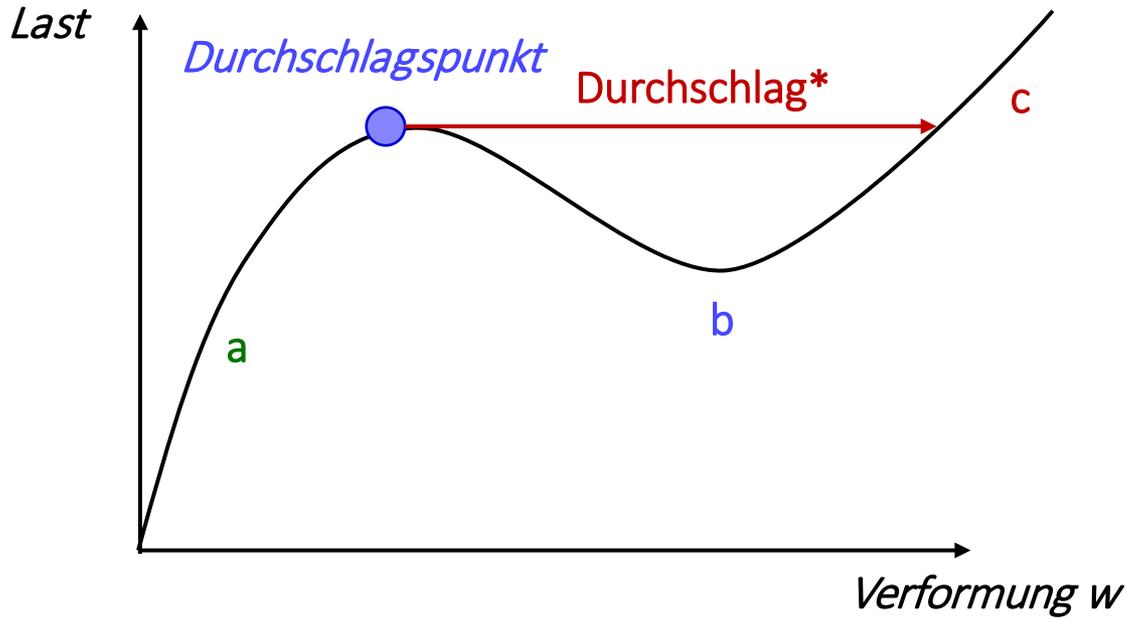
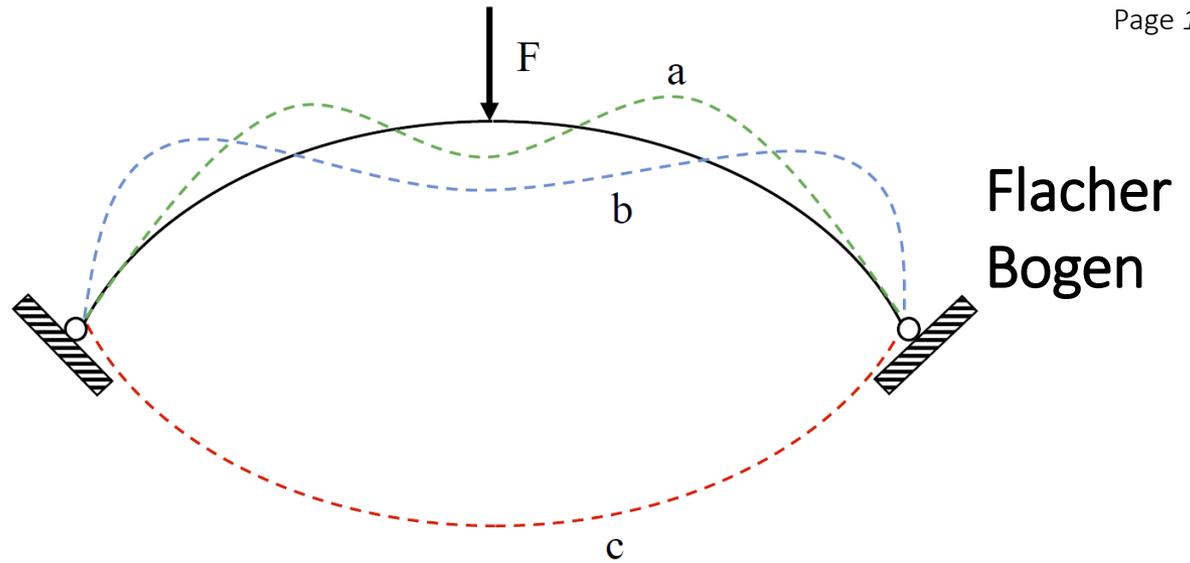
*Verzweigungspunkte* und *Grenzpunkte* gehören zu den *kritischen Punkten*.



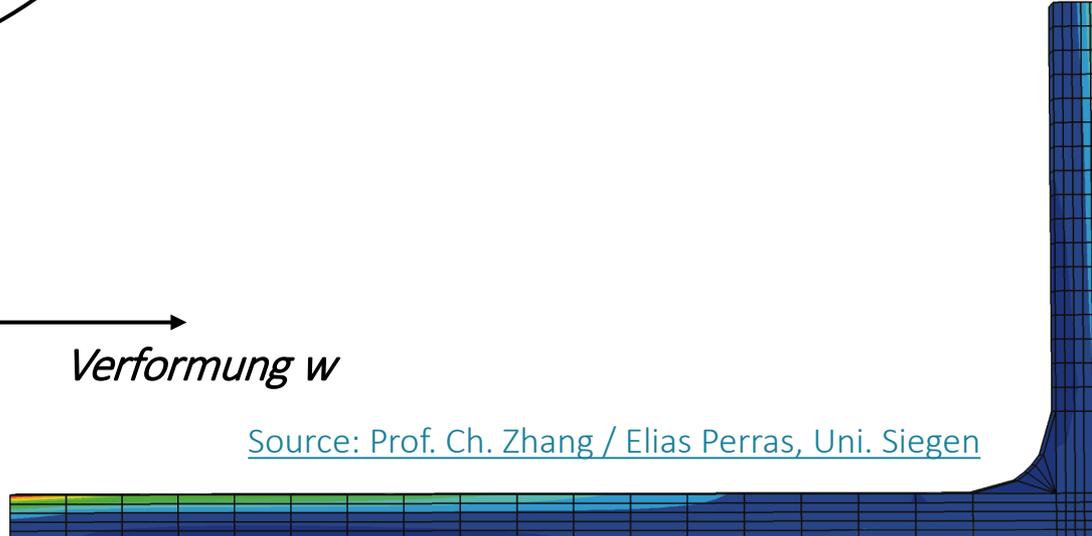
Ein Wechsel zwischen stabiler und instabiler Lage kann nur an kritischen Punkten erfolgen!

Source: Felippa, Uni. Colorado

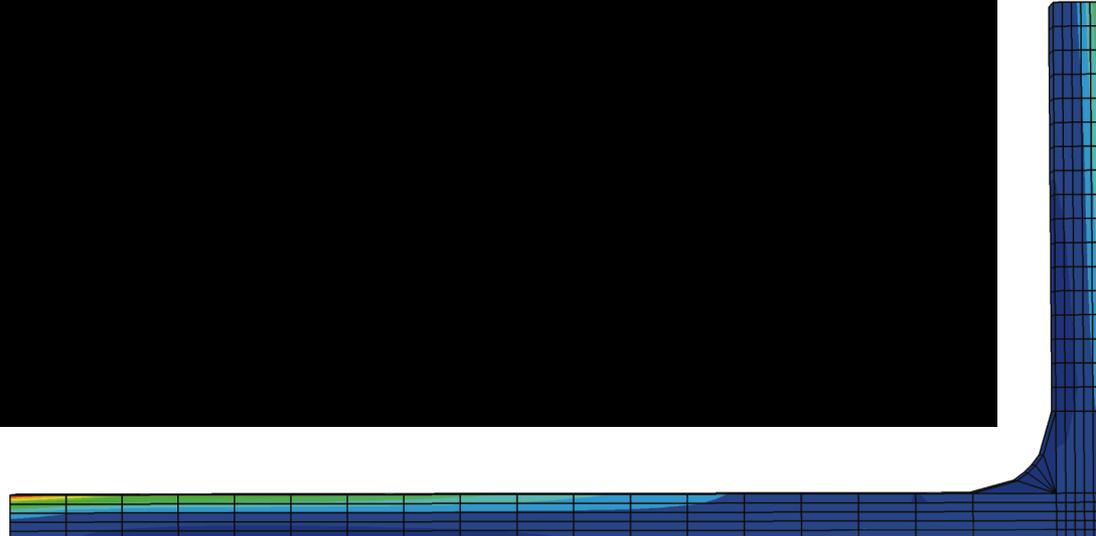
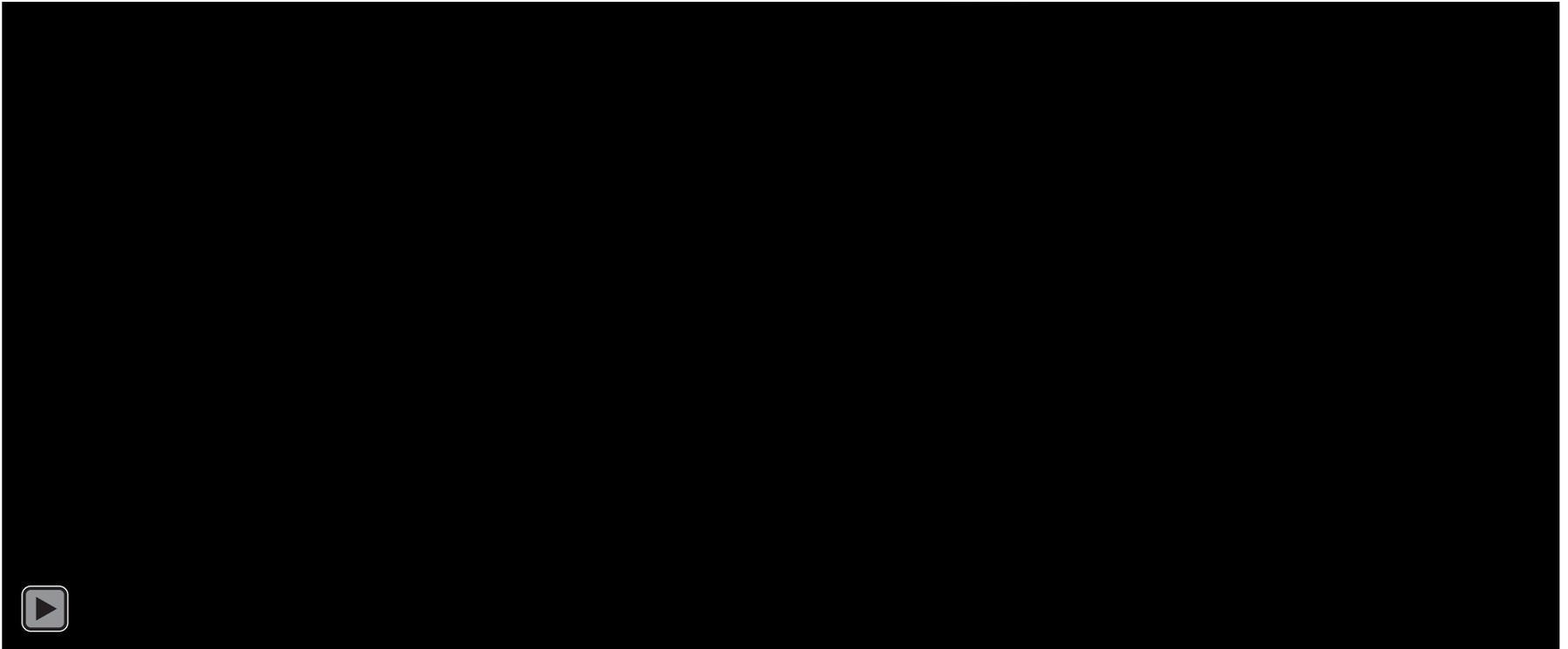
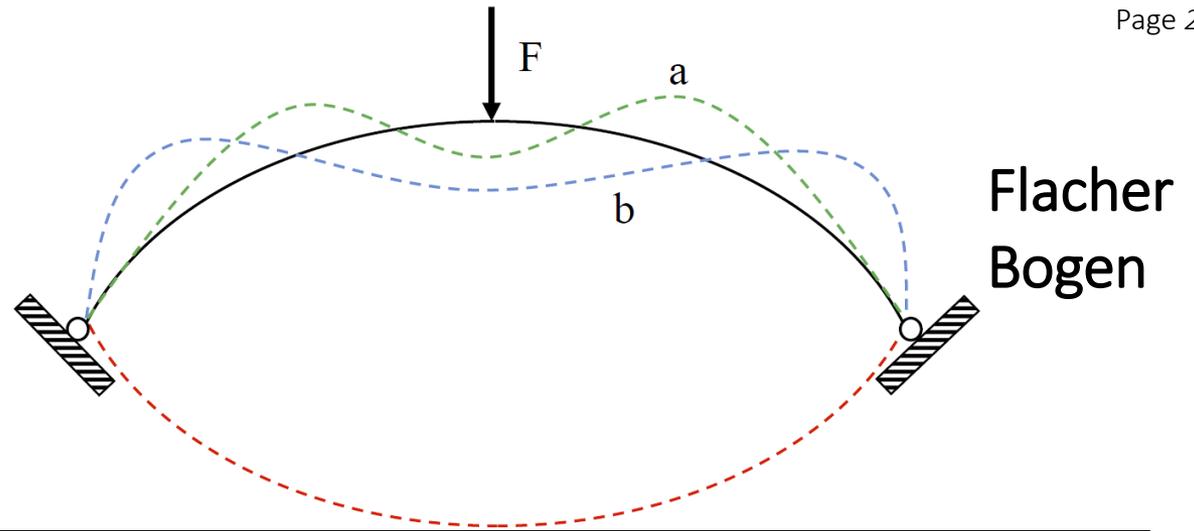
# Durchschlagsproblem



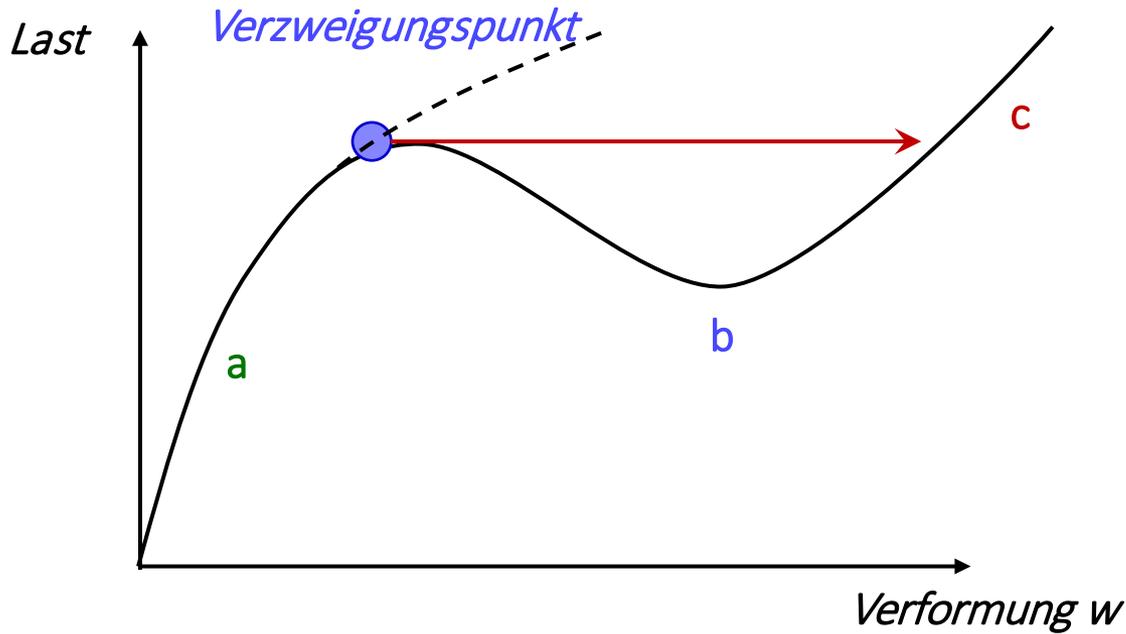
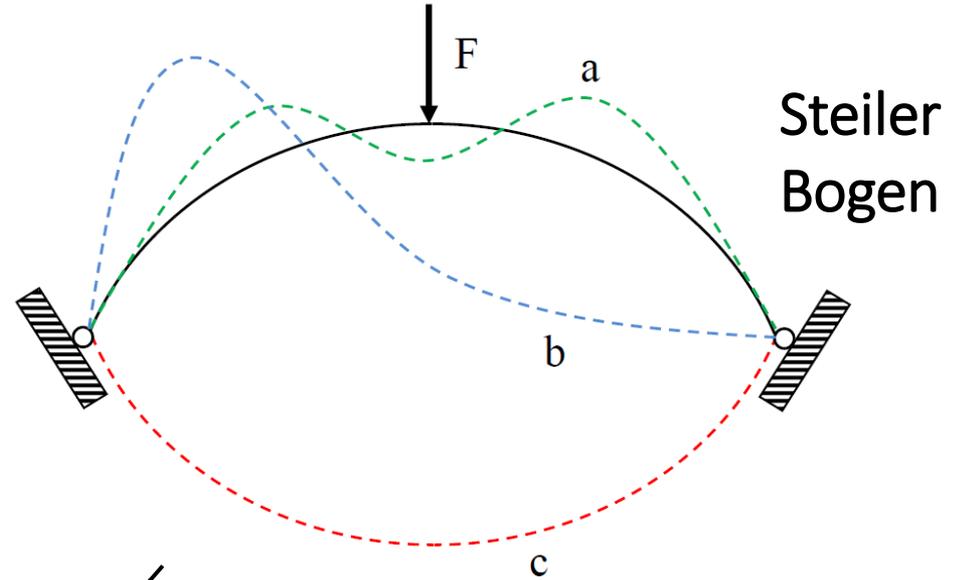
Source: Prof. Ch. Zhang / Elias Perras, Uni. Siegen



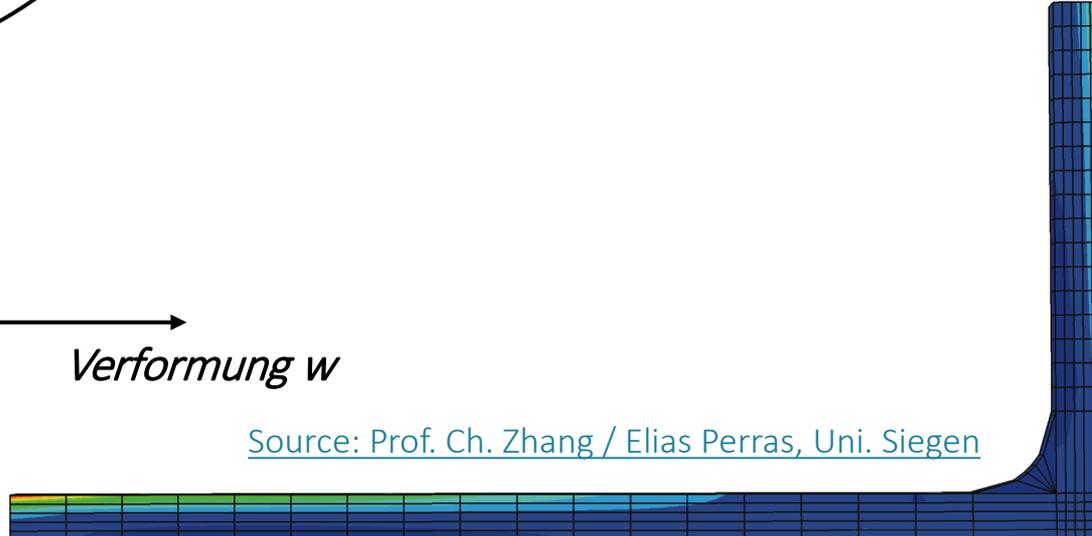
# Durchschlagsproblem



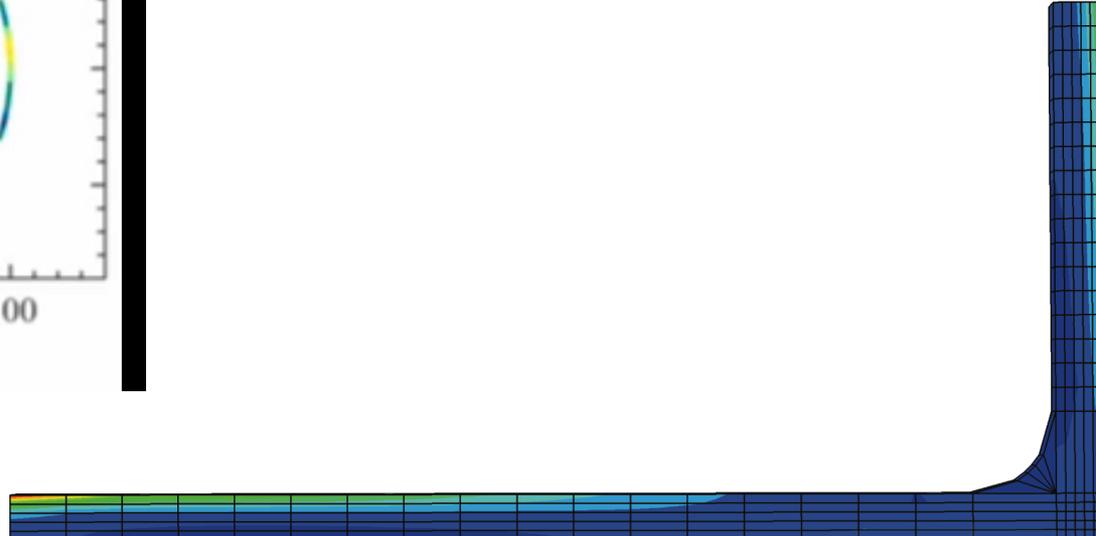
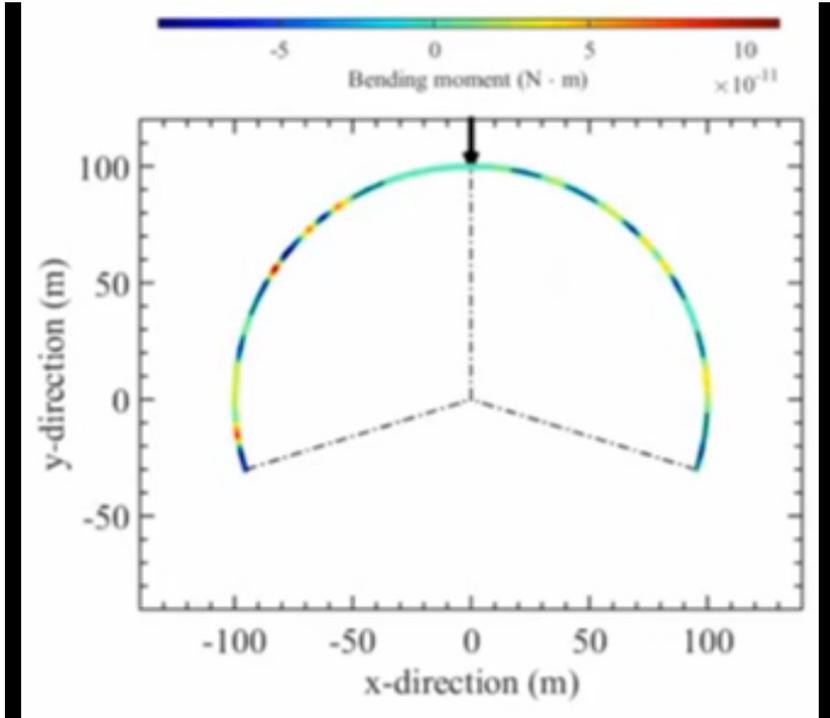
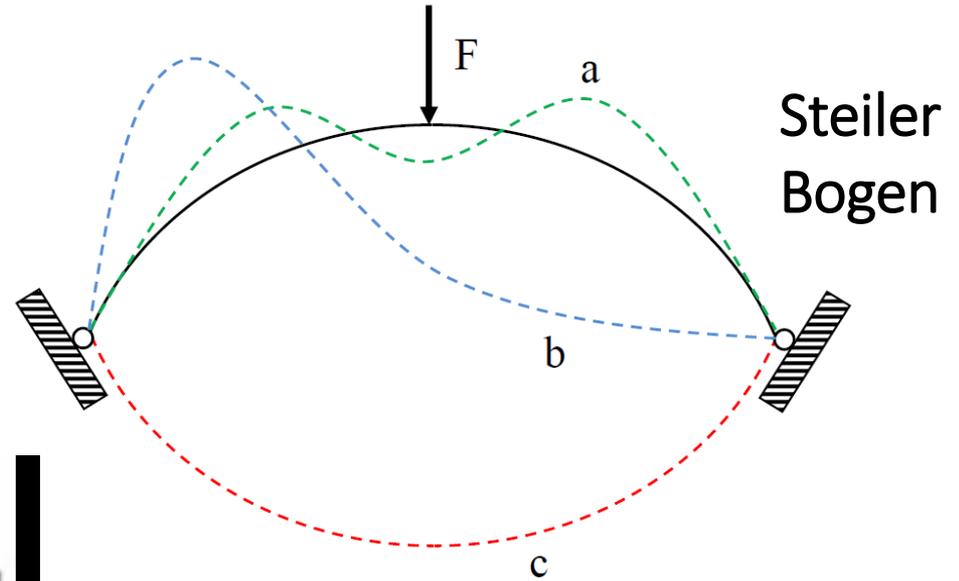
# Verzweigungsproblem



Source: Prof. Ch. Zhang / Elias Perras, Uni. Siegen



# Verzweigungsproblem



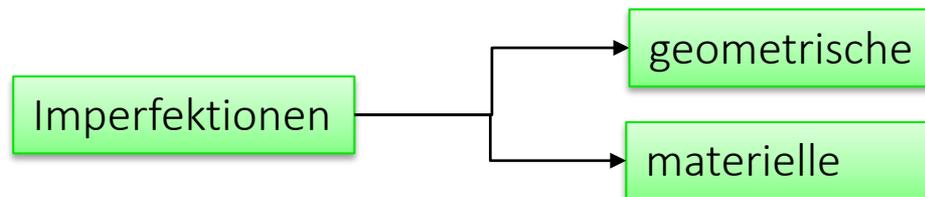
# Verformungs- Spannungsprobleme nach Theorie 2. Ordnung

## Der Einfluss von Imperfektionen

Bisher: Annahme von perfekten (idealen) Tragwerken und eines perfekten Bauprozesses!

- In der Praxis treten aber Abweichungen von den geplanten perfekten Tragwerken im Bauprozess auf.

Diese Abweichungen werden häufig als Imperfektionen bezeichnet und sie müssen bei dem Entwurf und der Planung von Tragwerken berücksichtigt werden.



\*Streuungen der Materialparameter/  
Eigenspannungen durch Bauprozess.

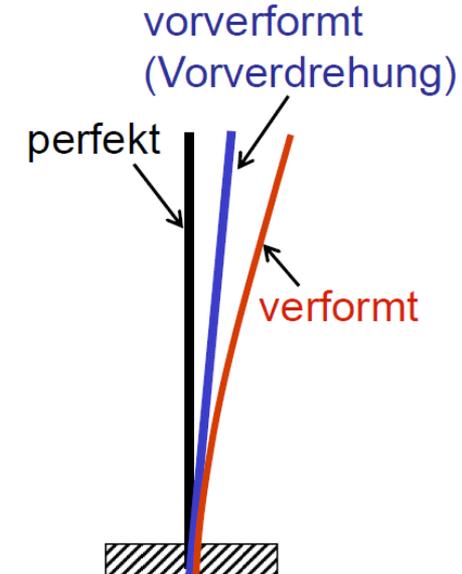
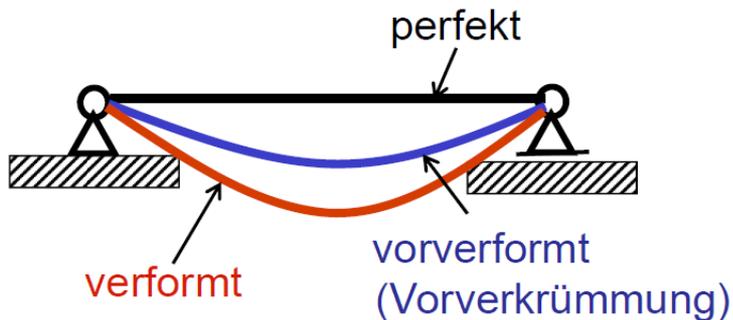
[Source: Prof. Ch. Zhang / Elias Perras, Uni. Siegen](#)

## Verformungs- Spannungsprobleme nach Theorie 2. Ordnung

Geometrische Imperfektionen stellen Abweichungen von der Sollgeometrie des Tragwerks dar.

Beispiele dazu sind:

- Ungewollte Schiefstellungen.
- Lotabweichungen bei Stützen.
- Lastausmittigkeit.
- **Vorverkrümmungen und Vorverdrehungen**



Source: Prof. Ch. Zhang / Elias Perras, Uni. Siegen

# Verformungs- Spannungsprobleme nach Theorie 2. Ordnung

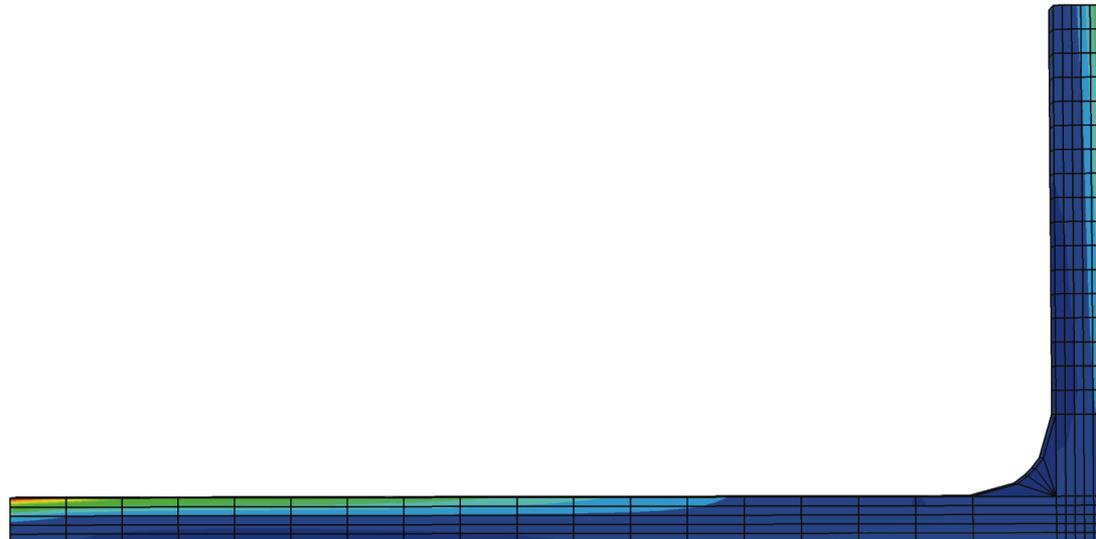
Alle bis anhin in den Vorlesungen Baustatik I und II erläuterten Berechnungen basieren auf der Theorie 1. Ordnung

Theorie I. Ordnung



Gleichgewicht am  
unverformten System

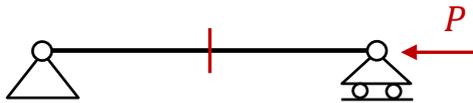
$$M_l = 0$$



# Verformungs- Spannungsprobleme nach Theorie 2. Ordnung

Stabilitätsprobleme erfordern eine Berechnung nach Theorie 2. Ordnung.

Theorie I. Ordnung



Gleichgewicht am  
unverformten System

$$M_I = 0$$

Theorie II. Ordnung



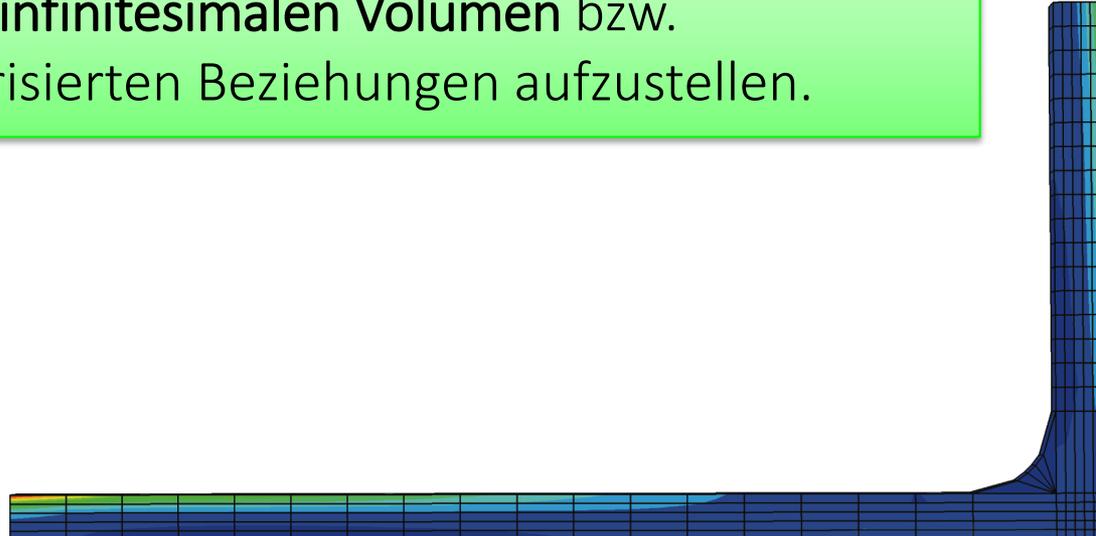
Gleichgewicht am  
verformten System

$$M_{II} = P \cdot w$$

**Th. II. Ordnung führt zu eine Vergrößerung des Biegemomentes**

## Verformungs- Spannungsprobleme nach Theorie 2. Ordnung

- Alle bis anhin in den Vorlesungen Baustatik I und II erläuterten Berechnungen basieren auf der Theorie 1. Ordnung
  - Stabilitätsprobleme erfordern eine Berechnung nach Theorie 2. Ordnung.
- Gleichgewichtsbedingungen sind im Unterschied zur Theorie 1. Ordnung, am **verformten infinitesimalen Volumen** bzw. Balkenelement, mit linearisierten Beziehungen aufzustellen.

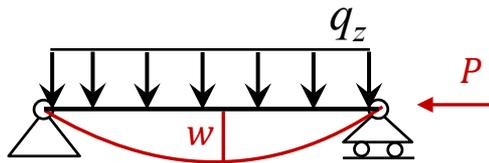


# Herleitung der Verzweigungsstabilität nach Theorie 2. Ordnung

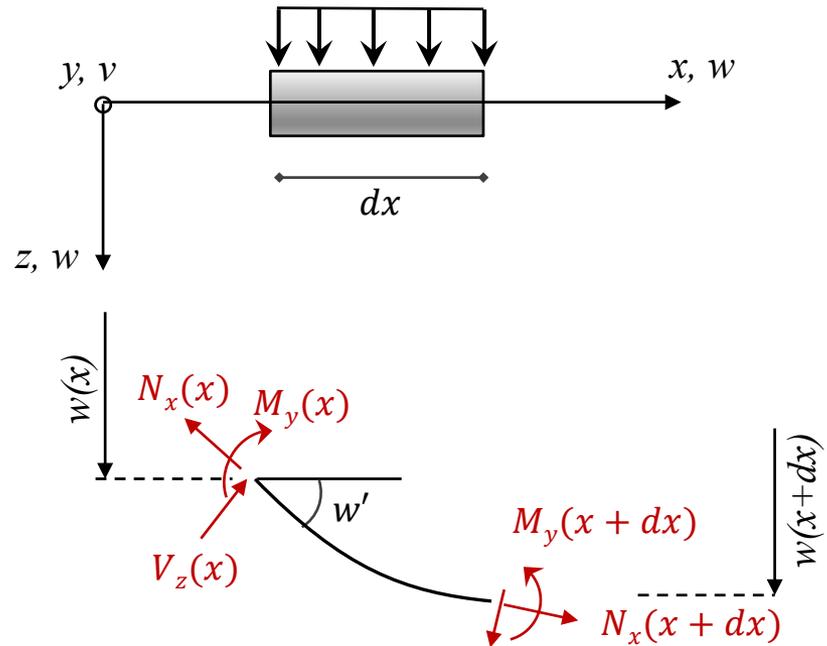
## Gleichgewicht am **verformten** System nach Theorie 2. Ordnung

Annahme kleiner Verformungen

**Balken**



**Infinitesimales Balkenelement**



Von der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung lässt sich folgende Beziehung ableiten (An. von kleinen Winkeln):

$$\sum V = 0 \xrightarrow{\cos(w')=1, \sin(w')=w'}$$

$$q_z dx + V_z(x+dx) - V_z(x) + N_x(x+dx) w'(x+dx) - N_x(x) w'(x) \Rightarrow V_z(x+dx)$$

$$q_z + \frac{V_z(x+dx) - V_z(x)}{dx} + \left( \frac{N_x(x+dx) - N_x(x)}{dx} w'(x+dx) + N_x(x) \frac{w'(x+dx) - w'(x)}{dx} \right) = 0$$

Source: Baustatik II, Simon Zweidler

# Herleitung der Verzweigungsstabilität nach Theorie 2. Ordnung

## Gleichgewicht am **verformten** System nach Theorie 2. Ordnung

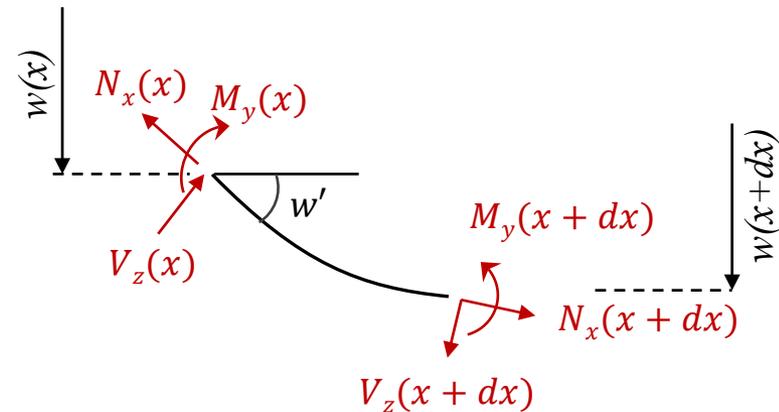
Annahme kleiner Verformungen

Von der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung lässt sich folgende Beziehung ableiten (An. von kleinen Winkeln):

$$\sum V = 0 \xrightarrow{\cos(w')=1, \sin(w')=w'} q_z + \underbrace{\left( \frac{V_z(x+dx) - V_z(x)}{dx} \right)}_{V'} + \underbrace{\left( \frac{N_x(x+dx) - N_x(x)}{dx} w'(x+dx) + N_x(x) \frac{w'(x+dx) - w'(x)}{dx} \right)}_{(N_x w')'} = 0$$

$$\Rightarrow q_z + V_z' + (N_x w')' = 0$$

### Infinitesimales Balkenelement

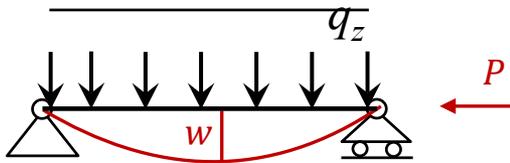


Source: Baustatik II, Simon Zweidler

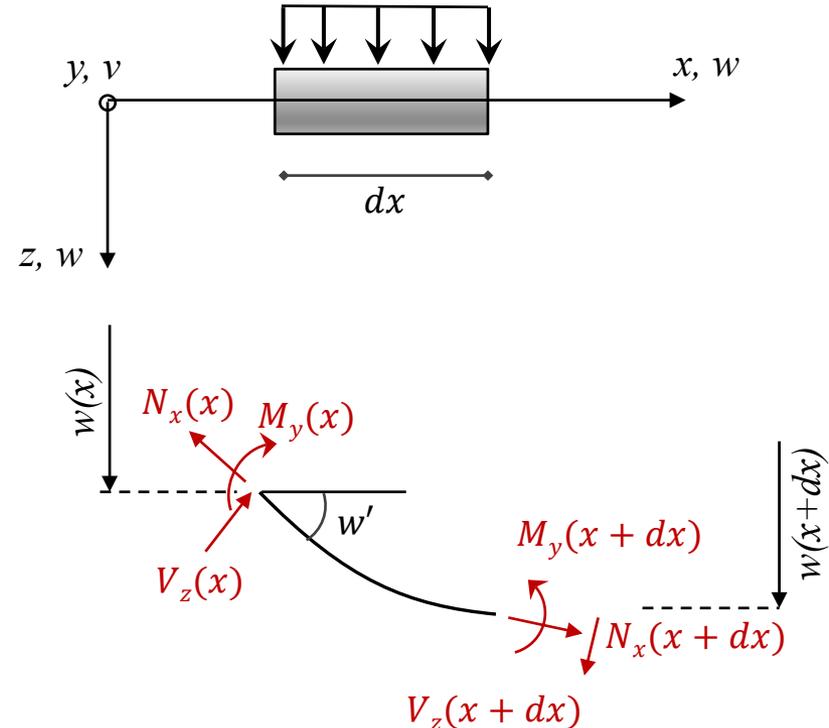
# Herleitung der Verzweigungsstabilität nach Theorie 2. Ordnung

Gleichgewicht am **verformten** System nach Theorie 2. Ordnung

**Balken**



**Infinitesimales Balkenelement**



Nach der EB Theorie:

$$M_y = -EI_y w'' \quad \& \quad M_y' = V_z \Rightarrow V_z' = -EI_y w''''$$

Differentialgleichung für kombinierte Biege- und Normalkraftbeanspruchung:

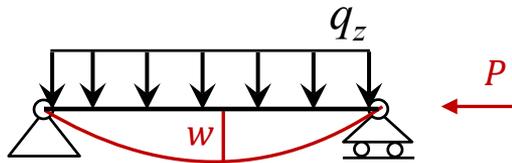
$$q_z + V_z' + (N_x w')' = 0 \Rightarrow EI_y w'''' - N w'' = q_z$$

Source: Baustatik II, Simon Zweidler

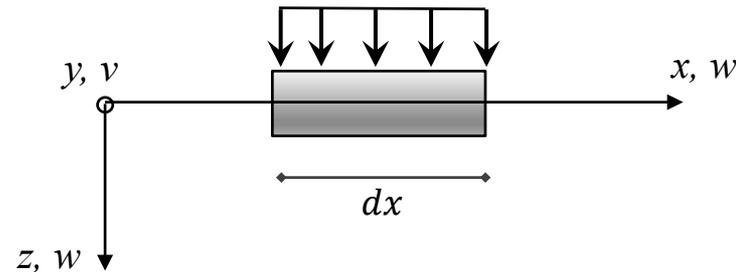
# Herleitung der Verzweigungsstabilität nach Theorie 2. Ordnung

Gleichgewicht am **verformten** System nach Theorie 2. Ordnung

Balken



Infinitesimales Balkenelement



Was passiert im Fall einer Zugkraft (P: Zug,  $N > 0$ )?

Ansatz:  $\lambda^2 = N / EI_y$

Differenzialgleichung für kombinierte Biegen- und Normalkraftbeanspruchung:

wenn  $N > 0$  (**Zug**):  $EI_y w'''' - Nw'' = q_z$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y$

Homogene Lösung:  $w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh(\lambda x) + C_4 \sinh(\lambda x)$

Partikuläre Lösung für  $q(x) = q_0$ :  $w_p(x) = \frac{-q_0 x^2}{2N}$

Warum? s. [Folie](#)

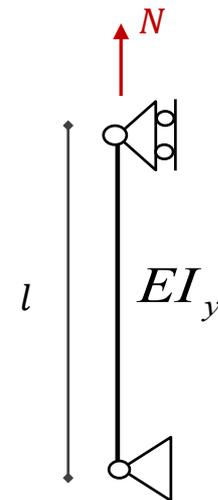
Source: Baustatik II, Simon Zweidler

# Herleitung der Verzweigungsstabilität nach Theorie 2. Ordnung

## Grundfall - Einzelstab: Euler'scher Knickstab

Was passiert im Fall eines idealen perfekt geraden Stabes ohne Querbelastung ( $q_z=0$ )?

In diesem Fall wird angenommen das eine winzige Ausbiegung mit Verlauf  $w(x)$  aus beliebiger Grund („Flügel Schlag einer Fliege“) verursacht wird.



# Herleitung der Verzweigungsstabilität nach Theorie 2. Ordnung

## Perfekt gerader Stab ohne Querbelastung ( $q_z=0$ ) in Form eines Pendelstabes

**Zug**  $\Rightarrow N > 0, q_z = 0 \Rightarrow EI_y w'''' - Nw'' = 0$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y$

Homogene Lösung:  $w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh(\lambda x) + C_4 \sinh(\lambda x)$

**Wie können die Koeffizienten der Lösung bestimmt werden?**

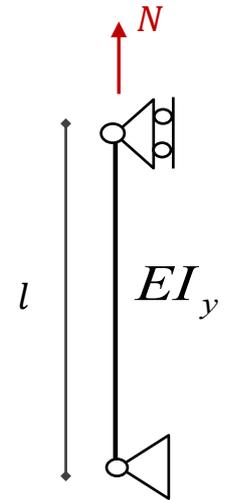
Durch Verwendung der 4 Randbedingungen (RB) für einen Pendelstab

$$\left. \begin{array}{l} \text{kinematische Randbedigungen: } w(0) = w(l) = 0 \\ \text{statische Randbedigungen: } M(0) = M(l) = 0 \end{array} \right\}$$

**RB am Ende  $x = 0$ :**

$$M_y(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0 \Rightarrow -\lambda^2 C_3 \cosh(0) - \lambda^2 C_4 \sinh(0) = 0 \xrightarrow{\frac{\sinh(0)=0}{\cosh(0)=1}} C_3 = 0$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$



# Herleitung der Verzweigungsstabilität nach Theorie 2. Ordnung

Perfekt gerader Stab ohne Querbelastung ( $q_z=0$ ) in Form eines Pendelstabes

**Zug**  $\Rightarrow N > 0, q_z = 0 \Rightarrow EI_y w'''' - Nw'' = 0$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y$

Homogene Lösung:  $w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh(\lambda x) + C_4 \sinh(\lambda x)$

**RB am Ende  $x = l$ :**

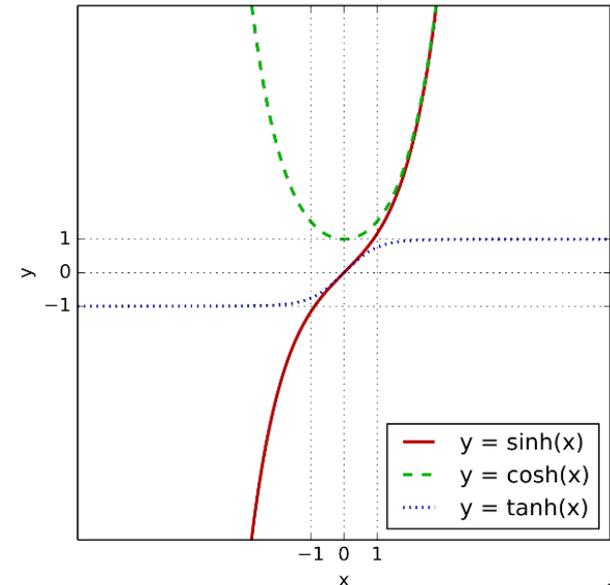
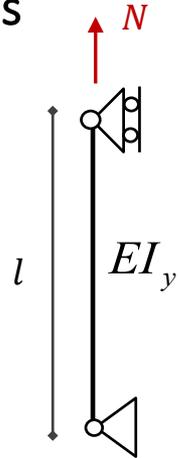
$$M_y(l) = 0 \Rightarrow w''(l) = 0 \Rightarrow -\lambda^2 C_3 \cosh(\lambda l) - \lambda^2 C_4 \sinh(\lambda l) = 0$$

$$\xrightarrow{C_3=0} C_4 \sinh(\lambda l) = 0 \text{ aber } \sinh(\lambda l) \neq 0 \text{ für } \lambda \neq 0 \text{ (oder } N \neq 0) \Rightarrow C_4 = 0$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow C_2 l + C_4 \sinh\left(\frac{n\pi}{l} l\right) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4 = 0 \Rightarrow w_h = 0$$

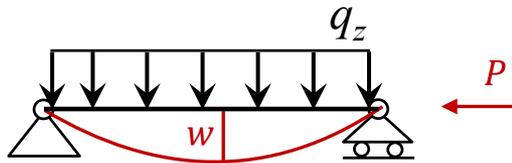
d.h. dass für eine Zugkraft nur die triviale Lösung  $w(x) = 0$  möglich ist! (für  $\lambda = N = 0$ )  
 $\Rightarrow$  stabiles Gleichgewicht



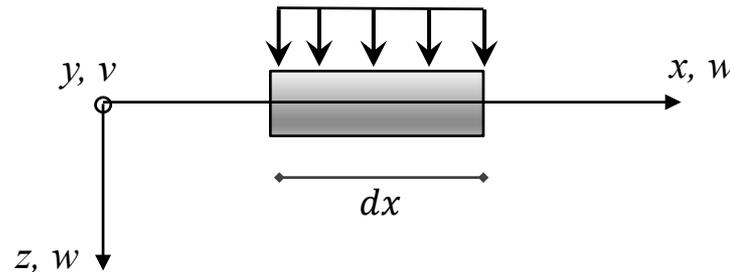
# Beschreibung des Stabilitäts- bzw Verzweigungsproblems

Gleichgewicht am **verformten** System nach Theorie 2. Ordnung

Balken



Infinitesimales Balkenelement



$$\text{Ansatz: } \lambda^2 = N / EI_y$$

Was passiert im Fall einer Druckkraft (P:Druck,  $N < 0$ )?

Differenzialgleichung für kombinierte Biege- und Normalkraftbeanspruchung:

wenn  $N < 0$  (**Druck**):  $EI_y w'''' + Nw'' = q_z$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y$

Homogene Lösung:  $w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$

Partikuläre Lösung für  $q(x) = q_0$ :  $w_p(x) = \frac{q_0 x^2}{2N}$

Warum? s. [Folie](#)

Source: Baustatik II, Simon Zweidler

# Beschreibung des Stabilitäts- bzw Verzweigungsproblems

Perfekt gerader Stab ohne Querbelastung ( $q_z=0$ ) in Form eines Pendelstabes

**Druck**  $\Rightarrow N < 0, q_z = 0 \Rightarrow EI_y w'''' + Nw'' = 0$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y$

Homogene Lösung:  $w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$

**Wie können die Koeffizienten der Lösung bestimmt werden?**

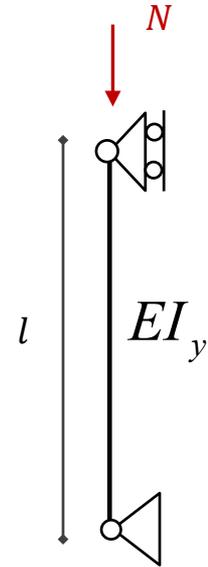
Durch Verwendung der 4 Randbedingungen (RB) für einen Pendelstab

$$\left. \begin{array}{l} \text{kinematische Randbedingungen: } w(0) = w(l) = 0 \\ \text{statische Randbedingungen: } M(0) = M(l) = 0 \end{array} \right\}$$

**RB am Ende  $x = 0$ :**

$$M_y(0) = 0 \Rightarrow w''(0) = 0 \Rightarrow -\lambda^2 C_3 \cos(0) - \lambda^2 C_4 \sin(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$



Source: Baustatik II, Simon Zweidler

# Beschreibung des Stabilitäts- bzw Verzweigungsproblems

Perfekt gerader Stab ohne Querbelastung ( $q_z=0$ ) in Form eines Pendelstabes

**Druck**  $\Rightarrow N < 0, q_z = 0 \Rightarrow EI_y w'''' + Nw'' = 0$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y$

Homogene Lösung:  $w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$

**RB am Ende  $x = l$ :**

$$M_y(l) = 0 \Rightarrow w''(l) = 0 \Rightarrow -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda l) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda l) = 0 \xrightarrow{C_3=0}$$

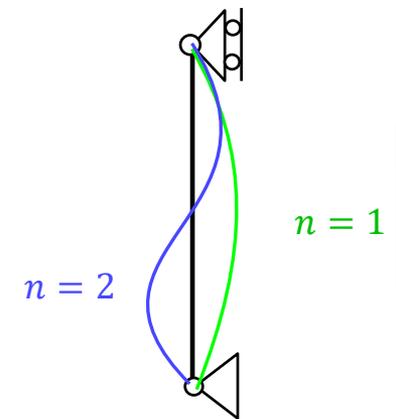
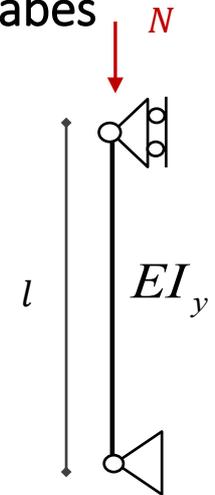
$C_4 = 0$  (triviale Lösung) oder

$$\sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l}, n = 1, 2, \dots$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow C_2 l + C_4 \sin\left(\frac{n\pi}{l} l\right) = 0 \xrightarrow{\sin(n\pi)=0} C_2 = 0$$

Zusätzlich zu der trivialen Lösung  $w(x)=0$  gibt es  $n$  weitere Gleichgewichtspfade

$$w(x) = w_{\max} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$



Source: Baustatik II, Simon Zweidler

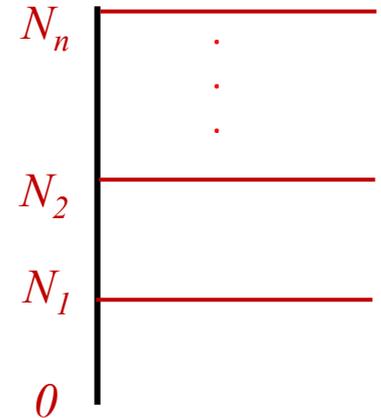
# Beschreibung des Stabilitäts- bzw Verzweigungsproblems

Perfekt gerader Stab ohne Querbelastung ( $q_z=0$ ) in Form eines Pendelstabes

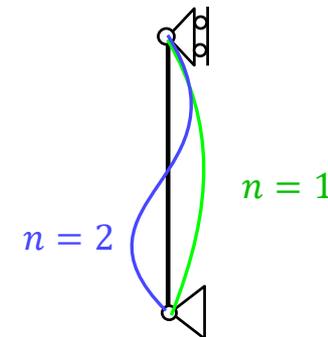
**Druck**  $\Rightarrow N < 0, q_z = 0 \Rightarrow EI_y w'''' + Nw'' = 0$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y$

$$w(x) = w_{\max} \sin(\lambda x) = w_{\max} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \text{ wo } \lambda = \frac{n\pi}{l}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{EI_y} = \lambda^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \Rightarrow N_n = n^2 EI_y \frac{\pi^2}{l^2}, n = 1, 2, \dots$$



**Verzweigungslast:** mehrere mögliche Verformungspfade  
 Es gibt in diesem Fall theoretisch unendlich viele („n“) Lösungen, welche eine jeweils „n<sup>2</sup>“-fache Euler'sche Knicklast liefern.



Source: Baustatik II, Simon Zweidler

# Beschreibung des Stabilitäts- bzw Verzweigungsproblems

Perfekt gerader Stab ohne Querbelastung ( $q_z=0$ ) in Form eines Pendelstabes

Aus strukturmechanischer Sicht ist nur der kleinste Wert mit  $n=1$  gemäß

$$N_{cr} = N_1 = EI_y \frac{\pi^2}{l^2} : \text{Eulerknicklast}$$

von Bedeutung (funktioniert als Grenze).



$n = 1$

Knickfigur

Source: Baustatik II, Simon Zweidler

# Beschreibung des Stabilitäts- bzw Verzweigungsproblems

## Eulerknicklast

$$N_{cr} = N_1 = EI_y \frac{\pi^2}{l^2} : \text{Eulerknicklast}$$



Unter Auswirkung der Eulerknicklast kann auch eine winzige Verschiebung, Flügelschlag einer Fliege, zur stark Verformung und Verlust der Tragfähigkeit führen

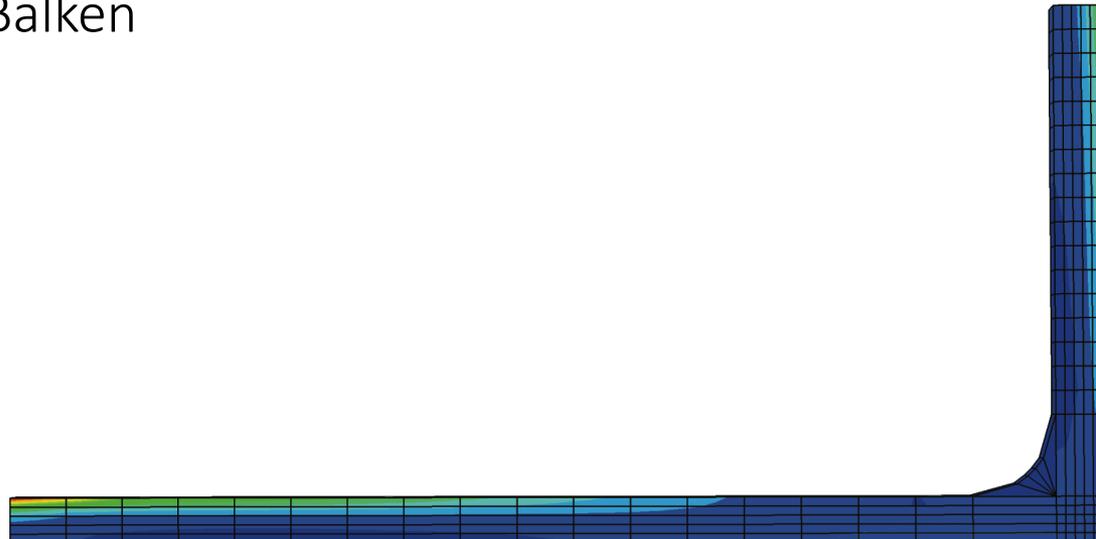
### Eigenschaften

- Die kritische Druckbeanspruchung hängt nicht von der Druckfestigkeit des Stabmaterials ( $EA$ ), sondern von dessen Elastizität (E-Modul) und Flächenträgheitsmoment  $I$  (Biegesteifigkeit) ab.
- Die kritische Druckspannung ist wesentlich kleiner als die Biege- und Druckfestigkeit des Materials.

# Berechnung der Euler'sche Knickfälle (Knicklänge, Knicklasten) für weiteren Randbedingungen

## Das Eigenwertproblem – Analytische Berechnung

- Pendelstab
- Beidseitig eingespannter Balken
- Beidseitig eingespannter Balken
- Kragarm



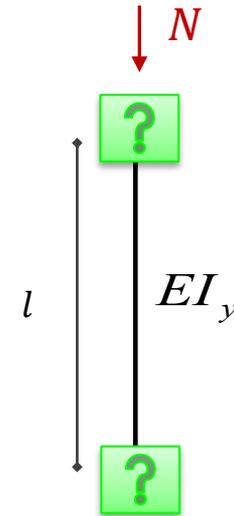
# Ermittlung der Eulerknickfälle

## Verallgemeinerung für weitere Randbedingungen

$$N < 0, q_z = 0 \Rightarrow EI_y w'''' + Nw'' = 0, \text{ wo } \lambda^2 = N / EI_y$$

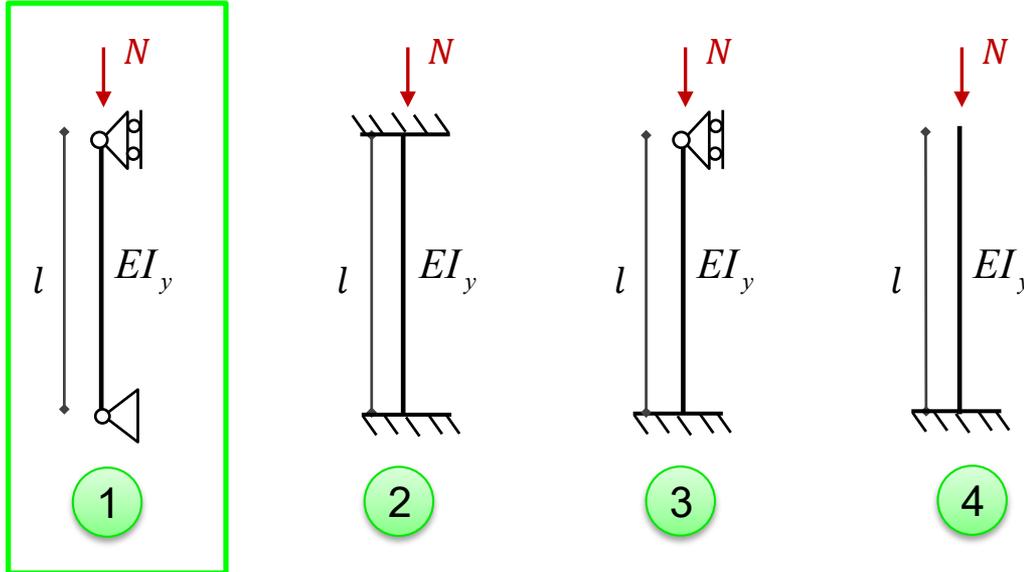
$$\text{Homogene Lösung: } w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

4 Unbekannte



Die unbekanntenen Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

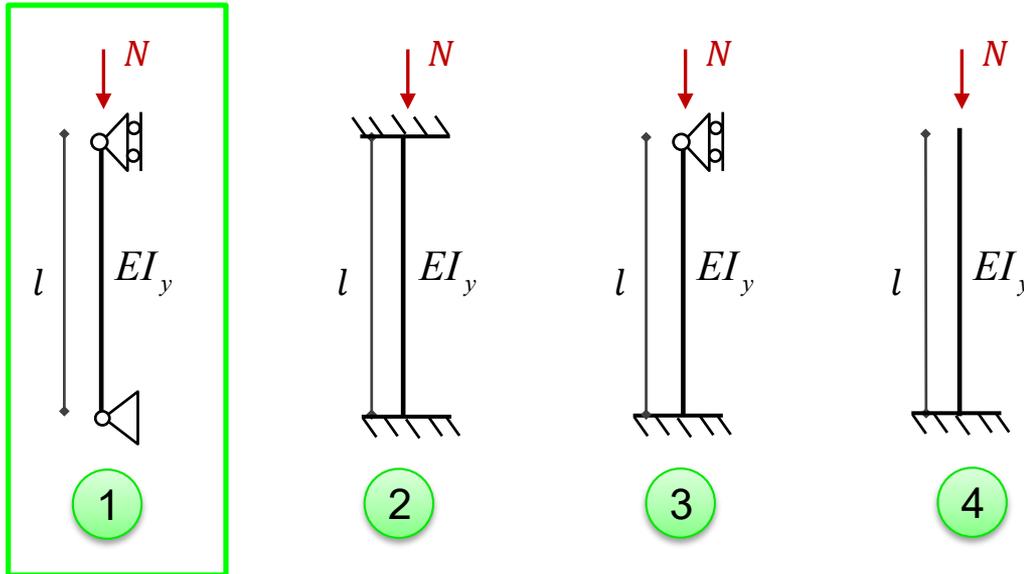
Die unbekannten Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

## Fall 1 – Pendelstab:

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w''(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w''(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cancel{\cos(\lambda 0)}^1 + C_4 \cancel{\sin(\lambda 0)}^0 = 0 \\ -\lambda^2 C_3 \cancel{\cos(\lambda 0)}^1 - \lambda^2 C_4 \cancel{\sin(\lambda 0)}^0 = 0 \\ C_1 + C_2 l + C_3 \cos(\lambda l) + C_4 \sin(\lambda l) = 0 \\ -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda l) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda l) = 0 \end{array}$$

Homogenes lineares  
Gleichungssystem

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekanntenen Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

Fall 1 – Pendelstab:

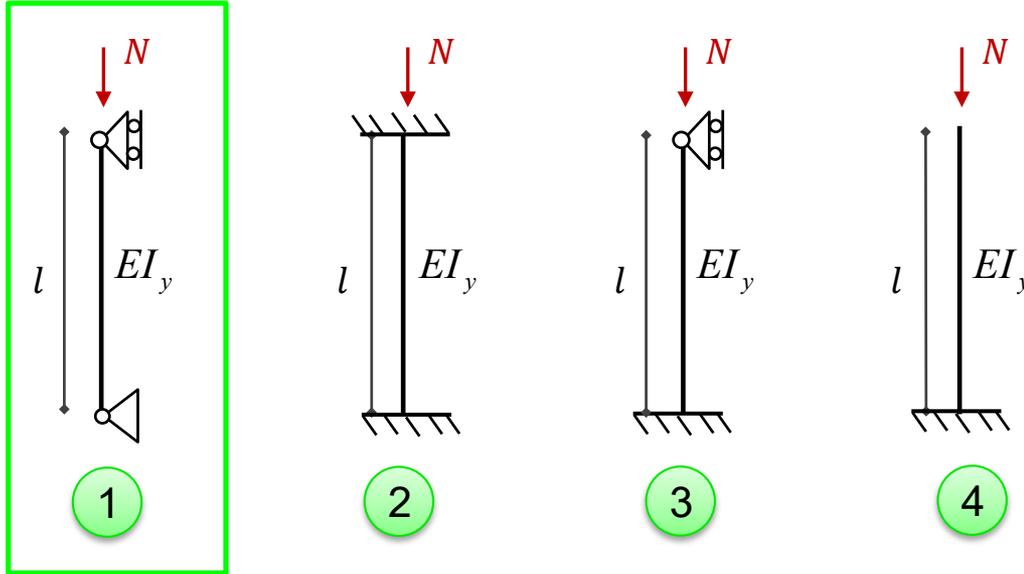
$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w''(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w''(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 1 & l & \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \cos(\lambda l) & -\lambda^2 \sin(\lambda l) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Homogenes lineares  
Gleichungssystem

$$\Downarrow$$

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekanntenen Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

Fall 1 – Pendelstab:

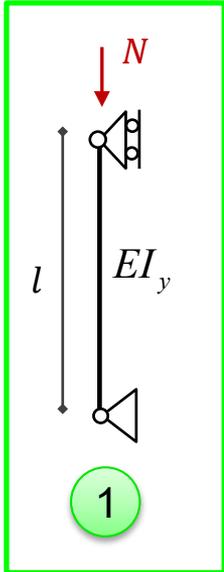
$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w''(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w''(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 1 & l & \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \cos(\lambda l) & -\lambda^2 \sin(\lambda l) \end{vmatrix} = 0$$

Homogenes lineares  
Gleichungssystem

$$\Downarrow \\ \det(\mathbf{A}) = 0$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

## Fall 1 – Pendelstab

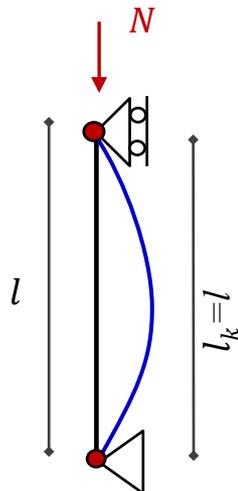


$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi \xrightarrow{n=1} \lambda_{cr} = \frac{\pi}{l}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{N_{cr}}{EI_y} = \lambda_{cr}^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \Rightarrow N_{cr} = EI_y \frac{\pi^2}{l^2} \quad \text{Euler'sche Knicklast}$$

Definition - **Knicklänge**:  $l_k = \frac{\pi}{\lambda_{cr}} = l$  sodass  $N_{cr} = EI_y \frac{\pi^2}{l_k^2}$

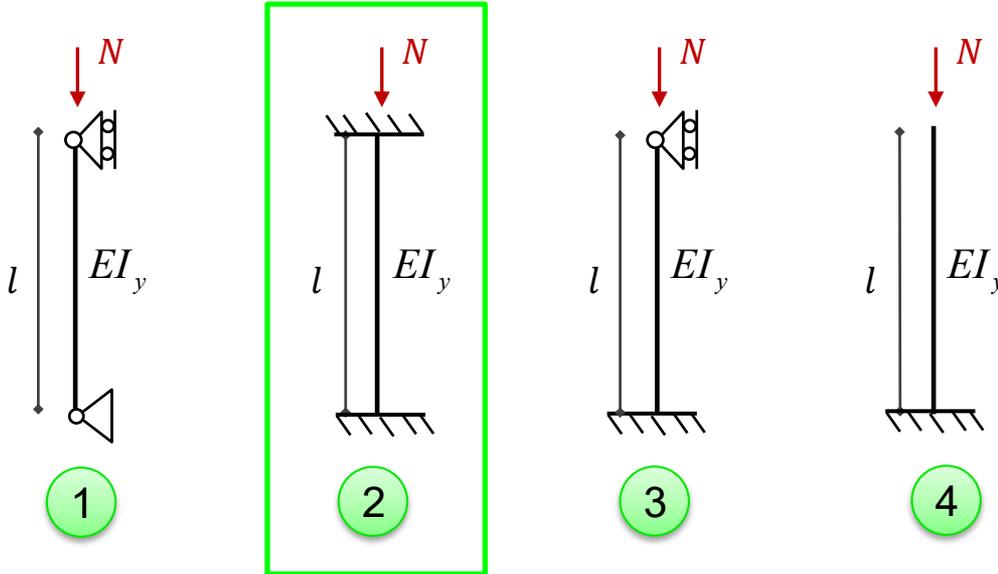
Knickfigur:



$$w(x) = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

## Verallgemeinerung für verschiedenen Randbedingungen



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekannt Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

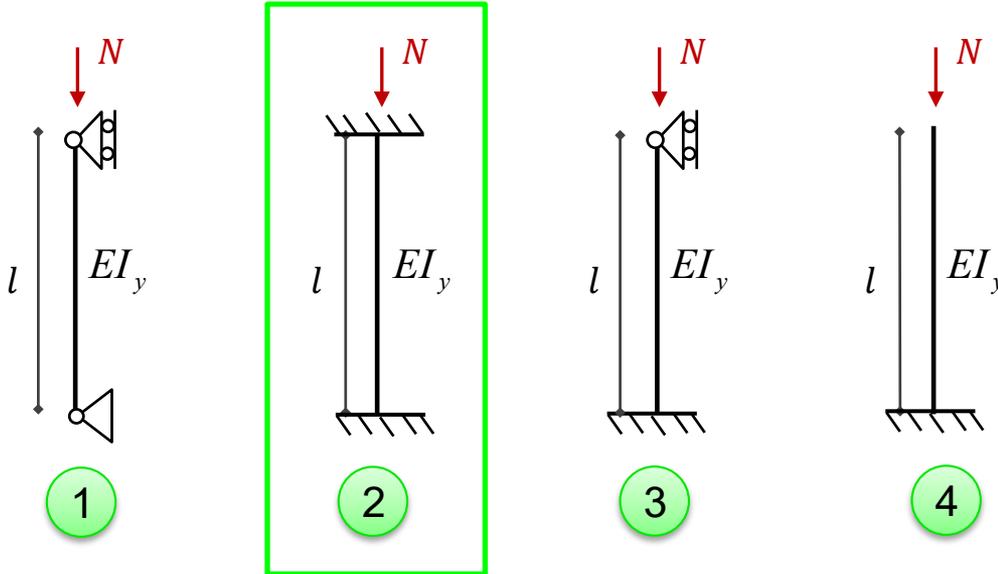
**Fall 2** – beidseitig eingespannter Balken:

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w'(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cancel{\cos(\lambda 0)}^1 + C_4 \cancel{\sin(\lambda 0)}^0 = 0 \\ C_2 - \lambda C_3 \cancel{\sin(\lambda 0)}^0 + \lambda C_4 \cancel{\cos(\lambda 0)}^1 = 0 \\ C_1 + C_2 l + C_3 \cos(\lambda l) + C_4 \sin(\lambda l) = 0 \\ C_1 - \lambda C_2 \sin(\lambda l) + \lambda C_3 \cos(\lambda l) = 0 \end{array}$$

Homogenes lineares  
Gleichungssystem

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

## Verallgemeinerung für verschiedenen Randbedingungen



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekannten Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

### Fall 2 – beidseitig eingespannter Balken:

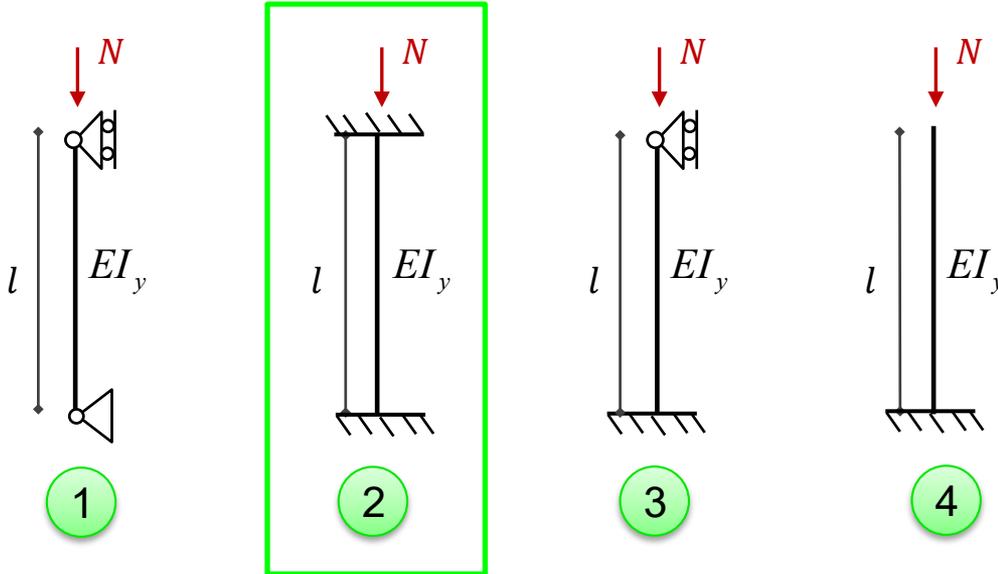
$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w'(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & l & \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) \\ 0 & 1 & -\lambda \sin(\lambda l) & \lambda \cos(\lambda l) \end{pmatrix}}_{\det(\mathbf{A})} = 0$$

Homogenes lineares  
Gleichungssystem

$$\Downarrow \\ \det(\mathbf{A}) = 0$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

Verallgemeinerung:



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekannt Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

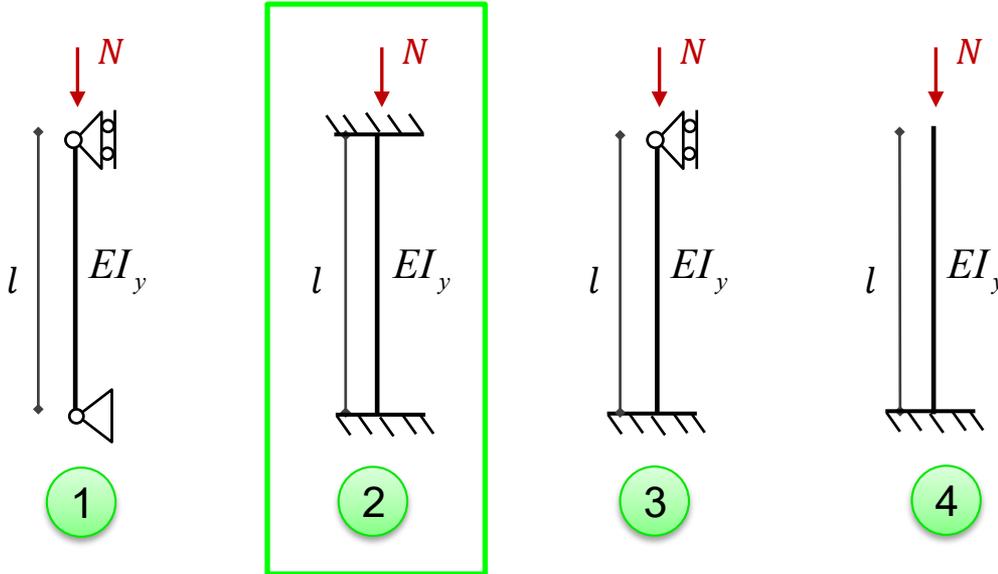
Fall 2 – beidseitig eingespannter Balken:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos(\lambda l) - \lambda l \sin(\lambda l) = 0 \quad \text{mit:}$$

$$\cos(\lambda l) - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \quad \& \quad \sin(\lambda l) = 2 \sin\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \cos\left(\frac{\lambda l}{2}\right)$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

Verallgemeinerung:



$$w(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekannten Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

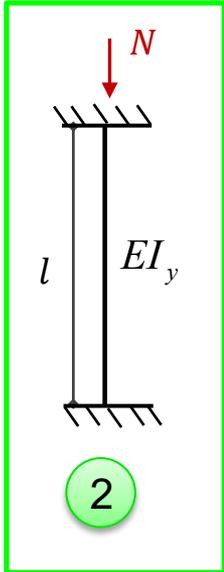
Fall 2 – beidseitig eingespannter Balken:

$$\sin\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \left( \frac{\lambda l}{2} \cos\left(\frac{\lambda l}{2}\right) - \sin\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\lambda l}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda l}{2} = n\pi \\ \text{oder } \frac{\lambda l}{2} \cos\left(\frac{\lambda l}{2}\right) = \sin\left(\frac{\lambda l}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{2n\pi}{l} \\ \tan\left(\frac{\lambda l}{2}\right) = \frac{\lambda l}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{2n\pi}{l} \\ \frac{\lambda_2 l}{2} = 4.493 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{2n\pi}{l} \\ \lambda_2 = \frac{8.986}{l} \end{array} \right\}$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

## Fall 2 – beidseitig eingespannter Balken



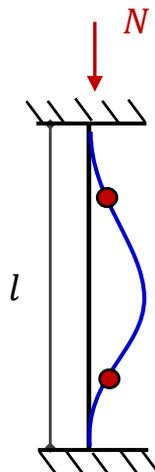
$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \lambda_{cr} = \min(\lambda_1, \lambda_2) \xrightarrow{n=1} \lambda_{cr} = \frac{2\pi}{l} \left( < \frac{8.986}{l} \right)$$

$$\text{Ansatz: } \frac{N_{cr}}{EI_y} = \lambda_{cr}^2 = \left( \frac{2\pi}{l} \right)^2 \Rightarrow N_{cr} = EI_y \frac{4\pi^2}{l^2}$$

Euler'sche  
Knicklast

$$\text{Knicklänge: } l_k = \frac{\pi}{\lambda_{cr}} = \frac{l}{2}$$

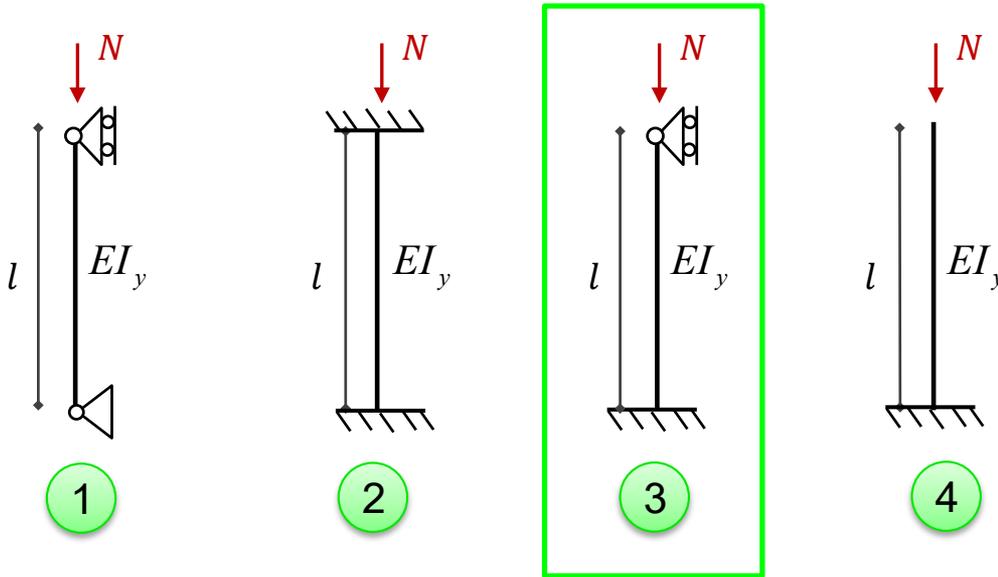
Knickfigur:



$$w(x) = A \left( \cos \frac{2\pi x}{L} - 1 \right)$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

Verallgemeinerung:



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekannten Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

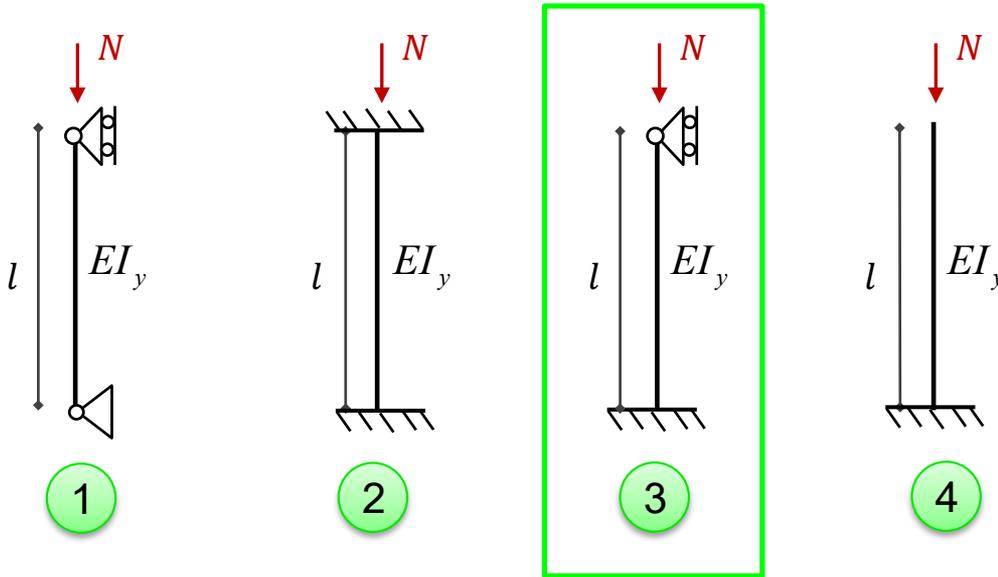
**Fall 3** – einseitig eingespannter Balken:

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w''(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cancel{\cos(\lambda 0)}^1 + C_4 \cancel{\sin(\lambda 0)}^0 = 0 \\ C_1 - \lambda C_2 \cancel{\sin(\lambda 0)}^0 + \lambda C_3 \cancel{\cos(\lambda 0)}^1 = 0 \\ C_1 + C_2 l + C_3 \cos(\lambda l) + C_4 \sin(\lambda l) = 0 \\ -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda l) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda l) = 0 \end{array}$$

Homogenes lineares  
Gleichungssystem

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

Verallgemeinerung:



$$w(x) = 1 + C_1 x + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_1 - \lambda C_2 \sin(\lambda x) + \lambda C_3 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_2 \sin(\lambda x) - \lambda^2 C_3 \cos(\lambda x)$$

Die unbekannten Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

**Fall 3** – einseitig eingespannter Balken:

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w''(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & l & \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \cos(\lambda l) & -\lambda^2 \sin(\lambda l) \end{pmatrix}}_{\det(\mathbf{A})} = 0$$

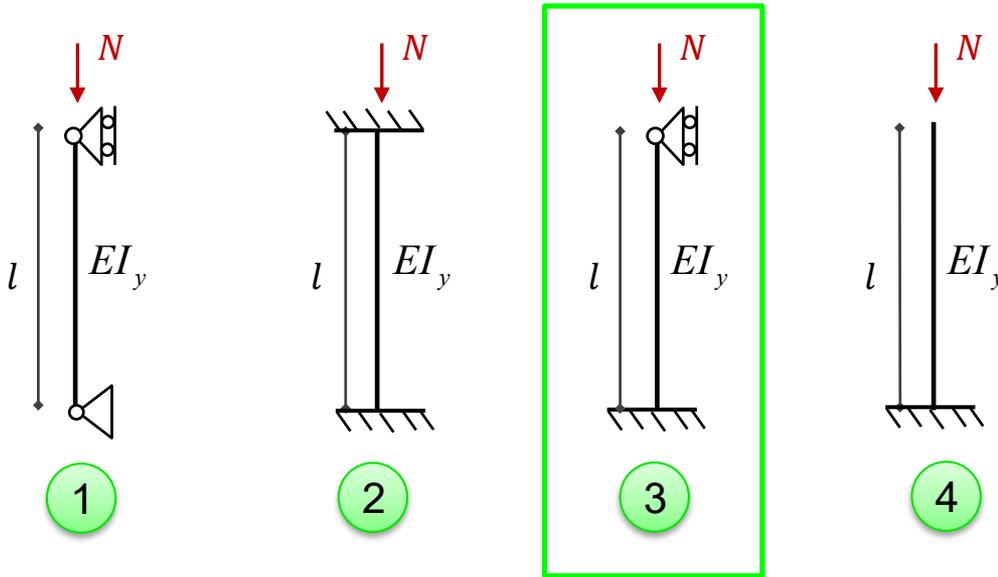
Homogenes lineares  
Gleichungssystem

$\Downarrow$

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

Verallgemeinerung:



Fall 3 – einseitig eingespannter Balken:

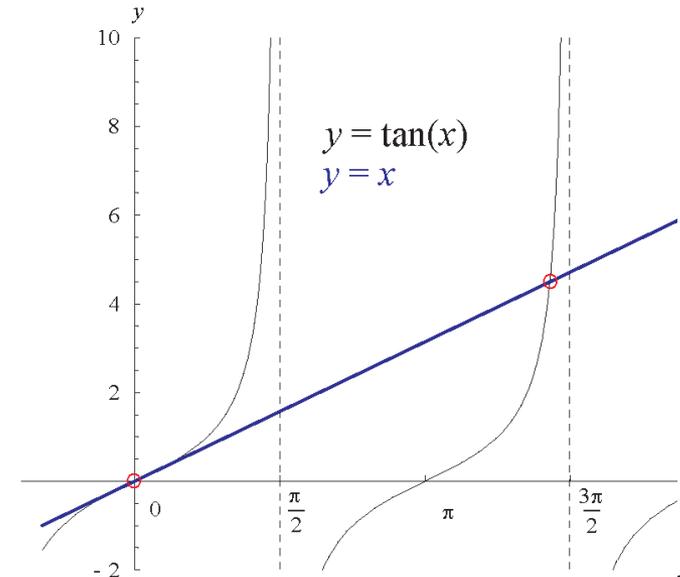
$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \tan(\lambda l) = \lambda l \Rightarrow \lambda = \frac{4.493}{l} \approx \frac{\pi}{0.7l}$$

$$w(x) = 1 + C_1 x + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_1 - \lambda C_2 \sin(\lambda x) + \lambda C_3 \cos(\lambda x)$$

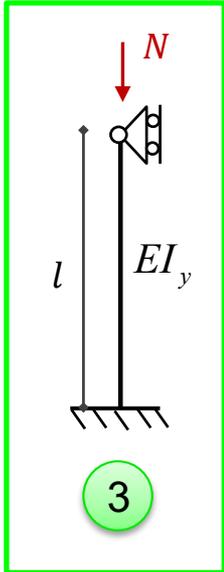
$$w''(x) = -\lambda^2 C_2 \sin(\lambda x) - \lambda^2 C_3 \cos(\lambda x)$$

Die unbekannt Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt



# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

## Fall 3 – einseitig eingespannter Balken



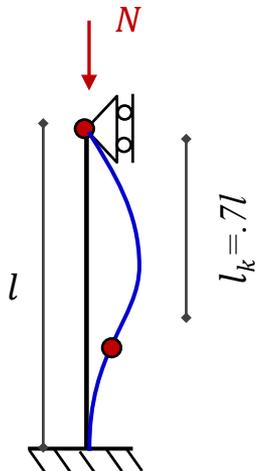
$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \lambda_{cr} = \frac{\pi}{0.7l}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{N_{cr}}{EI_y} = \lambda_{cr}^2 = \left( \frac{\pi}{0.7l} \right)^2 \Rightarrow N_{cr} = EI_y \frac{2\pi^2}{l^2}$$

Euler'sche  
Knicklast

$$\text{Knicklänge: } l_k = \frac{\pi}{\lambda_{cr}} = 0.7l$$

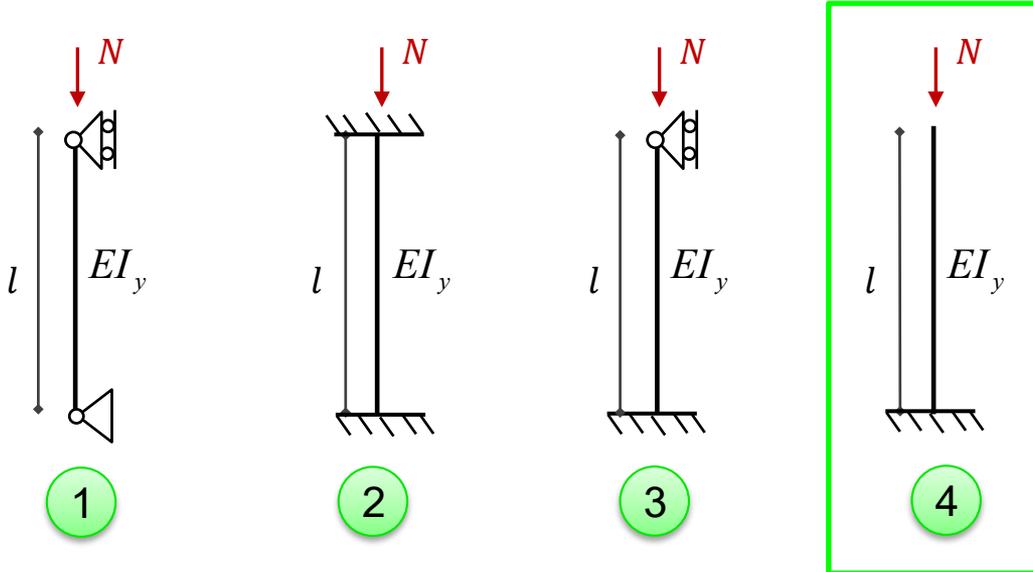
Knickfigur:



$$w(x) = ? \quad (\textit{self-study exercise})$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

## Verallgemeinerung



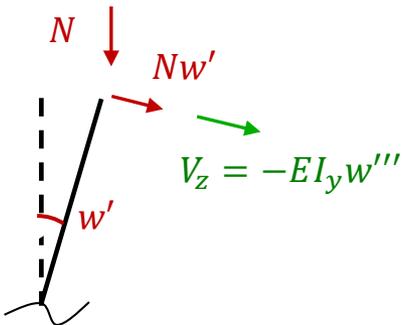
$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekanntenen Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

**Fall 4** – Kragarm (einseitig eingespannter und freier Stab):



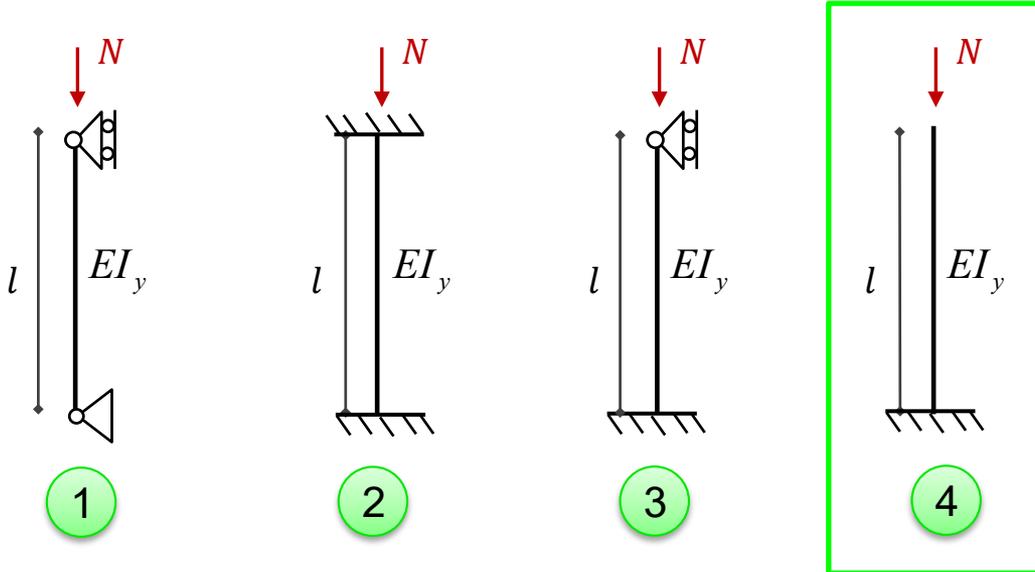
**Randbedingungen:**  $w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(l) = 0$

Querkraftgleichgewicht am freien Ende  $\Rightarrow$

$$Nw'(l) + V_z = 0 \xrightarrow{N = \lambda^2 EI_y} \lambda^2 EI_y w'(l) - EI_y w'''(l) = 0$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

Verallgemeinerung:



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

Die unbekannt Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

**Fall 4** – Kragarm (einseitig eingespannter und freier Stab):

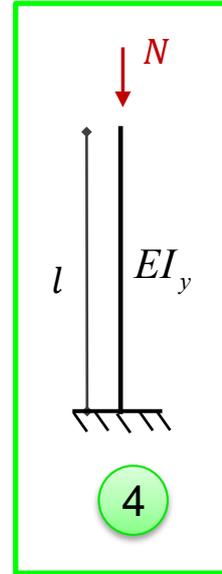
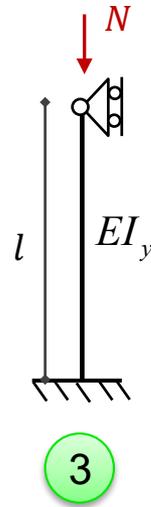
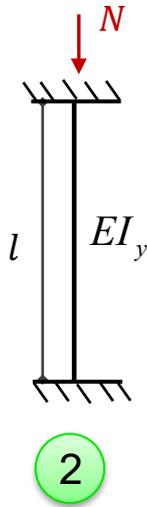
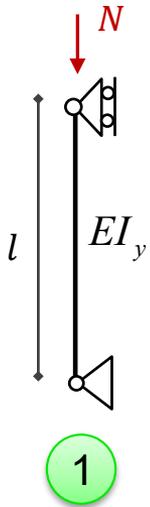
$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w''(l) = 0 \\ \lambda^2 w'(l) - w'''(l) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \cos(\lambda l) & -\lambda^2 \sin(\lambda l) \\ 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\det(\mathbf{A})} = 0$$

Homogenes lineares  
Gleichungssystem

$$\Downarrow \\ \det(\mathbf{A}) = 0$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

Verallgemeinerung:



$$w(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_2 - \lambda C_3 \sin(\lambda x) + \lambda C_4 \cos(\lambda x)$$

$$w''(x) = -\lambda^2 C_3 \cos(\lambda x) - \lambda^2 C_4 \sin(\lambda x)$$

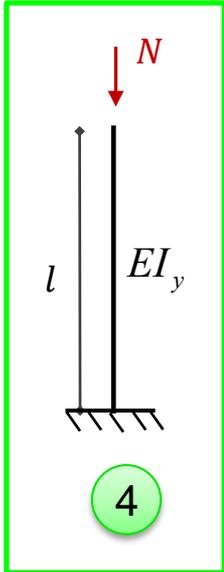
Die unbekannten Koeffizienten werden entsprechend der angegebenen **Randbedingungen** bestimmt

**Fall 4** – Kragarm (einseitig eingespannter und freier Stab):

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \cos(\lambda l) - \sin(\lambda l) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda l = \frac{\pi}{2}$$

# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

## Fall 4 – Kragarm



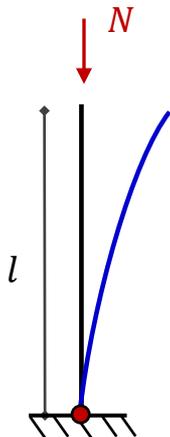
$$\det(\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \lambda_{cr} = \frac{\pi}{2l}$$

$$\text{Ansatz: } \frac{N_{cr}}{EI_y} = \lambda_{cr}^2 = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \Rightarrow N_{cr} = EI_y \frac{\pi^2}{4l^2}$$

Euler'sche  
Knicklast

$$\text{Knicklänge: } l_k = \frac{\pi}{\lambda_{cr}} = 2l$$

Knickfigur:

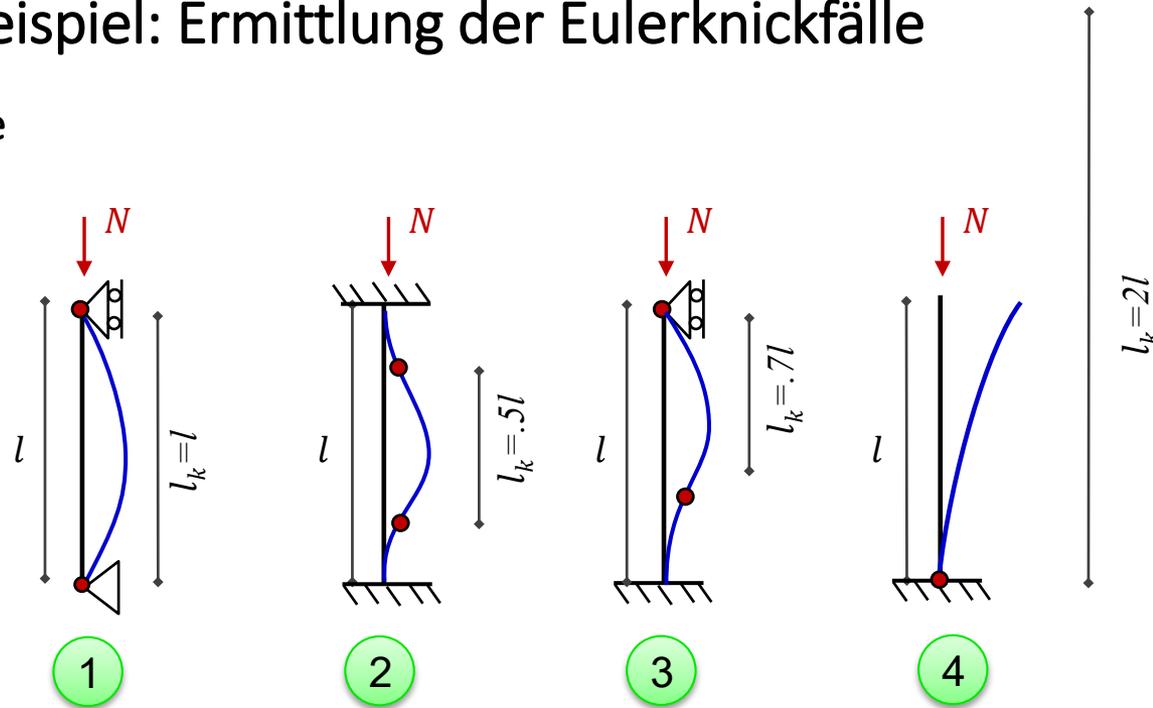


$$l_k = 2l$$

$$w(x) = A \left( \cos \frac{\pi x}{2L} - 1 \right)$$

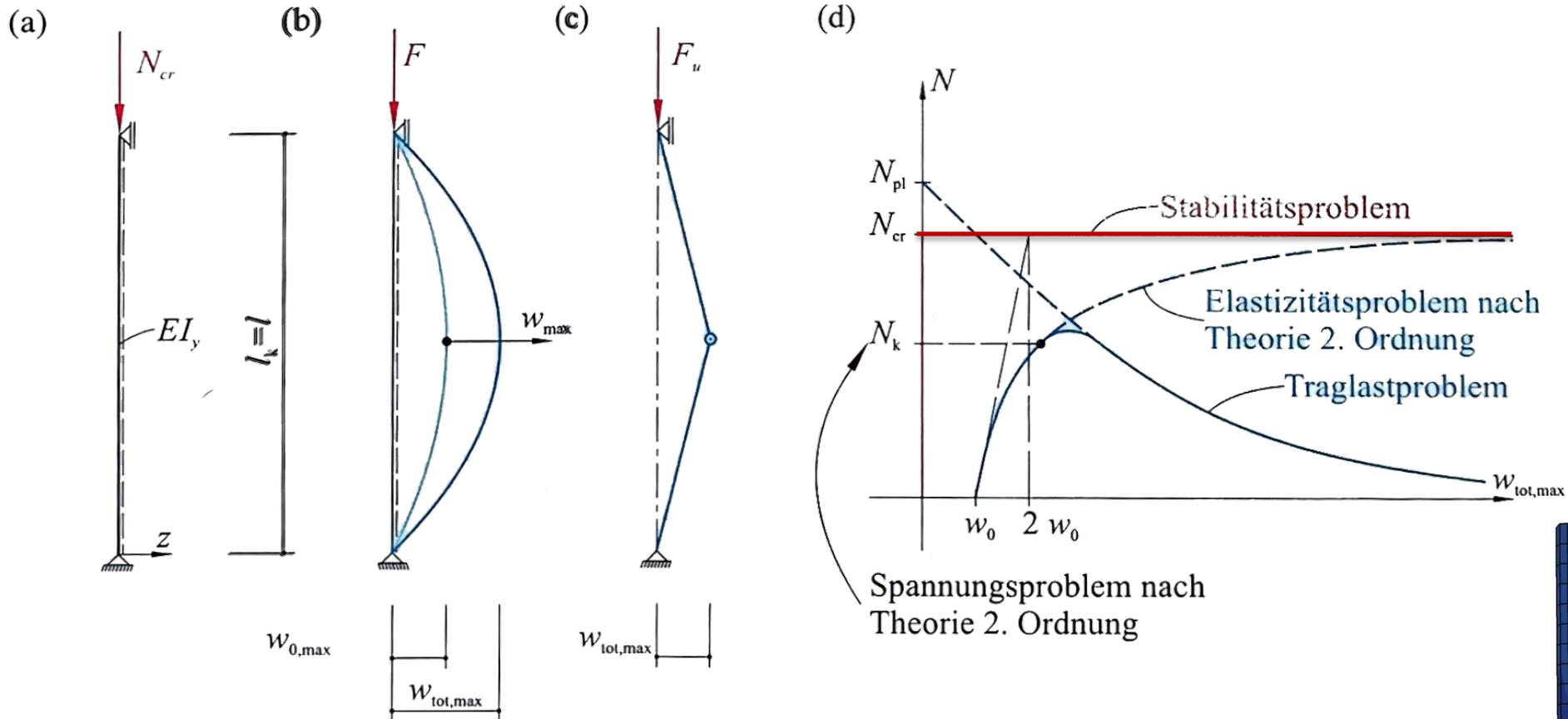
# Anwendungsbeispiel: Ermittlung der Eulerknickfälle

## Eulersche Knickfälle



Knickfälle	1	2	3	4
Knicklänge $l_k$	$l$	$0.5l$	$0.7l$	$2l$
Kritische Knicklast $N_{cr} = EI_y \frac{\pi^2}{l_k^2} = EI_y \lambda^2$	$EI_y \frac{\pi^2}{l^2}$	$EI_y \frac{4\pi^2}{l^2}$	$EI_y \frac{2\pi^2}{l^2}$	$EI_y \frac{\pi^2}{4l^2}$

# Stabilitätsprobleme - Typen



- (a) perfekter gerader Stab; (b) Stab mit Berücksichtigung einer Verformung;  
 (c) Mechanismus für die Traglast Berechnung nach Theorie 2. Ordnung; (d) N-w Diagramm

Source: Baustatik II, Simon Zweidler

## Zusammenfassung – Stabilitätsprobleme

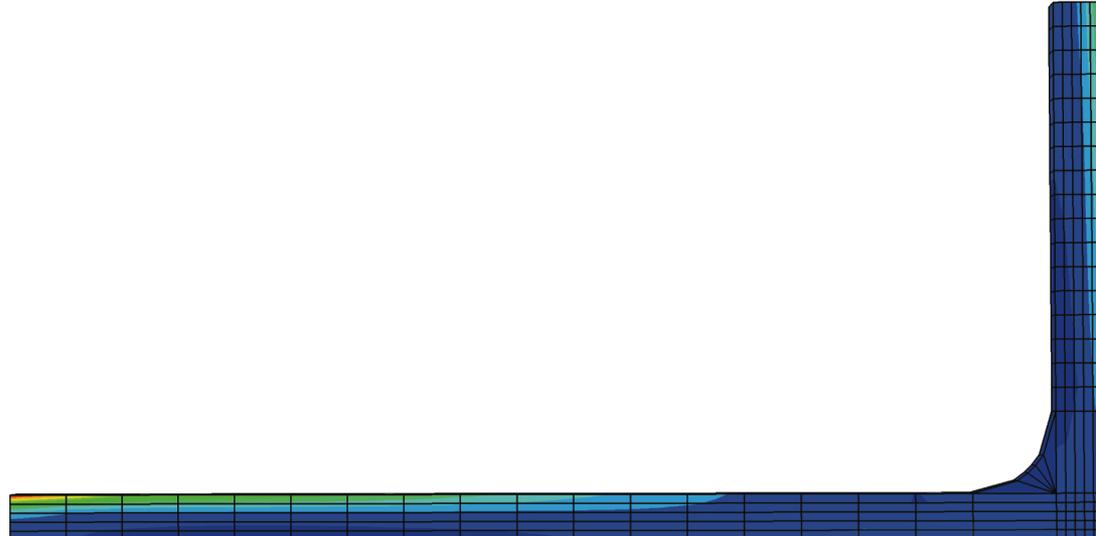
- Knicken/Instabilität kann unter Präsenz von Druckspannungen auftreten
- Dieses Phänomen ist im Stahlbau besonders wichtig wegen höherer Steifigkeit und schlanker Querschnitten und dünner Blechen

### Typen von Instabilität

- Verzweigungsprobleme: Annahme von „idealen“ Systemen (linear-elastisch), unter Einwirkung einer infinitesimalen Verformung aus der Ursprungslage.
- Durchschlagsprobleme: für spezielle „geometrieempfindliche“ Strukturen muss die exakte, nichtlineare Geometrieänderung berücksichtigt werden.
- Die kritischen Lasten die der Gleichgewichtsgleichung erfüllen werden als „Verzweigungslasten“ genannt.
- „Verzweigungslast“ ist jene des Druckstabs bei Biegeknicken: „Eulerlast“
- (elastische) Theorie 2. Ordnung: Betrachtung des Gleichgewichts am endlich ausgelenkten Stab. Bei der klassischen Th. 2. Ordnung wird ebenfalls keine Plastizität berücksichtigt.
- Die realen Traglasten von Stäben erfordern die Berücksichtigung weiterer Effekte wie Steifigkeitsverlust durch Plastizität, Eigenspannungen → „Traglasttheorie“.

Source: Baustatik II, Simon Zweidler

# APPENDIX



# Herleitung der Lösung im Fall einer Zugkraft

Gleichgewicht am **verformten** System nach Theorie 2. Ordnung

Was passiert im Fall einer Zugkraft?

wenn  $N > 0$  (**Zug**):  $EI_y w'''' - Nw'' = q_z$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y > 0$

Die homogene Lösung wird unter Verwendung des charakteristischen Polynoms gefunden

$$w'''' - \lambda^2 w'' = \frac{q_z}{EI_y}$$

Char. Poly:  $\omega^4 - \lambda^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 0$  or  $\omega^2 = \lambda^2 \Rightarrow \omega = \pm \lambda$

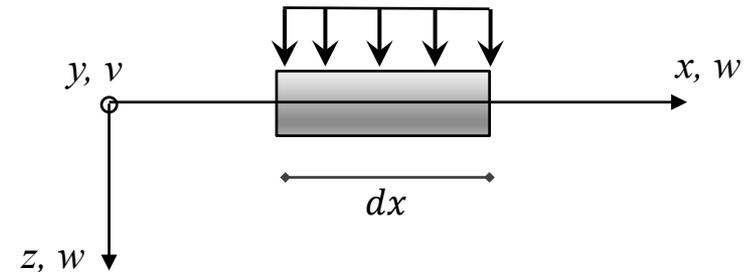
Dann nimmt die homogene Lösung folgende Form:

Homogene Lösung:  $w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cosh(\lambda x) + C_4 \sinh(\lambda x)$

Aufgrund des Begriffs  $q_z / EI_y$  auf der rechten Seite der Gleichung gibt es auch eine

partikuläre Lösung für  $q(x) = q_0$ :  $w_p(x) = \frac{-q_0 x^2}{2N}$

Infinitesimales Balkenelement



Source: Baustatik II, Simon Zweidler

# Herleitung der Lösung im Fall einer Druckkraft

Gleichgewicht am **verformten** System nach Theorie 2. Ordnung

Was passiert im Fall einer Druckkraft?

wenn  $N < 0$  (**Druck**):  $EI_y w'''' + Nw'' = q_z$ , wo  $\lambda^2 = N / EI_y > 0$

Die homogene Lösung wird unter Verwendung des charakteristischen Polynoms gefunden

$$w'''' + \lambda^2 w'' = \frac{q_z}{EI_y}$$

Char. Poly:  $\omega^4 + \lambda^2 \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = 0$  or  $\omega^2 = -\lambda^2 \Rightarrow \omega = \pm i\lambda$  ( $i$ : imaginäre Zahl)

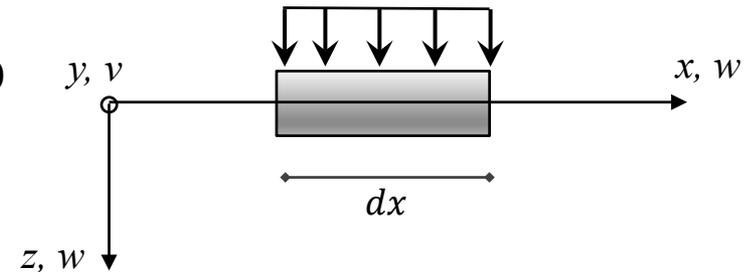
Dann nimmt die homogene Lösung folgende Form:

Homogene Lösung:  $w_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)$

Aufgrund des Begriffs  $q_z / EI_y$  auf der rechten Seite der Gleichung gibt es auch eine

partikuläre Lösung für  $q(x) = q_0$ :  $w_p(x) = \frac{q_0 x^2}{2N}$

Infinitesimales Balkenelement



Source: Baustatik II, Simon Zweidler