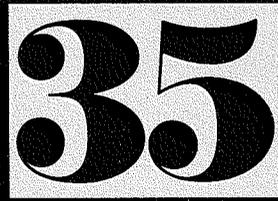


**Institut für Geodäsie und
Photogrammetrie**
an der Eidgenössischen
Technischen Hochschule
Zürich

Mitteilungen Nr.



Verfahren der
multivariaten Statistik
zur Beurteilung der Resultate
und der Zuverlässigkeit
geodätischer Messsysteme

Alessandro Carosio

Juli 1983

Verfahren der
multivariaten Statistik
zur Beurteilung der Resultate
und der Zuverlässigkeit
geodätischer Messsysteme

Dr. sc. techn. Alessandro Carosio

Juli 1983

Copyright by
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich

Alle Rechte vorbehalten

Auflage: 400 Exemplare

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist als Doktorarbeit unter meiner Leitung entstanden. Herr Dipl. Kult. Ing. ETH Alessandro Carosio, als Leiter einer Dienststelle am Bundesamt für Landestopographie in Bern mit dienstlichen Verpflichtungen stark ausgelastet, hat sie ausserhalb seiner Arbeitszeit aus eigener Initiative geschrieben.

Es fällt beim Lesen der Abhandlung auf, dass Herr Carosio immer wieder die Beziehung zur Praxis anspricht. Dass also aus der Praxis heraus eine Arbeit entstanden ist, die sich durch theoretische Ansätze auf dem Gebiet der mathematischen Statistik auszeichnet, die über die erlernten Kenntnisse der bei uns ausgebildeten Geodäten beträchtlich hinausgehen, scheint mir bemerkenswert.

Möge dies für viele Praktiker und Theoretiker ein Ansporn sein, sich mehr als bisher mit statistischen Testverfahren und der Zuverlässigkeit von geodätischen Messsystemen zu befassen.

R. Conzett

Die Herren Prof. R. Conzett und Dr. W. Maurer, Dozenten an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich, haben mit ihren wertvollen Ratschlägen und ihrer hilfsbereiten und konstruktiven Unterstützung einen wesentlichen Beitrag zur Entstehung der vorliegenden Arbeit geleistet. Ich möchte ihnen daher hier meinen besonders herzlichen Dank aussprechen. Ebenfalls danken möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Riedwyl, Universität Bern, für den ausgezeichneten Kurs 'Angewandte multivariate Statistik', den ich besuchen durfte, und der Direktion des Bundesamtes für Landestopographie für ihre Bereitschaft, mir die Rechenanlage unentgeltlich zur Verfügung zu stellen.

Zudem gilt mein Dank meiner Frau Brigitte für die sorgfältige sprachliche Bearbeitung des Manuskripts sowie für dessen Niederschrift, Herrn W. Schneibel für die Ergänzung der Figuren und der Leitung des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie der Eidg. Techn. Hochschule Zürich für ihre Bereitschaft, meine Arbeit zu veröffentlichen.

A. Carosio

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|--|---|----|
| 1 | Kurzfassung und Arbeitsgliederung..... | 9 |
| 2 | Abstract and organization..... | 11 |
| I. Teil | | |
| Einleitung | | |
| 3 | Problemstellung und Zielsetzungen..... | 15 |
| 4 | Theoretische Voraussetzungen..... | 17 |
| 4.1 | Literatur, Quellenangaben..... | 17 |
| 4.2 | Terminologie und Symbole..... | 18 |
| 5 | Die Ausgleichung geodätischer Netze in der Praxis..... | 20 |
| 5.1 | Die schweizerische Triangulation..... | 20 |
| 5.2 | Die Revolution in den 60-er Jahren..... | 20 |
| 6 | Aktuelle Beurteilungsverfahren für die Triangulationsresultate..... | 22 |
| 6.1 | Einführung..... | 22 |
| 6.2 | Ziele der Beurteilungsverfahren..... | 22 |
| 6.3 | Bedeutung und Klassifikation..... | 23 |
| II. Teil | | |
| Prüfung der Modellannahmen aufgrund der durchgeführten Beobachtungen (Verfahren a posteriori) | | |
| 7 | Allgemeines..... | 27 |
| 8 | Gemeinsame Eigenschaften..... | 29 |
| 9 | Einfache Verfahren aus der Praxis..... | 31 |
| 9.1 | Der F-Test..... | 31 |
| 9.2 | V-Test..... | 35 |
| 9.3 | Test der geometrischen Bedingungen..... | 38 |
| 10 | Der Test der standardisierten Verbesserungen..... | 40 |
| 10.1 | Testbeschreibung..... | 40 |
| 10.2 | Macht des Tests..... | 42 |
| 10.3 | Berechnung der Q_{VV} -Diagonalen..... | 42 |
| 11 | Verfahren aus der multivariaten Statistik..... | 45 |
| 11.1 | Einführung..... | 45 |

| | | |
|--|--|-----|
| 11.2 | Graphische Verfahren..... | 45 |
| 12 | Die Hauptkomponentenanalyse..... | 51 |
| 12.1 | Einführung..... | 51 |
| 12.2 | Die Hauptachsentransformation..... | 51 |
| 12.3 | Der Hauptkomponententest..... | 54 |
| 12.4 | Einzeltest..... | 54 |
| 12.5 | Anwendungen in der Geodäsie..... | 55 |
| 12.6 | Die Berechnung der Hauptachsentransformation..... | 55 |
| 12.6.1 | Zielsetzung..... | 55 |
| 12.6.2 | Das Jacobi-Verfahren..... | 56 |
| 12.6.3 | Die Nichteindeutigkeit der Lösung..... | 57 |
| 12.6.4 | Optimaler Testvektor und Faktorenanalyse..... | 58 |
| 12.7 | Rechenbeispiele..... | 60 |
| 12.7.1 | Einfaches Dreieck..... | 60 |
| 12.7.2 | Mehrfaches Dreiecksnetz..... | 62 |
| 12.7.3 | Das kombinierte Netz..... | 64 |
| 13 | Der NMAX-Test..... | 72 |
| 13.1 | Die Teststatistik..... | 72 |
| 13.2 | Die NMAX-Verteilung..... | 73 |
| 13.2.1 | Definition..... | 73 |
| 13.2.2 | Berechnung der NMAX-Verteilung..... | 74 |
| | Tafeln der NMAX-Verteilung..... | 77 |
| 13.3 | Rechenbeispiele..... | 82 |
| 13.3.1 | Das einfache Dreieck..... | 82 |
| 13.3.2 | Das mehrfache Dreiecksnetz..... | 82 |
| 13.3.3 | Das kombinierte Netz..... | 84 |
| 13.4 | Wichtige Eigenschaften des Tests..... | 84 |
| 13.5 | Geometrische Bedeutung des NMAX-Tests..... | 85 |
| 13.6 | Die Lokalisierung der groben Fehler..... | 88 |
| 13.7 | Die Methode der extremen S-Komponente..... | 92 |
| 13.7.1 | Erläuterung..... | 92 |
| 13.7.2 | Die numerische Lösung..... | 95 |
| 13.7.3 | Rechenbeispiel..... | 96 |
| 13.8 | Der globale Test mit der a posteriori geschätzten Varianz..... | 96 |
| 13.9 | Das rechnerische Vorgehen für den NMAX-Test..... | 97 |
| III. Teil | | |
| Die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme (Verfahren a priori) | | |
| 14 | Allgemeines..... | 101 |
| 14.1 | Einführung..... | 101 |
| 14.2 | Die Anforderungen an das Vermessungswerk..... | 101 |
| 14.3 | Die Planung der Messanordnung und der Auswertung..... | 101 |
| 14.4 | Die Analyse der Eigenschaften der entworfenen Varianten..... | 102 |
| 15 | Die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme..... | 104 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 15.1 | Einführung..... | 104 |
| 15.2 | Die Zuverlässigkeit im Allgemeinen..... | 104 |
| 15.3 | Allgemeine Definition der Zuverlässigkeit..... | 105 |
| 15.4 | Die Zuverlässigkeit im Hinblick auf grobe Fehler..... | 105 |
| 15.5 | Definition der Zuverlässigkeit im Hinblick auf grobe Fehler..... | 106 |
| 15.6 | Bemerkungen zur Definition..... | 107 |
| 15.7 | Systemabgrenzung..... | 107 |
| 16 | Einfache Verfahren aus der Praxis..... | 109 |
| 17 | F-Test und Zuverlässigkeit (nach W. Baarda)..... | 113 |
| 17.1 | Theorie..... | 113 |
| 17.2 | Anwendungen..... | 115 |
| 17.2.1 | Ein Dreieck..... | 115 |
| 17.2.2 | Mehrfaches Dreiecksnetz (3 Dreiecke)..... | 116 |
| 17.2.3 | Mehrfaches Dreiecksnetz (30 Dreiecke)..... | 117 |
| 17.2.4 | Mehrfaches Dreiecksnetz (100 Dreiecke)..... | 118 |
| 17.2.5 | Kombiniertes Netz..... | 119 |
| 18 | Zuverlässigkeit und einfache Tests aus der Praxis..... | 120 |
| 19 | Geometrische Zuverlässigkeit..... | 122 |
| 19.1 | Theorie..... | 122 |
| 19.2 | Anwendungen..... | 124 |
| 19.2.1 | Höhenbestimmung aus Doppelnivellement..... | 124 |
| 19.2.2 | Höhenbestimmung durch vier Nivellemente..... | 124 |
| 19.2.3 | Winkelmessung in Dreiecksnetzen..... | 125 |
| 19.2.4 | Kombiniertes Netz..... | 126 |
| 20 | Hauptkomponentenanalyse und Zuverlässigkeit..... | 127 |
| 20.1 | Einführung..... | 127 |
| 20.2 | Die Lösung..... | 127 |
| 20.3 | Rechnerisches Vorgehen..... | 131 |
| 20.4 | Anwendungen..... | 133 |
| 20.4.1 | Dreiecksnetz..... | 133 |
| 20.4.2 | Mehrfaches Dreiecksnetz (3 Dreiecke)..... | 134 |
| 20.4.3 | Mehrfaches Dreiecksnetz (30 Dreiecke)..... | 135 |
| 20.4.4 | Mehrfaches Dreiecksnetz (100 Dreiecke)..... | 136 |
| 20.4.5 | Kombiniertes Netz..... | 137 |
| | Schlussfolgerungen..... | 140 |
| | Literatur..... | 144 |
| | Anhang..... | 147 |
| | Anhang 1: FORTRAN-Programm VERMHA..... | 148 |
| | Anhang 2: FORTRAN-Programm NMAX..... | 157 |

1 Kurzfassung und Arbeitsgliederung

Die Bedeutung der mathematischen Statistik im Vermessungswesen braucht heute sicher nicht mehr hervorgehoben zu werden. In den letzten Jahrzehnten widmeten die Geodäten ihre Aufmerksamkeit den vielseitigen Verbesserungsmöglichkeiten, die die Statistik bieten konnte.

Ein für die Praxis sehr wichtiges Studiengebiet behandelt die Probleme, die mit der Feststellung, Lokalisierung und Beseitigung der groben Fehler in Zusammenhang stehen. In erster Linie gehören zu diesem Thema die statistischen Testverfahren, mit welchen geprüft wird, ob die durchgeführten Messungen mit genügender Wahrscheinlichkeit als Realisierung der angenommenen funktionalen und stochastischen Modelle gelten können. Mittels solcher Tests wird zum Beispiel kontrolliert, ob die erhaltenen Messwerte eine Realisierung der dazugehörigen normalverteilten Zufallsvariablen sind oder ob sie hingegen durch grobe Fehler verfälscht worden sind.

Eine weitere Anwendung der mathematischen Statistik, die ebenfalls in Zusammenhang mit den groben Fehlern steht, ergibt sich aus dem Problem der Zuverlässigkeit der geodätischen Arbeiten. W. Baarda gilt als Initiator systematischer Studien auf diesem Gebiet. Ihm ist die erste strenge mathematische Lösung des Problems zu verdanken. Er bestimmte die Beziehungen, mit welchen für gegebene geodätische Netze berechnet werden kann, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein begangener grober Fehler bei der Durchführung eines F-Tests entdeckt wird. Damit zeigte Baarda auf, wie die Zuverlässigkeitseigenschaften der geodätischen Messanordnung überprüft und Schlüsse über die Sicherheit gegen grobe Fehler gezogen werden können.

Die vorliegende, in drei Teile gegliederte Arbeit befasst sich mit beiden Aspekten des Problems.

Der erste Teil enthält eine Einleitung mit einer Uebersicht über die Probleme, die in der Praxis gelöst werden müssen, um Messsysteme möglichst frei von groben Fehlern zu erhalten. Die Merkmale der Lösungen werden erläutert, sowie ebenfalls einige Hinweise auf eine systematische Klassifikation der Methoden gegeben.

Im zweiten Teil folgt eine ausführliche Beschreibung einiger statistischer Tests, die in der Geodäsie eingesetzt werden. Besonders beachtet werden dabei die intuitiven Verfahren, die oft in der Praxis Anwendung finden und ihre Beziehungen zu den entsprechenden Tests der analytischen Statistik. Zum Schluss des zweiten Teils wird dann als neuer Vorschlag ausführlicher eine Anwendung der Hauptkomponentenanalyse für die Beurteilung des Verbesserungsvektors beschrieben. Kurz gesagt handelt es sich um das Folgende: geeignete lineare Funktionen der Verbesserungen werden gesucht, mit welchen eine Anzahl stochastisch unabhängiger Hilfszufallsvariablen gebildet werden kann. Diese Werte werden dann mit den Methoden der Ordnungsstatistiken getestet (NMAX-Verteilung). Das Verfahren ist auf grobe Fehler besonders empfindlich, sowohl in kleinen als auch in grossen Netzen.

Der dritte Teil ist der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme gewidmet. Die Kernfrage, was das Objekt der Zuverlässigkeit ist, das heisst, was zuverlässig oder unzuverlässig sein kann, ist von zentraler Bedeutung und wird im ersten Kapitel eingehend behandelt. Darauf folgt eine Beschreibung der Verfahren, mit welchen die Zuverlässigkeit von geodätischen Messsystemen überprüft werden kann. Eine kurze Uebersicht zeigt die Beziehungen zwischen den Methoden, von den mehr empirischen aus der Praxis ausgehend bis zur auf dem F-Test aufgebauten Zuverlässigkeitstheorie von W. Baarda.

Eine neue Anregung für eine Erweiterung der Zuverlässigkeitstheorie ist ebenfalls Bestandteil der Arbeit. Die grössere Empfindlichkeit der Hauptkomponentenanalyse bei der Suche nach groben Fehlern führt zu einer anderen Beurteilung der Zuverlässigkeitseigenschaften der geodätischen Messsysteme. Die mathematischen Herleitungen, die zur Berechnung der Zuverlässigkeit führen, sowie ein möglicher Rechenablauf für die Programmierung vervollständigen die Angaben.

Im Anhang sind schliesslich die verwendeten Computerprogramme in FORTRAN wiedergegeben, wie sie für die Tests und für die Berechnung der NMAX-Verteilung gebraucht worden sind.

2 Abstract and organization

The importance of mathematical statistics in surveying today surely needs not be brought to special attention. In the last decades geodesists have focused their attention on the many improvements which statistics had to offer.

One area of study which is of practical importance deals with the problems associated with determining, locating and eliminating blunders. Included in this area are primarily statistical tests used to determine if the measurements fit the assumed functional and stochastic models with a sufficient probability. By means of such tests, one can determine, for example, if the obtained measurements correspond to their normally distributed random variables or if they have been falsified by blunders.

A further application of mathematical statistics which is also concerned with blunders, results from the problem of the reliability of geodetic networks. W. Baarda was the initiator of systematic studies in this area and it was he who found the first rigorous mathematical solution to the problem. He defined the relationships with which for a given net the probability of detecting a blunder by an F-test can be calculated. With this, Baarda showed how the properties of reliability of surveying systems can be tested and conclusions regarding the guarantee against blunders be drawn.

The following three-part report deals with both aspects of the problem.

The first part contains an introduction with a summary of the practical problems which have to be solved in order to obtain geodetic networks free of blunders. The characteristics of the solutions are described as well as several indications to a systematic classification of the methods.

In the second part, various statistical tests used in geodesy are described in detail. Special attention is given to the practical application of intuitive procedures and how they relate to their corresponding tests in analytical statistics. In concluding part two, a new proposal for applying the analysis of principal components in evaluating residual vectors will be elaborated. In other words, suitable

linear functions of the residuals are sought which will yield a series of stochastically independent auxiliary random variables. These values will then be tested with a method of order statistics (NMAX-test). This test is very sensitive in detecting blunders in small as well as in large networks.

The third part deals with the reliability of surveying systems. The key question, namely, what is the object of reliability, i.e. what can be considered reliable or unreliable, is of central importance and will be discussed in the first chapter. This is followed by a description of the methods with which the reliability of surveying systems can be tested. A short review shows the relationships between the methods, starting with the more empirical application and proceeding to the reliability theory which W. Baarda based on the F-test. Furthermore, a new suggestion to broaden the reliability theory will be introduced. The improved sensitivity of the analysis of principal components in detecting blunders leads to a different evaluation of the reliability of surveying systems. The mathematical derivations used in calculating the reliability as well as a possible procedure for their computation conclude this report.

The computer programs in FORTRAN used for the test and the calculation of the NMAX-distribution can be found in the appendix.

I. Teil

Einleitung

3 Problemstellung und Zielsetzungen

Seit mehr als einem Jahrhundert wird über die statistischen Eigenschaften der geodätischen Beobachtungen gesprochen und über die Tatsache, dass die für die Auswertung bereitgestellten Messwerte nicht immer als Realisierungen von normalverteilten Zufallsvariablen betrachtet werden können. In der klassischen Ausgleichsrechnung wurden die Konsequenzen dieser Feststellung nur am Rande behandelt.

In den meisten Werken spricht man von drei Arten von Fehlern für die Beobachtungen in einem Messprozess:

- a) zufällige Fehler, die in der Regel als normalverteilte Zufallsvariablen betrachtet werden
- b) systematische Fehler, deren Beträge konstant oder Funktion einer oder mehrerer Grössen sind
- c) grobe Fehler, deren statistische Eigenschaften nicht bekannt sind und die im mathematischen Modell nicht berücksichtigt werden.

Während die Bedeutung der zufälligen Fehler immer mit grosser Aufmerksamkeit beobachtet wurde, beschäftigten sich die Vermessungsingenieure nur empirisch mit der Problematik der groben Fehler.

Erst Ende der 60-er Jahre veröffentlichte W. Baarda seine bekannte Arbeit 'A testing procedure for use in geodetic networks', wodurch erstmals die theoretischen Grundlagen für die Fehlersuche und für die Ueberprüfung der Zuverlässigkeit der geodätischen Messsysteme formuliert waren. Seither wird über dieses Thema oft berichtet, ohne dass die Verfahren sich in der Praxis allgemein durchsetzen konnten. Sogar unter den Theoretikern sind einige terminologische Missverständnisse verbreitet, die zu scheinbaren Widersprüchen zwischen den empirischen Verfahren der Praktiker und den auf einem mathematischen Modell beruhenden Methoden Baarda's geführt haben.

Auch die vorliegende Arbeit wird sich hauptsächlich den Verfahren widmen, welche sich mit der Entdeckung und der Beseitigung allfälliger grober

Fehler befassen. Die darin enthaltenen Beschreibungen und Gegenüberstellungen älterer und neuerer Methoden erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie bezwecken eine Klarstellung einiger Begriffe und Techniken (insbesondere 'Zuverlässigkeit' und, unter den geodätischen Beurteilungsverfahren, 'Hauptkomponentenanalyse') und möchten mit Hilfe mehrerer Beispiele aus der schweizerischen Praxis zeigen, dass die intuitiven Methoden der Praktiker und die mathematischen Verfahren der Statistiker viel ähnlicher sind, als man üblicherweise annimmt.

Dies wird manche vielleicht enttäuschen und andere erfreuen. Wichtig ist, dass, je klarer die Zusammenhänge zwischen Theorie und Praxis ersichtlich sind, desto leichter gute Theorien in die Praxis umgesetzt werden können.

Nur einige wenige neue Verfahren, die Hauptkomponentenanalyse und die darauf aufgebaute Zuverlässigkeitstheorie, werden etwas ausführlicher beschrieben, dies nicht, weil sie wichtiger als die anderen wären, sondern weil sie erstmals vom Verfasser in der letzten Zeit für die Lösung geodätischer Probleme eingesetzt worden sind.

Die behandelten Probleme gehören zum allgemeinen Bereich der mathematischen Methoden der Geodäsie. Die klassische Ausgleichsrechnung bildet die Grundlage der ganzen Arbeit, während die angegebenen Lösungen für die geodätischen Beurteilungsverfahren in der Regel strenge oder empirische Anwendungen der mathematischen Statistik sind.

4 Theoretische Voraussetzungen

4.1 Literatur, Quellenangaben

Die Fortschritte in allen Bereichen der Geodäsie haben sich in den letzten Jahren derart gejagt und die Publikationen sind so zahlreich, dass es schwierig ist, sich auf dem laufenden zu halten. Man ist aus Zeitgründen oft gezwungen, die eigene Neugierde im Zaum zu halten und sich auf wenige Spezialgebiete zu konzentrieren. Daraus entstehen aber grosse Nachteile, weil die neueren Publikationen in der Regel ausserordentlich viele Vorkenntnisse voraussetzen und daher den nicht eingeweihten Leser zwingen, sehr viel Sekundärliteratur nachzuschlagen.

Das daraus entstandene Kommunikationsproblem hat zu einer merkbaren Kluft zwischen Theorie und Praxis geführt. Forscher und Anwender verstehen sich immer weniger und führen allzu oft Selbstgespräche.

Die vorliegende Arbeit, die von einem Praktiker verfasst worden ist, behandelt das hochaktuelle Thema der Fehlersuche und der Zuverlässigkeit, das für die Anwendungen von grosser Bedeutung ist. Es wurde daher versucht, die Formulierungen so weit als möglich zu vereinfachen, um auch den praxisorientierten Vermessungsingenieuren das Verstehen zu ermöglichen.

Einzige Voraussetzung ist, dass der Leser mit den Grundlagen der klassischen Ausgleichsrechnung (inklusive Matrizenrechnung) vertraut ist, d.h. die Kenntnisse besitzt, die z.B. in /Conzett 1982/, /Grossmann 1969/ oder /Wolf 1975/ vermittelt werden. Das erforderliche Wissen in der mathematischen Statistik bleibt auf die elementaren Begriffe (Zufallsvariable, Erwartungswert, Varianz-Kovarianzmatrix und ähnliches) beschränkt (siehe z.B. /Kreyszig 1968/).

Sämtliche weiteren Literaturhinweise sind als Quellenangaben zu betrachten und werden nur für eventuelle Vertiefungen benötigt.

4.2 Terminologie und Symbole

Die Begriffe, die in dieser Arbeit Verwendung finden, stammen aus den Bereichen der Ausgleichsrechnung, der linearen Algebra (Matrizenrechnung) und der mathematischen Statistik. Es handelt sich in der Regel um geläufige Bezeichnungen, die keine vorgängige Erklärung erfordern. Wenn immer möglich wurde der Terminologie der klassischen Ausgleichsrechnung Vorrang gegeben, um dem praxisorientierten Leser das Verständnis zu erleichtern. Eine Ausnahme bildet der Begriff des 'mittleren Fehlers', für welchen die Bezeichnung 'Standardabweichung' aus der Statistik vorgezogen wurde.

Einer Erklärung bedarf der Begriff 'Messsystem', der bereits im Titel der Publikation erscheint. Darunter versteht der Verfasser die Kombination aus geodätischem Netz, aus Anforderungen an das Vermessungswerk und aus verwendeten oder vorgesehenen Berechnungsmethoden (inklusive Testverfahren für die Resultate). Die Gründe für die Einführung dieser Bezeichnung sind im dritten Teil der Arbeit ausführlich dargelegt. Bis zu diesem Punkt kann der Leser allenfalls 'Messsystem' als Synonym von 'geodätischem Netz' betrachten.

Die verwendeten mathematischen Symbole entsprechen in erster Linie denjenigen der Mittelschulmathematik und sollten dem Leser keine Schwierigkeiten bereiten. Dazu kommen die Symbole und Operatoren der Matrizenrechnung, für welche folgende Konventionen gelten:

- Skalare werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet (a, b usw)
- Matrizen mit Grossbuchstaben (A, P usw) und ihre Elemente mit dem entsprechenden indizierten Kleinbuchstaben (a_{12} usw)
- Vektoren werden als einspaltige Matrizen betrachtet und daher mit Grossbuchstaben benannt (z.B. V, X)
- Die transponierte Matrix wird mit einem hochgestellten T gekennzeichnet (z.B. A^T , V^T).

Für die besonders häufig auftretenden Matrizen der Ausgleichsrechnung werden die Zeichen verwendet, die in der klassischen Literatur üblich sind wie z.B. in /Grossmann 1969/. Die vermittelnde Ausgleichung (Gauss-Markov-Modell) weist z.B. die folgende Modellgleichung auf:

$$V = A \cdot X + L$$

wobei V der Verbesserungsvektor,
 A die Koeffizientenmatrix der
 Verbesserungsgleichungen,
 X der Vektor der Unbekannten und
 L der Beobachtungsvektor sind.

Die Einheitsmatrix (Identitätsmatrix) wird mit I gekennzeichnet, während die Varianz-Kovarianzmatrizen mit Q benannt werden; die dazugehörigen Zufallsvariablen sind als Index angegeben; z.B. ist Q_{XX} die Varianz-Kovarianzmatrix des Vektors X .

Im Bereich der mathematischen Statistik werden die Irrtumswahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art mit α und β und die Standardabweichung mit σ bezeichnet.

Wo für das Verständnis wichtig werden Zufallsvariablen unterstrichen, um sie von ihren Realisierungen zu unterscheiden.

So ist z.B.

\underline{V} ein Zufallsvektor (mehrdimensionale Zufallsvariable), während
 V eine Realisierung von \underline{V} ist.

Schätzwerte werden mit $\hat{\ }^{\wedge}$ gekennzeichnet, z.B. $(\hat{X}, \hat{\sigma}$ usw).

Weitere Begriffe und Symbole können im Folgenden dem Text entnommen werden.

5 Die Ausgleichung geodätischer Netze in der Praxis

5.1 Die schweizerische Triangulation

Die Arbeiten für die jetzt gültige schweizerische Triangulation höherer Ordnung begannen in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts. Die Koordinaten der Punkte wurden durch Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate meistens in kleinen Teilnetzen bestimmt. Die grösste Anzahl der Berechnungen sind Einzel- oder Doppelpunkteinschaltungen; nur das Netz erster Ordnung wurde in grösseren Abschnitten ausgeglichen.

Vor der Computerzeit war der Aufwand für eine strenge Ausgleichung grosser Netze so erheblich, dass man schon für drei Neupunkte etlichen Respekt empfand. Es ist deshalb nicht überraschend, dass sich damals niemand besonders bemühte, Methoden zu entwickeln, um grobe Fehler aus den Ergebnissen einer Ausgleichung zu erkennen. Man versuchte, die Fehler um jeden Preis schon vor aufwendigen Berechnungen zu entdecken und zu eliminieren. Nach der Ausgleichung zeigte man sich gegenüber den eventuell übriggebliebenen Modellfehlern eher toleranter: der Aufwand für die Korrekturen war unangenehmer als die Fehler selbst.

Unter den damaligen Verhältnissen war es nicht schwierig, das Ziel der vorgängigen Bereinigung der durchgeführten Beobachtungen weitgehend zu erreichen. Die reine Winkelmessung zwang schon beim Netzentwurf zu einer übersichtlichen Dreiecksbildung, exzentrische Aufstellungen wurden immer vorgängig zentriert, und alle Winkel einer Station wurden oft mit einer stark überbestimmten Stationsausgleichung zu einem grossen Richtungssatz vereinigt. Danach war es leicht, geometrische Bedingungen wie die Dreieckswinkelsumme zu formulieren und zu überprüfen.

5.2 Die Revolution in den 60-er Jahren

Zwei Ereignisse haben in den letzten 15 Jahren den praktischen Einsatz der Ausgleichungsrechnung wesentlich verändert:

- die Entwicklung kostengünstiger elektronischer

Distanzmessgeräte mit grosser Reichweite und
- die elektronische Datenverarbeitung.

Die elektronische Distanzmessung hat seit ihrer Einführung in augenfälliger Weise die Struktur der geodätischen Netze bestimmt. Die Notwendigkeit einer klaren und übersichtlichen Dreiecksvermaschung war plötzlich nicht mehr vorhanden, schwierige Verbindungen konnten mit wenig Aufwand und schnell erstellt werden, exzentrische Stationen mussten nicht mehr nur einige Meter vom Zentrum entfernt sein. Der Netzentwurf und die Rekognoszierung wurden einfacher und die geodätische Arbeit wirtschaftlicher. Komplexer und immer schwieriger jedoch wurde es, die Qualität der Messanordnung zu beurteilen.

In derselben Zeit fand der Durchbruch der elektronischen Datenverarbeitung in der geodätischen Praxis statt. Der Traum der Geodäten, Systeme mit 'beliebig vielen' Unbekannten auszugleichen, verwirklichte sich. Was im Feld die elektronische Distanzmessung ermöglicht hatte, konnte in entsprechend flexibler Art auch ausgeglichen werden. Die Netze wurden grösser, komplexer und die Exzentren zahlreicher, sodass auch die Interpretation der Resultate wesentlich höhere Ansprüche stellte.

Für die schweizerische Praxis wurden in den Jahren um 1970 einige Computerprogramme entwickelt, welche eine automatische vermittelnde Ausgleichung ermöglichten.

Da die Entwicklung solcher Programme relativ aufwendig ist, sind, abgesehen von kleinen Ergänzungen, heute noch die damaligen Versionen im Gebrauch. Als Ausgangsdaten dienen die bereinigten und gemittelten Feldmessungen und die vorgängig berechneten Näherungskoordinaten der Neupunkte (deren Anzahl oft 100 bis 200 erreichen kann). Als Resultate erhält man meistens die ausgeglichenen Koordinaten mit den dazugehörigen Fehlerellipsen und die definitiven Abrisse mit den einzelnen Verbesserungen.

6 Aktuelle Beurteilungsverfahren für die Triangulationsresultate

6.1 Einführung

Im Zeitalter der Computer ist das Rechnen leicht geworden, sehr leicht sogar. Mit kleineren oder grösseren Rechenanlagen können in wenigen Sekunden grosse Datenmengen preiswert verarbeitet und die Resultate ausgedruckt werden.

In der Praxis ist die Gefahr gross, dass so mühelos erhaltene Resultate in ihrer Wichtigkeit unterschätzt und daher etwas flüchtig überprüft werden. Gerade die kritische Interpretation der Ergebnisse ist jedoch eine der wichtigsten Aufgaben des Ingenieurs.

Um gegen diese unerwünschte Erscheinung vorzugehen, wurden in der letzten Zeit verschiedene Verfahren entwickelt und zum Teil in der Praxis eingesetzt, welche die Interpretation der Triangulationsergebnisse in systematischer Art ermöglichen sollen. Einige Methoden sind Verfeinerungen von älteren bekannten Verfahren und können, ausgehend von den Resultatslisten bestehender Computerprogramme, auch empirisch ohne zu grosse mathematische Kenntnisse eingesetzt werden. Andere stützen sich auf moderne Erkenntnisse der mathematischen Statistik und erfordern deshalb etwas mehr Verständnis für die Theorie, können aber mit Computerprogrammen automatisiert werden, sodass kein Hindernis für eine allgemeine Verwendung in der Praxis bestehen sollte.

6.2 Ziele der Beurteilungsverfahren

Die Beurteilungsverfahren, die im Vermessungswesen Anwendung finden, können in zwei Gruppen unterteilt werden:

- a) Analyse der Modelleigenschaften und der Messanordnung (a priori)
- b) Prüfung der Modellannahmen aufgrund der durchgeführten Beobachtungen (a posteriori).

In der Analyse der Modelleigenschaften werden die Folgen der Modellannahmen unter der Voraussetzung, dass das Modell zutrifft, untersucht. Die Analyse ist unabhängig von den durchgeführten Beobachtungen und kann deshalb vorsorglich auch vor den Feldarbeiten stattfinden. Dazu gehören die Berechnung der Fehlerellipsen a priori für die Neupunkte, die Zuverlässigkeitsbetrachtungen usw. Zweck der Analyse ist der Nachweis, dass die Resultate unter den getroffenen Annahmen die übergeordneten Randbedingungen (Bedürfnisse des Auftraggebers) befriedigen werden.

Nach Ausführung der Messarbeit, jedoch vor Ablieferung der Resultate muss man sich vergewissern, ob keine Gründe für eine Verwerfung des angenommenen Modells vorliegen, da nur wenn die Modelleigenschaften zutreffen, der Nachweis vorliegt, dass die Resultate den übergeordneten Randbedingungen genügen. Zu diesem Zweck werden statistische Tests eingesetzt, die mit den ausgeführten Beobachtungen oder mit Funktionen davon durchgeführt werden können: z.B. Test des Verhältnisses Mittlerer Fehler a posteriori - Mittlerer Fehler a priori, Berechnung der Dreiecksschlüsse in Triangulationsnetzen usw. Ziel der Modelltests ist die Annahme oder Verwerfung des mathematischen Modells: im Fall der Annahme können die Resultate veröffentlicht werden, andernfalls müssen das Modell modifiziert (z.B. durch Nachmessungen) und die neuen Eigenschaften analysiert werden, um zu prüfen, ob die übergeordneten Randbedingungen auch nach den Änderungen des Modells noch eingehalten sind.

6.3 Bedeutung und Klassifikation

Die Beurteilungsverfahren haben mit der Einführung der elektronischen Datenverarbeitung stark an Bedeutung gewonnen. Die Feststellung, dass bei der Auswertung mehr als 90 % der erforderlichen Arbeitszeit für die Beurteilung eingesetzt wird, sollte genügen, um deren Wichtigkeit zu veranschaulichen.

Im folgenden zweiten Teil werden die Testverfahren für die Beurteilung der Modellannahmen mit Hilfe der durchgeführten Messungen behandelt.

Besondere Beachtung gilt dabei den Zusammenhängen zwischen groben Fehlern und Testergebnissen. Mehrere Seiten sind den Verfahren der multivariaten Statistik gewidmet, insbesondere der Hauptkomponentenanalyse, die sich für die Feststellung der groben Fehler in geodätischen Netzen vorzüglich eignet.

Im dritten Teil folgt dann die Beschreibung der Verfahren zur Beurteilung der Modelleigenschaften und der Messanordnung, insbesondere der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme. Die Anwendung der Tests der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate eines geodätischen Netzes hat wichtige Folgen für die Zuverlässigkeit des geodätischen Systems und erlaubt eine sinnvolle Erweiterung der Zuverlässigkeitstheorie.

II. Teil

Prüfung der Modellannahmen aufgrund der durchgeführten Beobachtungen (Verfahren a posteriori)

7 Allgemeines

Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert die mutmasslichsten Werte der zu schätzenden Parameter nur, wenn die Modellannahmen zutreffen, insbesondere wenn die Messfehler tatsächlich normalverteilt sind, das heisst unter anderem, wenn keine groben Fehler vorliegen. Es ist daher selbstverständlich, dass beim praktischen Einsatz der Methode der kleinsten Quadrate die Geodäten sich mit der Ueberprüfung der Messungen und der Ausgleichungsergebnisse befassen müssen.

Vor einigen Jahrzehnten war der Aufwand für die Triangulationsberechnungen sehr gross, und somit war es für die Geodäten eine absolute Notwendigkeit, die Messanordnung und die Bereinigung der Messungen so zu organisieren, dass bereits vor der Ausgleichung die meisten Unstimmigkeiten entdeckt und korrigiert werden konnten. Aus der Beurteilung der Ausgleichungsergebnisse suchte man nur die letzte Bestätigung der Modelleigenschaften in der Hoffnung, dass die damals sehr aufwendige Berechnung nicht wiederholt werden müsse. Die klare geometrische Struktur der Dreiecksnetze erlaubte mit geringem Aufwand eine wirksame vorgängige Kontrolle der Beobachtungen.

In den 70-er Jahren brachten die neuen Instrumente für die elektronische Distanzmessung eine viel grössere Flexibilität in die geometrische Gestaltung der Verbindungen. Die Struktur der Netze wurde aber komplexer und die Entdeckung von fehlerhaften Messungen viel schwieriger. Es bot sich dazu dank der elektronischen Datenverarbeitung die Möglichkeit, eine grosse Anzahl Beobachtungen gleichzeitig und zu erschwinglichen Preisen auszugleichen. Um diese technischen Fortschritte vollumfänglich ausschöpfen zu können, waren wirksamere Beurteilungsverfahren für die Ausgleichungsergebnisse nötig. Die Suche nach neuen Wegen, die Verfeinerung bestehender Methoden, ihre strengere Formulierung mit Hilfe der mathematischen Statistik und die Entwicklung von neuen Tests wurden zur Aufgabe vieler Geodäten.

Neue Methoden sind aber erst erfolgreich, wenn sie in die Praxis

übernommen werden. Eine wichtige Voraussetzung dafür liegt in der Wirtschaftlichkeit der gebotenen Verbesserung: so darf der Mehraufwand eines neuen Verfahrens nicht grösser als die zu erwartenden Vorteile sein. Im allgemeinen kann man sagen, dass für die tägliche Anwendung Methoden vorgezogen werden, die sich leicht mit Hilfe der vorhandenen Mittel ohne grossen Rechenaufwand ausführen lassen. Der Effizienz und Einfachheit wird dafür manchmal die mathematische Strenge geopfert. Die Folgen der Vereinfachungen sind aber meist nicht schwerwiegend, weil sie oft durch Intuitionen kompensiert werden, die nicht explizit in mathematische Form gekleidet werden können. Die Erfahrung der Geodäten kann die Schwächen der einfacheren Verfahren häufig ausgleichen.

8 Gemeinsame Eigenschaften

Aeltere und neuere Verfahren für die Interpretation a posteriori der Ausgleichungsergebnisse haben einige wichtige gemeinsame Merkmale, welche für das Verständnis der folgenden Kapitel entscheidend sind und daher hier kurz beschrieben werden.

Für die Beurteilung der Ausgleichungsergebnisse werden in der Regel eine oder mehrere Grössen (Teststatistiken oder Testvariablen genannt) festgelegt, deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen und damit deren Erwartungswerte man kennt. So werden z.B. die Winkelsumme in einem Dreieck oder die Differenz zwischen Hin- und Rückmessung als Teststatistiken gewählt. Auch die Verbesserungen der Beobachtungen durch die Ausgleichung sind normalverteilt mit dem bekannten Erwartungswert Null, während das Verhältnis F zwischen geschätzter Varianz a posteriori und angenommener Varianz a priori F -verteilt mit dem Erwartungswert Eins ist. Beide können daher als Teststatistiken verwendet werden.

Aufgrund der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teststatistiken und der vorgewählten Wahrscheinlichkeit α , die man als Kriterium für die Modellverwerfung festgelegt hat, kann ein Intervall bestimmt werden, in dem die Prüfgrösse (Realisierung der Teststatistik) liegen muss, damit das mathematische Modell angenommen wird.

Die Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Testvariablen können mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt, und die Verteilungsfunktion kann in den meisten Fällen statistischen Tabellen entnommen werden.

Die Wahl von α soll im Einklang mit den Anforderungen an das Vermessungswerk getroffen werden.

Falls die Prüfgrösse ausserhalb des von α bestimmten Intervalls liegt, wird das mathematische Modell verworfen, d.h. als nicht richtig betrachtet, auch wenn man weiss, dass dabei für ein richtiges Modell in dieser Weise mit der Wahrscheinlichkeit α Fehlentscheidungen möglich sind (Entscheidungsfehler 1. Art).

Für die Bewertung des Tests ist aber das Umgekehrte noch wichtiger: wie empfindlich wird die Testgrösse reagieren, falls ein Modellfehler vorhanden ist, oder anders ausgedrückt: wie gross ist die Wahrscheinlichkeit ($1 - \beta$), dass ein bestimmter Modellfehler im vorgesehenen Messsystem tatsächlich mit dem gewählten Test erkannt wird, oder noch anders: wie gross ist die Wahrscheinlichkeit β , dass auch mit dem Test ein bestimmter Modellfehler nicht erkannt wird (Entscheidungsfehler 2. Art).

Da sich die vorliegende Arbeit hauptsächlich mit dem Aufdecken grober Fehler befasst, werden im Folgenden vor allem diese besonderen Modellfehler behandelt.

Es ist für die Praxis selbstverständlich von Interesse zu wissen, welcher Test der wirksamste ist. In den folgenden Kapiteln werden verschiedene Tests beschrieben und miteinander verglichen. Einige davon sind Näherungsverfahren aus der Praxis. So weit als möglich wurde für die einzelnen Tests die Wahrscheinlichkeit berechnet, mit welcher ein bestimmter grober Fehler entdeckt wird (Macht des Tests), falls der Test mit der Wahrscheinlichkeitsschranke α durchgeführt wird. Wichtig ist die Feststellung, dass keineswegs alle Tests gleichwertig sind: einige werden mit zunehmender Grösse des Netzes rasch unwirksam, andere viel weniger schnell.

In etlichen Fällen erschweren Korrelationen eine mathematisch strenge Bestimmung des Signifikanzbereichs aufgrund der Irrtumswahrscheinlichkeit α . Dies bereitet aber den Praktikern keine grosse Sorge: Sie legen einen sinnvollen Annahmehereich einfach fest. Wichtig ist, dass Fehler tatsächlich und mit wenig Aufwand entdeckt werden, auch wenn für die Irrtumswahrscheinlichkeiten keine ganz genauen Angaben vorliegen.

9 Einfache Verfahren aus der Praxis

Die meisten Triangulationsprogramme führen eine vermittelnde Ausgleichung aus und liefern normalerweise zu den ausgeglichenen Koordinaten nur die Abrisse mit den Verbesserungen, die geschätzte Standardabweichung a posteriori der Gewichtseinheit und die Fehlerellipsen der Neupunkte. Aufgrund dieser spärlichen Angaben bestehen nur wenige Testmöglichkeiten für das Modell. Die Geodäten müssen sich aber in der Praxis mit dem Vorhandenen abfinden und haben in dieser Situation die im Folgenden beschriebenen Wege beschritten.

9.1 Der F-Test

Die Triangulationsprogramme liefern die geschätzte Standardabweichung a posteriori der Gewichtseinheit, sodass die Berechnung der Prüfgrösse

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

keine Schwierigkeit bietet, (wo $\hat{\sigma}$ die Standardabweichung der Gewichtseinheit a posteriori und σ die gewählte Standardabweichung der Gewichtseinheit a priori sind).

Die Verteilung der Teststatistik F ist die bekannte Fisher- oder F -Verteilung. Der Freiheitsgrad wird durch die Geometrie des Netzes bestimmt, während man für den mittleren Fehler a priori einen Freiheitsgrad (meistens ∞) annimmt. Dann kann der Tabelle der F -Verteilung sofort entnommen werden, ob die vorausgesetzte Wahrscheinlichkeitsschranke überschritten ist oder nicht. Da nur eine Grösse getestet wird (univariater Test), stellen sich keine Korrelationsprobleme.

Der F -Test ist sehr wirksam bei der Suche nach systematischen Modellfehlern, die viele Beobachtungen verfälschen, (z.B. ungenaue Fixpunkte, Lotabweichungseinflüsse, falsche Schätzung der Genauigkeit für die Messungen usw.). Weniger wirksam ist er für die Entdeckung von einzelnen groben Fehlern, wenn der Betrag des Fehlers relativ klein und das Netz gross ist.

Dieser Mangel ist aus der Testvariablen

$$F = \frac{\frac{\Delta^2}{\sigma^2}}{\sigma^2} = \frac{[pvv]}{f \cdot \sigma^2}$$

ersichtlich.

Falls die i-te Beobachtung um Δ_i verfälscht wird (d.h. l_i durch $l_i + \Delta_i$ ersetzt wird), ändern sich der Verbesserungsvektor und daher auch F. So kann man schreiben :

$$\begin{aligned} [pvv]^* &= [pvv] + \Delta pvv \\ F^* &= F + \Delta F = \frac{[pvv] + \Delta pvv}{\sigma^2 \cdot f} \end{aligned}$$

Die modifizierten Verbesserungen V^* müssen die Modellgleichungen weiterhin erfüllen, sowie die Bedingung $[pvv]^* = \text{Minimum}$. Da der Vektor

$$V^{**} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_i - \Delta_i, \dots, v_n)$$

die Modellgleichungen erfüllt, aber nicht notwendigerweise die Minimumbedingung, ist sicher:

$$F^* \leq (1/\sigma^2 f) (p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_i (v_i - \Delta_i)^2 + \dots + p_n v_n^2)$$

das heisst

$$F^* \leq (1/\sigma^2 f) ([pvv] + p_i \Delta_i^2 - 2p_i v_i \Delta_i)$$

und dann

$$\Delta F \leq (1/\sigma^2 f) (p_i \Delta_i^2 - 2p_i v_i \Delta_i)$$

Dies bedeutet, dass mit zunehmendem f bei konstant bleibenden anderen Grössen ΔF mindestens umgekehrt proportional zu f abnimmt.

Die Verwerfungsschranke F_{GR} geht hingegen viel langsamer zurück.

Gemäss der Definition der F-Verteilung ist $F_{f,\infty}$ verteilt wie die folgende Zufallsvariable \underline{y}

$$\underline{y} = \frac{1}{\sigma^2 f} (\underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + \dots + \underline{x}_f^2)$$

σ kann Einfachheit halber gleich 1 gesetzt werden, und die \underline{x}_i sind normalverteilte unabhängige Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1.

Dann ist:

$$E(\underline{x}_i^2) = 1$$

$$V(\underline{x}_i^2) = 2.$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die Summe von gleichverteilten Zufallsvariablen asymptotisch normalverteilt, sodass, wenn f gross wird ($f \rightarrow \infty$), die Verteilung von \underline{y} zu einer Normalverteilung strebt und

$$E(\underline{y}) = f \cdot \frac{1}{f} = 1$$

$$V(\underline{y}) = \frac{1}{f^2} \cdot 2f = \frac{2}{f} \quad \text{sind.}$$

Wenn α das Signifikanzniveau und n_{GR} die entsprechende Verwerfungsschranke für die zentrale standardisierte Normalverteilung sind, folgt für grosse f

$$F_{GR} \cong 1 + \sqrt{\frac{2}{f}} \cdot n_{GR}$$

Das heisst: mit zunehmendem f strebt die Verwerfungsgrenze für den F-Test langsamer als F^* gegen 1, und die Entdeckung der groben Fehler wird immer schwieriger /Maurer 1983/, /Kreyszig 1968/.

Wenn ein Teilnetz einen bestimmten groben Fehler Δ_i enthält, ist die Wahrscheinlichkeit β , dass der grobe Fehler mit einem F-Test unentdeckt bleibt, vom Freiheitsgrad des ganzen Netzes abhängig. Der gleiche Fehler in zwei gleichen Teilnetzen, die identische Ueberbestimmung und andere geometrische Eigenschaften aufweisen, kann mit einem F-Test mit grösserer Wahrscheinlichkeit im Teilnetz entdeckt werden, das Bestandteil des insgesamt kleineren Netzes (mit kleinerem Freiheitsgrad) ist.

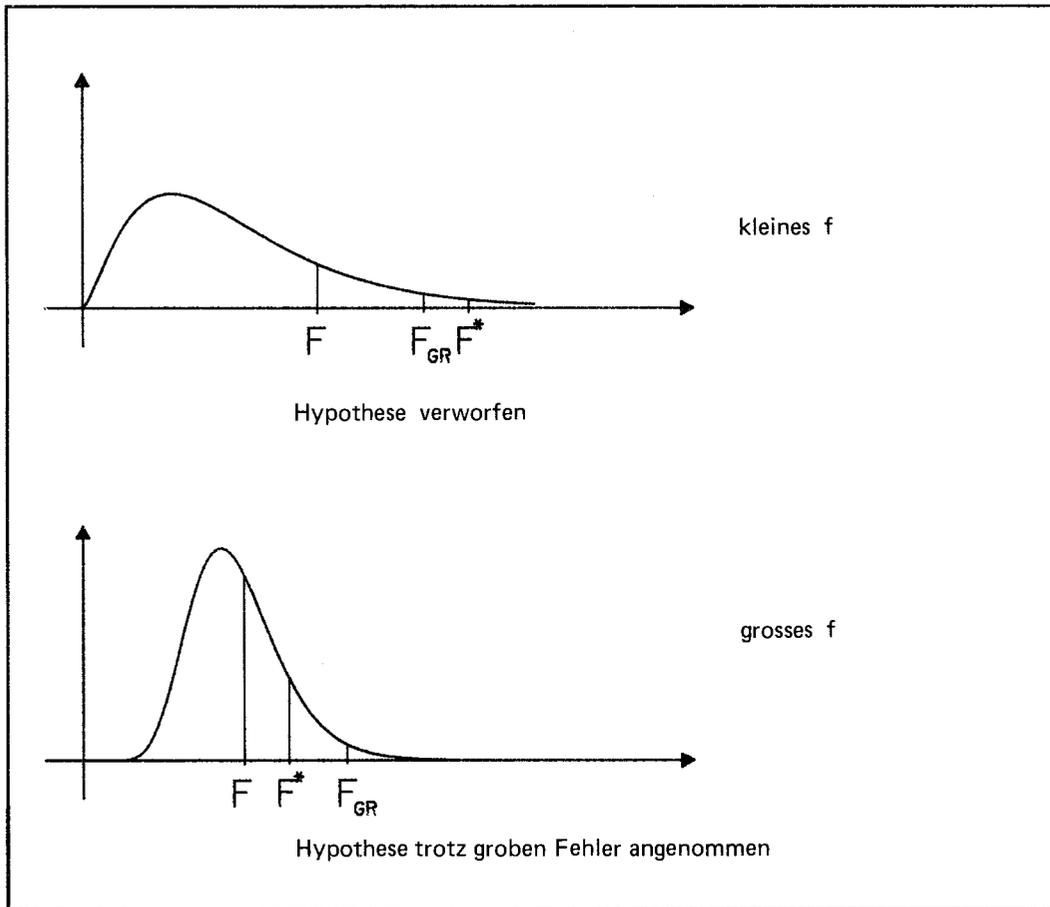


Abb. 1. Einfluss eines groben Fehlers auf die Testvariable F für verschiedene Freiheitsgrade.

Eine weitere Bemerkung ist hier notwendig: In der Literatur /Baarda 1968/ wird die Grösse σ als bekannte Konstante angenommen (Freiheitsgrad = ∞). Dies führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der statistischen Herleitungen. Berücksichtigt werden muss jedoch, dass die gewählten Grössen σ_i für die mittleren Fehler a priori der Beobachtungen ungenau sind. Sie sind gute unabhängige Schätzungen, die aus der Erfahrung des Beobachters oder aus den Angaben des Instrumentenherstellers stammen, aber keineswegs fehlerlose Konstanten. Diese Ungenauigkeit entspricht näherungsweise einer Ungenauigkeit bei der Wahl von σ (= mittlerer Fehler der Gewichtseinheit).

Es ist schwierig, die Konsequenzen dieser Vereinfachung vollumfänglich

zu erkennen. Sicher ist aber, dass die Anzahl der irrtümlichen Modellverwerfungen vor allem für hohe Freiheitsgrade im Netz grösser sein wird, als mit der Wahl von α bestimmt worden war.

Da die Verwerfungsschranke für sehr grosse f (grösser als 1000 z.B.) sich Eins immer mehr nähert, wird bereits der Einfluss von unbedeutenden Modellfehlern mit systematischem Charakter eine Modellverwerfung verursachen.

Quantitative Angaben können mit Hilfe der neueren Publikationen über dieses Thema, z.B. /Just 1979/, gemacht werden.

9.2 V-Test

Die heute noch am meisten angewandte Methode zur Beurteilung der Resultate einer Ausgleichung ist der Test der Verbesserungen in den definitiven Abrissen. Getestet werden die Grössen

$$u_i = v_i / \sigma_{li} \quad i = 1, \dots, n$$

wobei v_i die i -te Verbesserung,

σ_{li} die angenommene Standardabweichung a priori
der i -ten Messung,

n die Anzahl Messungen der Ausgleichung sind.

Der Test wird durchgeführt unter der vereinfachenden Annahme, dass die u_i annähernd standardisiert normalverteilt sind (mit Erwartungswert 0 und Varianz 1) und dass die Korrelationen zwischen den u_i vernachlässigbar klein sind.

Da alle Computerprogramme für die Ausgleichung die einzelnen Verbesserungen liefern, ist der Test leicht durchführbar und deshalb trotz vielen schlechten Eigenschaften so populär.

Die Nachteile des V-Tests sind offensichtlich: die oben erwähnten vereinfachenden Annahmen gelten nur für die unendlich überbestimmten

Netzteile (d.h. mit $\hat{x} = E(\underline{x})$, $\hat{l} = E(\underline{l})$, usw.). Reelle Triangulationsnetze sind normalerweise weit davon entfernt, sodass die Standardabweichung von v_i (σ_{v_i}) meist wesentlich kleiner als σ_{l_i} ist. Zwischen den v_i sind zudem Korrelationen vorhanden, die normalerweise nicht berechnet werden. Es ist daher nicht möglich, einen Gesamttest aller Komponenten des U-Vektors durchzuführen, da die Annahmebereiche nicht direkt bestimmbar sind.

Die Macht des V-Tests ist ebenfalls von Bedeutung. Wenn angenommen wird, dass ein grober Fehler Δ_i die i -te Beobachtung verfälscht, wird das vermittelnde Ausgleichungsmodell (Gauss-Markov-Modell)

$$V^* = A X + L + \Delta L \quad \text{mit Gewichtsmatrix } P,$$

wo $\Delta L = (0, 0, \dots, \Delta_i, 0, 0)$ ist.

Daraus folgt für unkorrelierte Messungen /Linkwitz 1960/ :

$$\begin{aligned} V^* &= -Q_{VV} P (L + \Delta L) \\ &= V - Q_{VV} P \Delta L \\ &= V - q_{VV}^{(ii)} / q_{11}^{(ii)} \cdot \Delta_i \end{aligned}$$

Das $q_{VV}^{(ii)} / q_{11}^{(ii)}$ -Verhältnis zwischen den i -ten Diagonalelementen der Kofaktorenmatrizen der Verbesserungen und der Beobachtungen ist ein besonders wichtiger Wert, weil es ein Mass für die geometrische Ueberbestimmung der gemessenen Grösse im Netz ist /Gerber 1974/, /Pelzer 1980/. Es wird in Kapitel 18 'lokales Zuverlässigkeitsmass' für die i -te Beobachtung genannt.

In gut überbestimmten Triangulationsnetzen ist im allgemeinen

$$0.3 \leq q_{VV}^{(ii)} / q_{11}^{(ii)} \leq 1.$$

Wenn die angenommene Verteilung der Teststatistik u_i (Normalverteilung mit $\sigma_{u_i} = 1$) und die tatsächliche Verteilung der Verbesserungsvariablen der i -ten (verfälschten) Messung dargestellt werden, können für den Test mit $\alpha = 5 \%$ die folgenden Werte für die

Wahrscheinlichkeit β eines Fehlers 2. Art (falsche Annahme der Nullhypothese für den Fehler Δ) berechnet werden :

| $\alpha = 5\%$ q_{vv}/q_{ll} | $\Delta =$ | | | |
|-----------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | $3 \sigma_1$ | $4 \sigma_1$ | $5 \sigma_1$ | $6 \sigma_1$ |
| | β in % | | | |
| 0.50 | 74 | 47 | 21 | 7 |
| 0.75 | 37 | 11 | 2 | 0 |
| 1.00 | 15 | 2 | 0 | 0 |

Tab. 1. Wahrscheinlichkeit einer falschen Annahme der Nullhypothese (Fehler 2. Art).

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Macht des Tests sehr stark von $q_{vv}^{(ii)}/q_{ll}^{(ii)}$ beeinflusst wird und dass in normalen Netzen nur grobe Fehler Δ_i , für welche $\Delta_i \geq 6 \sigma_{li}$ ist, mit genügend hoher Wahrscheinlichkeit (z.B. $1-\beta \geq 80\%$) durch einen V-Test entdeckt werden können.

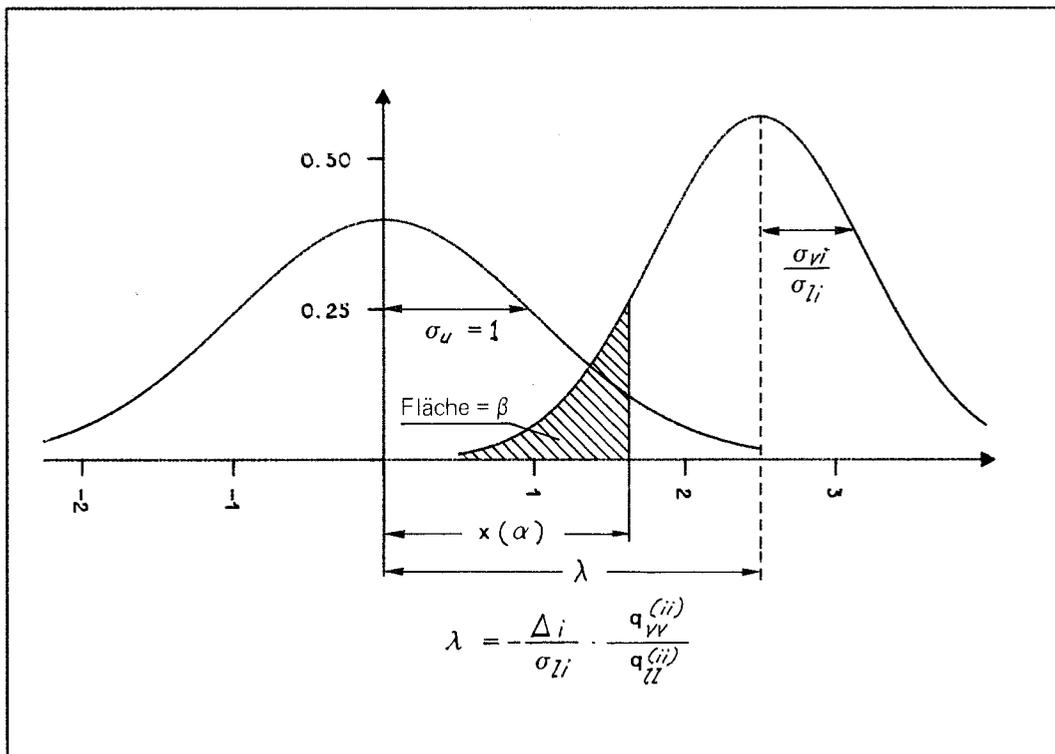


Abb. 2. Wahrscheinlichkeitsdichten der Teststatistik bei zutreffendem und bei unzutreffendem Modell.

Es muss an dieser Stelle betont werden, dass die angegebenen Wahrscheinlichkeiten nur für den Test einer einzelnen Verbesserung zutreffen. Sie sind aber von der Grösse des Netzes unabhängig, d.h. sie gelten auch für beliebig grosse Netze.

In den Herleitungen wurden absichtlich die angenommenen Standardabweichungen σ_{1i} a priori verwendet, da diese in den meisten Anwendungen der Praxis genügend genau vorliegen. Falls hingegen die Berechnung mit den geschätzten Standardabweichungen a posteriori $\hat{\sigma}_{1i}$ durchgeführt wird, muss die t-Verteilung angewandt werden.

9.3 Test der geometrischen Bedingungen

Eine klassische Methode zur Ueberprüfung geodätischer Netze ist der Test der Widersprüche der geometrischen Bedingungen. Für reine Triangulationsnetze ist das Beispiel des Tests der Winkelsumme in den Dreiecken bekannt und braucht also keine besondere Erklärung.

Der grosse Vorteil solcher Tests liegt in der Möglichkeit, die Testgrösse vor der Ausgleichung zu berechnen. Als man noch von Hand rechnete, konnte man Unstimmigkeiten sofort entdecken und sich eine unnötige Ausgleichung ersparen.

Nach der Einführung der Distanzmessung wurde die Struktur der Netze viel komplizierter, sodass sich die Bildung der geometrischen Bedingungsgleichungen nicht mehr so einfach gestaltete. Für den Einsatz elektronischer Rechenanlagen wurde für die Ausgleichung die vermittelnde Methode vorgezogen, und die Bedingungen traten nicht mehr explizit auf.

Vor ungefähr einem Jahrzehnt wurden in der Schweiz Computerprogramme für die automatische Bildung der Dreiecksschlüsse entwickelt /Andris 1967/, jedoch wenig eingesetzt, da praktisch keine vollständigen Dreiecke in den geodätischen Netzen mehr zu finden sind.

Vom statistischen Standpunkt aus gesehen, ist der Test der geometrischen Bedingungen sehr günstig, da die Erwartungswerte der

Widersprüche Null sind und die Varianzen ihrer Normalverteilungen leicht aus den linearisierten Bedingungsgleichungen berechnet werden können. Was hingegen nachteilig wirkt, sind die Korrelationen zwischen den einzelnen Widersprüchen, die im allgemeinen vorhanden sind und einen Gesamttest erschweren.

Die Bildung der Bedingungsgleichungen stellt keine unüberwindbare Schwierigkeit dar. In einer Publikation zeigt R. Conzett, wie mit dem Austauschverfahren aus der Matrix der Verbesserungsgleichungen einer vermittelnden Ausgleichung die Bedingungsgleichungen automatisch gebildet werden können. Entwicklungen in dieser Richtung sind deshalb noch zu erwarten /Conzett 1978/.

Da die Varianz der Widersprüche erst nach Vorliegen der Bedingungsgleichungen berechenbar ist, kann eine allgemeine Schätzung der Empfindlichkeit des Tests nicht angegeben werden.

Mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse kann ein spezielles System von Bedingungsgleichungen gebildet werden. Der Verfasser hat diese Möglichkeit eingehend untersucht. Die dabei erzielten Resultate sind in Kapitel 12 beschrieben.

10 Der Test der standardisierten Verbesserungen

10.1 Testbeschreibung

Einen wesentlichen Fortschritt in der Untersuchung a posteriori geodätischer Messsysteme bildet der Test der standardisierten Verbesserungen. Dazu müssen in einer vermittelnden Ausgleichung neben den üblichen Grössen (Unbekannten, Verbesserungen usw.) lediglich die Standardabweichungen der einzelnen Verbesserungen berechnet werden.

Da die Verbesserungsvariablen für normalverteilte Messungen ebenfalls normalverteilt sind und Erwartungswert Null besitzen ($E(\underline{v}) = 0$), wenn die Varianz von v_i bekannt ist, kann die Grösse

$$w_i = v_i / \sigma_{v_i}$$

mit der zentrischen standardisierten Normalverteilung getestet werden. Der Test wurde in /Baarda 1968/ als 'Data snooping' bezeichnet und wird unter diesem Namen oft eingesetzt. Eine Anwendung für die Untersuchung von geometrischen Transformationen ist in /Kraus 1975/ beschrieben.

Wenn die i -te Beobachtung (und keine andere) durch einen groben Fehler Δ_i verfälscht und

$$l_i^* = l_i + \Delta_i$$

wird, dann ist für unkorrelierte Beobachtungen

$$v_i^* = v_i - (q_{vv}^{(ii)} / q_{ll}^{(ii)}) \Delta_i \quad \text{/Just 1979/}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher irrtümlicherweise die Nullhypothese angenommen wird, ist Funktion des Betrags von Δ_i , des Verhältnisses

$$\frac{\sigma_{v_i}^2}{\sigma_{l_i}^2} = \frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{ll}^{(ii)}}$$

und des gewählten Signifikanzniveaus α für die Verwerfung der Nullhypothese.

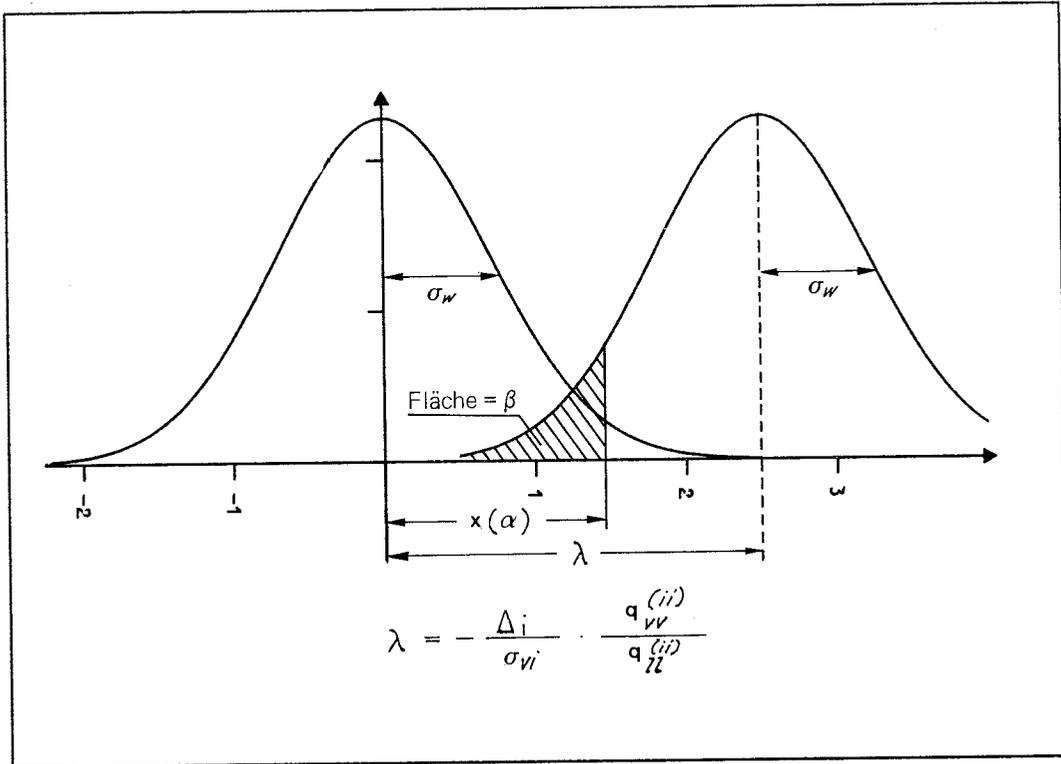


Abb. 3. Wahrscheinlichkeitsdichten der Teststatistik bei zutreffendem und bei unzutreffendem Modell.

10.2 Macht des Tests

Aehnlich wie für den V-Test können einige Werte für die Wahrscheinlichkeit der falschen Annahme der Nullhypothese als Beispiel berechnet werden:

| $\alpha = 5\%$ q_{vv}/q_{ll} | $\Delta =$ | | | |
|-----------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | $3 \sigma_1$ | $4 \sigma_1$ | $5 \sigma_1$ | $6 \sigma_1$ |
| | β in % | | | |
| 0.50 | 43 | 19 | 6 | 1 |
| 0.75 | 26 | 7 | 1 | 0 |
| 1.00 | 15 | 2 | 0 | 0 |

Tab. 2. Wahrscheinlichkeit einer falschen Annahme der Nullhypothese (Fehler 2. Art).

Was aber trotz der Standardisierung nicht möglich wird, ist die Angabe der Signifikanzintervalle sowie der Wahrscheinlichkeit β für den Gesamttest (Gesamtheit aller v/σ_v des Netzes), da die standardisierten Verbesserungen unter sich korreliert sind.

Ein Vergleich mit der entsprechenden Tabelle aus dem V-Test zeigt sofort, dass mit abnehmenden $q_{vv}^{(ii)}/q_{ll}^{(ii)}$ die Ueberlegenheit des Tests der standardisierten Verbesserungen gegenüber dem einfachen V-Test wesentlich zunimmt. Darum ist dem einfachen V-Test auf jeden Fall der Test der standardisierten Verbesserungen vorzuziehen. Dazu kommt der Vorteil, dass durch die Berechnung des lokalen Zuverlässigkeitsmasses eine quantitative Kontrolle der Ueberbestimmung möglich wird. Detailliertere Betrachtungen folgen im Kapitel 19 (III. Teil).

10.3 Berechnung der Q_{VV} -Diagonalen

Für den Test der standardisierten Verbesserungen wird nur die Diagonale der Matrix Q_{VV} benötigt. Die Berechnung dieser Diagonalelemente kann in einer Rechenanlage ohne Schwierigkeiten ausgeführt werden.

Das einzige Problem liegt in der Notwendigkeit, die volle Matrix der Kofaktoren der Unbekannten Q_{xx} zu berechnen. Man kann also die Orientierungs- oder anderen Unbekannten nicht (z.B. nach Schreiber) eliminieren. Dies erfordert somit einen grösseren Speicherbedarf. Wenn nur die Hälfte der Matrix gespeichert wird (Symmetrie) und n_k und n_o die Anzahl Koordinatenunbekannten bzw. Orientierungsunbekannten sind, müssen

$$(n_o + 2n_k + 1) n_o / 2$$

Matrixelemente mehr gespeichert werden. Auf modernen Rechnern mit virtuellem Speicher sollte der zusätzliche Speicherbedarf keine grossen Schwierigkeiten bereiten.

Der Verfasser hat gezeigt /Carosio 1974/, dass bei der Inversion der vollen Normalgleichungsmatrix mit dem Austauschverfahren die ersten n_o Austauschschritte identisch sind mit den Operationen des Schreiber'schen Eliminationsverfahrens, sodass die Rechenzeit nur linear mit der Anzahl zusätzlicher Matrixelemente (ca. quadratisch zur Anzahl Unbekannten) steigt. Für normale Netze (z.B. $n_o = 50$, $n_k = 100$) führt dies zu einer ungefähr doppelten Rechenzeit. Da heute die Computerkosten immer niedriger werden, sollte diese Erhöhung des Rechenaufwandes kein Hindernis für den praktischen Einsatz des Tests sein.

Die Ausgleichung der Triangulationsnetze muss in der Praxis mehrere Male wiederholt werden (10, 20 oder mehr Wiederholungen), damit man nacheinander die verschiedenen Fehler entdecken und beseitigen kann. Die ersten Berechnungen dienen zur Entfernung der sehr grossen Fehler: z.B. Punktverwechslungen, grobe Schreibfehler usw., die mit sehr einfachen Mitteln, z.B. mit dem V-Test identifiziert werden können. Erst gegen Schluss, bei den letzten Wiederholungen, ist man an einem empfindlicheren Test wie dem Test der standardisierten Verbesserungen interessiert, um auch die kleinen Fehler aufdecken zu können. Man kann daher die etwas aufwendigere Berechnung der Q_{vv} -Diagonale auf die letzten Berechnungsphasen beschränken.

Wenn Q_{xx} (M,M) die Kofaktorenmatrix der Unbekannten, $QLL(N)$ ein Vektor

mit den Reziproken der Gewichte und $A(N,M)$ die Verbesserungsgleichungsmatrix sind, berechnen die folgenden FORTRAN-Anweisungen die gewünschte Diagonale für eine vollbelegte Verbesserungsgleichungsmatrix.

```
DO 100 I = 1, N
SUMME2 = 0.
DO 50 J = 1, M
SUMME1 = 0.
DO 30 K = 1, M
30 SUMME1 = SUMME1 + A(I,K) * QXX (K,J)
50 SUMME2 = SUMME2 + SUMME1 * A(I,J)
100 QVV(I) = QLL(I) - SUMME2
```

In den geodätischen Netzen sind nur wenige Elemente der Verbesserungsgleichungsmatrix $\neq 0$. Wenn nur diese gespeichert sind wie in /Schwarz 1970/ und das Programm entsprechend angepasst wird, fällt die Rechenzeit auch für grosse Netze kaum mehr ins Gewicht.

11 Verfahren aus der multivariaten Statistik

11.1 Einführung

In der Beschreibung der mehrfachen univariaten Tests in den früheren Kapiteln ist dem Leser sicher aufgefallen, dass die gegenseitige Abhängigkeit der betrachteten Zufallsvariablen nicht berücksichtigt werden konnte. Konsequenz davon war die immer wiederholte Bemerkung, dass keine Aussage möglich sei über die Eigenschaften des Gesamttests. Die getrennte Beurteilung der einzelnen Testgrößen führt zu einem Informationsverlust, der nicht unterschätzt werden darf. Besonders bei kritischen Fällen könnten gerade die verlorenen Informationen wichtig sein.

Die multivariate Statistik behandelt alle Verfahren, die sich mit mehrdimensionalen stochastischen Variablen befassen. Sie bietet u.a. auch Lösungen für den Test einer Reihe von unter sich korrelierten stochastischen Variablen /Flury, Riedwyl 1980/, /Maurer 1979/. Anwendungen solcher Verfahren für die Beurteilung der Triangulationsresultate werden im Folgenden beschrieben.

11.2 Graphische Verfahren

In der angewandten Statistik wird wenn immer möglich versucht, das vorhandene Zahlenmaterial durch Zeichnungen zu veranschaulichen. So kann die Fähigkeit des Menschen genutzt werden, aufgrund einfacher Beobachtung intuitiv komplexe Beziehungen zu erfassen. Die Betrachtung von unabhängigen stochastischen Variablen kann durch die Zeichnung von Häufigkeitspolygonen der erhobenen Werte (Histogramme) zum Beispiel sehr gut dargestellt werden.

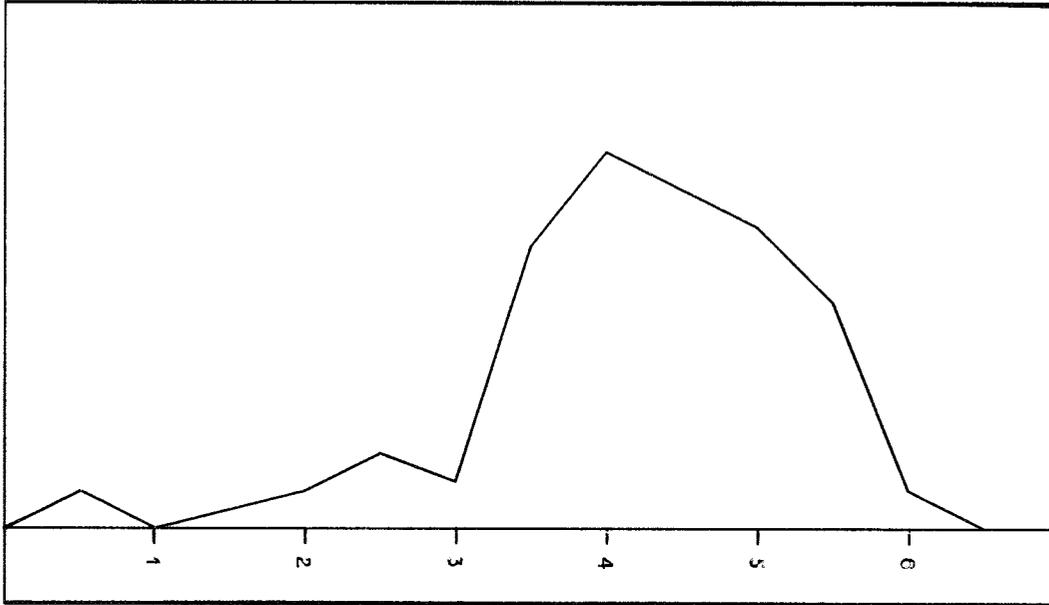


Abb. 4. Häufigkeitspolygon.

Für mehrdimensionale Variablen genügen aber einfache Verfahren wie die Zeichnung von Häufigkeitspolygonen für die Einzelkomponente oder die paarweise Darstellung in Punktdiagrammen nicht mehr.

Für die Anwendung in solchen Fällen existieren zahlreiche Vorschläge. Besonders eindrücklich ist ein Verfahren (Methode von Chernoff /Chernoff 1971/) zur Darstellung von Stichproben mehrdimensionaler stochastischer Variablen, welches als Beispiel gezeigt wird.

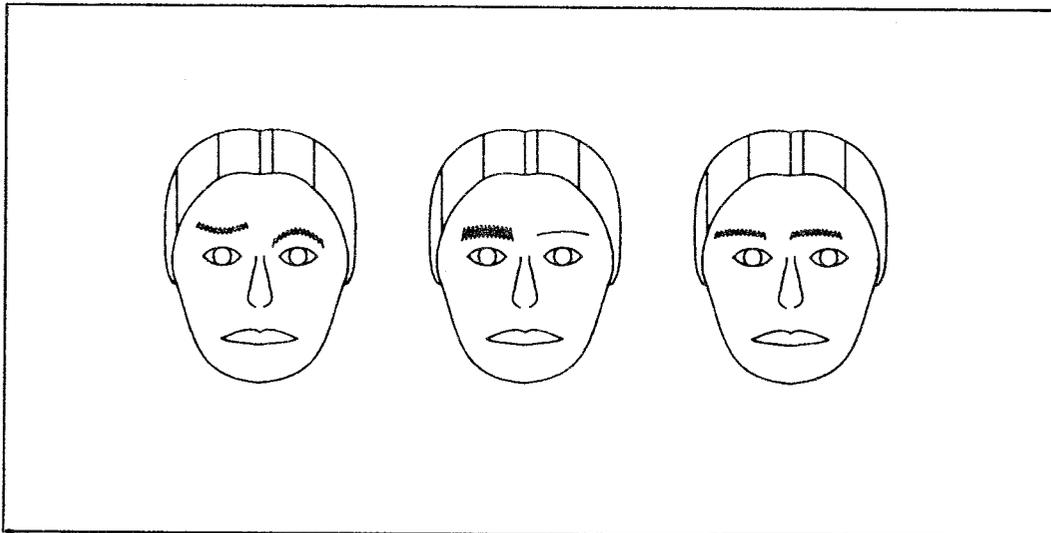


Abb. 5. Darstellung von mehrdimensionalen Zufallsvariablen durch Gesichter.

Die Idee ist einfach: die Komponenten der Stichprobenelemente werden als Merkmale menschlicher Gesichter abgebildet. Da die Menschen besonders empfindlich reagieren bei der Betrachtung von Gesichtern, werden Aehnlichkeiten, Asymmetrien usw. sofort bemerkt. Für die Anwendung existieren Computerprogramme, die die Darstellung von Variablen mit bis zu 18 Komponenten erlauben /Flury, Riedwyl 1980/, /Flury, Riedwyl 1981/.

Für geodätische Anwendungen kann leider eine so eindrückliche Darstellung nicht verwendet werden, da man oft nur eine Realisierung der mehrdimensionalen Zufallsvariablen (z.B. den Verbesserungsvektor) mit sehr vielen Komponenten zu beurteilen hat. Die Geodäten haben für diese Fälle ähnliche Verfahren entwickelt, die sinngemäss anwendbar sind. Als einziges Beispiel (unter vielen möglichen) wird hier das Verfahren von H.J. Oettli veranschaulicht, das besonders geeignet ist für die multivariate Beurteilung des Verbesserungsvektors /H.J. Oettli 1960-75/.

Die Grundidee ist die folgende: Im gleichen Plan (Netzplan) werden die durchgeführten Beobachtungen sowie die dazugehörigen Verbesserungen graphisch dargestellt. Ein erfahrener Beobachter kann aus den Netzverbindungen intuitiv die vorhandenen Korrelationen zwischen den Verbesserungen abschätzen und sie in Beziehung zu den Verbesserungsbeträgen setzen.

So werden Hinweise auf die Ursachen von Abweichungen aus der Differenz zwischen erwarteten Korrelationen (aus der Netzgeometrie) und vorhandenen Korrelationen (in der Stichprobe) gewonnen. Zum Beispiel ist es oft möglich, zwischen groben Fehlern und lokalen systematischen Fehlern wie Fixpunktverschiebungen usw. zu unterscheiden.

Auf den folgenden Seiten wird die Methode für Lage- und Höhennetze gezeigt.

Abb. 6. Graphische Darstellung des Verbesserungsvektors für ein Lagenetz.

Abb. 7. Graphische Darstellung des Verbesserungsvektors für ein Höhennetz.

Musterbeispiel

für den Eintrag der Lage-Verbesserungen (v) im Netzplan zur Beurteilung des Zwanges

TRIANGULATION ALPHAL

A) Provisorische Berechnung

Δ 1177 und Δ 1191 = Festpunkte

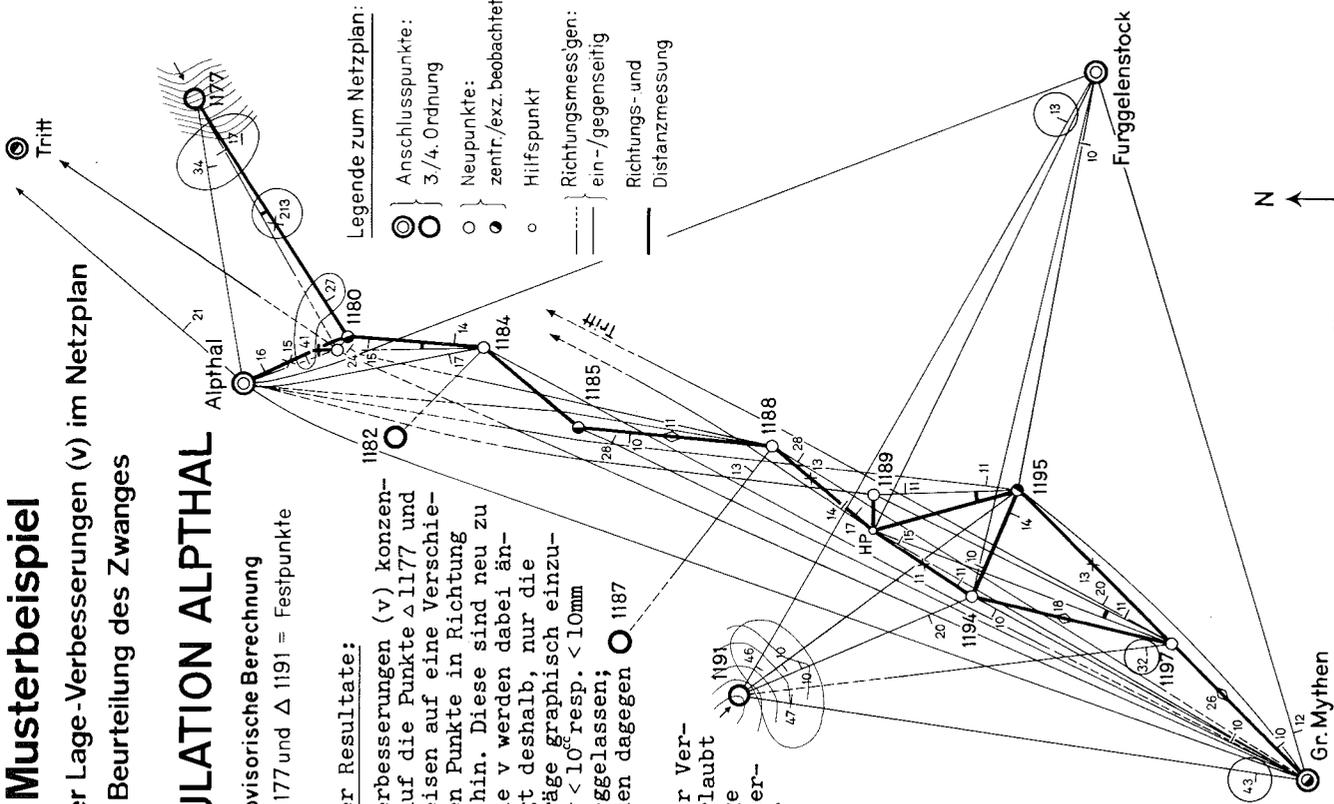
Beurteilung der Resultate:

Die grossen Verbesserungen (v) konzentrieren sich auf die Punkte Δ 1177 und Δ 1191. Sie weisen auf eine Verschiebung der beiden Punkte in Richtung der Falllinie hin. Diese sind neu zu berechnen. Alle v werden dabei ändern; es genügt deshalb, nur die grösseren Beträge graphisch einzutragen. Alle $v < 10^{\circ}$ resp. $< 10\text{mm}$ wurden hier weggelassen; die massgebenden dagegen eingekreist.

Der Eintrag der Verbesserungen erlaubt auch allfällige Mess- oder Übertragungsfehler aufzudecken.

Legende zum Netzplan:

- Anschlusspunkte: 3/4, Ordnung
- Neupunkte: zentr./exz. beobachtet
- Hilfspunkt
- Richtungsmessgen: ein-/gegenseitig
- Richtungsmessgen: Distanzmessung



1 : 25 000

TRIANGULATION ALPHAL

Lagenetzplan 1:25000

B) Definitive Berechnung:

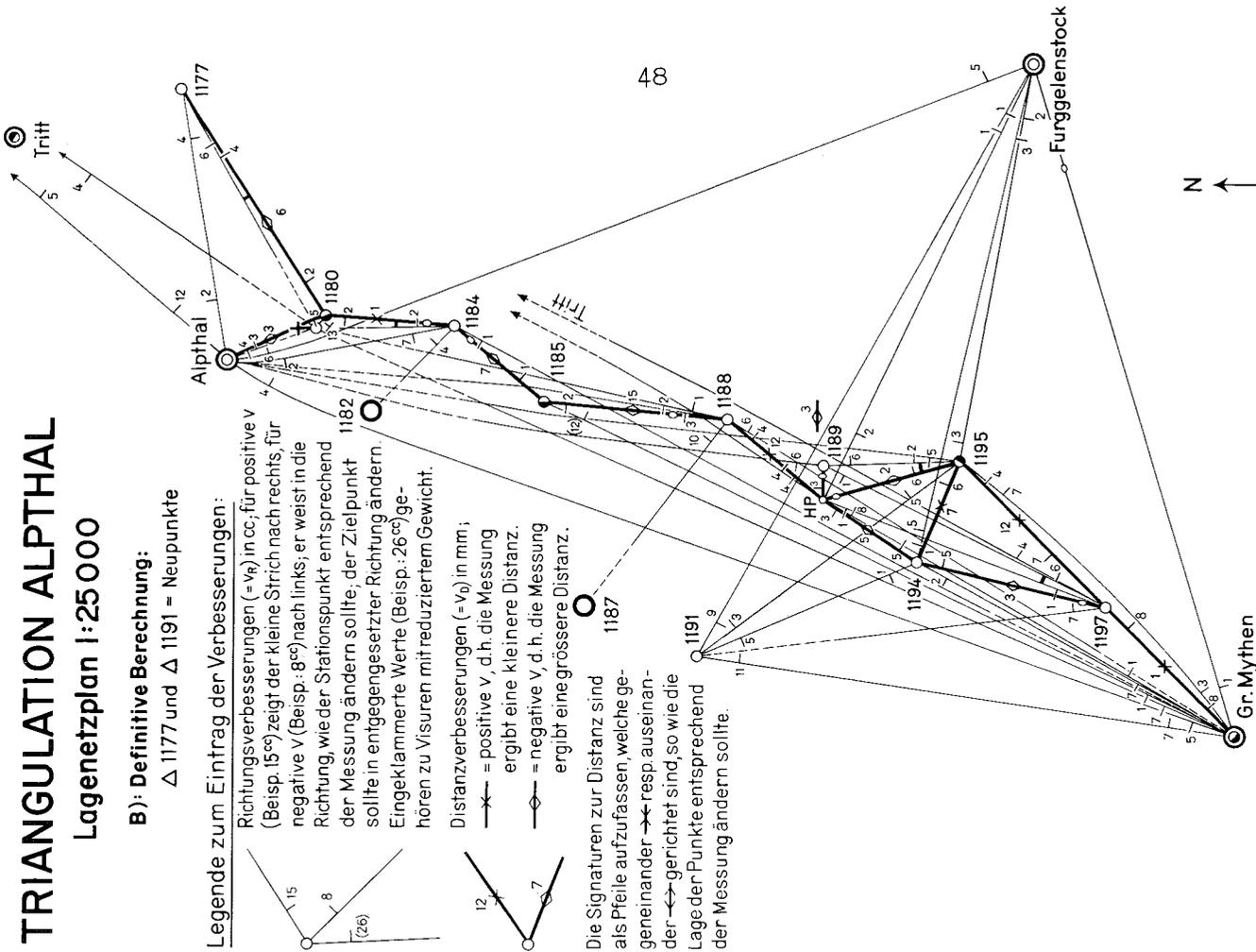
Δ 1177 und Δ 1191 = Neupunkte

Legende zum Eintrag der Verbesserungen:

Richtungsverbesserungen ($= v_{\alpha}$) in cc, für positive v (Beisp. 15°) zeigt der kleine Strich nach rechts, für negative v (Beisp. -8°) nach links; er weist in die Richtung, wie der Stationspunkt entsprechend der Messung ändern sollte; der Zielpunkt sollte in entgegengesetzter Richtung ändern. Eingeklammerte Werte (Beisp.: 26°) gehören zu Visuren mit reduziertem Gewicht.

Distanzverbesserungen ($= v_{\rho}$) in mm;
 — = positive v, d.h. die Messung ergibt eine kleinere Distanz.
 — = negative v, d.h. die Messung ergibt eine grössere Distanz.

Die Signaturen zur Distanz sind als Pfeile aufzufassen, welche gegeneinander resp. auseinander gerichtet sind, so wie die Lage der Punkte entsprechend der Messung ändern sollte.



Musterbeispiel

für den Eintrag der Höhen-Verbesserungen (v) im Netzplan
zur Beurteilung des Zwanges

TRIANGULATION ALPHAL

A) Provisorische Berechnungen
△ 1177 und △ 1191 = Festpunkte

Beurteilung der Resultate:

Für die Höhen ist zu beachten, dass die Verbesserungen (v) zu kürzeren Visuren grössere Gewichte erhalten. Wie bei der Lage konzentrieren sich auch hier die grossen v auf die Punkte △1177 und △1191. Von diesen sind die Höhen neu zu berechnen.

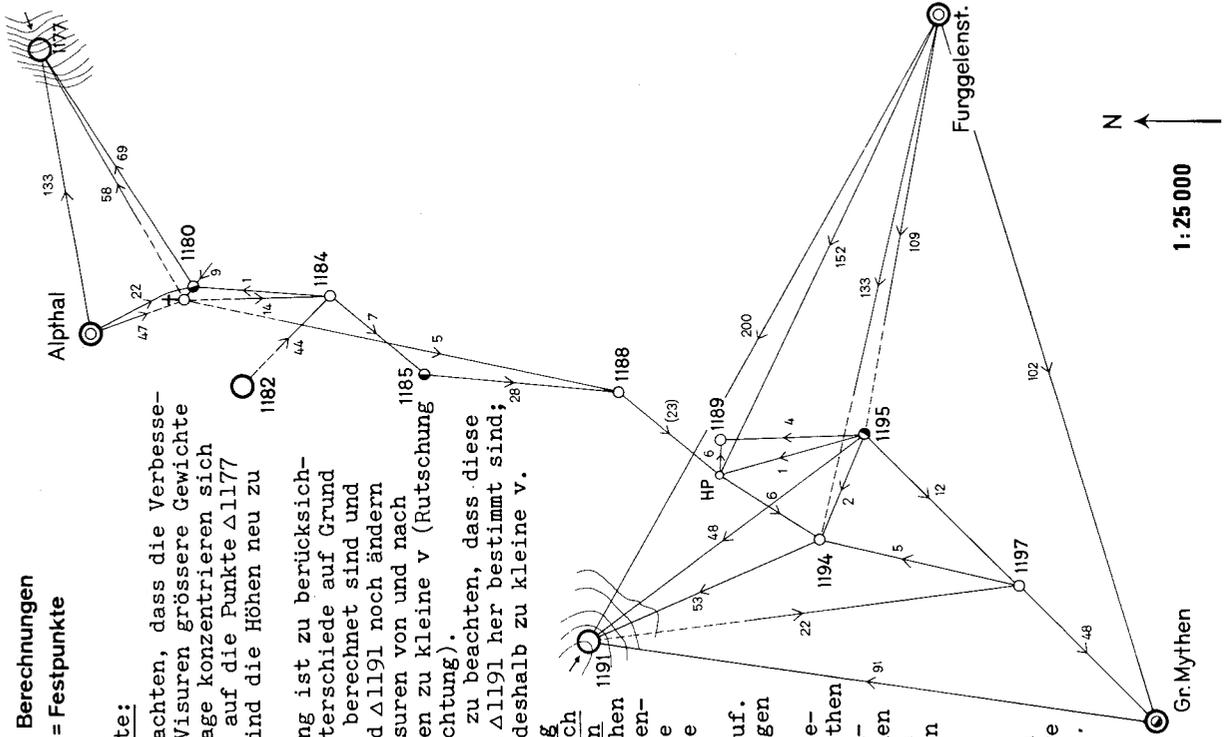
Bei genauerer Betrachtung ist zu berücksichtigen, dass die Höhenunterschiede auf Grund der provisorischen Lage berechnet sind und vor allem nach △1177 und △1191 noch ändern werden. Für steilere Visuren von und nach diesen Punkten erscheinen zu kleine v (Rutschung genähert in der Visurichtung).

Bei △1194 und △1195 ist zu beachten, dass diese Höhen hauptsächlich von △1191 her bestimmt sind; auch hier ergeben sich deshalb zu kleine v.

Zur besseren Beurteilung

eines Zwanges eignet sich die Summe der v zwischen Anschlusspunkten. Zwischen △Gr.Mythen und △Furgelstock lassen sich solche Summen über verschiedene Wege bilden; sie zeigen einen grösseren Zwang auf. In den Operatsberechnungen von 1925/30 wurde daher nachgeforscht und festgestellt, dass für △Gr.Mythen die Höhe aus den Berechnungen 3. Ord'g übernommen worden war, obwohl sich aus den besseren, kurzen Visuren 4. Ord'g ein um ca. 7cm kleinerer Wert ergab.

Die Höhe von △Gr.Mythen wurde für die definitive Ausgleichung korrigiert.



1:25 000

TRIANGULATION ALPHAL

Höhenetzplan 1:25 000

B) Definitive Berechnung:

△ 1177 und △ 1191 = Neupunkte
△ Gr.Mythen = 7cm tiefer

Legende:

→ 15

Verbesserung an ΔH_m in mm; der Pfeil zeigt in Richtung der positiven Verbesserung, also gegen den Punkt, für welchen die Messung eine kleinere Höhe ergibt (Senkungsgebiet).

(-24)

Kontrollwert für ΔH in mm; $= \frac{1}{2}(\Delta H + \bar{\Delta H})$; er ist stets mit einem Vorzeichen zu versehen. Diese Angabe ist fakultativ.

Mathematische Definition der Werte

ΔH = gemessener Höhenunterschied 1-2

$\bar{\Delta H}$ = ΔH aus Vorwärtsvisur (1-2)

ΔH = ΔH aus Rückwärtsvisur (2-1)

ΔH_m = Mittelwert für ΔH [$= \frac{1}{2}(\bar{\Delta H} + \Delta H)$]

Kontr. = Differenz zwischen einfacher Bestimmung und Mittelwert

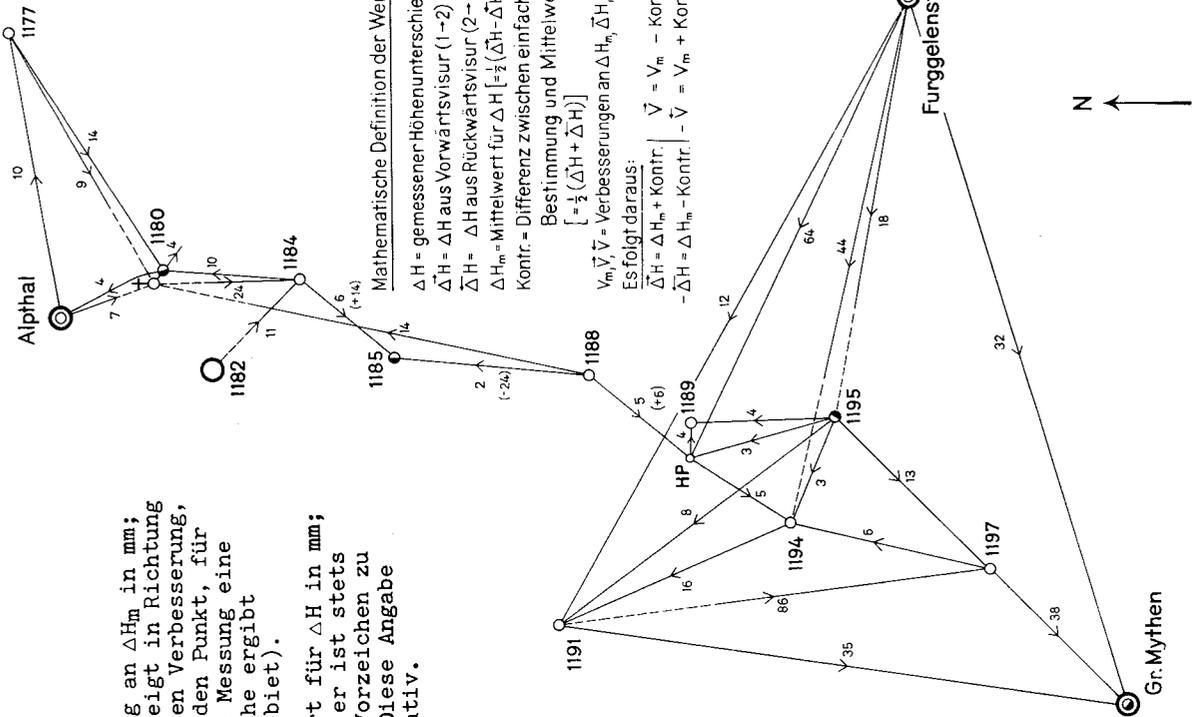
$[= \frac{1}{2}(\Delta H + \bar{\Delta H})]$

V_m, \bar{V}, \bar{V} = Verbesserungen an $\Delta H_m, \Delta H, \bar{\Delta H}$

Es folgt daraus:

$\bar{\Delta H} = \Delta H_m + \text{Kontr.}$ | $\bar{V} = V_m - \text{Kontr.}$

$-\Delta H = \Delta H_m - \text{Kontr.}$ | $-\bar{V} = V_m + \text{Kontr.}$



Diese einfachen Hilfsmittel zur Beurteilung der Triangulationsresultate sind seit langem bekannt und werden erfolgreich eingesetzt. Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit werden sie hier erwähnt um hervorzuheben, dass die Berücksichtigung der Korrelationen unter den Verbesserungen durch einen multivariaten Test ein echtes Bedürfnis der Praxis ist.

12 Die Hauptkomponentenanalyse

12.1 Einführung

Die vorhergehenden Kapitel haben gezeigt, dass der F-Test des Verhältnisses zwischen Standardabweichung a posteriori und a priori den Vorteil hat, univariat zu sein und nicht von den Korrelationen unter den Verbesserungen beeinflusst zu werden. Sein grosser Nachteil hingegen ist die schlechte Empfindlichkeit auf lokale Fehler.

Umgekehrt verhalten sich die anderen Tests, z.B. die Tests der standardisierten Verbesserungen, die nur einzeln durchgeführt werden können, da die Testgrössen unter sich korreliert sind. Sie sind aber sehr empfindlich auf lokale Fehler.

Interessant wäre es, einen statistischen Test mit guter Empfindlichkeit, aber ohne Störung der Korrelationen zu finden, um auch die Wahrscheinlichkeit für den Gesamttest berechnen zu können. Die Hauptkomponentenanalyse erlaubt die Konstruktion eines solchen Testverfahrens. Eine mögliche Lösung wird im Folgenden beschrieben.

12.2 Die Hauptachsentransformation

Man betrachte als erstes eine mehrdimensional normalverteilte stochastische Variable V mit

$$V^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$E(V) = 0$$

und mit Varianz-Kovarianzmatrix Q_{VV} (positiv definit oder semidefinit, aber nicht notwendigerweise diagonal) und dann den Vektor W mit

$$W^T = (w_1, w_2, \dots, w_n),$$

berechnet aus V durch die homogene lineare Transformation

$$W = U^T \cdot V,$$

wo

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & \dots & & \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist.

Die Varianz-Kovarianzmatrix von W ist dann

$$Q_{WW} = U^T Q_{VV} U$$

und $E(W) = 0.$

Dem Hauptachsentheorem /Schwarz, Rutishauser, Stiefel 1972/ ist zu entnehmen:

Zu jeder symmetrischen Matrix M existiert eine orthogonale Matrix U , sodass M vermittels U ähnlich auf Diagonalgestalt

$$D = U^T M U$$

transformiert wird. Man beachte auch /Lichnerowicz 1960/ und /Kowalsky 1965/.

Dazu gilt:

- die Diagonalelemente von D sind gleich den Eigenwerten von M ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$)
- die Zeilen von U^T enthalten die normierten Eigenvektoren zu den Eigenwerten, welche entsprechend geordnet sind wie die Eigenwerte der Diagonalen von D
- wenn die Matrix M Rang r besitzt, dann gibt es r Eigenwerte $\neq 0$.

Das Theorem kann jetzt bei der oben definierten Matrix Q_{VV} angewandt werden:

Es existiert immer eine orthogonale Matrix U , sodass

$$Q_{WW} = U^T Q_{VV} U$$

eine Diagonalmatrix wird. Die Diagonalelemente von Q_{WW} sind die Eigenwerte von Q_{VV} und gleichzeitig die Varianzen der einzelnen Komponenten von W , welche unter sich unkorreliert sind.

Der Verbesserungsvektor einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erfüllt alle Bedingungen, welche für die mehrdimensionale Variable V vorausgesetzt wurden. Die gemachten Aussagen gelten daher auch für den Verbesserungsvektor:

V sei ein Verbesserungsvektor und Q_{VV} die entsprechende Varianz-Kovarianzmatrix. Dann existiert dazu immer eine Orthogonalmatrix U , wofür die Linearkombination W der Verbesserungen

$$W = U^T V$$

eine Varianz-Kovarianzmatrix mit Diagonalgestalt besitzt.

Die Matrix U ist die Matrix der Eigenvektoren von Q_{VV} . Die Varianz-Kovarianzmatrix der Linearkombination W der Verbesserungen ist dann:

$$Q_{WW} = U^T Q_{VV} U = \Lambda$$

wobei Λ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von Q_{VV} ist. Wenn f der Freiheitsgrad und n die Anzahl Beobachtungen des geodätischen Netzes sind, besitzt die Q_{VV} -Matrix Rang f , und es gibt $n-f$ Eigenwerte von Q_{VV} , die Null sind, d.h. $n-f$ Komponenten des Vektors $W(V)$ haben Varianz = 0. Die entsprechenden Eigenvektoren stellen daher funktionale Beziehungen des Modells dar. Die anderen f Komponenten von W sind hingegen echte stochastische Variablen mit Varianz gleich dem entsprechenden Eigenwert (λ_i), und die Komponenten der Eigen-

vektoren sind die Koeffizienten von f orthogonalen und daher linear unabhängigen Bedingungsgleichungen des geodätischen Netzes.

Die Erwartungswerte der Komponenten des Vektors W sind alle Null, da

$$E(W) = E(U^T V) = U^T E(V) \quad \text{und} \\ E(V) = 0 \quad \text{sind.}$$

Eine weitere Eigenschaft der Komponenten des Vektors W ist ihre Normalverteilung, da die Verbesserungen lineare Funktionen der normalverteilten Beobachtungen und die Komponenten von W lineare Funktionen der Verbesserungen sind. Die stochastischen Eigenschaften des Vektors W sind also bestimmt, sodass die Komponenten von W als Teststatistiken in einem Modelltest verwendet werden können.

12.3 Der Hauptkomponententest

Der Hauptkomponententest wird eingesetzt, wenn die Komponenten von mehrdimensionalen Zufallsvariablen unter sich korreliert sind /Flury, Riedwyl 1980/.

12.4 Einzeltest

Nach Ausführung der Hauptachsentransformation sind die linearen Funktionen (kanonische Vektoren) bekannt, welche in der Matrix U aufgezeigt werden, sodass es möglich wird, die f Komponenten (Hauptkomponenten) des Vektors W (für welche $\lambda_i \neq 0$ ist) zu berechnen und mit der Normalverteilung auf signifikante Abweichungen von Null zu prüfen.

Praktisch wird der Vektor S mit den folgenden Komponenten gebildet :

$$s_i = w_i / \sqrt{\lambda_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{wenn } \lambda_i \neq 0,$$

die eine zentrische und standardisierte Normalverteilung besitzen und stochastisch unabhängig sind. Ihr Wert wird mit der vorgewählten Wahrscheinlichkeitsschranke der Normalverteilung verglichen. Je nach

Ergebnis kann die Nullhypothese für einen Modellfehler angenommen oder verworfen werden.

12.5 Anwendungen in der Geodäsie

Die Hauptkomponentenanalyse als bewährte Methode der analytischen Statistik ist sicher den meisten Geodäten bekannt. Die mathematischen Grundlagen dazu findet man praktisch in jedem Lehrbuch der linearen Algebra, und sie bieten sicher keine Schwierigkeiten.

Trotzdem wird die Hauptkomponentenanalyse zur Lösung praktischer Aufgaben in der Geodäsie wenig eingesetzt. Eine bemerkenswerte Ausnahme ist das Verfahren von H. Pelzer zur Untersuchung der Ergebnisse von Deformationsmessungen. Die Differenzen zwischen den u Koordinaten, die in zwei verschiedenen Zeiträumen bestimmt wurden, bilden einen u -dimensionalen Vektor, der für die Nullhypothese den Erwartungswert Null besitzt. Seine Varianz-Kovarianzmatrix ist in der Regel vollbesetzt, sodass die Hauptkomponentenanalyse sich ausgezeichnet für die Durchführung eines Tests zur Ueberprüfung der Nullhypothese für die Deformation eignet /Pelzer 1976/, /Dupraz, Niemeier 1979/.

12.6 Die Berechnung der Hauptachsentransformation

12.6.1 Zielsetzung

Da das Ziel der vorliegenden Publikation nicht eine vollständige Analyse der numerischen Methoden für die Hauptachsentransformation sein kann, hat der Verfasser sich darauf beschränkt, bewährte, bereits bekannte Algorithmen zu verwenden. Für die praktische Durchführung der Transformation wurde das Jacobi-Verfahren eingesetzt. Die Algorithmen sind in FORTRAN IV für die Rechenanlage des Bundesamtes für Landestopographie programmiert.

Im Folgenden werden nur zusammenfassend die Grundgedanken des

Die Aehnlichkeitstransformation der Matrix M mit U_i führt nur zu einer Aenderung der Koeffizienten in den p -ten und q -ten Spalten und Zeilen von M .

Im klassischen Jacobi-Verfahren wird zuerst das betragsgrösste Aussendiagonalelement m_{qp} von M bestimmt. Dann wird die elementare Drehmatrix aufgebaut, sodass m_{qp} durch die Rotation zum Verschwinden gebracht wird.

Das Verfahren ist linear konvergent und eignet sich für die Lösung der nun folgenden praktischen Aufgaben.

12.6.3 Die Nichteindeutigkeit der Lösung

Jede symmetrische Matrix M der Ordnung n besitzt n reelle Eigenwerte. Sie sind als Nullstellen des charakteristischen Polynoms (vom echten Grad n) der Matrix M eindeutig bestimmt.

Die Eindeutigkeit gilt nicht für die Eigenvektoren der Matrix M , welche ebenfalls für den Test nach der Hauptachsentransformation interessieren.

Wenn das charakteristische Polynom der Matrix M mehrfache Nullstellen besitzt, sind die entsprechenden Eigenwerte auch mehrfach und die dazugehörigen Eigenvektoren nicht mehr eindeutig. Jede normierte Linearkombination der gefundenen Eigenvektoren ist ebenfalls Eigenvektor. Eine ähnliche Erscheinung ist in der Vermessungskunde bekannt: bei der Berechnung der Fehlerellipsen (Hauptachsenproblem für eine Teilmatrix) sind die Längen der Hauptachsen der Ellipsen (Eigenwerte) immer eindeutig bestimmt; die Richtung der Achsen wird hingegen unbestimmt, sobald die Ellipse zu einem Kreis wird.

Die Nichteindeutigkeit der Eigenvektoren ist aber kein Hindernis bei der Durchführung des Tests. Da das verwendete Jacobi-Verfahren immer eine Lösung liefert, in welcher die Eigenvektoren ein ortho-normiertes System bilden, sind alle Voraussetzungen für die

Anwendung gegeben, und ein Testvektor S mit standardisierten und statistisch unabhängigen Komponenten kann somit immer hergeleitet werden.

Der Testvektor S (Kap. 12.4) mit standardisierten und stochastisch unabhängigen Komponenten, das heisst mit $Q_{SS} = I$ (die Einheitsmatrix), ist ebenfalls nicht eindeutig und dies unabhängig von den Eigenwerten der Q_{VV} -Matrix.

R sei eine beliebige orthogonale Matrix, dann ist definitionsgemäss $R^T R = I$. Bildet man aus S einen weiteren Vektor S' mit

$$S' = R^T S,$$

dann ist die Varianz-Kovarianzmatrix von S' ebenfalls die Einheitsmatrix

$$Q_{S'S'} = R^T Q_{SS} R = R^T I R = I.$$

Dies bedeutet, dass die Testgrössen s_i nicht eindeutig sind und dass jede beliebige Orthogonalrotation von S ebenfalls ein Testvektor mit Varianz-Kovarianzmatrix = I ist. Da aber jeder S -Vektor die Voraussetzungen erfüllt, kann der Test mit jedem beliebigen S durchgeführt werden. Insbesondere können für die Hauptkomponentenanalyse die Eigenvektoren verwendet werden, die mit der geschilderten Methode der Jacobi-Rotationen erhalten wurden. Es ist aber durchaus möglich, dass ein S' mit noch besseren Empfindlichkeitseigenschaften existiert.

Für weitere Einzelheiten wird auf die Literatur verwiesen, z.B. /Schwarz, Rutishauser, Stiefel, 1972/.

12.6.4 Optimaler Testvektor und Faktorenanalyse

Die Ausführungen des vorherigen Kapitels lassen die Frage nach der Suche des optimalen Testvektors S' auftauchen.

Das Problem lässt sich mit den Techniken der Faktorenanalyse untersuchen und möglicherweise auch befriedigend lösen. Dieses bekannte Verfahren der multivariaten Statistik bietet aber nicht ohne weiteres ein eindeutiges Resultat, da eine allgemeingültige Zielfunktion für die Optimierung fehlt. Das gewünschte Ziel muss daher für die vorgesehene Anwendung zuerst bestimmt werden. Sicher sollte man eine möglichst direkte Abhängigkeit zwischen Komponenten des Testvektors und den durchgeführten Messungen erreichen. Die mathematische Formulierung dieser Zielsetzung sowie weiterer eventuell notwendiger Nebenbedingungen ist aber schwierig und würde den Umfang dieser Arbeit wesentlich vergrößern. Es wird daher vorläufig auf eine Untersuchung der Methode verzichtet und auf die Literatur verwiesen /Flury, Riedwyl 1980/.

12.7 Rechenbeispiele

12.7.1 Einfaches Dreieck

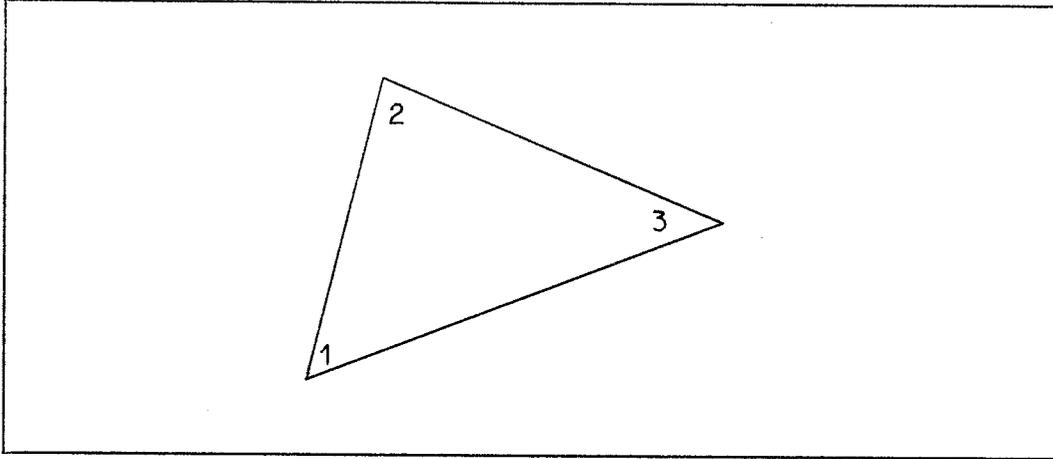


Abb. 8. Ein einfaches Dreiecksnetz.

Beobachtete Winkel und Verbesserungen der Ausgleichung
(mittlere Fehler a priori der Beobachtungen = 5cc)

| Winkel | Messwert (Gon) | V (cc) |
|--------|-------------------|-----------|
| 1 | 61.6305 | -3.3 |
| 2 | 90.3665 | -3.3 |
| 3 | 48.0040 | -3.3 |

Das Verhältnis $\hat{\sigma}/\sigma$ ist gleich 1.15, sodass

$$F = \left(\hat{\sigma}/\sigma \right)^2 = 1.32$$

wird.

Für die Ausgleichung wurde $\sigma = 1$ gesetzt, sodass die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen Q_{vv} auch die Varianz-Kovarianzmatrix der Verbesserungen ist.

Die Matrix Q_{vv} ist :

| | | |
|--------|--------|--------|
| 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 |
| 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 |
| 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 |

Mit dem Jacobi-Verfahren können Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet werden.

Die transponierte Matrix U^T der Eigenvektoren lautet :

$$\begin{array}{ccc} 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 \\ 0.5774 & 0.5774 & 0.5774 \\ -0.4082 & -0.4082 & 0.8165 \end{array}$$

und die dazugehörigen Eigenwerte

$$\begin{array}{c} 0 \\ 25.000000 \\ 0. \end{array}$$

Da der erste und der letzte Eigenwert gleich Null sind, stellen die entsprechenden Eigenvektoren funktionale Beziehungen zwischen den Verbesserungen im Modell dar und ergeben daher keine Zufallsvariablen. Der zweite Eigenvektor führt hingegen zur zentrischen normalverteilten Zufallsvariablen

$$w_2 = U_2^T V,$$

welche die Standardabweichung

$$\sigma_w = \sqrt{\lambda_2} = 5$$

besitzt.

Die S-Werte sind dann

$$W = U^T V \quad S (= W/\sqrt{\lambda})$$

| | |
|----------|----------|
| 0 | ***** |
| -5.77350 | -1.15470 |
| 0 | ***** |

Ein eindimensionaler Test der normalverteilten und standardisierten Grösse s_2 mit $\alpha = 5\%$ führt zur Annahme des mathematischen Modells.

Dem Leser ist sicher nicht entgangen, dass die Testfunktion nichts anderes ist als die Winkelbedingungsgleichung des Dreiecks.

12.7.2 Mehrfaches Dreiecksnetz

Das Modell wird erweitert zum folgenden Dreiecksnetz :

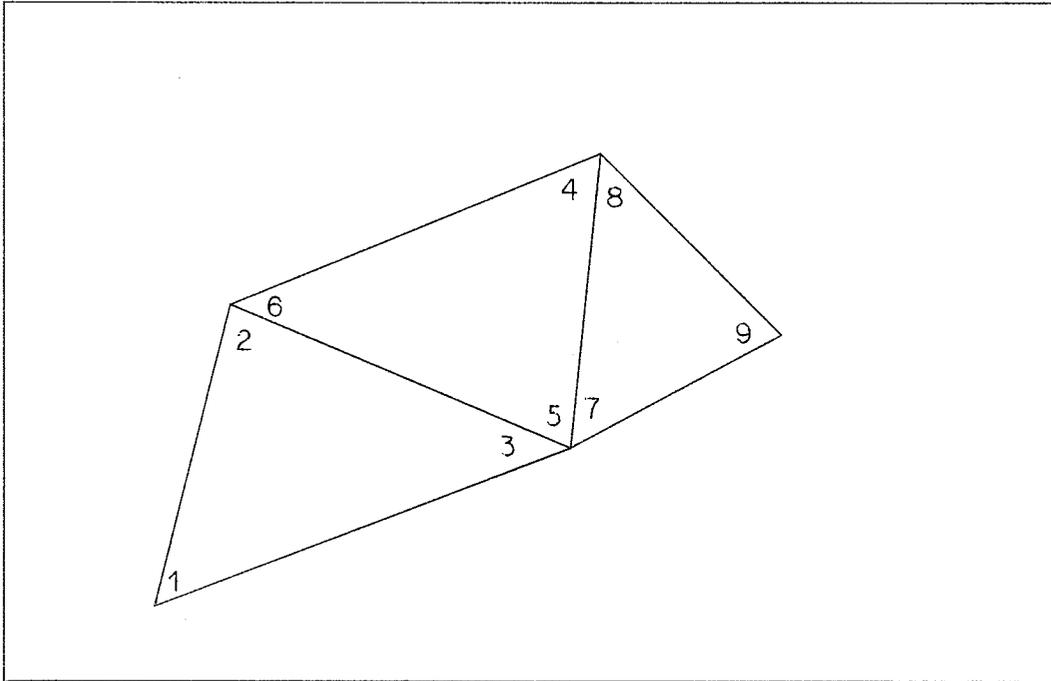


Abb. 9. Ein dreifaches Dreiecksnetz.

Beobachtete Winkel und Verbesserungen der Ausgleichung
(mittlere Fehler a priori der Beobachtungen = 5cc) :

| Winkel | Messwert (Gon) | V (cc) |
|--------|-------------------|-----------|
| 1 | 61.6305 | -3.3 |
| 2 | 90.3665 | -3.3 |
| 3 | 48.0040 | -3.3 |
| 4 | 70.5015 | 1.7 |
| 5 | 80.3065 | 1.7 |
| 6 | 49.1915 | 1.7 |
| 7 | 65.2015 | -1.7 |
| 8 | 55.2050 | -1.7 |
| 9 | 79.5940 | -1.7 |

Das Verhältnis $\hat{\sigma}/\sigma$ ist gleich 0.82, sodass

$$F = \left(\hat{\sigma}/\sigma \right)^2 = 0.67$$

wird.

Für die Ausgleichung wurde $\sigma = 1$ gesetzt, sodass die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen Q_{vv} auch die Varianz-Kovarianzmatrix der Verbesserungen ist.

Die Matrix Q_{vv} lautet :

| | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8.3333 | 8.3333 | 8.3333 | 0 |

Mit dem Jacobi-Verfahren können Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet werden:

Die Matrix U^T der transponierten Eigenvektoren ist dann :

| | | | | | | | | | |
|---------|---------|--------|---------|---------|--------|---------|---------|--------|---|
| 0.7071 | -0.7071 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.5774 | 0.5774 | 0.5774 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0.4082 | -0.4082 | 0.8165 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0.7071 | -0.7071 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0.5774 | 0.5774 | 0.5774 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | -0.4082 | -0.4082 | 0.8165 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.7071 | -0.7071 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5774 | 0.5774 | 0.5774 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.4082 | -0.4082 | 0.8165 | 0 |

Die dazugehörigen Eigenwerte sind :

0
25.000000
0
0
25.000000
0
0
25.000000
0

Da die 1.,3.,4.,6.,7. und 9. Eigenwerte gleich Null sind, stellen die entsprechenden Eigenvektoren funktionale Beziehungen im Modell dar und führen deshalb zu keiner Zufallsvariablen.

Die 2., 5. und 8. Eigenvektoren führen hingegen zu den zentrischen normalverteilten Zufallsvariablen

$$w_i = U_i^T V,$$

welche die Standardabweichung

$$\sigma_{w_i} = \sqrt{\lambda_i} = 5$$

besitzen.

Die S-Werte sind

| | $W = U^T V$ | $S (= W/\sqrt{\lambda})$ |
|----|-------------|--------------------------|
| | 0 | ***** |
| 1) | -5.77350 | -1.15470 |
| | 0 | ***** |
| | 0 | ***** |
| 2) | 8.66025 | 0.57735 |
| | 0 | ***** |
| | 0 | ***** |
| 3) | -2.88675 | -0.57735 |
| | 0 | ***** |

Die Tests der drei normalverteilten und standardisierten Grössen s_i mit den λ_i verschieden von Null für $\alpha = 5\%$ führen zur Annahme des mathematischen Modells.

Zu bemerken ist, dass die Eigenvektoren, die zu den Grössen w_i geführt haben, die bekannten Winkelbedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes darstellen.

12.7.3 Das kombinierte Netz

Während die ersten Berechnungen gezeigt haben, dass einfache Resultate auch durch komplizierte Methoden erreicht werden können, beschreibt das folgende Beispiel eine Anwendung, die mit einfacheren Mitteln nicht ohne weiteres möglich wäre.

Man betrachte das folgende Netz:

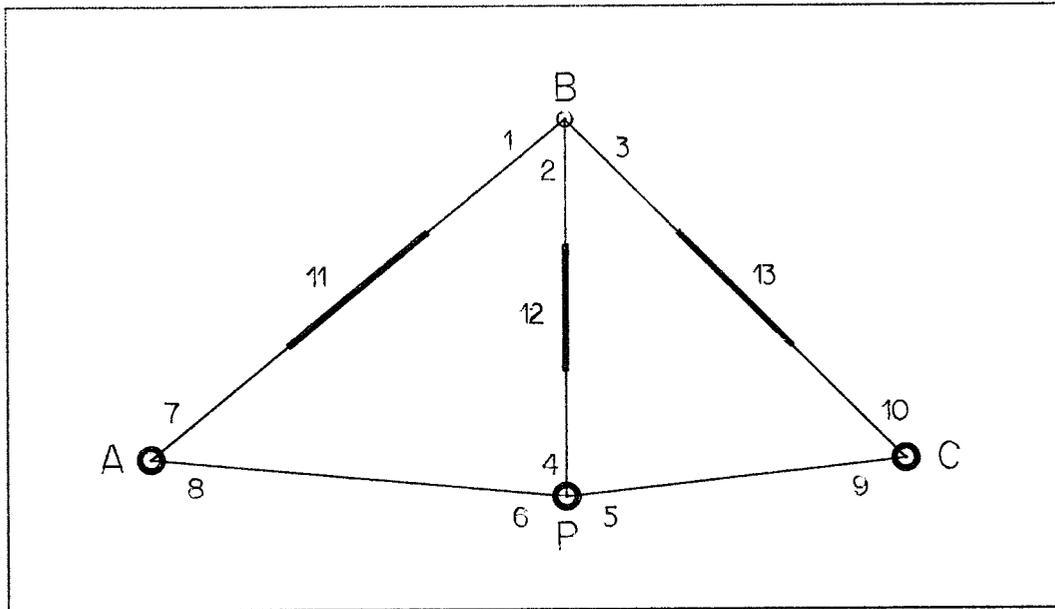


Abb. 10. Ein kombiniertes Netz.

Die Ausgleichung wurde mit dem Triangulationsprogramm des Bundesamtes für Landestopographie /Gubler 1975/ berechnet, während die Hauptkomponentenanalyse mit dem Programm VERMHA (Anhang 1) des Verfassers durchgeführt wurde.

Auf Seite 67 ist die Liste der Messungen mit den entsprechenden Verbesserungen zu finden. Richtungs- und Distanzmessungen sind in verschiedenen Spalten enthalten.

EIDG. LANDESTOPOGRAPHIE

WABERN, DEN 26.07.1982 15.41

TEST

| | | | |
|-----------------------|---------|--------------------|------------|
| | LAGE | | |
| M. FEHLERQUOT. TOTAL: | | | |
| OHNE RUNDUNG | 1.37 | | |
| SCHLUSSKONTR. | 1.37 | | |
| ANZAHL BEOBACHTUNGEN | 13 | ANZAHL DISTANZEN: | 3 |
| ANZAHL UNBEKANNTE | 6 | ANZAHL RICHTUNGEN: | 10 |
| UEBERBESTIMMUNGEN | 7 | | |
| KONDITION DER MATRIX | 0.2E 01 | LAGE - NEUPUNKTE: | ANZAHL = 1 |
| ITERATIONEN | 1 | | |
| Y,X,H NACH RUNDUNG | 4 DEZ. | | |
| ANZAHL STATIONEN | 5 | | |
| BEOBACHTUNGSKARTEN | 13 | | |

KOORDINATEN UND HOEHEN, NEUPUNKTE MIT AENDERUNGEN UND MITTL. FEHLERELLIPSEN

| PUNKT | Y M | X M | DY MM | DX MM | MFA MM | MFB MM | MFAZ G |
|-------|------------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| A | -1000.0000 | 100.0000 | | | | | |
| B | 99.9997 | 1000.0098 | -0.3 | 9.8 | 8.14 | 7.43 | -83.9 |
| C | 1000.0000 | 100.0000 | | | | | |
| P | 100.0000 | 0.0000 | | | | | |

LAGE - ABRISS

| PUNKT | OR/R | BEOB | VR | MFR | AZ | D RED | VD | MFD | D PROJ |
|-------|-----------|------|------|-----|-----------|----------|-------|-----|-----------|
| | G | | CC | CC | G | M | MM | MM | M |
| B | 399.99886 | | | 5 | | | | | |
| ----- | | | | | | | | | |
| A | 256.34600 | | -1.0 | 5 | 256.34476 | | | | 1421.2730 |
| P | 200.00150 | | -3.8 | 5 | 199.99998 | | | | 1000.0098 |
| C | 150.00100 | | 4.8 | 5 | 150.00034 | | | | 1272.7993 |
| P | 399.99964 | | | | | | | | |
| ----- | | | | | | | | | |
| B | 0.00000 | | 3.4 | 5 | 399.99998 | | | | 1000.0098 |
| C | 92.95600 | | -2.9 | 5 | 92.95534 | | | | 905.5385 |
| A | 305.77200 | | -0.5 | 5 | 305.77159 | | | | 1104.5361 |
| A | 0.00017 | | | | | | | | |
| ----- | | | | | | | | | |
| B | 56.34500 | | -4.2 | 5 | 56.34476 | | | | 1421.2730 |
| P | 105.77100 | | 4.2 | 5 | 105.77159 | | | | 1104.5361 |
| C | 0.00009 | | | | | | | | |
| ----- | | | | | | | | | |
| P | 292.95500 | | 2.5 | 5 | 292.95534 | | | | 905.5385 |
| B | 350.00050 | | -2.5 | 5 | 350.00034 | | | | 1272.7993 |
| B | | | | | | | | | |
| ----- | | | | | | | | | |
| A | | | | | 256.34476 | 1421.260 | 13.0 | 10 | 1421.2730 |
| P | | | | | 199.99998 | 1000.035 | -25.2 | 10 | 1000.0098 |
| C | | | | | 150.00034 | 1272.790 | 9.3 | 10 | 1272.7993 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|----------|----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 12.49503 | -7.41990 | -5.07513 | 1.87640 | -0.93820 | -0.93820 | -1.13524 | 1.13524 | -2.57969 | 2.57969 |
| 2 | -7.41990 | 15.09651 | -7.67661 | -3.14203 | 1.57101 | 1.57101 | -1.11473 | 1.11473 | 1.24308 | -1.24308 |
| 3 | -5.07513 | -7.67661 | 12.75173 | 1.26563 | -0.63281 | -0.63281 | 2.24996 | -2.24996 | 1.33661 | -1.33661 |
| 4 | 1.87640 | -3.14203 | 1.26563 | 10.37853 | -5.18927 | -5.18927 | -2.20688 | 2.20688 | 2.51227 | -2.51227 |
| 5 | -0.93820 | 1.57101 | -0.63281 | -5.18927 | 15.09463 | -9.90537 | 1.10344 | -1.10344 | -1.25613 | 1.25613 |
| 6 | -0.93820 | 1.57101 | -0.63281 | -5.18927 | 15.09463 | -9.90537 | 1.10344 | -1.10344 | -1.25613 | 1.25613 |
| 7 | -1.13524 | -1.11473 | 2.24996 | -2.20688 | 1.10344 | 1.10344 | 10.83458 | -10.83458 | -0.02718 | 0.02718 |
| 8 | 1.13524 | 1.11473 | -2.24996 | 2.20688 | -1.10344 | -1.10344 | 10.83458 | 10.83458 | 0.02718 | -0.02718 |
| 9 | -2.57969 | 1.24308 | 1.33661 | 2.51227 | -1.25613 | -1.25613 | -0.02718 | 0.02718 | 10.56903 | -10.56903 |
| 10 | 2.57969 | -1.24308 | -1.33661 | -2.51227 | 1.25613 | 1.25613 | 0.02718 | -0.02718 | -10.56903 | 10.56903 |
| 11 | 9.85969 | -5.49309 | -4.36660 | -11.08103 | 5.54052 | 5.54052 | -0.63438 | 0.63438 | 7.74752 | -7.74752 |
| 12 | 10.16662 | 0.37378 | -10.54040 | 0.60951 | -0.30475 | -0.30475 | 5.35355 | -5.35355 | 4.99997 | -4.99997 |
| 13 | 4.06265 | 5.49918 | -9.56183 | 10.90753 | -5.45376 | -5.45376 | 7.46238 | -7.46238 | -0.65013 | 0.65013 |

| | 11 | 12 | 13 |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 9.85969 | 10.16662 | 4.06265 |
| 2 | -5.49309 | 0.37378 | 5.49918 |
| 3 | -4.36660 | -10.54040 | -9.56183 |
| 4 | -11.08103 | 0.60951 | 10.90753 |
| 5 | 5.54052 | -0.30475 | -5.45376 |
| 6 | 5.54052 | -0.30475 | -5.45376 |
| 7 | -0.63438 | 5.35355 | 7.46238 |
| 8 | 0.63438 | -5.35355 | -7.46238 |
| 9 | 7.74752 | 4.99997 | -0.65013 |
| 10 | -7.74752 | -4.99997 | 0.65013 |
| 11 | 68.58301 | -17.70218 | 5.94457 |
| 12 | -17.70218 | 70.28977 | -22.02379 |
| 13 | 5.94457 | -22.02379 | 66.25400 |

EIGENVEKTOREN

U

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|----------|
| 1 | 0.73337 | -0.48164 | -0.06042 | -0.24036 | 0 | 0.10126 | -0.21367 | 0 | 0 | 0.18018 |
| 2 | 0.52493 | 0.71453 | 0.18968 | 0.29558 | 0 | -0.15136 | -0.22056 | 0 | 0 | 0.06985 |
| 3 | 0.23325 | -0.23289 | 0.73673 | 0.09076 | 0 | -0.01354 | 0.43424 | 0 | 0 | -0.25002 |
| 4 | 0.06397 | -0.29347 | -0.21890 | 0.75560 | 0 | 0.25385 | -0.14324 | 0 | 0 | -0.38700 |
| 5 | -0.01427 | 0.14673 | 0.07007 | 0.01153 | 0.70711 | 0.64545 | 0.07162 | 0 | 0 | 0.19350 |
| 6 | -0.01427 | 0.14673 | 0.07007 | 0.01153 | -0.70711 | 0.64545 | 0.07162 | 0 | 0 | 0.19350 |
| 7 | 0.14334 | 0.05637 | -0.26954 | 0.10407 | 0 | -0.06949 | 0.58111 | 0.70711 | 0 | 0.14015 |
| 8 | -0.14334 | -0.05637 | 0.26954 | -0.10407 | 0 | 0.06949 | -0.58111 | 0.70711 | 0 | -0.14015 |
| 9 | 0.10672 | 0.18396 | -0.12904 | -0.26962 | 0 | 0.12688 | 0.07408 | 0 | 0.70711 | -0.56401 |
| 10 | -0.10672 | -0.18396 | 0.12904 | 0.26962 | 0 | -0.12688 | -0.07408 | 0 | 0.70711 | 0.56401 |
| 11 | -0.09121 | 0 | 0.09955 | 0.28249 | 0 | -0.13523 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | -0.18160 | 0 | 0.29590 | 0.08898 | 0 | -0.02560 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | -0.15014 | 0 | 0.28948 | -0.14370 | 0 | 0.09064 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | 11 | 12 | 13 |
|----|----------|----------|----------|
| 1 | 0.09557 | 0 | 0.26694 |
| 2 | -0.11467 | 0 | 0.03094 |
| 3 | 0.01910 | 0 | -0.29788 |
| 4 | -0.22984 | 0 | 0.05811 |
| 5 | 0.11492 | 0 | -0.02905 |
| 6 | 0.11492 | 0 | -0.02905 |
| 7 | -0.06726 | 0 | 0.16158 |
| 8 | 0.06726 | 0 | -0.16158 |
| 9 | 0.10550 | 0 | 0.12083 |
| 10 | -0.10550 | 0 | -0.12083 |
| 11 | 0.73860 | -0.48922 | 0.31435 |
| 12 | 0.08954 | 0.68843 | 0.62365 |
| 13 | -0.55969 | -0.53547 | 0.51460 |

EIGENWERTE

0.000000
 25.000000
 -0.000000
 -0.000000
 25.000000
 -0.000000
 25.000000
 -0.000000
 0.000000
 25.000000
 71.449329
 100.000000
 57.395754

S-WERTE

| | UT*v | S |
|----|-----------|----------|
| | 0 | ***** |
| 1) | -4.36430 | -0.87286 |
| | 0 | ***** |
| | 0 | ***** |
| 2) | -1.69706 | -0.33941 |
| | 0 | ***** |
| 3) | -2.05144 | -0.41029 |
| | 0 | ***** |
| | 0 | ***** |
| 4) | -7.66923 | -1.53385 |
| 5) | 2.39527 | 0.28337 |
| 6) | -28.69758 | -2.86976 |
| 7) | -9.08785 | -1.19956 |

SUMME SS = 13.15
 SMAX = -2.87

Der eindimensionale Test der Grösse

$$s_6 = -2.87,$$

welche standardisiert und zentrisch normalverteilt sein sollte, führt für $\alpha = 5\%$ zur Verwerfung des mathematischen Modells, da der Annahmebereich zwischen -1.96 und 1.96 liegt.

Das Verwerfen des Modells ist in diesem Spezialfall bestimmt berechtigt, da die zwölfte Beobachtung (Distanz B-P) absichtlich vor der Berechnung um 25 mm verfälscht wurde.

Nach der Verwerfung des Modells wird man versuchen, den groben Fehler möglichst genau zu lokalisieren. Zwei denkbare Verfahren diesbezüglich sind in den folgenden Kapiteln 13.6 und 13.7 beschrieben.

13 Der NMAX-Test

13.1 Die Teststatistik

In den bisherigen Beispielen wurden die einzelnen Komponenten s_i des Testvektors, die aus der Hauptachsentransformation stammten, nur in eindimensionalen Tests verwendet, was auch mit beliebigen geometrischen Bedingungsgleichungen möglich wäre.

Man hat bis anhin die statistische Unabhängigkeit der Testvariablen s_i noch nicht ausgenutzt. Gerade diese Eigenschaft erlaubt aber das Durchführen eines globalen Tests.

Es ist in der Tat leicht, eine Wahrscheinlichkeit w für das Ereignis zu berechnen, dass die Absolutbeträge aller Komponenten s_i einer Realisierung des Testvektors S kleiner als eine festgelegte Schranke k sind. Das heisst

$$w = P(\text{alle } |s_i| \leq k) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Da die Komponenten s_i stochastisch unabhängig sind, ist dann

$$w = P(|s_1| \leq k) \quad P(|s_2| \leq k) \quad \dots \quad P(|s_n| \leq k).$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind der eindimensionalen Normalverteilungsfunktion zu entnehmen. Die inverse Berechnung ist ebenfalls leicht durchführbar: ist eine Irrtumswahrscheinlichkeit α gegeben, kann die Schranke $k(\alpha)$ berechnet werden, für welche

$$P(\text{alle } |s_i| \leq k(\alpha)) = 1 - \alpha \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ist. Aufgrund des so berechneten Signifikanzintervalls kann ein mehrdimensionaler Test unter gleichzeitiger Berücksichtigung aller Komponenten der Testvariablen durchgeführt werden. Wenn man unter den Komponenten des Testvektors S die betragsgrösste Komponente s_{\max} betrachtet, ist sofort ersichtlich, dass die Wahrscheinlichkeit

$$w = P(\text{alle } |s_i| \leq k)$$

identisch mit der Wahrscheinlichkeit

$$w = P(|s_{\max}| \leq k)$$

ist. Daher kann man die vorherigen Ausführungen vereinfachen, indem man die neue Testvariable s_{\max} verwendet mit dem Vorteil, dass der mehrdimensionale Test auf einen eindimensionalen zurückgeführt wird. Zur Beurteilung der statistischen Eigenschaften der Zufallsvariablen s_{\max} steht die Theorie der Ordnungsstatistiken zur Verfügung. Man konsultiere dazu etwa das ausführliche Werk /David 1980/ oder als Einführung /Bachmann 1973/.

13.2 Die NMAX-Verteilung

13.2.1 Definition

Für die vorliegende Anwendung, die Beurteilung des Testvektors S , sind die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- $E(\underline{s}_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, f$
- $\text{Var}(\underline{s}_i) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, f$
- Varianz-Kovarianzmatrix $Q_{SS} = I$ (Einheitsmatrix)

Die Testvariable s_{\max} stammt also aus einer Reihe stochastisch unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen mit bekanntem Erwartungswert (Null) und bekannter Varianz (1). Für diesen Fall /David 1981, S. 221, Fall A2/ scheinen in der Literatur statistische Tabellen noch zu fehlen, sodass hier die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen s_{\max} kurz definiert und anschliessend berechnet wird.

Definition:

Es seien

$$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_f$$

f unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit

$$E(\underline{x}_i) = 0 \text{ und Varianz}(\underline{x}_i) = 1 \text{ für } i=1,2,\dots,f.$$

Man betrachte dann die Zufallsvariable \underline{x}_{\max} , mit welcher die betragsgrösste \underline{x}_i ($i = 1,2,\dots,f$) bezeichnet wird. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von \underline{x}_{\max} wird hier NMAX-Verteilung genannt.

13.2.2 Berechnung der NMAX-Verteilung

Die Normalverteilungsfunktion $F(z)$ bildet die Grundlage für die Berechnung der NMAX-Verteilung. Es ist:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

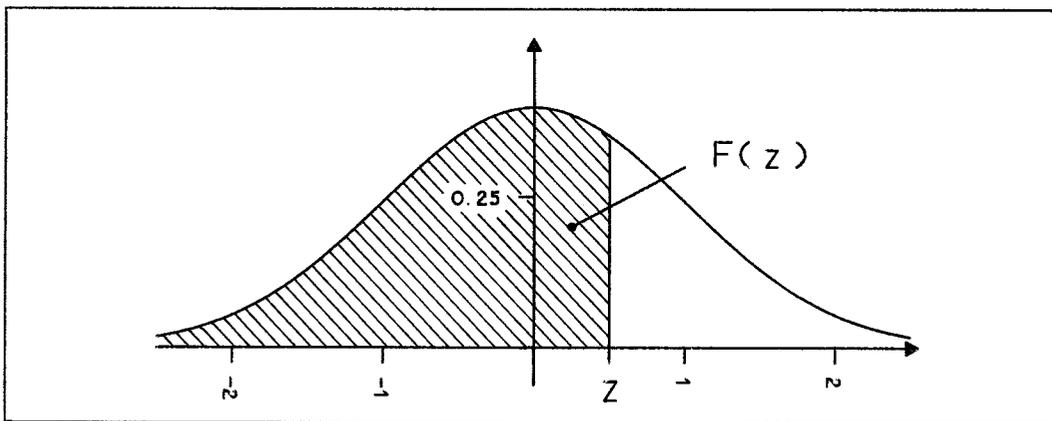


Abb. 11. Die Normalverteilung.

Für eine einzige normalverteilte Zufallsvariable x ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung von x die Bedingung

$$-z < x < z$$

erfüllt, wie bekannt

$$P(-z < x < z) = F(z) - F(-z).$$

Für eine Reihe von f stochastisch unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen x_i ($i = 1, 2, \dots, f$) ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bedingung

$$-z < x_i < z \quad (i = 1, 2, \dots, f)$$

für die ganze Reihe erfüllt ist, ebenfalls einfach zu berechnen, und es gilt

$$P(-z < x_i < z, \quad i = 1, 2, \dots, f) = (F(z) - F(-z))^f$$

als Produkt der Wahrscheinlichkeit für jede einzelne Zufallsvariable. Dazu ist:

$$P(|x_{\max}| < z) = P(-z < x_{\max} < z),$$

und da x_{\max} die betragsgrösste Variable unter den x_i bezeichnet, ist

$$P(|x_{\max}| < z) = P(-z < x_i < z, \quad i = 1, 2, \dots, f)$$

und daher auch

$$P(|x_{\max}| < z) = (F(z) - F(-z))^f,$$

welche die Grundgleichung für die Berechnung der NMAX-Verteilung darstellt. Aus der Symmetrie der Normalverteilung folgt ebenfalls

$$\begin{aligned} F(-z) &= 1 - F(z) \\ F(z) - F(-z) &= 2F(z) - 1, \end{aligned}$$

und da auch die NMAX-Verteilung symmetrisch ist

$$P(x_{\max} < 0) = 0.5 .$$

Daraus kann die NMAX-Verteilungsfunktion hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \text{NMAX}(z) &= 0.5 + 0.5 (2F(z)-1)^f \quad \text{für } z \geq 0 \\ &= 0.5 - 0.5 (2F(z)-1)^f \quad \text{für } z < 0 \end{aligned}$$

wobei $F(z)$ die Normalverteilung ist.

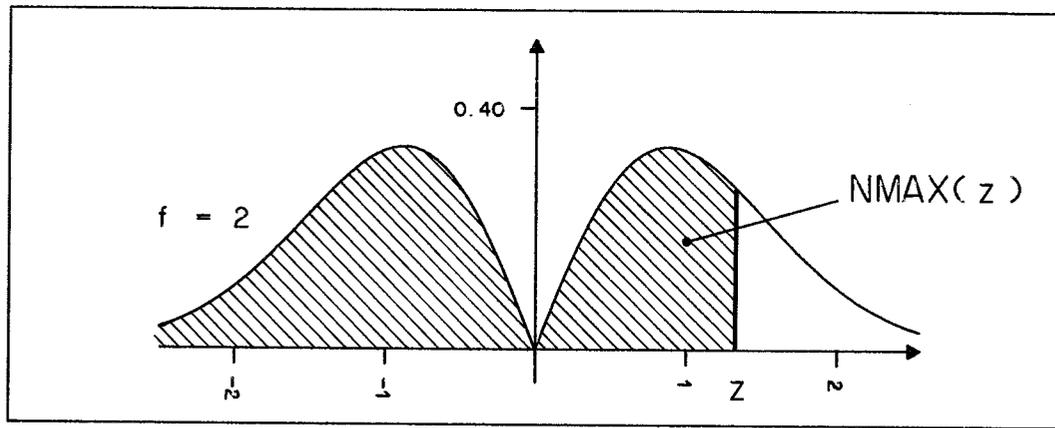


Abb. 12. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der NMAX-Verteilung für $f = 2$.

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte für x_{\max} ist dann die erste Ableitung der Verteilungsfunktion $\text{NMAX}(z)$. Das heisst:

$$\begin{aligned} d\text{NMAX}/dz &= f(2F(z)-1)^{f-1} F'(z) \quad \text{für } z \geq 0 \\ &= -f(2F(z)-1)^{f-1} F'(z) \quad \text{für } z < 0, \end{aligned}$$

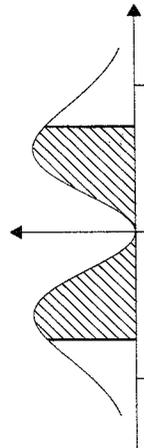
wobei $F'(z)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung ist:

$$F'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} z^2}$$

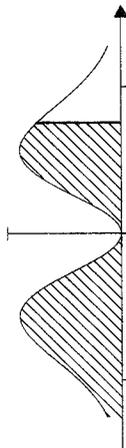
Die folgenden Zahlentafeln enthalten die Werte der Verteilungsfunktion für zwei verschiedene Anwendungsvarianten der NMAX-Verteilung sowie die Wahrscheinlichkeitsdichte.

NMAX(-Z, +Z)

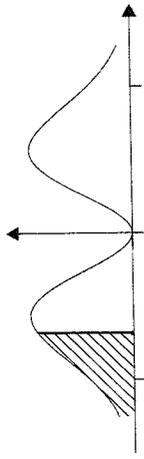
| Z/P | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.10 | 0.0797 | 0.0063 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.20 | 0.1585 | 0.0251 | 0.0040 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.30 | 0.2358 | 0.0556 | 0.0131 | 0.0031 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.40 | 0.3108 | 0.0966 | 0.0300 | 0.0093 | 0.0029 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.50 | 0.3829 | 0.1466 | 0.0561 | 0.0215 | 0.0082 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.60 | 0.4515 | 0.2038 | 0.0920 | 0.0416 | 0.0188 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.70 | 0.5161 | 0.2663 | 0.1374 | 0.0709 | 0.0366 | 0.0013 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.80 | 0.5763 | 0.3321 | 0.1914 | 0.1103 | 0.0636 | 0.0040 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.90 | 0.6319 | 0.3993 | 0.2523 | 0.1594 | 0.1007 | 0.0101 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.00 | 0.6827 | 0.4661 | 0.3182 | 0.2172 | 0.1483 | 0.0220 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.10 | 0.7287 | 0.5310 | 0.3869 | 0.2819 | 0.2054 | 0.0422 | 0.0018 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.20 | 0.7699 | 0.5927 | 0.4563 | 0.3513 | 0.2704 | 0.0731 | 0.0053 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.30 | 0.8064 | 0.6503 | 0.5244 | 0.4229 | 0.3410 | 0.1163 | 0.0135 | 0.0016 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.40 | 0.8385 | 0.7031 | 0.5895 | 0.4943 | 0.4145 | 0.1718 | 0.0295 | 0.0051 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.50 | 0.8664 | 0.7506 | 0.6503 | 0.5634 | 0.4882 | 0.2383 | 0.0568 | 0.0135 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.60 | 0.8904 | 0.7928 | 0.7059 | 0.6286 | 0.5597 | 0.3132 | 0.0981 | 0.0307 | 0.0096 | 0.0030 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.70 | 0.9109 | 0.8297 | 0.7557 | 0.6884 | 0.6270 | 0.3932 | 0.1546 | 0.0608 | 0.0239 | 0.0094 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.80 | 0.9281 | 0.8614 | 0.7995 | 0.7421 | 0.6888 | 0.4744 | 0.2250 | 0.1068 | 0.0506 | 0.0240 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.90 | 0.9426 | 0.8884 | 0.8374 | 0.7893 | 0.7440 | 0.5535 | 0.3064 | 0.1696 | 0.0939 | 0.0520 | 0.0027 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2.00 | 0.9545 | 0.9111 | 0.8696 | 0.8300 | 0.7923 | 0.6277 | 0.3940 | 0.2473 | 0.1552 | 0.0975 | 0.0095 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2.10 | 0.9643 | 0.9298 | 0.8966 | 0.8646 | 0.8337 | 0.6950 | 0.4830 | 0.3357 | 0.2337 | 0.1622 | 0.0596 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2.20 | 0.9722 | 0.9452 | 0.9189 | 0.8933 | 0.8685 | 0.7543 | 0.5689 | 0.4291 | 0.3237 | 0.2441 | 0.1144 | 0.0131 | 0.0015 | 0.0002 | 0.0000 |
| 2.30 | 0.9786 | 0.9576 | 0.9370 | 0.9169 | 0.8973 | 0.8051 | 0.6481 | 0.5218 | 0.4201 | 0.3382 | 0.1914 | 0.0235 | 0.0067 | 0.0019 | 0.0003 |
| 2.40 | 0.9836 | 0.9675 | 0.9516 | 0.9360 | 0.9207 | 0.8476 | 0.7185 | 0.6090 | 0.5162 | 0.4375 | 0.2866 | 0.0821 | 0.0235 | 0.0062 | 0.0092 |
| 2.50 | 0.9876 | 0.9753 | 0.9632 | 0.9512 | 0.9394 | 0.8825 | 0.7788 | 0.6873 | 0.6066 | 0.5353 | 0.3919 | 0.1536 | 0.0602 | 0.0236 | 0.0308 |
| 2.60 | 0.9907 | 0.9814 | 0.9723 | 0.9632 | 0.9542 | 0.9106 | 0.8292 | 0.7550 | 0.6875 | 0.6260 | 0.5919 | 0.4966 | 0.2486 | 0.1240 | 0.0772 |
| 2.70 | 0.9931 | 0.9862 | 0.9793 | 0.9725 | 0.9658 | 0.9328 | 0.8701 | 0.8116 | 0.7570 | 0.7062 | 0.6680 | 0.5889 | 0.4589 | 0.2150 | 0.1288 |
| 2.80 | 0.9949 | 0.9898 | 0.9847 | 0.9797 | 0.9747 | 0.9501 | 0.9026 | 0.8575 | 0.8147 | 0.7740 | 0.7351 | 0.6788 | 0.5592 | 0.4607 | 0.3796 |
| 2.90 | 0.9963 | 0.9925 | 0.9888 | 0.9852 | 0.9815 | 0.9633 | 0.9279 | 0.8939 | 0.8611 | 0.8295 | 0.7977 | 0.7595 | 0.6619 | 0.5768 | 0.5027 |
| 3.00 | 0.9973 | 0.9946 | 0.9919 | 0.9892 | 0.9866 | 0.9733 | 0.9474 | 0.9221 | 0.8975 | 0.8735 | 0.8443 | 0.8099 | 0.7480 | 0.6790 | 0.6164 |
| 3.10 | 0.9981 | 0.9961 | 0.9942 | 0.9923 | 0.9904 | 0.9808 | 0.9620 | 0.9435 | 0.9254 | 0.9077 | 0.8829 | 0.8529 | 0.8168 | 0.7636 | 0.7138 |
| 3.20 | 0.9986 | 0.9973 | 0.9959 | 0.9945 | 0.9931 | 0.9863 | 0.9729 | 0.9596 | 0.9465 | 0.9335 | 0.9208 | 0.9078 | 0.8945 | 0.8804 | 0.8528 |
| 3.30 | 0.9990 | 0.9981 | 0.9971 | 0.9961 | 0.9952 | 0.9904 | 0.9808 | 0.9714 | 0.9620 | 0.9528 | 0.9443 | 0.9373 | 0.9301 | 0.9175 | 0.8977 |
| 3.40 | 0.9993 | 0.9987 | 0.9980 | 0.9973 | 0.9966 | 0.9933 | 0.9866 | 0.9800 | 0.9734 | 0.9668 | 0.9611 | 0.9548 | 0.9481 | 0.9437 | 0.9301 |
| 3.50 | 0.9995 | 0.9991 | 0.9986 | 0.9981 | 0.9977 | 0.9954 | 0.9907 | 0.9861 | 0.9815 | 0.9770 | 0.9745 | 0.9715 | 0.9686 | 0.9667 | 0.9530 |
| 3.60 | 0.9997 | 0.9994 | 0.9990 | 0.9987 | 0.9984 | 0.9968 | 0.9936 | 0.9905 | 0.9873 | 0.9842 | 0.9829 | 0.9809 | 0.9784 | 0.9773 | 0.9688 |
| 3.70 | 0.9998 | 0.9996 | 0.9994 | 0.9991 | 0.9989 | 0.9978 | 0.9957 | 0.9935 | 0.9914 | 0.9893 | 0.9886 | 0.9878 | 0.9871 | 0.9869 | 0.9822 |
| 3.80 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9994 | 0.9993 | 0.9986 | 0.9971 | 0.9957 | 0.9942 | 0.9928 | 0.9928 | 0.9928 | 0.9928 | 0.9928 | 0.9928 |
| 3.90 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9995 | 0.9990 | 0.9981 | 0.9971 | 0.9962 | 0.9952 | 0.9948 | 0.9948 | 0.9948 | 0.9948 | 0.9948 |
| 4.00 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9992 | 0.9988 | 0.9983 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9979 |
| 4.10 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9992 | 0.9989 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 |
| 4.20 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 4.30 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 |
| 4.40 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 |
| 4.50 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 |
| 4.60 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 4.70 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 4.80 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.90 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 5.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |



NWAX(Z)



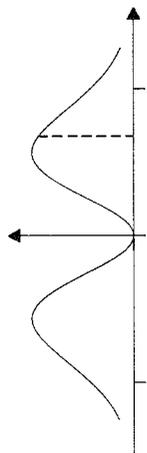
| Z/F | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.00 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.10 | 0.5398 | 0.5032 | 0.5003 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.20 | 0.5793 | 0.5126 | 0.5066 | 0.5015 | 0.5004 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.30 | 0.6179 | 0.5278 | 0.5150 | 0.5047 | 0.5015 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.40 | 0.6554 | 0.5483 | 0.5150 | 0.5047 | 0.5015 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.50 | 0.6915 | 0.5733 | 0.5281 | 0.5108 | 0.5041 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.60 | 0.7257 | 0.6019 | 0.5460 | 0.5208 | 0.5094 | 0.5002 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.70 | 0.7580 | 0.6332 | 0.5687 | 0.5355 | 0.5183 | 0.5007 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.80 | 0.7881 | 0.6661 | 0.5957 | 0.5518 | 0.5318 | 0.5020 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 0.90 | 0.8159 | 0.6996 | 0.6261 | 0.5797 | 0.5504 | 0.5051 | 0.5001 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.00 | 0.8413 | 0.7330 | 0.6591 | 0.6086 | 0.5741 | 0.5110 | 0.5002 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.10 | 0.8643 | 0.7655 | 0.6934 | 0.6410 | 0.6027 | 0.5211 | 0.5009 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.20 | 0.8849 | 0.7963 | 0.7281 | 0.6756 | 0.6352 | 0.5366 | 0.5027 | 0.5002 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.30 | 0.9032 | 0.8251 | 0.7622 | 0.7114 | 0.6705 | 0.5581 | 0.5068 | 0.5008 | 0.5001 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.40 | 0.9192 | 0.8515 | 0.7948 | 0.7471 | 0.7072 | 0.5859 | 0.5148 | 0.5025 | 0.5004 | 0.5001 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.50 | 0.9332 | 0.8753 | 0.8252 | 0.7817 | 0.7441 | 0.6191 | 0.5284 | 0.5068 | 0.5016 | 0.5004 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.60 | 0.9452 | 0.8964 | 0.8530 | 0.8143 | 0.7798 | 0.6566 | 0.5491 | 0.5154 | 0.5048 | 0.5015 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.70 | 0.9554 | 0.9148 | 0.8779 | 0.8442 | 0.8135 | 0.6966 | 0.5773 | 0.5304 | 0.5119 | 0.5047 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.80 | 0.9641 | 0.9307 | 0.8998 | 0.8710 | 0.8444 | 0.7372 | 0.6125 | 0.5534 | 0.5253 | 0.5120 | 0.5003 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 1.90 | 0.9713 | 0.9442 | 0.9187 | 0.8947 | 0.8720 | 0.7768 | 0.6532 | 0.5848 | 0.5469 | 0.5260 | 0.5013 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 2.00 | 0.9772 | 0.9555 | 0.9348 | 0.9150 | 0.8961 | 0.8139 | 0.6970 | 0.6237 | 0.5776 | 0.5487 | 0.5047 | 0.5003 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 2.10 | 0.9821 | 0.9649 | 0.9483 | 0.9323 | 0.9168 | 0.8475 | 0.7415 | 0.6679 | 0.6167 | 0.5811 | 0.5131 | 0.5003 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| 2.20 | 0.9861 | 0.9726 | 0.9594 | 0.9467 | 0.9342 | 0.8771 | 0.7845 | 0.7146 | 0.6618 | 0.6221 | 0.5298 | 0.5018 | 0.5001 | 0.5000 | 0.5000 |
| 2.30 | 0.9893 | 0.9788 | 0.9685 | 0.9585 | 0.9486 | 0.9025 | 0.8241 | 0.7609 | 0.7100 | 0.6691 | 0.5572 | 0.5065 | 0.5007 | 0.5001 | 0.5000 |
| 2.40 | 0.9918 | 0.9837 | 0.9758 | 0.9680 | 0.9603 | 0.9238 | 0.8592 | 0.8045 | 0.7581 | 0.7188 | 0.5957 | 0.5183 | 0.5035 | 0.5007 | 0.5001 |
| 2.50 | 0.9938 | 0.9877 | 0.9816 | 0.9756 | 0.9697 | 0.9413 | 0.8894 | 0.8437 | 0.8033 | 0.7677 | 0.6433 | 0.5411 | 0.5118 | 0.5034 | 0.5010 |
| 2.60 | 0.9953 | 0.9907 | 0.9861 | 0.9816 | 0.9771 | 0.9553 | 0.9146 | 0.8775 | 0.8438 | 0.8130 | 0.6960 | 0.5768 | 0.5301 | 0.5118 | 0.5046 |
| 2.70 | 0.9965 | 0.9931 | 0.9897 | 0.9863 | 0.9829 | 0.9664 | 0.9350 | 0.9058 | 0.8785 | 0.8531 | 0.7493 | 0.6243 | 0.5620 | 0.5309 | 0.5154 |
| 2.80 | 0.9974 | 0.9949 | 0.9924 | 0.9899 | 0.9874 | 0.9750 | 0.9513 | 0.9288 | 0.9073 | 0.8870 | 0.7995 | 0.6794 | 0.6075 | 0.5644 | 0.5386 |
| 2.90 | 0.9981 | 0.9963 | 0.9944 | 0.9926 | 0.9907 | 0.9816 | 0.9640 | 0.9469 | 0.9305 | 0.9147 | 0.8440 | 0.7367 | 0.6629 | 0.6121 | 0.5771 |
| 3.00 | 0.9986 | 0.9973 | 0.9960 | 0.9946 | 0.9933 | 0.9867 | 0.9737 | 0.9610 | 0.9487 | 0.9368 | 0.8815 | 0.7911 | 0.7222 | 0.6695 | 0.6294 |
| 3.10 | 0.9990 | 0.9981 | 0.9971 | 0.9961 | 0.9952 | 0.9904 | 0.9810 | 0.9718 | 0.9627 | 0.9538 | 0.9119 | 0.8394 | 0.7796 | 0.7304 | 0.6898 |
| 3.20 | 0.9993 | 0.9986 | 0.9979 | 0.9973 | 0.9966 | 0.9932 | 0.9864 | 0.9798 | 0.9732 | 0.9668 | 0.9357 | 0.8797 | 0.8309 | 0.7884 | 0.7513 |
| 3.30 | 0.9995 | 0.9990 | 0.9986 | 0.9981 | 0.9976 | 0.9952 | 0.9904 | 0.9857 | 0.9810 | 0.9764 | 0.9539 | 0.9120 | 0.8740 | 0.8395 | 0.8082 |
| 3.40 | 0.9997 | 0.9993 | 0.9990 | 0.9987 | 0.9983 | 0.9966 | 0.9933 | 0.9900 | 0.9867 | 0.9834 | 0.9674 | 0.9369 | 0.9084 | 0.8818 | 0.8569 |
| 3.50 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9995 | 0.9991 | 0.9988 | 0.9977 | 0.9954 | 0.9931 | 0.9908 | 0.9885 | 0.9773 | 0.9555 | 0.9348 | 0.9150 | 0.8961 |
| 3.60 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9995 | 0.9994 | 0.9992 | 0.9984 | 0.9968 | 0.9952 | 0.9937 | 0.9921 | 0.9843 | 0.9691 | 0.9544 | 0.9402 | 0.9264 |
| 3.70 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9995 | 0.9989 | 0.9978 | 0.9968 | 0.9957 | 0.9946 | 0.9893 | 0.9789 | 0.9687 | 0.9586 | 0.9489 |
| 3.80 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9993 | 0.9986 | 0.9978 | 0.9971 | 0.9964 | 0.9928 | 0.9857 | 0.9787 | 0.9718 | 0.9651 |
| 3.90 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9994 | 0.9990 | 0.9987 | 0.9984 | 0.9968 | 0.9937 | 0.9906 | 0.9875 | 0.9844 |
| 4.00 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9996 | 0.9994 | 0.9992 | 0.9990 | 0.9979 | 0.9959 | 0.9938 | 0.9918 | 0.9898 |
| 4.10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9991 | 0.9973 | 0.9960 | 0.9947 | 0.9934 |
| 4.20 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9991 | 0.9973 | 0.9960 | 0.9947 | 0.9934 |
| 4.30 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9995 | 0.9975 | 0.9960 | 0.9947 | 0.9934 |
| 4.40 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9995 | 0.9975 | 0.9960 | 0.9947 | 0.9934 |
| 4.50 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9975 | 0.9960 | 0.9947 | 0.9934 |
| 4.60 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9975 | 0.9960 | 0.9947 | 0.9934 |
| 4.70 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9975 | 0.9960 | 0.9947 | 0.9934 |
| 4.80 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9975 | 0.9960 | 0.9934 |
| 4.90 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9975 | 0.9960 | 0.9934 |
| 5.00 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9975 | 0.9960 | 0.9934 |



MMAX(Z)

| Z/F | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.00 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.10 | 0.4602 | 0.4968 | 0.4997 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.20 | 0.4207 | 0.4874 | 0.4980 | 0.4997 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.30 | 0.3821 | 0.4722 | 0.4953 | 0.4996 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.40 | 0.3446 | 0.4517 | 0.4985 | 0.4953 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.50 | 0.3085 | 0.4267 | 0.4719 | 0.4892 | 0.4959 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.60 | 0.2743 | 0.3981 | 0.4540 | 0.4792 | 0.4906 | 0.4998 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.70 | 0.2420 | 0.3668 | 0.4313 | 0.4645 | 0.4817 | 0.4993 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.80 | 0.2119 | 0.3359 | 0.4045 | 0.4449 | 0.4682 | 0.4980 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -0.90 | 0.1841 | 0.3004 | 0.3759 | 0.4203 | 0.4496 | 0.4949 | 0.4999 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.00 | 0.1587 | 0.2670 | 0.3409 | 0.3914 | 0.4259 | 0.4890 | 0.4998 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.10 | 0.1357 | 0.2345 | 0.3066 | 0.3590 | 0.3973 | 0.4789 | 0.4991 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.20 | 0.1151 | 0.2037 | 0.2719 | 0.3244 | 0.3648 | 0.4634 | 0.4973 | 0.4998 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.30 | 0.0968 | 0.1749 | 0.2378 | 0.2886 | 0.3295 | 0.4419 | 0.4932 | 0.4992 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.40 | 0.0808 | 0.1485 | 0.2052 | 0.2529 | 0.2928 | 0.4141 | 0.4852 | 0.4975 | 0.4996 | 0.4999 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.50 | 0.0668 | 0.1247 | 0.1748 | 0.2183 | 0.2559 | 0.3809 | 0.4716 | 0.4932 | 0.4984 | 0.4996 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.60 | 0.0548 | 0.1036 | 0.1470 | 0.1857 | 0.2202 | 0.3434 | 0.4509 | 0.4846 | 0.4952 | 0.4985 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.70 | 0.0446 | 0.0852 | 0.1221 | 0.1558 | 0.1865 | 0.3034 | 0.4227 | 0.4696 | 0.4881 | 0.4953 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.80 | 0.0359 | 0.0693 | 0.1002 | 0.1290 | 0.1556 | 0.2628 | 0.3875 | 0.4466 | 0.4747 | 0.4880 | 0.4997 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -1.90 | 0.0287 | 0.0558 | 0.0813 | 0.1053 | 0.1280 | 0.2232 | 0.3468 | 0.4152 | 0.4531 | 0.4740 | 0.4977 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -2.00 | 0.0228 | 0.0445 | 0.0652 | 0.0850 | 0.1039 | 0.1861 | 0.3030 | 0.3763 | 0.4224 | 0.4513 | 0.4953 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -2.10 | 0.0179 | 0.0351 | 0.0517 | 0.0677 | 0.0832 | 0.1525 | 0.2585 | 0.3321 | 0.3833 | 0.4189 | 0.4869 | 0.4997 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |
| -2.20 | 0.0139 | 0.0274 | 0.0406 | 0.0533 | 0.0658 | 0.1229 | 0.2155 | 0.2854 | 0.3382 | 0.3779 | 0.4702 | 0.4982 | 0.4999 | 0.5000 | 0.5000 |
| -2.30 | 0.0107 | 0.0212 | 0.0315 | 0.0415 | 0.0514 | 0.0975 | 0.1759 | 0.2391 | 0.2900 | 0.3309 | 0.4428 | 0.4955 | 0.4993 | 0.4999 | 0.5000 |
| -2.40 | 0.0082 | 0.0163 | 0.0242 | 0.0320 | 0.0397 | 0.0762 | 0.1408 | 0.1955 | 0.2419 | 0.2812 | 0.4043 | 0.4817 | 0.4965 | 0.4993 | 0.4999 |
| -2.50 | 0.0062 | 0.0123 | 0.0184 | 0.0244 | 0.0303 | 0.0587 | 0.1106 | 0.1563 | 0.1967 | 0.2323 | 0.3567 | 0.4589 | 0.4882 | 0.4966 | 0.4990 |
| -2.60 | 0.0047 | 0.0093 | 0.0139 | 0.0184 | 0.0229 | 0.0447 | 0.0854 | 0.1225 | 0.1562 | 0.1870 | 0.3040 | 0.4232 | 0.4699 | 0.4882 | 0.4994 |
| -2.70 | 0.0035 | 0.0069 | 0.0103 | 0.0137 | 0.0171 | 0.0336 | 0.0650 | 0.0942 | 0.1215 | 0.1469 | 0.2507 | 0.3757 | 0.4380 | 0.4691 | 0.4846 |
| -2.80 | 0.0026 | 0.0051 | 0.0076 | 0.0101 | 0.0126 | 0.0250 | 0.0487 | 0.0712 | 0.0927 | 0.1130 | 0.2005 | 0.3206 | 0.3925 | 0.4356 | 0.4614 |
| -2.90 | 0.0019 | 0.0037 | 0.0056 | 0.0074 | 0.0093 | 0.0184 | 0.0366 | 0.0531 | 0.0695 | 0.0853 | 0.1560 | 0.2633 | 0.3371 | 0.3879 | 0.4229 |
| -3.00 | 0.0014 | 0.0027 | 0.0040 | 0.0054 | 0.0067 | 0.0133 | 0.0263 | 0.0390 | 0.0513 | 0.0632 | 0.1185 | 0.2089 | 0.2778 | 0.3305 | 0.3706 |
| -3.10 | 0.0010 | 0.0019 | 0.0029 | 0.0039 | 0.0048 | 0.0096 | 0.0190 | 0.0282 | 0.0373 | 0.0462 | 0.0862 | 0.1606 | 0.2204 | 0.2696 | 0.3102 |
| -3.20 | 0.0007 | 0.0014 | 0.0021 | 0.0027 | 0.0034 | 0.0068 | 0.0136 | 0.0202 | 0.0268 | 0.0332 | 0.0643 | 0.1203 | 0.1691 | 0.2116 | 0.2487 |
| -3.30 | 0.0005 | 0.0010 | 0.0014 | 0.0019 | 0.0024 | 0.0048 | 0.0096 | 0.0143 | 0.0190 | 0.0236 | 0.0461 | 0.0880 | 0.1260 | 0.1605 | 0.1918 |
| -3.40 | 0.0003 | 0.0007 | 0.0010 | 0.0013 | 0.0017 | 0.0034 | 0.0067 | 0.0100 | 0.0133 | 0.0166 | 0.0326 | 0.0631 | 0.0916 | 0.1182 | 0.1431 |
| -3.50 | 0.0002 | 0.0005 | 0.0007 | 0.0009 | 0.0012 | 0.0023 | 0.0046 | 0.0069 | 0.0092 | 0.0115 | 0.0227 | 0.0445 | 0.0652 | 0.0850 | 0.1039 |
| -3.60 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 | 0.0006 | 0.0008 | 0.0016 | 0.0032 | 0.0048 | 0.0063 | 0.0079 | 0.0157 | 0.0309 | 0.0456 | 0.0598 | 0.0736 |
| -3.70 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0011 | 0.0022 | 0.0032 | 0.0043 | 0.0054 | 0.0107 | 0.0211 | 0.0313 | 0.0414 | 0.0511 |
| -3.80 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0007 | 0.0014 | 0.0022 | 0.0029 | 0.0036 | 0.0072 | 0.0143 | 0.0213 | 0.0282 | 0.0349 |
| -3.90 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 | 0.0010 | 0.0014 | 0.0019 | 0.0024 | 0.0048 | 0.0095 | 0.0142 | 0.0189 | 0.0235 |
| -4.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0006 | 0.0010 | 0.0013 | 0.0016 | 0.0032 | 0.0063 | 0.0094 | 0.0125 | 0.0156 |
| -4.10 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0004 | 0.0006 | 0.0008 | 0.0010 | 0.0021 | 0.0041 | 0.0062 | 0.0082 | 0.0102 |
| -4.20 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0007 | 0.0013 | 0.0027 | 0.0040 | 0.0053 |
| -4.30 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0009 | 0.0017 | 0.0026 | 0.0034 | 0.0043 |
| -4.40 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 | 0.0011 | 0.0016 | 0.0022 | 0.0027 |
| -4.50 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0006 | 0.0008 | 0.0011 |
| -4.60 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0007 |
| -4.70 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 |
| -4.80 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 |
| -4.90 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0002 |
| -5.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |

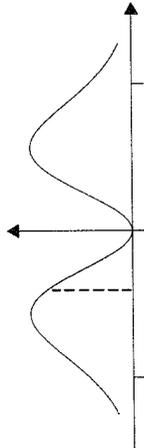
WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE $dN_{MAX}(z) / dz$



| Z/F | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.00 | 0.3989 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.10 | 0.3970 | 0.0632 | 0.0076 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.20 | 0.3910 | 0.1240 | 0.0295 | 0.0062 | 0.0012 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.30 | 0.3814 | 0.1799 | 0.0636 | 0.0200 | 0.0059 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.40 | 0.3683 | 0.2289 | 0.1068 | 0.0442 | 0.0172 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.50 | 0.3521 | 0.2696 | 0.1549 | 0.0791 | 0.0378 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.60 | 0.3332 | 0.3009 | 0.2038 | 0.1227 | 0.0692 | 0.0026 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.70 | 0.3123 | 0.3223 | 0.2495 | 0.1717 | 0.1107 | 0.0081 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.80 | 0.2897 | 0.3339 | 0.2886 | 0.2218 | 0.1598 | 0.0203 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.90 | 0.2661 | 0.3363 | 0.3187 | 0.2685 | 0.2121 | 0.0427 | 0.0009 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.00 | 0.2420 | 0.3304 | 0.3383 | 0.3080 | 0.2628 | 0.0779 | 0.0034 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.10 | 0.2179 | 0.3175 | 0.3470 | 0.3371 | 0.3071 | 0.1262 | 0.0106 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.20 | 0.1942 | 0.2990 | 0.3453 | 0.3544 | 0.3411 | 0.1845 | 0.0270 | 0.0030 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.30 | 0.1714 | 0.2764 | 0.3343 | 0.3595 | 0.3623 | 0.2471 | 0.0575 | 0.0100 | 0.0016 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.40 | 0.1497 | 0.2511 | 0.3158 | 0.3531 | 0.3700 | 0.3067 | 0.1054 | 0.0272 | 0.0062 | 0.0013 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.50 | 0.1295 | 0.2244 | 0.2917 | 0.3369 | 0.3649 | 0.3562 | 0.1698 | 0.0607 | 0.0193 | 0.0057 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.60 | 0.1109 | 0.1975 | 0.2638 | 0.3132 | 0.3486 | 0.3902 | 0.2444 | 0.1148 | 0.0480 | 0.0188 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.70 | 0.0940 | 0.1713 | 0.2341 | 0.2843 | 0.3237 | 0.4059 | 0.3192 | 0.1882 | 0.0987 | 0.0485 | 0.0009 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.80 | 0.0790 | 0.1466 | 0.2040 | 0.2525 | 0.2929 | 0.4035 | 0.3829 | 0.2724 | 0.1723 | 0.1022 | 0.0049 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1.90 | 0.0656 | 0.1237 | 0.1749 | 0.2198 | 0.2590 | 0.3853 | 0.4265 | 0.3541 | 0.2614 | 0.1808 | 0.0188 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2.00 | 0.0540 | 0.1031 | 0.1476 | 0.1878 | 0.2241 | 0.3551 | 0.4457 | 0.4197 | 0.3513 | 0.2756 | 0.0537 | 0.0010 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2.10 | 0.0440 | 0.0848 | 0.1227 | 0.1577 | 0.1901 | 0.3170 | 0.4407 | 0.4594 | 0.4257 | 0.3698 | 0.1200 | 0.0063 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2.20 | 0.0355 | 0.0690 | 0.1006 | 0.1304 | 0.1585 | 0.2752 | 0.4152 | 0.4697 | 0.4724 | 0.4454 | 0.2175 | 0.0259 | 0.0023 | 0.0002 | 0.0000 |
| 2.30 | 0.0283 | 0.0554 | 0.0814 | 0.1062 | 0.1299 | 0.2331 | 0.3753 | 0.4532 | 0.4864 | 0.4895 | 0.3311 | 0.0758 | 0.0130 | 0.0020 | 0.0003 |
| 2.40 | 0.0224 | 0.0441 | 0.0650 | 0.0852 | 0.1048 | 0.1930 | 0.3272 | 0.4160 | 0.4701 | 0.4981 | 0.4359 | 0.0479 | 0.0122 | 0.0029 | 0.0003 |
| 2.50 | 0.0175 | 0.0346 | 0.0513 | 0.0675 | 0.0834 | 0.1566 | 0.2765 | 0.3660 | 0.4306 | 0.4751 | 0.5086 | 0.2915 | 0.1253 | 0.0479 | 0.0172 |
| 2.60 | 0.0136 | 0.0269 | 0.0400 | 0.0528 | 0.0654 | 0.1248 | 0.2274 | 0.3106 | 0.3771 | 0.4292 | 0.5374 | 0.4212 | 0.2476 | 0.1294 | 0.0634 |
| 2.70 | 0.0104 | 0.0207 | 0.0308 | 0.0408 | 0.0507 | 0.0979 | 0.1826 | 0.2555 | 0.3178 | 0.3705 | 0.5233 | 0.5219 | 0.3903 | 0.2595 | 0.1618 |
| 2.80 | 0.0079 | 0.0157 | 0.0235 | 0.0312 | 0.0388 | 0.0756 | 0.1436 | 0.2047 | 0.2593 | 0.3079 | 0.4766 | 0.5711 | 0.5132 | 0.4099 | 0.3069 |
| 2.90 | 0.0060 | 0.0119 | 0.0177 | 0.0235 | 0.0293 | 0.0576 | 0.1109 | 0.1602 | 0.2058 | 0.2478 | 0.4111 | 0.5657 | 0.5838 | 0.5356 | 0.4606 |
| 3.00 | 0.0044 | 0.0088 | 0.0132 | 0.0176 | 0.0219 | 0.0433 | 0.0842 | 0.1229 | 0.1595 | 0.1941 | 0.3391 | 0.5175 | 0.5924 | 0.6027 | 0.5749 |
| 3.10 | 0.0033 | 0.0065 | 0.0098 | 0.0130 | 0.0162 | 0.0321 | 0.0630 | 0.0926 | 0.1212 | 0.1485 | 0.2697 | 0.4443 | 0.5491 | 0.6032 | 0.6212 |
| 3.20 | 0.0024 | 0.0048 | 0.0071 | 0.0095 | 0.0119 | 0.0235 | 0.0465 | 0.0687 | 0.0904 | 0.1114 | 0.2081 | 0.3626 | 0.4740 | 0.5508 | 0.6000 |
| 3.30 | 0.0017 | 0.0034 | 0.0052 | 0.0069 | 0.0086 | 0.0171 | 0.0338 | 0.0502 | 0.0664 | 0.0821 | 0.1565 | 0.2842 | 0.3869 | 0.4683 | 0.5314 |
| 3.40 | 0.0012 | 0.0025 | 0.0037 | 0.0049 | 0.0061 | 0.0122 | 0.0243 | 0.0363 | 0.0480 | 0.0596 | 0.1153 | 0.2155 | 0.3022 | 0.3766 | 0.4401 |
| 3.50 | 0.0009 | 0.0017 | 0.0026 | 0.0035 | 0.0044 | 0.0087 | 0.0173 | 0.0258 | 0.0343 | 0.0426 | 0.0833 | 0.1591 | 0.2278 | 0.2899 | 0.3459 |
| 3.60 | 0.0006 | 0.0012 | 0.0018 | 0.0024 | 0.0031 | 0.0061 | 0.0122 | 0.0182 | 0.0242 | 0.0301 | 0.0593 | 0.1149 | 0.1669 | 0.2155 | 0.2610 |
| 3.70 | 0.0004 | 0.0008 | 0.0013 | 0.0017 | 0.0021 | 0.0042 | 0.0085 | 0.0127 | 0.0168 | 0.0210 | 0.0416 | 0.0814 | 0.1195 | 0.1559 | 0.1907 |
| 3.80 | 0.0003 | 0.0006 | 0.0009 | 0.0012 | 0.0015 | 0.0029 | 0.0058 | 0.0087 | 0.0116 | 0.0145 | 0.0288 | 0.0567 | 0.0839 | 0.1102 | 0.1358 |
| 3.90 | 0.0002 | 0.0004 | 0.0006 | 0.0008 | 0.0010 | 0.0020 | 0.0040 | 0.0059 | 0.0079 | 0.0099 | 0.0197 | 0.0390 | 0.0579 | 0.0765 | 0.0947 |
| 4.00 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0007 | 0.0013 | 0.0027 | 0.0040 | 0.0053 | 0.0067 | 0.0133 | 0.0264 | 0.0394 | 0.0522 | 0.0648 |
| 4.10 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0009 | 0.0018 | 0.0027 | 0.0036 | 0.0045 | 0.0089 | 0.0177 | 0.0264 | 0.0351 | 0.0437 |
| 4.20 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0006 | 0.0012 | 0.0018 | 0.0024 | 0.0029 | 0.0059 | 0.0117 | 0.0175 | 0.0233 | 0.0291 |
| 4.30 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0004 | 0.0008 | 0.0012 | 0.0015 | 0.0018 | 0.0038 | 0.0077 | 0.0115 | 0.0153 | 0.0191 |
| 4.40 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0005 | 0.0007 | 0.0010 | 0.0012 | 0.0025 | 0.0050 | 0.0075 | 0.0099 | 0.0124 |
| 4.50 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 | 0.0006 | 0.0008 | 0.0016 | 0.0032 | 0.0048 | 0.0064 | 0.0080 |
| 4.60 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0010 | 0.0020 | 0.0030 | 0.0040 | 0.0051 |
| 4.70 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0006 | 0.0013 | 0.0019 | 0.0025 | 0.0032 |
| 4.80 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0004 | 0.0008 | 0.0012 | 0.0016 | 0.0020 |
| 4.90 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0005 | 0.0007 | 0.0010 | 0.0012 |
| 5.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0007 |

WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE $dN_{MAX}(z) / dz$

| Z/F | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.00 | 0.3989 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.10 | 0.3970 | 0.0632 | 0.0076 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.20 | 0.3910 | 0.1240 | 0.0295 | 0.0062 | 0.0012 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.30 | 0.3814 | 0.1799 | 0.0636 | 0.0200 | 0.0059 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.40 | 0.3683 | 0.2289 | 0.1068 | 0.0442 | 0.0172 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.50 | 0.3521 | 0.2696 | 0.1549 | 0.0791 | 0.0378 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.60 | 0.3332 | 0.3009 | 0.2038 | 0.1227 | 0.0692 | 0.0026 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.70 | 0.3123 | 0.3223 | 0.2495 | 0.1717 | 0.1107 | 0.0081 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.80 | 0.2897 | 0.3339 | 0.2886 | 0.2218 | 0.1598 | 0.0203 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.90 | 0.2661 | 0.3363 | 0.3187 | 0.2685 | 0.2121 | 0.0427 | 0.0009 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.00 | 0.2420 | 0.3304 | 0.3383 | 0.3080 | 0.2628 | 0.0779 | 0.0034 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.10 | 0.2179 | 0.3175 | 0.3470 | 0.3371 | 0.3071 | 0.1262 | 0.0106 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.20 | 0.1942 | 0.2990 | 0.3453 | 0.3544 | 0.3411 | 0.1845 | 0.0270 | 0.0030 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.30 | 0.1714 | 0.2764 | 0.3343 | 0.3595 | 0.3623 | 0.2471 | 0.0575 | 0.0100 | 0.0016 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.40 | 0.1497 | 0.2511 | 0.3158 | 0.3531 | 0.3700 | 0.3067 | 0.1054 | 0.0272 | 0.0062 | 0.0013 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.50 | 0.1295 | 0.2244 | 0.2917 | 0.3369 | 0.3649 | 0.3562 | 0.1698 | 0.0607 | 0.0193 | 0.0057 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.60 | 0.1109 | 0.1975 | 0.2638 | 0.3132 | 0.3486 | 0.3902 | 0.2444 | 0.1148 | 0.0480 | 0.0188 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.70 | 0.0940 | 0.1713 | 0.2341 | 0.2843 | 0.3237 | 0.4059 | 0.3192 | 0.1882 | 0.0987 | 0.0485 | 0.0009 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.80 | 0.0790 | 0.1466 | 0.2040 | 0.2525 | 0.2929 | 0.4335 | 0.3829 | 0.2724 | 0.1723 | 0.1022 | 0.0049 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -1.90 | 0.0656 | 0.1237 | 0.1749 | 0.2198 | 0.2590 | 0.3853 | 0.4265 | 0.3541 | 0.2614 | 0.1808 | 0.0188 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -2.00 | 0.0540 | 0.1031 | 0.1476 | 0.1878 | 0.2241 | 0.3551 | 0.4407 | 0.4197 | 0.3513 | 0.2756 | 0.0537 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -2.10 | 0.0440 | 0.0848 | 0.1227 | 0.1577 | 0.1901 | 0.3170 | 0.4407 | 0.4594 | 0.4724 | 0.4454 | 0.2175 | 0.0259 | 0.0023 | 0.0002 | 0.0000 |
| -2.20 | 0.0355 | 0.0690 | 0.1006 | 0.1304 | 0.1585 | 0.2752 | 0.4152 | 0.4697 | 0.4724 | 0.4454 | 0.3311 | 0.0758 | 0.0130 | 0.0020 | 0.0003 |
| -2.30 | 0.0283 | 0.0554 | 0.0814 | 0.1062 | 0.1299 | 0.2331 | 0.3753 | 0.4532 | 0.4864 | 0.4895 | 0.4759 | 0.1669 | 0.0479 | 0.0122 | 0.0029 |
| -2.40 | 0.0224 | 0.0441 | 0.0650 | 0.0852 | 0.1048 | 0.1930 | 0.3272 | 0.4160 | 0.4701 | 0.4981 | 0.4359 | 0.2175 | 0.1253 | 0.0479 | 0.0172 |
| -2.50 | 0.0175 | 0.0346 | 0.0513 | 0.0675 | 0.0834 | 0.1566 | 0.2765 | 0.3660 | 0.4306 | 0.4751 | 0.4292 | 0.5374 | 0.4212 | 0.2476 | 0.1294 |
| -2.60 | 0.0136 | 0.0269 | 0.0400 | 0.0528 | 0.0654 | 0.1248 | 0.2274 | 0.3106 | 0.3771 | 0.4292 | 0.4292 | 0.5374 | 0.4212 | 0.2476 | 0.1294 |
| -2.70 | 0.0104 | 0.0207 | 0.0308 | 0.0408 | 0.0507 | 0.0979 | 0.1826 | 0.2555 | 0.3178 | 0.3705 | 0.3705 | 0.5233 | 0.2595 | 0.1618 | 0.1618 |
| -2.80 | 0.0079 | 0.0157 | 0.0235 | 0.0312 | 0.0388 | 0.0756 | 0.1436 | 0.2047 | 0.2593 | 0.3079 | 0.4766 | 0.5711 | 0.5132 | 0.4099 | 0.3069 |
| -2.90 | 0.0060 | 0.0119 | 0.0177 | 0.0235 | 0.0293 | 0.0576 | 0.1109 | 0.1602 | 0.2058 | 0.2478 | 0.4111 | 0.5657 | 0.5838 | 0.5356 | 0.4606 |
| -3.00 | 0.0044 | 0.0088 | 0.0132 | 0.0176 | 0.0219 | 0.0433 | 0.0842 | 0.1229 | 0.1595 | 0.1941 | 0.3391 | 0.5175 | 0.5924 | 0.6027 | 0.5749 |
| -3.10 | 0.0033 | 0.0065 | 0.0098 | 0.0130 | 0.0162 | 0.0321 | 0.0630 | 0.0926 | 0.1212 | 0.1485 | 0.2697 | 0.4443 | 0.5491 | 0.6032 | 0.6212 |
| -3.20 | 0.0024 | 0.0048 | 0.0071 | 0.0095 | 0.0119 | 0.0235 | 0.0465 | 0.0687 | 0.0904 | 0.1114 | 0.2081 | 0.3626 | 0.4740 | 0.5508 | 0.6000 |
| -3.30 | 0.0017 | 0.0034 | 0.0052 | 0.0069 | 0.0086 | 0.0171 | 0.0338 | 0.0502 | 0.0664 | 0.0821 | 0.1565 | 0.2842 | 0.3869 | 0.4683 | 0.5314 |
| -3.40 | 0.0012 | 0.0025 | 0.0037 | 0.0049 | 0.0061 | 0.0122 | 0.0243 | 0.0363 | 0.0480 | 0.0596 | 0.1153 | 0.2155 | 0.3022 | 0.3766 | 0.4401 |
| -3.50 | 0.0009 | 0.0017 | 0.0026 | 0.0035 | 0.0044 | 0.0087 | 0.0173 | 0.0258 | 0.0343 | 0.0426 | 0.0833 | 0.1591 | 0.2278 | 0.2899 | 0.3459 |
| -3.60 | 0.0006 | 0.0012 | 0.0018 | 0.0024 | 0.0031 | 0.0061 | 0.0122 | 0.0182 | 0.0242 | 0.0301 | 0.0593 | 0.1149 | 0.1669 | 0.2155 | 0.2610 |
| -3.70 | 0.0004 | 0.0008 | 0.0013 | 0.0017 | 0.0021 | 0.0042 | 0.0085 | 0.0127 | 0.0168 | 0.0210 | 0.0416 | 0.0814 | 0.1195 | 0.1559 | 0.1907 |
| -3.80 | 0.0003 | 0.0006 | 0.0009 | 0.0012 | 0.0015 | 0.0029 | 0.0058 | 0.0087 | 0.0116 | 0.0145 | 0.0288 | 0.0567 | 0.0839 | 0.1102 | 0.1358 |
| -3.90 | 0.0002 | 0.0004 | 0.0006 | 0.0008 | 0.0010 | 0.0020 | 0.0040 | 0.0059 | 0.0079 | 0.0099 | 0.0197 | 0.0390 | 0.0579 | 0.0765 | 0.0947 |
| -4.00 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0007 | 0.0013 | 0.0027 | 0.0040 | 0.0053 | 0.0067 | 0.0133 | 0.0264 | 0.0394 | 0.0522 | 0.0648 |
| -4.10 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0009 | 0.0018 | 0.0027 | 0.0036 | 0.0045 | 0.0089 | 0.0177 | 0.0264 | 0.0351 | 0.0437 |
| -4.20 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0006 | 0.0012 | 0.0018 | 0.0024 | 0.0029 | 0.0059 | 0.0117 | 0.0175 | 0.0233 | 0.0291 |
| -4.30 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0008 | 0.0012 | 0.0015 | 0.0019 | 0.0038 | 0.0077 | 0.0115 | 0.0153 | 0.0191 |
| -4.40 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0005 | 0.0007 | 0.0010 | 0.0012 | 0.0025 | 0.0048 | 0.0075 | 0.0099 | 0.0124 |
| -4.50 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0005 | 0.0006 | 0.0008 | 0.0016 | 0.0032 | 0.0048 | 0.0064 | 0.0080 |
| -4.60 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0010 | 0.0020 | 0.0030 | 0.0040 | 0.0051 |
| -4.70 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0006 | 0.0013 | 0.0019 | 0.0025 | 0.0032 |
| -4.80 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0004 | 0.0008 | 0.0012 | 0.0016 | 0.0020 |
| -4.90 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0005 | 0.0010 | 0.0012 |
| -5.00 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0003 | 0.0006 | 0.0007 |



13.3 Rechenbeispiele

Die folgenden Berechnungen zeigen, wie der NMAX-Test durchgeführt werden kann. Besonders wichtig ist dabei der Vergleich mit dem bekannten F-Test, wobei die verschiedenen Empfindlichkeits-eigenschaften ersichtlich werden.

13.3.1 Das einfache Dreieck

Der Fall ist trivial, da nur eine Testgrösse s existiert, sodass der eindimensionale und der globale Test zusammenfallen. Ein numerisches Beispiel ist daher bereits im Kapitel 12.7.1 gezeigt und wird hier nicht wiederholt. Auch der F-Test ist funktional identisch, da $\hat{\sigma}$ und s übereinstimmen.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[pvv]}{1}} = \frac{1}{\sigma_w} \cdot \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_w} v$$

$$s = \frac{1}{\sigma_w} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} v_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} v_3 \right) = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_w} v$$

da $\sigma = 1$ gewählt wurde und $v_1 = v_2 = v_3 = v$ sind.

13.3.2 Das mehrfache Dreiecksnetz

Das gleiche Netz mit drei Dreiecken wie in 12.7.2 kann untersucht werden. Für das berechnete Beispiel ist

$$s_{\max} (= s_1) = -1.15 .$$

Da die Verteilung der dazugehörigen Testvariablen s_{\max} bekannt ist, kann die erhaltene Realisierung als Prüfgrösse eingesetzt werden. Der Test mit der NMAX-Verteilung für die Wahrscheinlichkeitsschranke $\alpha = 5 \%$ führt zur Annahme des Modells im globalen Test. Der Annahmehereich ist $(-2.4, +2.4)$.

Der F-Test führt mit $F = 0.67$ ebenfalls zur Annahme des Modells, da aus der F-Verteilung die Annahmeschranke für $F_{3,\infty}$ für $\alpha = 5\%$ bei $F_{GR} = 2.6$ liegt.

Falls im Netz eine Beobachtung des ersten Dreiecks um 25^{cc} verfälscht wird, erhält man $v_1 = v_2 = v_3 = 11.66$ und

$$\hat{\sigma} = 2.38$$

$$F = (\hat{\sigma} / \sigma)^2 = 5.66$$

$$s_{\max} = 4.04 .$$

Beide Testgrößen führen richtigerweise zur Verwerfung des Modells.

Wenn das Netz noch einmal erweitert wird, bis es 30 unabhängige Dreiecke umfasst (einfachheitshalber werden hier die gleichen Beobachtungen zehnmal wiederholt), ergibt diese Variante ohne grobe Fehler:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \sqrt{\frac{20}{90-60}} = 0.82$$

$$s_{\max} = -1.15 .$$

Falls eine Beobachtung im ersten Dreieck um 25^{cc} verfälscht wird, ist

$$[pvv]^* = 25.69$$

$$\sigma^{*2} = 0.86$$

$$\sigma^* = 0.93 .$$

Das Modell wird hier mit einem F-Test trotzdem angenommen. Hingegen führt der NMAX-Test zu

$$s_{\max} = 4.04 .$$

Das Modell wird eindeutig verworfen (Annahmebereich zwischen -3.15 und $+3.15$).

13.3.3 Das kombinierte Netz

Das kombinierte Netz des Kapitels 12.7.3 kann ebenfalls untersucht werden. In diesem Beispiel ist

$$s_{\max} = -2.87 .$$

Das Modell wird mit dem NMAX-Test (Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$) verworfen, da der Annahmebereich $(-2.68, +2.68)$ ist. Der F-Test hingegen hätte mit

$$F = 1.87$$

zur Annahme des Modells geführt, da die Verwerfungsschranke für die gleiche Wahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ bei 2.01 liegt. In diesem Fall ist eine Verwerfung erwünscht, da eine Messung absichtlich verfälscht wurde (siehe 12.7.3).

13.4 Wichtige Eigenschaften des Tests

Die Beispiele zeigen deutlich, dass mit zunehmender Netzgrösse die Empfindlichkeit des Tests nach der Hauptachsentransformation gegenüber derjenigen des F-Tests immer grösser wird. Der Grund dafür liegt in der Eigenart der Hauptkomponentenanalyse, die die lokalen geometrischen Eigenschaften besser berücksichtigen kann. Die einzelnen Komponenten des Testvektors sind in der Regel nur von wenigen Beobachtungen abhängig. Das bedeutet, dass sie sich auf bestimmte Netzteile beziehen und daher empfindlich reagieren, wenn im eigenen Bereich ein grober Fehler vorkommt.

13.5 Geometrische Bedeutung des NMAX-Tests

Für den Test wird der f -dimensionale Vektor S gebildet mit stochastisch unabhängigen Komponenten, die normalverteilt sind und alle Erwartungswert = 0 und Varianz = 1 aufweisen. Nach der Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit α wird die Signifikanzgrenze s_{GR} des Tests der Tabelle der NMAX-Verteilung entnommen.

Wenn

$$|s_i| \leq s_{GR} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, f$$

ist, wird das mathematische Modell angenommen. Wenn hingegen eine einzige Komponente

$$|s_j| > s_{GR}$$

ist, dann wird das Modell verworfen. Für den Fall eines Systems mit Freiheitsgrad 2 ($f = 2$), ist der Testvektor S zweidimensional und kann daher in einer Ebene dargestellt werden.

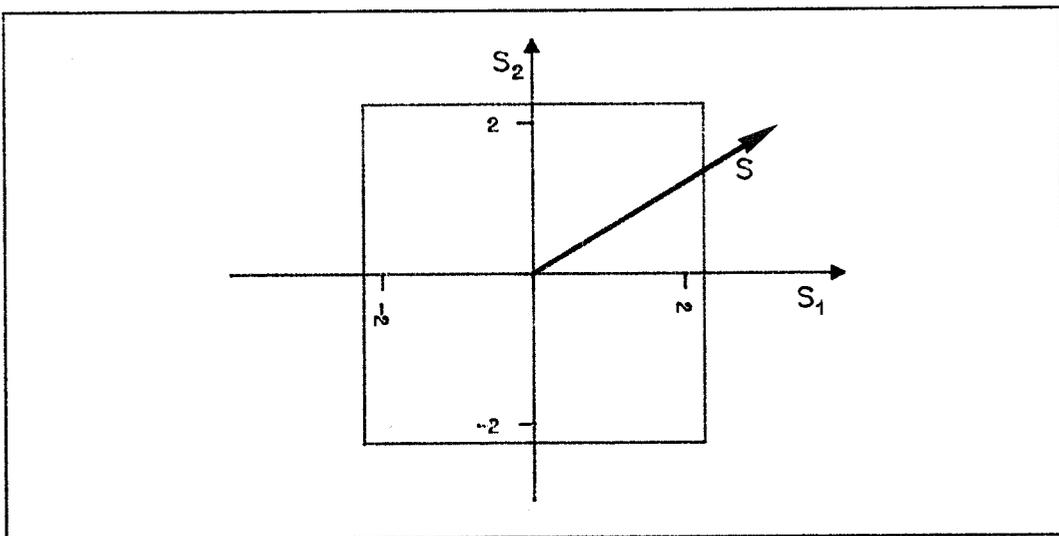


Abb. 13. Annahmehereich für den NMAX-Test.

Der Annahmehereich des Tests ist ein Quadrat mit Seitenlängen $2 s_{GR}$, sodass man den NMAX-Test geometrisch interpretieren kann: Wenn der Testvektor S innerhalb des Quadrats bleibt, wird das Modell angenommen.

Falls die Hypothesen des mathematischen Modells zutreffen, ist $(1-\alpha)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Quadrat den Testvektor enthält.

Eine ähnliche Ueberlegung kann ebenfalls für höhere Freiheitsgrade angestellt werden. Für $f = 3$ wird der Annahmebereich ein Würfel. Für noch grössere f hat man leider keine geometrische Vorstellung mehr; man spricht daher von Hyperwürfeln im f -dimensionalen Raum.

Selbstverständlich kann mit dem Testvektor S ebenfalls ein Chi-Quadrat-Test durchgeführt werden, indem die Grösse

$$x^2 = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_f^2$$

gebildet wird. Der Tabelle der Chi-Quadrat-Verteilung wird x_{GR}^2 für die Irrtumswahrscheinlichkeit α entnommen. Wenn dann

$$x^2 \leq x_{GR}^2, \text{ d.h.}$$

$$s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_f^2 \leq x_{GR}^2$$

ist, wird das Modell angenommen.

Der Fall mit $f = 2$ kann in der Ebene graphisch dargestellt werden. Den Annahmebereich bildet ein Kreis mit Radius x_{GR} , und wenn der Testvektor nicht vollständig im Kreis enthalten ist, wird das Modell mit dem Chi-Quadrat-Test verworfen.

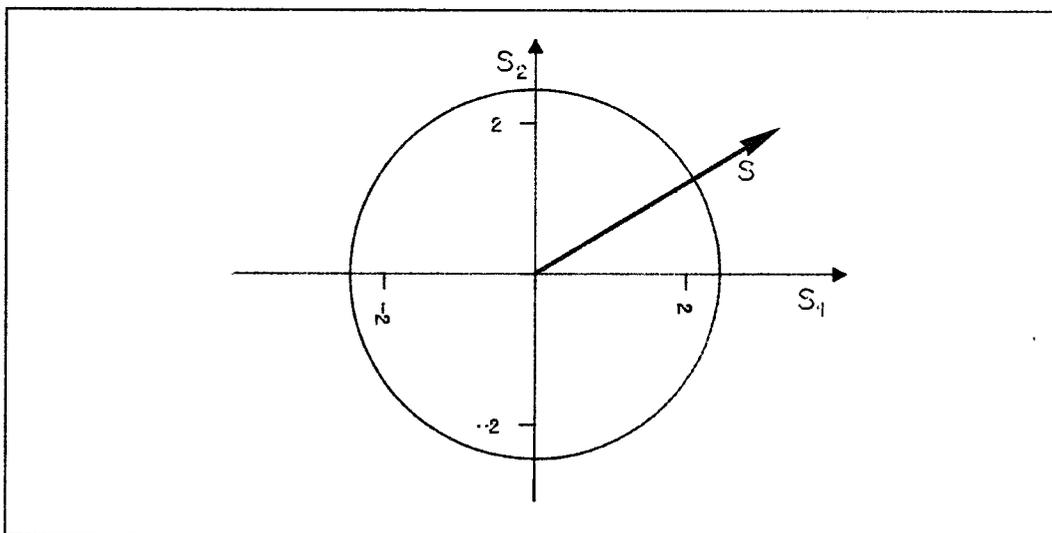


Abb. 14. Annahmebereich für den F-Test.

Im dreidimensionalen Fall ist der Annahmebereich eine Kugel, während man für höhere Freiheitsgrade dann von Hyperkugeln spricht.

Für ein zutreffendes Modell ist $(1 - \alpha)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Testvektor S innerhalb des Kreises, bzw. der Kugel oder Hyperkugel bleibt.

Zu bemerken ist, dass die Testgrösse $\sum s^2$ identisch mit der bekannten Grösse $[pvv]$ ist. Die geometrischen Darstellungen erlauben eine anschauliche Deutung der Unterschiede zwischen dem NMAX-Test und dem Chi-Quadrat-Test (oder F-Test).

Im zweidimensionalen Fall decken die Annahmebereiche beider Tests im wesentlichen dasselbe Gebiet.

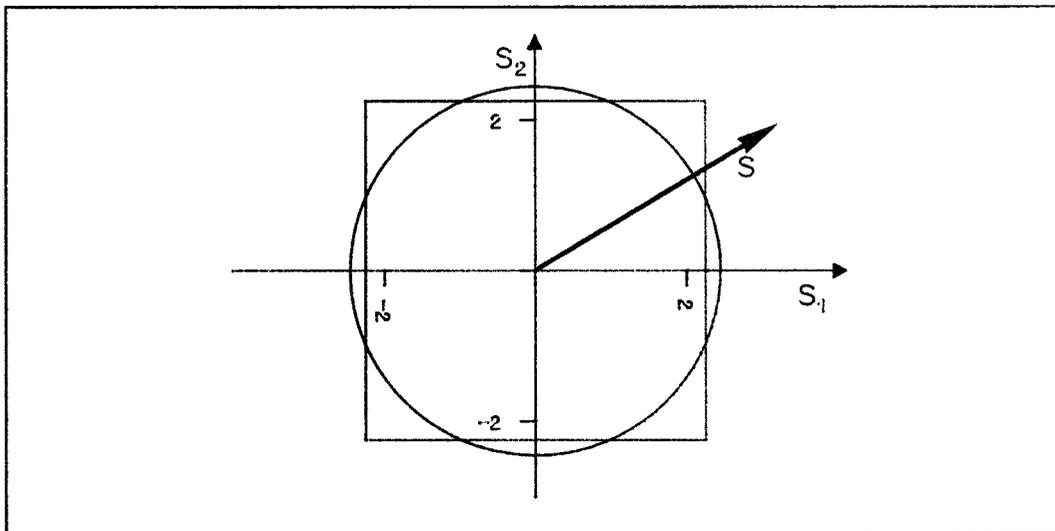


Abb. 15. Geometrische Darstellung der Annahmebereiche für den NMAX- und den F-Test.

Wenn man aber berücksichtigt, dass mit zunehmenden f (Dimension) der Abstand zwischen Ecke und Mittelpunkt des Hyperwürfels stark wächst (er beträgt z.B. im 100-dimensionalen Hyperwürfel bereits zehnmal die halbe Seite), erkennt man, dass der Unterschied zwischen den Annahmebereichen der beiden Tests auch stark zunimmt.

Man kann z.B. die Annahmebereiche der Hauptkomponentenanalyse (Hyperwürfel) und des F-Tests (Hyperkugel) bei einem Freiheitsgrad

$f = 100$ und für $\alpha = 5\%$ vergleichen. Aus den Tabellen der NMAX- bzw. der F-Verteilung erhält man darauf die folgenden Werte: Für $f = 100$ und $\alpha = 5\%$ ist :

$$s_{GR} = 3.50 \quad (\text{halbe Quadratseite})$$

$$x_{GR} = 11.15 \quad (\text{Kreisradius}).$$

Daraus folgt, dass Modellfehler, die sich nur auf wenige Komponenten von S auswirken, besser mit dem NMAX-Test festgestellt werden können als mit dem F-Test.

Die groben Fehler haben in guten Netzen eine lokal begrenzte Wirkung und beeinflussen in der Regel nur einen kleinen Teil der Komponenten von S , sodass sich die Hauptkomponentenanalyse für ihre Aufdeckung besser eignet.

13.6 Die Lokalisierung der groben Fehler

Die bisherigen Ausführungen befassten sich ausschliesslich mit der Frage: 'Ist ein grober Fehler vorhanden?' Absichtlich wurde die für die Praxis ebenso wichtige Fragestellung: 'Welche Beobachtung ist falsch?' nicht gleichzeitig behandelt.

Diese Trennung der beiden Probleme hat sich in der Geodäsie allgemein durchgesetzt, da mit Hilfe der mathematischen Statistik nur eine Antwort auf die erste Frage gegeben werden kann. Die zur Verfügung stehenden statistischen Tests bieten nur zwei mögliche Antworten: Modell angenommen oder verworfen, grober Fehler vorhanden oder nicht (selbstverständlich mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit).

Für die Praxis hat die möglichst genaue Lokalisierung der Fehler eine sehr grosse Bedeutung, sodass man sich auch mit der zweiten Frage befassen sollte. Dies ist aber nicht einfach, und vor allem können keine streng mathematischen Verfahren angegeben werden. Es ist lediglich möglich, Gebiete im Netz abzugrenzen, in denen der Fehler am ehesten zu vermuten ist. Für die mehr intuitiven Verfahren (V-Test, Test der standardisierten Verbesserungen) ist es offensichtlich, dass

der Fehler unter den Beobachtungen zu suchen ist, bei denen die standardisierten Verbesserungen (bzw. die Verbesserungen) am stärksten vom Erwartungswert abweichen, siehe z.B. das Data Snooping in /Baarda 1969/.

Die Hauptkomponentenanalyse ist ein Test für das gesamte Modell und liefert nur in beschränkter Masse Angaben über die tatsächlich falschen Beobachtungen. Trotzdem können, wenn der Test zu einer Modellverwerfung geführt hat, den linearen Testfunktionen einige Angaben zur Abgrenzung der Netzteile entnommen werden, in welchen ein grober Fehler vermutet wird.

Die einzelnen Komponenten des f -dimensionalen Testvektors S sind lineare Funktionen der Verbesserungen, das heisst :

$$s_i = z_{i1} \cdot v_1 + z_{i2} \cdot v_2 + \dots + z_{in} \cdot v_n,$$

wobei die z_{ij} die Komponenten des i -ten Eigenvektors nach Teilung durch $\sqrt{\lambda_i}$ (Wurzel des dazugehörigen Eigenwerts) sind.

In Matrizenform kann das Gleichungssystem folgendermassen geschrieben werden:

$$S = Z^T V .$$

Die Verbesserungen der Ausgleichung sind ihrerseits lineare Funktionen der Beobachtungen, nämlich

$$V = -Q_{VV} P L .$$

(Q_{VV} ist die Varianz-Kovarianzmatrix der Verbesserungen, P die Inverse der Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen und L der Beobachtungsvektor), sodass auch S eine lineare Funktion der Beobachtungen ist:

$$S = G^T L,$$

wenn $G^T = -Z^T Q_{VV} P$ ist.

Falls der NMAX-Test zur Verwerfung des mathematischen Modells geführt hat, kann die i -te Zeile von G^T betrachtet werden, die die betragsgrösste Komponente s_i des Testvektors gebildet hat:

$$s_{\max} = s_i = g_{i1} l_1 + g_{i2} l_2 + \dots + g_{in} l_n$$

Da ausschliesslich die Beobachtungen, für welche der Koeffizient $g_{ij} \neq 0$ ist, einen Beitrag zur Bildung von s_i geliefert haben, ist der grobe Fehler vor allem unter diesen Beobachtungen zu suchen.

Der Betrag des Koeffizienten g_{ij} ist auch von Bedeutung, da er den Einfluss der einzelnen Beobachtungen und daher des groben Fehlers auf die entsprechende Komponente von S bestimmt. Es ist deshalb zu vermuten, dass sich ein allfälliger grober Fehler der j -ten Beobachtung in der Komponente s_i des Testvektors auswirkt, für welchen g_{ij} einen grossen Absolutbetrag aufweist.

Als Beispiel dafür kann das kombinierte Netz (Kapitel 12.7.3) dienen. Das mathematische Modell wird mit dem NMAX-Test verworfen, da die 6. Komponente von S im Betrag grösser ist als die Verwerfungsschranke.

S-Vektor

| | $U^T V$ | S |
|----|-----------|----------|
| 1) | -4.36430 | -0.87286 |
| 2) | -1.69706 | -0.33941 |
| 3) | -2.05144 | -0.41029 |
| 4) | -7.66923 | -1.53385 |
| 5) | 2.39527 | 0.28337 |
| 6) | -28.69758 | -2.86976 |
| 7) | -9.08785 | -1.19956 |

$$|s_6| > s_{GR} = 2.68$$

In der folgenden Matrix G^T , die die lineare Beziehung zwischen den Beobachtungen L und dem Testvektor S darstellt, kann man in der sechsten Zeile die Koeffizienten der linearen Funktion erkennen, die zur stark abweichenden Komponenten s_6 und daher zur Verwerfung des Modells geführt haben.

$$G^T = - \frac{1}{2} U^T Q_{VV} P$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| G1 | -0.09633 | 0.14291 | -0.04658 | -0.05869 | 0.02935 | 0.02935 | 0.01127 | -0.01127 | 0.03679 | -0.03679 |
| G2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.14142 | -0.14142 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G3 | -0.04273 | -0.04411 | 0.08685 | -0.02865 | 0.01432 | 0.01432 | 0.11622 | -0.11622 | 0.01482 | -0.01482 |
| G4 | 0.03604 | 0.01397 | -0.05000 | -0.07740 | 0.03870 | 0.03870 | 0.02803 | -0.02803 | -0.11280 | 0.11280 |
| G5 | 0.03231 | -0.03877 | 0.00646 | -0.07771 | 0.03886 | 0.03886 | -0.02274 | 0.02274 | 0.03567 | -0.03567 |
| G6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G7 | 0.08089 | 0.00937 | -0.09027 | 0.01761 | -0.00880 | -0.00880 | 0.04897 | -0.04897 | 0.03662 | -0.03662 |

| | 11 | 12 | 13 |
|----|----------|---------|----------|
| G1 | 0 | 0 | 0 |
| G2 | 0 | 0 | 0 |
| G3 | 0 | 0 | 0 |
| G4 | 0 | 0 | 0 |
| G5 | 0.06243 | 0.00757 | -0.04731 |
| G6 | -0.04892 | 0.06884 | -0.05355 |
| G7 | 0.02382 | 0.04725 | 0.03899 |

Nur die drei gemessenen Distanzen haben einen Beitrag zur Bildung von s_6 geleistet:

$$s_6 = -0.049 l_{11} + 0.069 l_{12} - 0.054 l_{13}$$

Die zweite Distanz (l_{12}) weist den betragsgrössten Koeffizienten auf und sollte daher als erste untersucht werden. Die beiden anderen Distanzen haben Koeffizienten, die nicht wesentlich kleiner sind, sodass sie ebenfalls als mögliche Fehlerursache in Frage kommen. Es ist hingegen viel weniger wahrscheinlich, dass eine der Richtungen fehlerhaft ist, da sie keinen Beitrag zur Bildung von s_6 leisten.

Im erwähnten Beispiel erweist sich gerade diese Ueberlegung als richtig, da die zweite Distanz absichtlich um 25 mm verfälscht wurde.

13.7 Die Methode der extremen S-Komponente

13.7.1 Erläuterung

Im Kapitel 12.6.3 wurde gezeigt, dass der Testvektor S nicht eindeutig ist und dass jede Orthogonalrotation S' von S ebenfalls ein Testvektor mit den gleichen stochastischen Eigenschaften ist, d.h. mit unkorrelierten, standardisierten und normalverteilten Komponenten. Wie S sind auch die unendlich vielen Testvektoren S' lineare Funktionen der Beobachtungen, d.h.

$$S = G^T L \quad \text{und}$$

$$S' = R^T S = R^T G^T L = G'^T L,$$

wo R eine beliebige Orthogonalmatrix ist. Die Matrixmultiplikation $R^T \cdot S$ entspricht einer Orthogonalrotation des Koordinatensystems, das in Kapitel 13.5 zur geometrischen Interpretation des NMAX-Tests beschrieben wurde.

Nach Vorliegen der Realisierung der Beobachtungen und wenn der NMAX-Test zur Verwerfung des Modells geführt hat, ist es möglich,

eine besondere Orthogonalmatrix R_{extr} zu bestimmen, welche den S' -Vektor mit der im Betrag grösstmöglichen S -Komponenten s_{extr} berechnet. Diese erhält man, wenn das Koordinatensystem so rotiert wird, bis eine der Achsen die räumliche Richtung des Testvektors S erreicht hat.

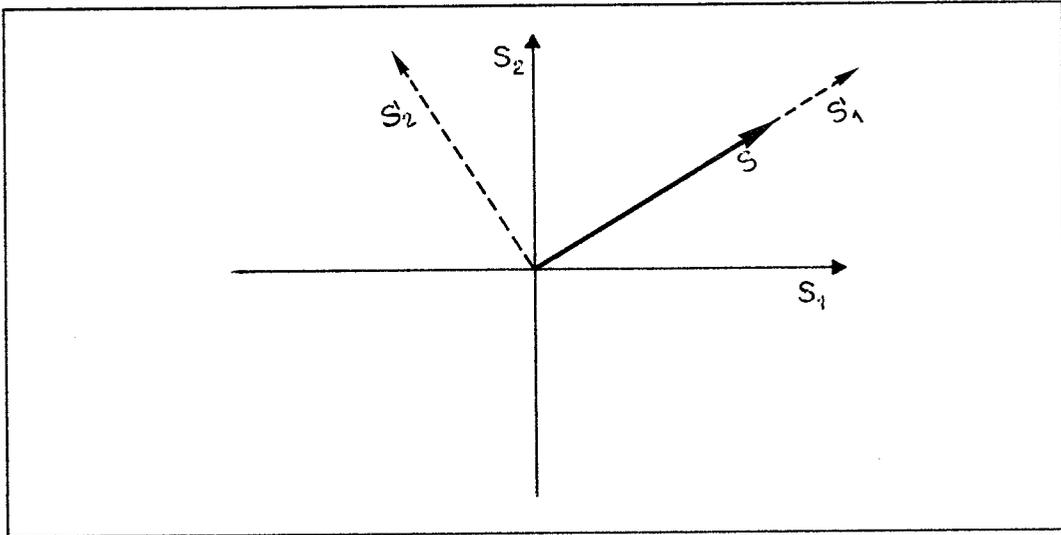


Abb. 16. Geometrische Darstellung des Testvektors
in zwei Koordinatensystemen ($f = 2$).

Eine Komponente des so gebildeten S' -Vektors hat den betragsgrössten Wert s_{extr} , während die anderen $(f-1)$ -Komponenten Null werden. Mit der gleichen Orthogonalmatrix kann die Koeffizientenmatrix G in G' transformiert werden, und damit ist die lineare Beziehung zwischen den realisierten Beobachtungen und der extremen S -Komponenten bestimmt. In dieser linearen Funktion gibt die Grösse der Koeffizienten den Beitrag der einzelnen Beobachtungen an die Bildung von s_{extr} an. Beim Vorliegen eines groben Fehlers ist anzunehmen, dass gerade die fehlerhafte Messung einen grossen Anteil an s_{extr} haben muss, sodass eine der Messungen, bei welcher die grössten Koeffizienten in der linearen Funktion auftreten, vermutlich fehlerhaft ist.

Dazu ist zu bemerken, dass in einem Vektor die Summe der Quadrate der Komponenten rotationsinvariant ist, d.h. beim vorliegenden

Problem:

$$\sum_i s_i^2 = \sum_i s_i'^2$$

da

$$\sum s_i'^2 = S'^T \cdot S' = S^T R \cdot R^T S = S^T S = \sum s_i^2$$

ist. Der Vektor S' mit der extremen Komponente erfüllt ebenfalls diese Bedingung, und da

$$S' = (0, 0, s_{\text{extr}}, 0, 0, 0)$$

ist, folgt darauf

$$s_{\text{extr}}^2 = \sum s_i^2 .$$

Dies bedeutet, dass der Betrag von s_{extr}^2 sofort berechnet werden kann ohne Ausführung der Rotation. Da aber gerade die lineare Funktion, die s_{extr}^2 berechnet, von Interesse ist, muss man für die Lokalisierung des groben Fehlers die räumliche Drehung bestimmen.

Man beachte dazu, dass die Grösse s_{extr} als Teststatistik benützt werden könnte, da sie unter der Nullhypothese als Summe von Quadraten stochastisch unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen berechnet werden kann und daher Chi-Quadrat-verteilt ist. Der Test ist aber dem F-Test gleichwertig, da

$$[\text{pvv}] = [\text{ss}] = s_{\text{extr}}^2$$

ist (siehe Kap. 13.5), und würde daher keine zusätzlichen Informationen bringen. Von Bedeutung hingegen sind die räumliche Richtung des Testvektors S und die lineare Abbildung des n -dimensionalen Beobachtungsvektors L auf dem f -dimensionalen Testvektor S' .

13.7.2 Die numerische Lösung

Jede räumliche Rotation ist mittels einer Folge ebener Drehungen erreichbar. Daher kann auch die Drehung, die zur grösstmöglichen Komponente s_{extr} führt, so berechnet werden.

Die S-Komponente, die bereits am Anfang den grössten Betrag aufwies, wird nacheinander in einer Reihe von zweidimensionalen Drehungen mit allen anderen (f-1)-Komponenten so rotiert, dass sie jedesmal den grösstmöglichen Betrag erhält. Am Ende dieses Vorgehens ersetzt s_{extr} die s_{max} -Komponente des Ausgangsvektors, während alle anderen Komponenten null geworden sind. Gleichzeitig werden die entsprechenden Zeilen der Koeffizientenmatrix G mit den gleichen Rotationsmatrizen multipliziert, sodass am Ende die gesuchte lineare Funktion der Beobachtung für die Berechnung von s_{extr} vorliegt. Falls s_{max} die erste Komponente des Testvektors ist, sind die folgenden f-1 Schritte auszuführen:

$$\begin{bmatrix} s_{\text{max}}^{(i+1)} \\ s_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{\text{max}}^{(i)} \\ s_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, \dots (f-1)$$

ω ist so zu wählen, dass

$$s_{\text{max}}^{(i+1)} = s_{\text{max}}^{(i)} \cos \omega + s_{i+1} \sin \omega = \text{Max}$$

wird, d.h.

$$-s_{\text{max}}^{(i)} \sin \omega + s_{i+1} \cdot \cos \omega = 0$$

oder

$$\frac{s_{i+1}}{s_{\text{max}}^{(i)}} = \text{tg } \omega .$$

Nach jedem Schritt wird die Rotationsmatrix mit den entsprechenden Zeilen der G^T -Matrix multipliziert, damit die lineare Beziehung zwischen den neuen Komponenten des S-Vektors und den Beobachtungen erhalten bleibt.

13.7.3 Rechenbeispiel

Das kombinierte Netz, erwähnt in den Kapiteln 12.7.3 und 13.3.3, kann mit der Methode der extremen S-Komponente untersucht werden. Der NMAX-Test führt zur Verwerfung des mathematischen Modells mit

$$s_{\max} = -2.87$$

da die Verwerfungsgrenze bei

$$s_{GR} = 2.68$$

liegt. Für die Berechnung der extremen S-Komponente als lineare Funktion der Beobachtungen sind 6 ebene Drehungen notwendig, da der Freiheitsgrad des Netzes 7 ist. Daraus erhält man

$$\begin{aligned} s_{\text{extr}} = 1/100 (1.1 l_1 + 4.1 l_2 - 5.3 l_3 - 3.8 l_4 + 3.2 l_5 + 0.6 l_6 \\ + 4.6 l_7 - 4.6 l_8 - 2.8 l_9 + 2.8 l_{10} - 3.6 l_{11} \\ + 7.0 l_{12} - 2.6 l_{13}) = -3.63. \end{aligned}$$

Der Koeffizient der zwölften Messung (Distanz B-P) ist eindeutig grösser als alle anderen, d.h. die Messung ist vermutlich fehlerhaft. Dies trifft in diesem Fall zu, da sie absichtlich um 25 mm verfälscht worden ist.

13.8 Der globale Test mit der a posteriori geschätzten Varianz

Während für die Durchführung des F-Tests die vorgängige Kenntnis der a priori-Varianzen Voraussetzung ist, erfordern die Hauptkomponentenanalyse sowie der darauf aufbauende NMAX-Test diese Voraussetzung nicht.

Die Verwendung der a posteriori- anstelle der a priori-Varianz würde nur die Berechnung der entsprechenden tmax-Verteilung (in Anlehnung an die t- oder Student-Verteilung) verlangen. Diese an sich sehr interessante Möglichkeit wird hier nicht weiter verfolgt, um den

Umfang dieser Arbeit nicht zu erweitern. Die notwendigen Berechnungen und Herleitungen werden dem Leser überlassen und könnten das Thema einer späteren Ergänzung sein.

13.9 Das rechnerische Vorgehen für den NMAX-Test

Hinsichtlich der praktischen Anwendungen des NMAX-Tests in der Geodäsie wird der folgende Rechenablauf für das Gauss-Markov-Modell, d.h. die vermittelnde Ausgleichung empfohlen.

- Bildung der Verbesserungsgleichungen $V = AX + L$
und der Gewichtsmatrix $P = Q_{11}^{-1}$. Einfachheitshalber wird $\sigma = 1$ gesetzt, sodass Q_{11} die Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen ist.
- Lösung des Ausgleichungsproblems

$$X = -(A^T P A)^{-1} \cdot A^T P L$$

$$V = AX + L$$

$$Q_{VV} = Q_{11} - A (A^T P A)^{-1} A^T .$$
- Hauptachsentransformation von Q_{VV} mit dem Jacobi-Verfahren, Bestimmung der Eigenvektoren- und Eigenwertmatrix U und Λ .
- Berechnung der Testgrößen S

$$W = U^T V$$

$$s_i = w_i / \sqrt{\lambda_i}$$
 (für $\lambda_i = 0$ wird kein s_i berechnet).
- Annahmeschranke s_{GR} für die gewählte Irrtumswahrscheinlichkeit α und den Freiheitsgrad des Netzes bestimmen (aus der Tabelle NMAX (-z, z)).
- Prüfen, ob das betragsgrösste s_i im Annahmebereich liegt.

Ein entsprechendes FORTRAN-Programm ist im Anhang 1 zu finden.

Selbstverständlich ist der vorgeschlagene Rechenablauf nur eine Möglichkeit von vielen. Es wäre wünschenswert, dass sich Fachleute mit fundierten Kenntnissen in der numerischen Mathematik mit dem Problem befassen.

Vielleicht könnten bessere Algorithmen als das Jacobi-Verfahren schneller zu den gewünschten Ergebnissen führen. Eine gewisse Wahrscheinlichkeit besteht ebenfalls, dass ganz andere Wege leichter die gleichen Resultate erbringen. Eine Möglichkeit wäre zum Beispiel die Bildung der Bedingungsgleichungen mit dem Austauschverfahren /Conzett 1978/ und eine Hauptachsentransformation für die Varianz-Kovarianzmatrix der Widersprüche.

Die in dieser Arbeit verwendete Lösung ist jedenfalls für Versuche geeignet und vielseitig verwendbar. Sie wurde hier ausdrücklich nur für die vermittelnde Ausgleichung (Gauss-Markov-Modell) dargelegt. Für eine bedingte oder gemischte Ausgleichung müssten nur die ersten beiden Punkte des Rechenablaufs entsprechend angepasst werden.

III. Teil

Die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme (Verfahren a priori)

14 Allgemeines

14.1 Einführung

Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit wurden die Verfahren behandelt, die nach Ausführung der Messungen eine Interpretation der Ergebnisse erlauben. Die Planung der Messanordnung und die vorgängige Beurteilung der zu erwartenden Eigenschaften der Resultate sind ebenfalls sehr wichtig und bilden das Thema der folgenden Kapitel.

14.2 Die Anforderungen an das Vermessungswerk

Die erste Phase der geodätischen Arbeit in der Praxis befasst sich mit der Festlegung der Anforderungen an das Vermessungswerk. Diese Anforderungen bilden die übergeordneten Randbedingungen, die in jedem Fall erfüllt werden müssen. Ihre Beschreibung ist formell Aufgabe des Auftraggebers, der über Ziel und Zweck der Vermessungsarbeit und vor allem über die mit der Vermessung verbundenen Fehlerrisiken im klaren sein muss. Diese Phase, bei welcher der Vermessungsingenieur nur als Berater mitwirkt, bildet die Voraussetzung für die Planung der Messanordnung, für die Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeiten der statistischen Tests sowie für die Wahl der Messinstrumente und der Berechnungsmethoden. Erst nach einer klaren Formulierung der Bedürfnisse des Auftraggebers kann sich der Vermessungsingenieur mit der Planungsarbeit befassen.

14.3 Die Planung der Messanordnung und der Auswertung

In dieser zweiten Phase wird versucht, eine geodätische Messanordnung zu entwerfen und die geeigneten Berechnungsmethoden zu wählen, welche die festgesetzten Randbedingungen erfüllen und mit dem kleinstmöglichen Aufwand und den verfügbaren Mitteln realisiert werden können. Das Problem der Optimierung der geodätischen Messsysteme ist

seit eh und je aktuell und wurde in den letzten Jahren (siehe z.B. Grafarend u.a. 1980) intensiv erforscht. Die enorme Komplexität des Optimierungsproblems hat bis jetzt eine geschlossene mathematische Lösung verunmöglicht. Es existieren mathematische Lösungen ausschliesslich für Teilaspekte der Optimierung und dies nur unter stark vereinfachenden Modellannahmen, welche oft zu unbefriedigenden Resultaten führen.

In der Praxis geht man daher heute noch nach dem klassischen Verfahren vor:

- nach allgemeinen Grundregeln und vor allem aufgrund von Intuition und Erfahrung des Vermessungsingenieurs werden verschiedene geodätische Netze entworfen,
- diese Varianten werden verglichen, der Aufwand wird geschätzt und die Einhaltung der übergeordneten Randbedingungen kontrolliert.

Das Vorgehen kann iterativ wiederholt werden, bis man eine befriedigende Lösung für die gestellte Aufgabe gefunden hat. Erst dann kann mit den Messungen begonnen werden.

14.4 Die Analyse der Eigenschaften der entworfenen Varianten

Die erste Eigenschaft der entworfenen Messanordnungen, die überprüft werden muss, ist die Realisierbarkeit, d.h. die vorgesehenen Beobachtungen sollen im Feld gemessen werden können. Dies ist mit Sicherheit nur an Ort und Stelle nachweisbar, sodass eine Geländebegehung in dieser Phase unerlässlich ist.

Ebenfalls müssen die Genauigkeitsanforderungen eingehalten werden. Für die Ueberprüfung der Genauigkeit der Lösungsvarianten stehen verschiedene bekannte mathematische Verfahren zur Verfügung: die Berechnung der Fehlerellipsen a priori für die gesuchten Punkte, die Bestimmung der relativen Genauigkeit zwischen den Netzpunkten

(relative Fehlerellipsen) usw. Da in jedem Buch über Ausgleichungsrechnung die Methoden der Genauigkeitsüberprüfung a priori für geodätische Netze ausführlich beschrieben sind, wird hier auf weitere Angaben verzichtet.

In der letzten Zeit wird dem Einfluss von möglichen Modellfehlern, z.B. von groben Fehlern, auf die Resultate immer mehr Beachtung geschenkt. Gerade diesem Problem sind die folgenden Kapitel gewidmet. Die Zusammenhänge zwischen statistischen Tests (aus dem Teil II) und Zuverlässigkeit werden eingehend untersucht und dargestellt.

Unter den unzähligen denkbaren Modellfehlern gilt der Einfluss von groben Messfehlern bei der Realisierung der Beobachtungen als Grundlage aller folgenden Betrachtungen. Die meisten Verfahren eignen sich jedoch ebenfalls zur Untersuchung der Wirkung und der Entdeckung anderer Modellfehler. Die entsprechenden Herleitungen müssten unter Berücksichtigung der entsprechenden Fehlerhypothese (Alternativhypothese) wiederholt werden.

15 Die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme

15.1 Einführung

Es ist allgemein bekannt, dass in einem geodätischen Netz Massnahmen getroffen werden müssen um zu vermeiden, dass grobe Messfehler unbemerkt bleiben und die gesuchten Resultate verfälschen. Daher wird in der klassischen Vermessung nach dem Motto:

'Eine Messung ist keine Messung'

vorgeschrieben, immer ein redundantes Messsystem vorzusehen, um eine genügende Kontrolle zu ermöglichen. Auch bei der Netzdisposition gilt die allgemein anerkannte Regel, dass die Messungen sich gegenseitig kontrollieren müssen.

Erst Ende der 60-er Jahre wurden in der Geodäsie Versuche unternommen, das Problem der Zuverlässigkeit mit Hilfe der mathematischen Statistik streng zu formulieren und quantitativ zu lösen /Baarda 1968/.

15.2 Die Zuverlässigkeit im Allgemeinen

Der Begriff 'zuverlässig' ist in der Umgangssprache üblich und kann für qualitative Betrachtungen auch in der Geodäsie mit der Bedeutung 'glaubwürdig', 'erprobt', 'vertrauenswürdig' verwendet werden.

Die Entwicklung von quantitativen statistischen Verfahren erforderte eine Präzisierung der Definition. Leider hat sich bisher international keine einheitliche Begriffserklärung für die geodätischen Anwendungen durchgesetzt /Grafarend u.a. 1979/.

Für die korrekte Entwicklung und das Verstehen der Theorie ist jedoch eine klare und eindeutige Festlegung der Begriffe unerlässlich, und daher kann auf eine Definition hier nicht verzichtet werden.

15.3 Allgemeine Definition der Zuverlässigkeit

Gegeben seien:

- das geodätische Netz mit dem funktionalen und dem stochastischen Modell,
- eine (oder mehrere) Alternativhypothese(n) zu den Modellvoraussetzungen, d.h. ein (oder mehrere) nicht ausgeschlossene(r) Modellfehler. Dazu der grösste Modellfehler H_{Amax} , der die Einhaltung der Anforderungen an das Vermessungswerk noch nicht in Frage stellt und die Wahrscheinlichkeit β , die man als noch zumutbares Risiko betrachtet im Fall, dass ein Modellfehler H_{Amax} durch den Test nicht aufgedeckt wird,
- das gewählte statistische Testverfahren $T(\alpha)$, mit welchem man das Modell nach ausgeführten Messungen prüfen wird, und die entsprechende Irrtumswahrscheinlichkeit α für die Annahme oder Verwerfung des Modells.

Darauf nennt man das betrachtete Messsystem zuverlässig im Hinblick auf die formulierte Alternativhypothese, wenn ein verborgener Modellfehler H_{Amax} bei der Durchführung des Tests $T(\alpha)$ mit Wahrscheinlichkeit $\geq (1 - \beta)$ entdeckt wird.

15.4 Die Zuverlässigkeit im Hinblick auf grobe Fehler

In der Praxis ist das Vorhandensein von groben Fehlern in den Beobachtungen sicher die wichtigste Alternativhypothese. Man kann für diesen Spezialfall eine anschaulichere Formulierung als die in 15.3 erwähnte verwenden. Die Ausführungen der folgenden Kapitel werden sich auf die hier angegebene Alternativhypothese der groben Fehler beziehen, und in Anlehnung an die übliche geodätische Literatur wird einfach von 'Zuverlässigkeit' gesprochen, ohne die speziell gewählte

Alternativhypothese jedesmal anzugeben. Ebenfalls kommt die vereinfachende Annahme von W. Baarda zur Anwendung, nach welcher höchstens eine Beobachtung des Netzes durch einen groben Fehler verfälscht sei.

Diese beiden Einschränkungen vermindern die allgemeine Gültigkeit der Arbeit nur unwesentlich, da alle Herleitungen für beliebige, mathematisch formulierbare Alternativhypothesen in ähnlicher Art wiederholt werden könnten.

Die Annahme, dass höchstens ein grober Fehler im Netz auftrete, ist nicht in allen Beweisen streng notwendig. In vielen Fällen und für die praktische Anwendung der Theorie kann sie abgeschwächt werden.

15.5 Definition der Zuverlässigkeit im Hinblick auf grobe Fehler

Gegeben seien:

- das geodätische Netz mit dem funktionalen und dem stochastischen Modell
- der grösste Fehler $\Delta_{i\max}$ jeder Beobachtung (bzw. Unbekannten), welcher die Anforderungen an das Vermessungswerk noch nicht in Frage stellt und die Wahrscheinlichkeit β , die man als noch zumutbares Risiko betrachtet, falls ein grober Fehler $\Delta_{i\max}$ nicht entdeckt wird
- das gewählte statistische Testverfahren $T(\alpha)$, mit welchem man das Modell nach den Messungen prüfen wird und die entsprechende Wahrscheinlichkeit α für die irrtümliche Verwerfung des Modells.

Daraufhin nennt man das Messsystem im Hinblick auf allfällige grobe Fehler zuverlässig, wenn für $i=1,2,\dots,n$ ein verborgener Fehler $\Delta_{i\max}$ der i -ten Beobachtung (bzw. Unbekannte) bei der Durchführung des Tests $T(\alpha)$ mit Wahrscheinlichkeit $\geq (1 - \beta)$ entdeckt wird.

Falls der Fehler Δ_{imax} sich auf die unbekannt Parameter der Ausgleichung (z.B. Koordinaten) bezieht, spricht man von äusserer Zuverlässigkeit. Falls Δ_{imax} als Fehler einer Beobachtung betrachtet wird, wird hingegen von innerer Zuverlässigkeit gesprochen /Baarda 1968/.

Gleichwertig ist die Definition, welche die Zuverlässigkeit in Beziehung mit den Grenzfehlern V_i setzt, die gerade noch mit Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta)$ entdeckt werden können. Die Zuverlässigkeitsbedingung ist dann:

$$V_i \leq \Delta_{imax}.$$

15.6 Bemerkungen zur Definition

Die obige Definition bildet die Voraussetzung zu allen theoretischen Arbeiten, welche in den letzten Jahren veröffentlicht wurden. Sie wird aber meist nicht explizit angegeben, da oft eine (nicht strenge) axiomatische Definition mit Eigenschaftsangaben vorgezogen wurde. Die Folge dieses Vorgehens ist, dass man einige wichtige Elemente der Zuverlässigkeitstheorie ab und zu übersieht.

15.7 Systemabgrenzung

Mit der Definition der Zuverlässigkeit des Messsystems stellt sich sofort die Frage nach der Systemabgrenzung, welche Voraussetzung für jede systemtheoretische Ueberlegung ist /de Rahm 1981/. Was gehört zum Messsystem? das heisst, was ist Objekt der Zuverlässigkeit? Die Antwort ist leicht der Definition zu entnehmen:

- a) das geodätische Netz mit den Modelleigenschaften,
- b) die Fehlerhypothese (Alternativhypothese) mit den Anforderungen an das Vermessungswerk und
- c) das gewählte statistische Testverfahren.

Beim praktischen Gebrauch wird meist lediglich von der Zuverlässigkeit

des geodätischen Netzes gesprochen, und es ist daher nicht verwunderlich, dass man oft glaubt, es handle sich dabei um eine Eigenschaft der reinen Netzgeometrie.

Nur selten wird die direkte Abhängigkeit der Zuverlässigkeit vom gewählten statistischen Testverfahren erwähnt. Bemerkungen diesbezüglich finden sich z.B. etwas implizit im Vorwort von /Baarda 1968/ und deutlicher in /Heck 1980/.

Im allgemeinen und auch in neueren Publikationen wird die zentrale Bedeutung des gewählten Testverfahrens ungenügend betont /van Mierlo 1980/. Wichtig für die folgenden Betrachtungen ist die Bemerkung, dass eine positivere Bewertung der Zuverlässigkeit eines Messsystems erzielt werden kann:

- durch Verbesserung der Netzgeometrie oder
- durch bescheidenere Anforderungen an das Vermessungswerk oder
- durch die Wahl eines empfindlicheren statistischen Testverfahrens.

Die dritte Feststellung ist hier von besonderer Bedeutung, wenn man sie in Zusammenhang mit dem im zweiten Teil vorgeschlagenen NMAX-Test betrachtet. Der NMAX-Test weist gegenüber den herkömmlichen Verfahren eine grössere Empfindlichkeit in der Entdeckung der lokalen Modellfehler auf, sodass er einen Beitrag zur Verbesserung der Zuverlässigkeit der Messsysteme leisten kann.

16 Einfache Verfahren aus der Praxis

Die moderne Theorie der Zuverlässigkeit, die sich auf statistische Methoden stützt, ist etwas mehr als zehn Jahre alt. Sie ist nicht immer sehr einfach anzuwenden und wird daher noch selten in der schweizerischen Praxis eingesetzt. Die Notwendigkeit, zuverlässige Messsysteme zu entwerfen, ist hingegen keineswegs neu und bildet seit langem eine Voraussetzung des Vermessungswesens.

Die Lösungen, die in der Vergangenheit gewählt wurden, sind nicht grundsätzlich anders als die modernen. Die eigentliche Differenz liegt darin, dass man früher aufwendige Berechnungen vermeiden musste. Anstatt die genaue Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit welcher kleine Fehler durch statistische Methoden entdeckt werden können, wurden bisher Messanordnungen als Vergleich herangezogen, die erfahrungsgemäss als zuverlässig galten. Die Zuverlässigkeit der neu zu erstellenden Netze wurde durch Reglemente sichergestellt, welche die Verwendung solcher Musterkonfigurationen als verbindlich vorschrieben.

Als Beispiel wirkt hier die Instruktion für die Triangulation 4. Ordnung der schweizerischen Grundbuchvermessung vom 10. Juni 1919 (heute immer noch rechtsgültig), welche Gestaltungsvorschriften für den Netzaufbau enthält.

Netzentwurf und Berechnungsplan.

Art. 5. Der gute Zusammenhang im Netzaufbau ist für eine richtige Verteilung der Anschluss- und Beobachtungsfehler von grundlegender Bedeutung. Darum ist bei der Netzkonstruktion darauf zu achten, dass das zu triangulierende Gebiet durch Haupt- und Detailpunkte so erschlossen wird, dass alle Punkte, im besondern die Hauptpunkte durch eine genügende Anzahl möglichst gleich langer und gleichmässig über den Horizont verteilter Richtungen unter günstigen Schnitten getroffen werden. Um diesen Grundsatz möglichst auf alle Punkte auszudehnen, sind die Triangulationen jeweilen in einem Gusse über grössere, ihrer Gestaltung nach zusammenhängende Gebiete (Sektionen) auszuführen. Dabei ist sowohl die Verbindung mit den Punkten höherer Ordnung in und ausserhalb der zu triangulierenden Sektion, als auch der Anschluss an die Punkte der anstossenden Netze IV. Ordnung in engster Weise zu bewerkstelligen. Die Randpunkte einer Sektion sind daher möglichst nach allen Richtungen festzulegen, so dass sie durch spätere Anschlüsse keine Veränderung ihrer Koordinaten erleiden. Dies gilt auch, wenn die einzelnen Sektionsgrenzen durch Kantons Grenzen gebildet werden.

Die Bestimmung eines trigonometrischen Punktes erfolgt in der Regel durch vereinigt Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden und hat sich auf mindestens drei gegebene trigonometrische Punkte zu stützen. Kann ein Punkt ausnahmsweise nur aus zwei Punkten bestimmt werden, so sind alle drei Winkel wiederholt zu messen; zudem darf der Winkel am gesuchten Punkt nicht kleiner sein als 30° ($33''$).

Nahe beieinander gelegene trigonometrische Punkte sind direkt mit einander zu verbinden. Ist dies nicht möglich, so ist der Folgepunkt durch Parallaxwinkel-Messung in indirekte Abhängigkeit zum Leitpunkt zu bringen.

Wo die lokalen Verhältnisse die zweckmässige Bestimmung von Einzelpunkten nicht gestatten, sollen Doppelpunkte eingeschaltet werden.

Unzugängliche Punkte sind durch Vorwärtseinschneiden aus mindestens drei gegebenen Punkten zu bestimmen.

Der Netzentwurf muss, nachdem dessen Ausführbarkeit durch eingehende Rekognoszierung des Triangulationsgebietes festgestellt worden ist, der schweizerischen Landestopographie zur Genehmigung eingereicht werden. Er ist in folgender Weise auf Blätter des Siegfriedatlases zu zeichnen.

Abb.17. Auszug aus der Instruktion für die Triangulation

4. Ordnung der schweizerischen Grundbuchvermessung.

Selbstverständlich wurde auch damals der Tatsache Rechnung getragen, dass die Zuverlässigkeit eines Messsystems nicht unabhängig ist von der Art des Testverfahrens und der gestellten Anforderungen. Daher wurden neben den Gestaltungsvorschriften auch die Testverfahren mit den Verwerfungsgrenzen angegeben, welche zusammen mit der Messanordnung die Zuverlässigkeit des Systems sicherten. Ein Beispiel dafür sind die Fehlergrenzen der bereits

genannten Instruktion für die Triangulation 4. Ordnung.

Wenn je nach Gebiet oder Anwendung die Anforderungen an das Vermessungswerk unterschiedlich waren, wurden auch verschiedene Vorschriften für die Netzgestaltung oder die Testverfahren (z.B. die verschiedenen Toleranzen der Grundbuchvermessung) erlassen.

Es ist vermutlich unnötig zu bemerken, dass in diesen alten Methoden die drei Systemelemente der modernen Definition deutlich zu erkennen sind.

d. Fehlergrenzen.

Die nachfolgenden Werte sind als äusserste Fehlergrenzen aufzufassen. Im allgemeinen soll die Genauigkeit einer guten Triangulation IV. Ordnung weit innerhalb dieser Grenzen bleiben.

Die Resultate einer Triangulation IV. Ordnung sind nur dann annehmbar, wenn die aus den endgültigen Koordinaten abgeleiteten Azimute von den durch direkte Beobachtung gefundenen, endgültig orientierten nicht mehr abweichen als:

| Im Gebiete der Instruktion | Bei Entfernungen von | | | | | | |
|----------------------------|----------------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------------------|
| | kleiner als 600 m | 600 m | 800 m | 1000 m | 1500 m | 2000 m | 3000 m und mehr |
| I | 80 | 60 | 45 | 40 | 35 | 30 | 25 |
| II | 100 | 80 | 65 | 60 | 55 | 50 | 40 |
| III | 120 | 100 | 80 | 75 | 70 | 65 | 55 |
| | | | | | | | Zentesimalsekunden |

Die Winkelsumme im Dreieck darf nicht mehr als um 25'' (75^s) von 180° (200^s) abweichen.

Die endgültige Höhe eines trigonometrischen Punktes soll in bezug auf die umgebenden trigonometrischen Punkte im Gebiete der Instruktion I einen mittleren Fehler von ± 2 cm, im Gebiet der Instruktion II einen solchen von ± 6 cm und im Gebiet der Instruktion III von ± 10 cm nicht übersteigen.

Abb. 18. Testverfahren für Triangulationsnetze der Instruktion für die Triangulation 4. Ordnung mit unterschiedlichen Verwerfungsgrenzen je nach Anwendungsgebiet.

Die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme kann in ähnlicher Weise bestimmt werden, auch wenn keine amtlichen Vorschriften und Testverfahren

vorliegen. In der Praxis wird ein Netzplan oft durch optische Betrachtung auf genügende Ueberbestimmung geprüft. Wenn der Vermessungsingenieur genügend Erfahrung besitzt, führt die Methode zu guten Resultaten.

Auch in diesem Fall werden bewusst oder unbewusst die vorgesehenen Testverfahren für die spätere Kontrolle des Netzes empirisch mitberücksichtigt. Es handelt sich um die Tests, die im ersten Teil dieser Arbeit beschrieben worden sind (V-Test, Test der geometrischen Bedingungen usw.).

Eine gemeinsame Eigenschaft dieser bisher beschriebenen Methoden ist der Verzicht auf eine genaue mathematische Abgrenzung zwischen zuverlässigen und unzuverlässigen Messsystemen.

17 F-Test und Zuverlässigkeit (nach W. Baarda)

17.1 Theorie

Der eigentliche Durchbruch der Zuverlässigkeitsbetrachtungen in der Geodäsie ist W. Baarda zu verdanken. Seine sehr bekannte Publikation /Baarda 1968/ über die Zuverlässigkeit geodätischer Netze gilt heute noch als Grundlage für alle Entwicklungen auf diesem Gebiet. Die Arbeiten von W. Baarda zeigten einen Weg auf, um das Problem der Zuverlässigkeit eines Messsystems nach den strengen Methoden der mathematischen Statistik zu lösen. Als Testverfahren wird der F-Test mit einer Wahrscheinlichkeitsschranke α für die Annahme oder die Verwerfung des Modells gewählt. Nach der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate wird die Testvariable

$$\underline{F} = \frac{\hat{\underline{\sigma}}^2}{\underline{\sigma}^2}$$

gebildet, welche für normalverteilte Beobachtungen F-verteilt ist. Der Freiheitsgrad f ($=n-u$) von $\hat{\underline{\sigma}}$ wird der Ausgleichung entnommen, während für $\underline{\sigma}$ der Freiheitsgrad ∞ angenommen wird.

Falls die i -te Beobachtung durch einen groben Fehler Δ_i verfälscht ist, d.h. falls

$$l_i^* = l_i + \Delta_i$$

ist, werden $\hat{\underline{\sigma}}^*$ und \underline{F}^* ebenfalls verfälscht und ihre Erwartungswerte verändert.

$$E(\underline{F}^*) = E(\underline{F}) + \frac{\lambda}{f} = 1 + \frac{\lambda}{f}$$

Für unkorrelierte Beobachtungen ist dann

$$\lambda = \frac{\Delta_i^2}{q_{11}^{(ii)}} \cdot \frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{11}^{(ii)}} \quad \text{/Conzett 1981/ .}$$

Die Verteilung der Testgrösse \underline{F} ist für normalverteilte Beobachtungen (ohne grobe Fehler) die bekannte F- oder Fisher-Verteilung. Die Verteilung von \underline{F}^* ist hingegen die nichtzentrale F-Verteilung mit λ/f als Nichtzentralitätsparameter.

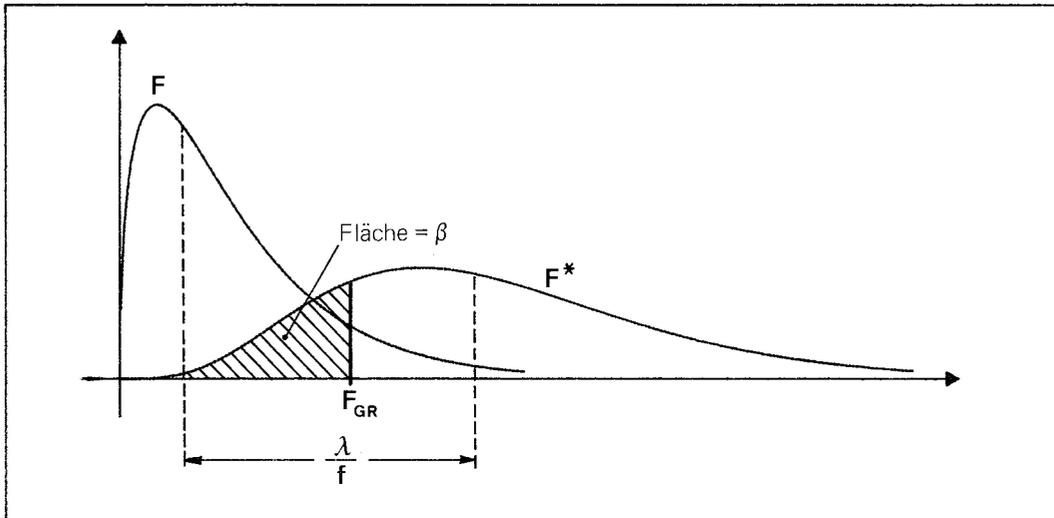


Abb. 19. Wahrscheinlichkeitsdichten der Teststatistik F
bei zutreffendem und bei unzutreffendem Modell.

Für jeden eventuellen groben Fehler Δ_i ist es möglich, im voraus zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er entdeckt werden kann, wenn die Grösse $F = \hat{\sigma}^2 / \sigma^2$ auf die zentrale F-Verteilung mit Annahmeschranke F_{GR} getestet wird.

Oder was gleichwertig ist: man kann berechnen, wie gross ein grober Fehler V_i sein muss, damit er durch den obengenannten Test mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta)$ entdeckt wird. Diese Schwellenwerte für die groben Fehler in den einzelnen Beobachtungen werden innere Zuverlässigkeitsgrössen der Beobachtungen im Messsystem genannt /Baarda 1968/, /Just 1979/.

$$\frac{V_i}{\sigma_{li}} = \sqrt{\lambda(\alpha, \beta, f)} \sqrt{\frac{q_{ll}^{(ii)}}{q_{vv}^{(ii)}}}$$

Die Wahl des F-Tests als Prüfmethode im Messsystem hat den Vorteil, die theoretischen Herleitungen zu vereinfachen, aber den Nachteil, dass nur recht beträchtliche Δ_i entdeckt werden können, wenn der Freiheitsgrad des Netzes gross wird (wie in 9.1 bereits erwähnt wurde). Daher ist es empfehlenswert, bei der Verwendung dieser Methode sowohl bei der Beurteilung a posteriori als auch bei der a priori-Bestimmung der Zuverlässigkeit grosse geodätische Netze in kleinere Teilnetze zu unterteilen.

Wenn das untersuchte Netz gross ist, wird es bald offensichtlich, dass mittels anderer einfacherer Testverfahren (V-Test, geometrische Bedingungen usw.) wesentlich kleinere Fehler als die obigen Δ_i ohne Mühe entdeckt werden können. Diese Einsicht wird in der Praxis bei der Bearbeitung grosser Netze bestätigt.

17.2 Anwendungen

17.2.1 Ein Dreieck

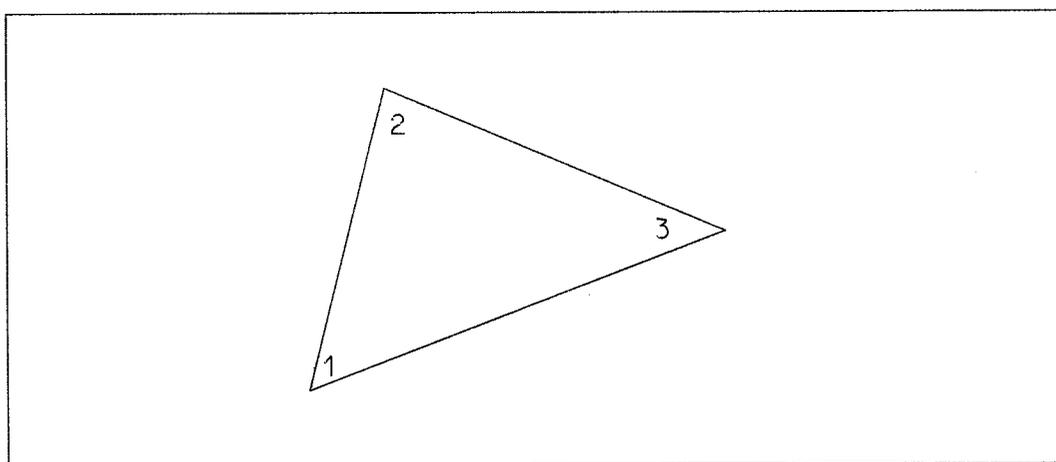


Abb. 20. Ein einfaches Dreiecksnetz.

Zuverlässigkeit (für den F-Test, nach Baarda)

$$\alpha = 5\%, \quad \beta = 20\%, \quad f = 1$$

$$\lambda = 7.800$$

| i | σ_i | V_i | V_i/σ_i |
|-----|------------|-------|----------------|
| 1 | 5.0 | 24.2 | 4.8 |
| 2 | 5.0 | 24.2 | 4.8 |
| 3 | 5.0 | 24.2 | 4.8 |

17.2.2 Mehrfaches Dreiecksnetz (3 Dreiecke)

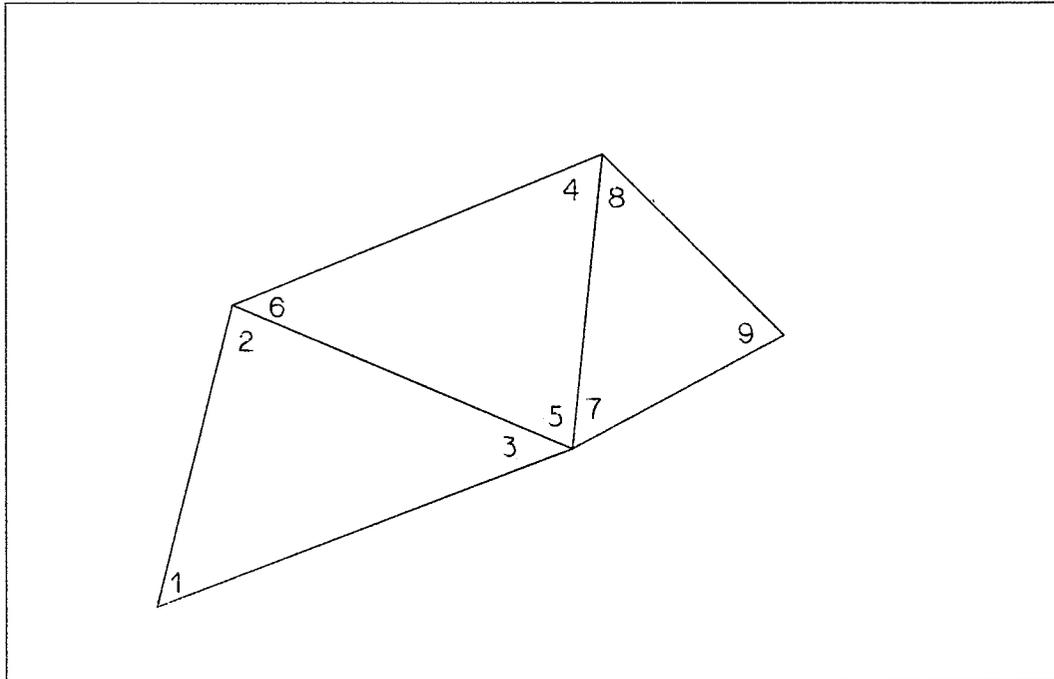


Abb. 21. Mehrfaches Dreiecksnetz (3 Dreiecke).

Zuverlässigkeit (für den F-Test, nach Baarda)

$$\alpha = 5\%, \quad \beta = 20\%, \quad f = 3$$

$$\lambda = 10.747$$

| i | σ_i | V_i | V_i/σ_i |
|---|------------|-------|----------------|
| 1 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |
| 2 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |
| 3 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |
| 4 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |
| 5 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |
| 6 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |
| 7 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |
| 8 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |
| 9 | 5.0 | 28.4 | 5.7 |

17.2.3 Mehrfaches Dreiecksnetz (30 Dreiecke)

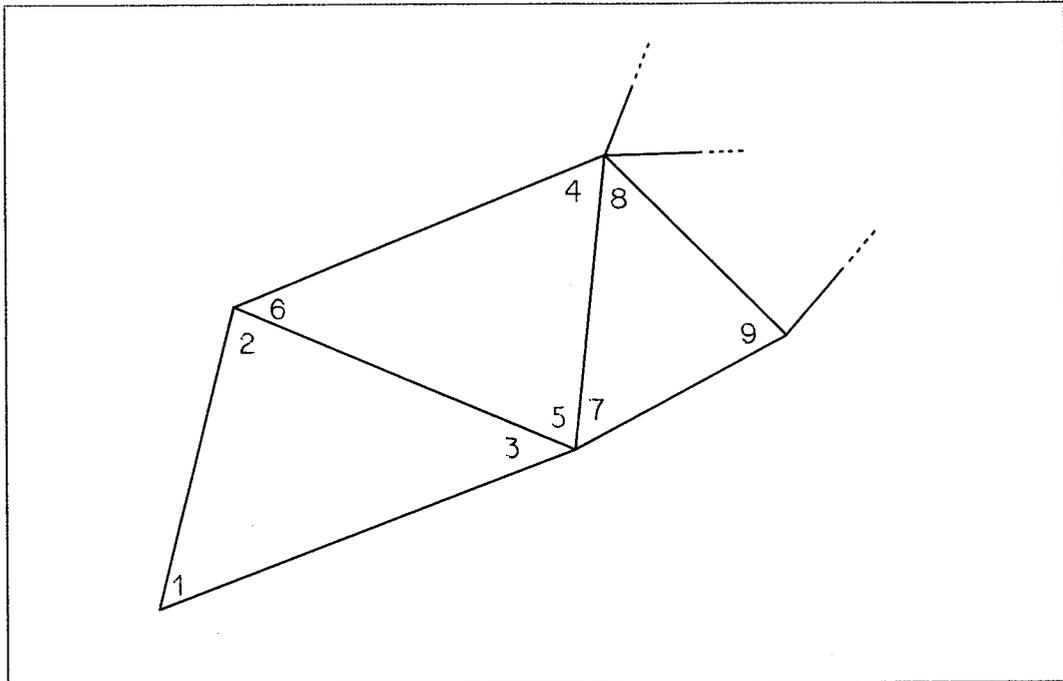


Abb. 22. Mehrfaches Dreiecksnetz (30 Dreiecke).

Zuverlässigkeit (für den F-Test, nach Baarda)

$$\alpha = 5\%, \quad \beta = 20\%, \quad f = 30$$

$$\lambda = 24.347$$

| i | σ_i | ∇_i | ∇_i/σ_i |
|-----|------------|------------|---------------------|
| 1 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |
| 2 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |
| 3 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |
| 4 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |
| 5 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |
| 6 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |
| ... | | | |
| ... | | | |
| 88 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |
| 89 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |
| 90 | 5.0 | 42.7 | 8.5 |

17.2.4 Mehrfaches Dreiecksnetz (100 Dreiecke)

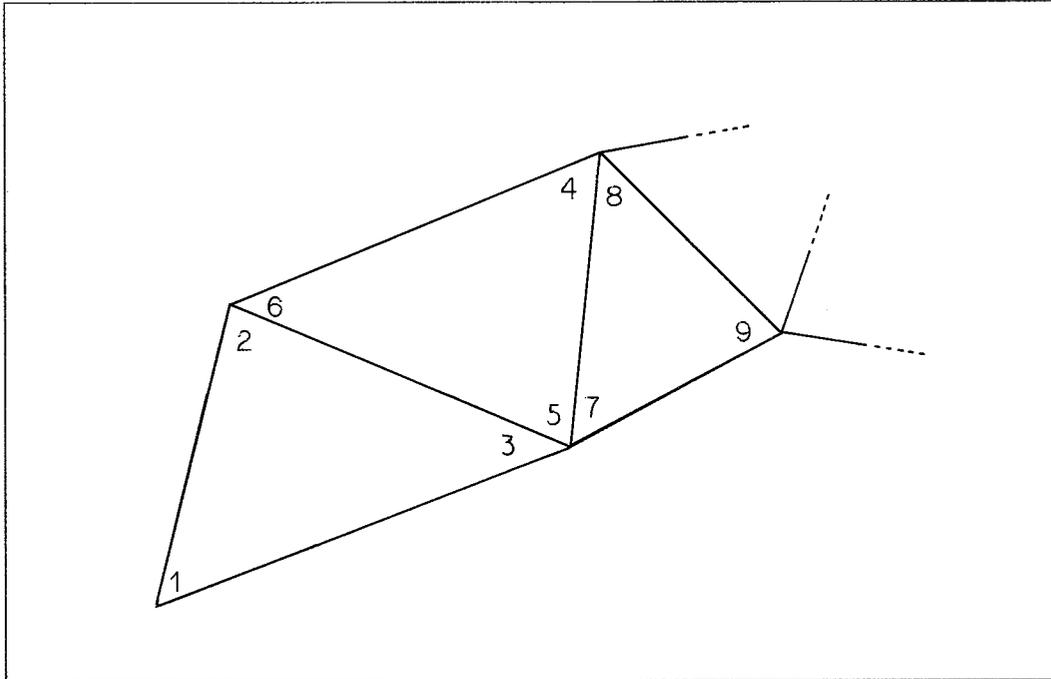


Abb. 23. Mehrfaches Dreiecksnetz (100 Dreiecke).

Zuverlässigkeit (für den F-Test, nach Baarda)

$$\alpha = 5\%, \quad \beta = 20\%, \quad f = 100$$

$$\lambda = 40.400$$

| i | σ_i | V_i | V_i/σ_i |
|-----|------------|-------|----------------|
| 1 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |
| 2 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |
| 3 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |
| 4 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |
| 5 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |
| 6 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |
| ... | | | |
| ... | | | |
| 298 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |
| 299 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |
| 300 | 5.0 | 55.0 | 11.0 |

17.2.5 Kombiniertes Netz

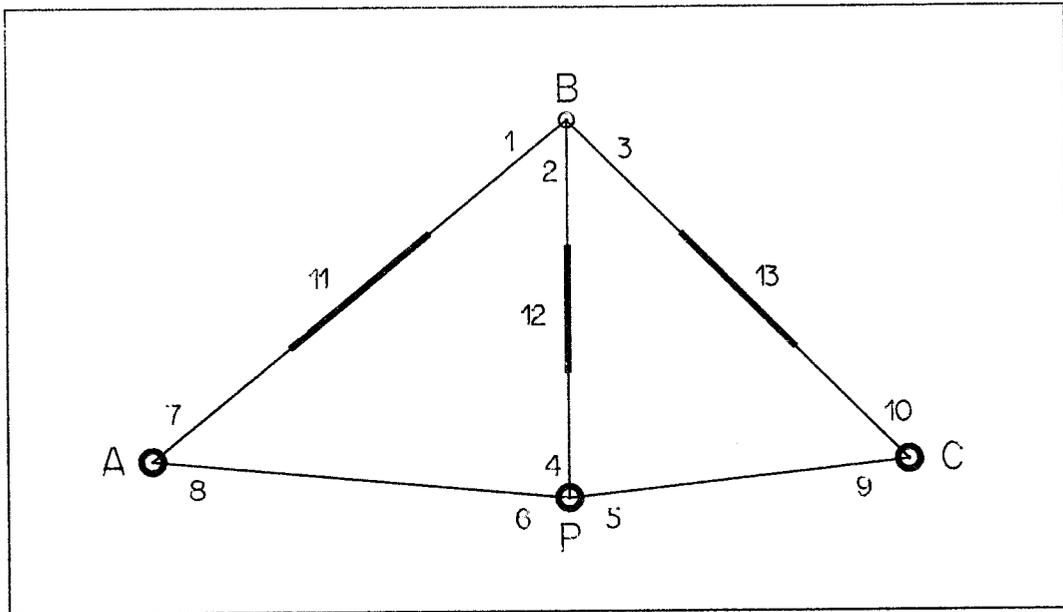


Abb. 24. Ein kombiniertes Netz.

Zuverlässigkeit (für den F-Test, nach Baarda)

$$\alpha = 5\%, \quad \beta = 20\%, \quad f = 7$$

$$\lambda = 14.190$$

| | i | σ_i | V_i | V_i/σ_i |
|-------------|-----|------------|-------|----------------|
| Richtungen: | 1 | 5.0 | 26.6 | 5.3 |
| | 2 | 5.0 | 24.2 | 4.8 |
| | 3 | 5.0 | 26.4 | 5.3 |
| | 4 | 5.0 | 29.2 | 5.8 |
| | 5 | 5.0 | 24.2 | 4.8 |
| | 6 | 5.0 | 24.2 | 4.8 |
| | 7 | 5.0 | 28.6 | 5.7 |
| | 8 | 5.0 | 28.6 | 5.7 |
| | 9 | 5.0 | 29.0 | 5.8 |
| | 10 | 5.0 | 29.0 | 5.8 |
| Distanzen: | 11 | 10.0 | 45.5 | 4.5 |
| | 12 | 10.0 | 44.9 | 4.5 |
| | 13 | 10.0 | 46.3 | 4.6 |

18 Zuverlässigkeit und einfache Tests aus der Praxis

Im vorhergehenden Kapitel wurden Vorteile und Nachteile der Wahl des F-Tests als Prüfverfahren im Messsystem beschrieben. Ebenfalls erwähnt wurde bereits, dass für grosse Netze die Empfindlichkeit des F-Tests auf grobe Fehler wesentlich kleiner ist als diejenige der einfachen Testverfahren aus der Praxis (V-Test, geometrische Bedingungen usw.). Darüber wurde im ersten Teil dieser Arbeit bei der Schilderung der Testverfahren a posteriori ausführlich berichtet.

Da in der Praxis oft grosse Netze bearbeitet werden (Hunderte von Unbekannten mit Tausenden von Messungen), stellt sich sofort die Frage, ob es nicht möglich wäre, die Zuverlässigkeit eines Messsystems zu bestimmen, in welchem einer der oben erwähnten Einzeltests als Prüfverfahren eingesetzt wird. Dies würde zu praxisbezogeneren Zuverlässigkeitskriterien führen. Dank der guten Empfindlichkeit besonders geeignet wäre der Test der standardisierten Verbesserungen, welcher in Kapitel 10 beschrieben ist.

Für eine einzelne Beobachtung der Ausgleichung ist es möglich zu prüfen, ob sie im Messsystem zuverlässig kontrolliert ist.

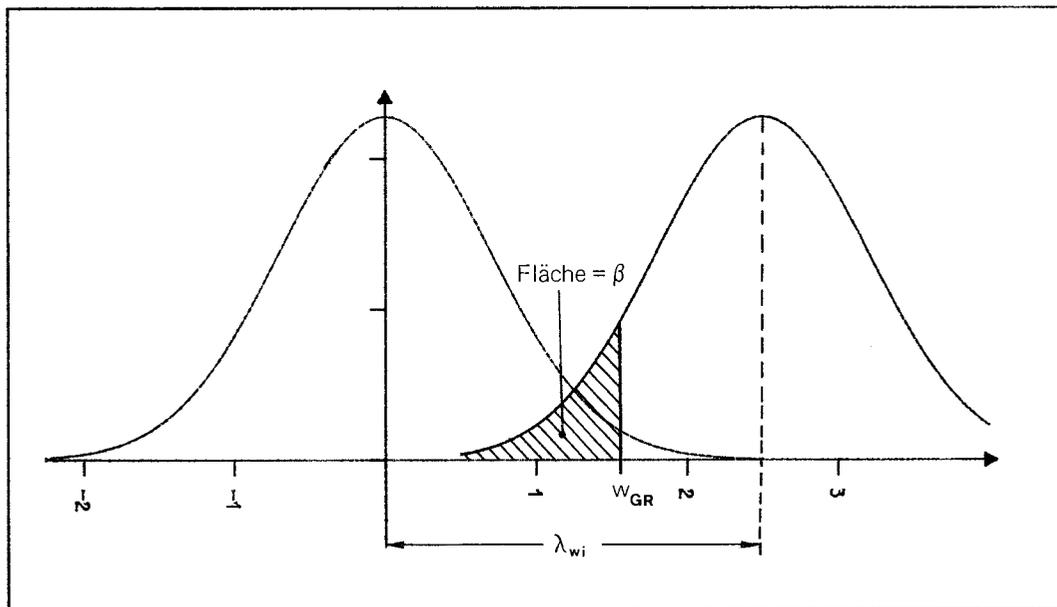


Abb. 25. Wahrscheinlichkeitsdichten der Teststatistik W bei zutreffendem und bei unzutreffendem Modell.

Für nicht korrelierte Beobachtungen (siehe z.B. /Linkwitz 1960/) gilt :

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{vi}} = \text{Testgrösse}$$

$$\lambda_{wi} = \frac{|\Delta_i|}{\sigma_{vi}} \cdot \frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{ll}^{(ii)}} = \frac{|\Delta_i|}{\sigma_{li}} \sqrt{\frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{ll}^{(ii)}}}$$

w_{GR} = Testschranke

β = Wahrscheinlichkeit, dass Δ_i
nicht entdeckt wird.

λ_{wi} ist der Erwartungswert von w_i , wenn die Messung durch einen groben Fehler $\Delta_i \neq 0$ verfälscht ist. $q_{vv}^{(ii)}$ und $q_{ll}^{(ii)}$ sind die Diagonalelemente der Kofaktorenmatrizen der Verbesserungen und der Beobachtungen, welche nur von der Geometrie des Netzes und den Gewichten abhängen.

σ_{li} ist die Standardabweichung der i-ten Beobachtung und

$$\sigma_{vi} = \sqrt{\frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{ll}^{(ii)}}} \cdot \sigma_{li}$$

die Standardabweichung der i-ten Verbesserung.

Aus den angegebenen Beziehungen und mittels den Tabellen der Normalverteilung ist es möglich zu berechnen, ob eine genügend grosse Wahrscheinlichkeit vorliegt, mit welcher ein eventueller grober Fehler Δ_i entdeckt wird.

Da die Werte w_i unter sich korreliert sind, ist es hingegen sehr schwierig, die Wahrscheinlichkeit β zu bestimmen, dass bei Vorhandensein eines groben Fehlers Δ_i für alle Beobachtungen die Ungleichung

$$|w_i| \leq w_{GR} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

erfüllt ist.

Mit anderen Worten: wenn als Prüfverfahren der Test der standardisierten Verbesserungen gewählt wird, kann keine vollständige statistische Zuverlässigkeitsanalyse des Messsystems durchgeführt werden.

19 Geometrische Zuverlässigkeit

19.1 Theorie

Die Formeln für die Bestimmung der grössten groben Fehler, welche mit dem angegebenen Test mit Wahrscheinlichkeit $(1-\beta)$ entdeckt werden, enthalten einen Faktor, der im Folgenden näher betrachtet wird.

Für den F-Test ist

$$V_i = \sigma_{li} \sqrt{\frac{q_{11}^{(ii)}}{q_{vv}^{(ii)}}} \cdot \sqrt{\lambda} \quad .$$

Für den eindimensionalen Test der standardisierten Verbesserungen ist

$$V_i = \sigma_{li} \sqrt{\frac{q_{11}^{(ii)}}{q_{vv}^{(ii)}}} \cdot \lambda_{wi} \quad .$$

Man beachte, dass die λ -Werte in beiden Formeln ganz verschiedene Bedeutung haben und von α , β und beim F-Test auch vom Freiheitsgrad f abhängen.

Es ist sofort ersichtlich, dass die geometrischen Eigenschaften des Netzes in beiden Fällen nur einen Einfluss auf den Faktor $q_{11}^{(ii)} / q_{vv}^{(ii)}$ haben.

Wenn die Zuverlässigkeit mehrerer Varianten verglichen wird, ist es oft nicht nötig, die einzelnen V_i explizit zu berechnen. Eine Angabe über das Verhältnis zwischen den V_i der verschiedenen Varianten genügt.

Da die Netze, welche einander als Alternative gegenübergestellt werden, etwa gleich gross sein müssen und der zum Messsystem gehörende Test (inkl. α und β) konstant bleibt, ist es sinnvoll, die λ -Werte in allen Varianten gleich gross anzunehmen und davon auszugehen, dass die Zuverlässigkeitsvariationen nur von

$$1/z_i = \frac{q_{11}^{(ii)}}{q_{vv}^{(ii)}}$$

verursacht werden. Wenn die z_i für alle Beobachtungen der einzelnen Varianten berechnet werden, ist es dann möglich, die zuverlässigste Lösung zu bestimmen.

Der Koeffizient z_i hängt ausschliesslich von der Netzgeometrie (inkl. Gewichtsverhältnisse) ab und ist leicht zu berechnen, wie in 10.3 gezeigt wurde, sodass er als Indikator der Zuverlässigkeit der entsprechenden Beobachtung im Netz verwendet werden kann. Er wird 'lokales Zuverlässigkeitsmass' /Pelzer 1980/ oder 'Koeffizient der geometrischen Zuverlässigkeit' /Walter 1980/ genannt.

Mit diesem Koeffizienten ist es möglich, die Zuverlässigkeit von Netzen zu vergleichen und ausgehend aus einfachen, als zuverlässig anerkannten Konfigurationen Schlüsse zu ziehen über die Zuverlässigkeit von komplexeren Messanordnungen.

Ein Grenzwert für den Koeffizienten

$$z_i = \frac{q_{vv}^{(ii)}}{q_{ll}^{(ii)}}$$

könnte als objektives Beurteilungskriterium für die Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme in amtlichen Vorschriften verwendet werden. Der Verfasser führte auf Anregung von Prof. R. Conzett im Triangulationsprogramm KONETZ das obengenannte Zuverlässigkeitsmass als Indikator der Zuverlässigkeit ein /Carosio 1972/. Das Verfahren wurde bei der Planung des Durchschlagsnetzes zur Gotthard-Basislinie verwendet /P. Gerber 1974/.

Aufgrund seiner Einfachheit eignet sich der Koeffizient der geometrischen Zuverlässigkeit ausgezeichnet für den praktischen Einsatz. Er wird daher in der angegebenen oder einer leicht veränderten Form auch in neueren Publikationen angegeben, siehe z.B. in /Pelzer 1980/ die äquivalente Belegungszahl ($= 1/(1-z_i)$) oder die Grössen λ_i ($= 1/z_i$) in /Grafarend u.a. 1979/ und den indirekten Ueberbestimmungsgrad ($= z_i/(1-z_i)$) in /Gerber 1974/.

19.2 Anwendungen

19.2.1 Höhenbestimmung aus Doppelnivellement

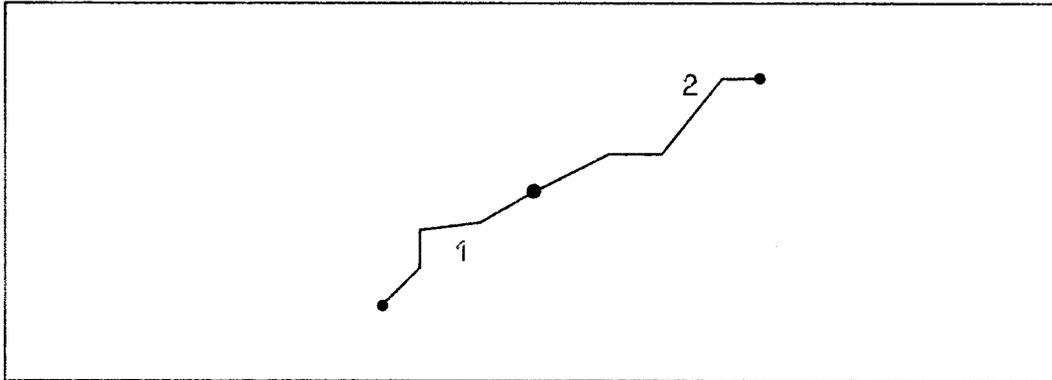


Abb. 26. Doppelpertes Nivellement.

Lokales Zuverlässigkeitsmass :

| Messung | q_{VV}/q_{11} |
|---------|-----------------|
| 1 | 0.50 |
| 2 | 0.50 |

19.2.2 Höhenbestimmung durch vier Nivellemente

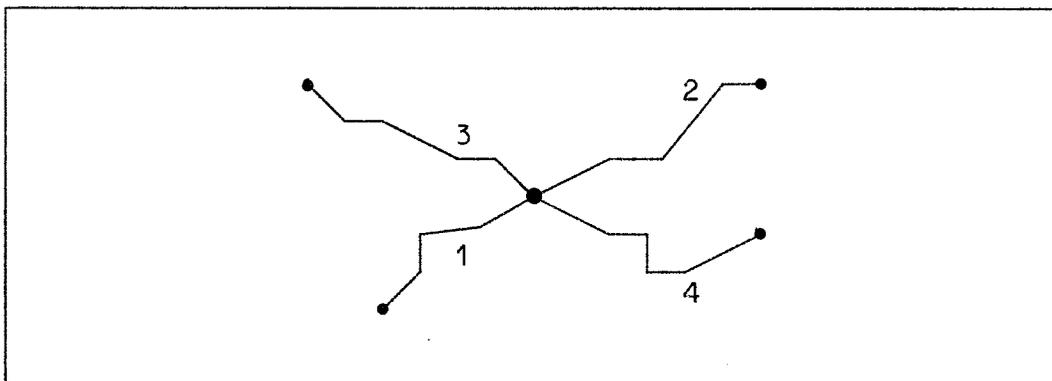


Abb. 26. Vierfaches Nivellement.

Lokales Zuverlässigkeitsmass :

| Messung | q_{VV}/q_{11} |
|---------|-----------------|
| 1 | 0.75 |
| 2 | 0.75 |
| 3 | 0.75 |
| 4 | 0.75 |

19.2.3 Winkelmessung in Dreiecksnetzen

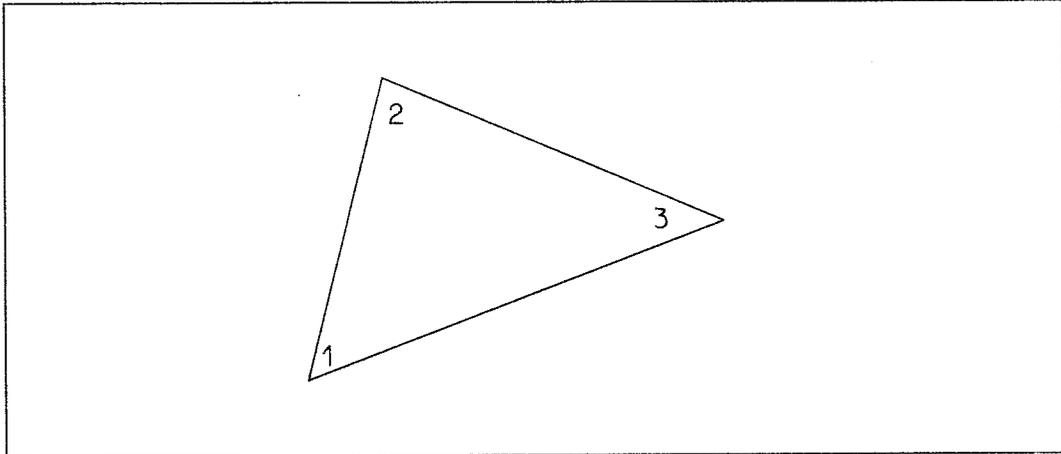


Abb. 28. Einfaches Dreiecksnetz.

Lokales Zuverlässigkeitsmass :

| Messung | q_{VV}/q_{11} |
|---------|-----------------|
| 1 | 0.33 |
| 2 | 0.33 |
| 3 | 0.33 |

19.2.4 Kombiniertes Netz

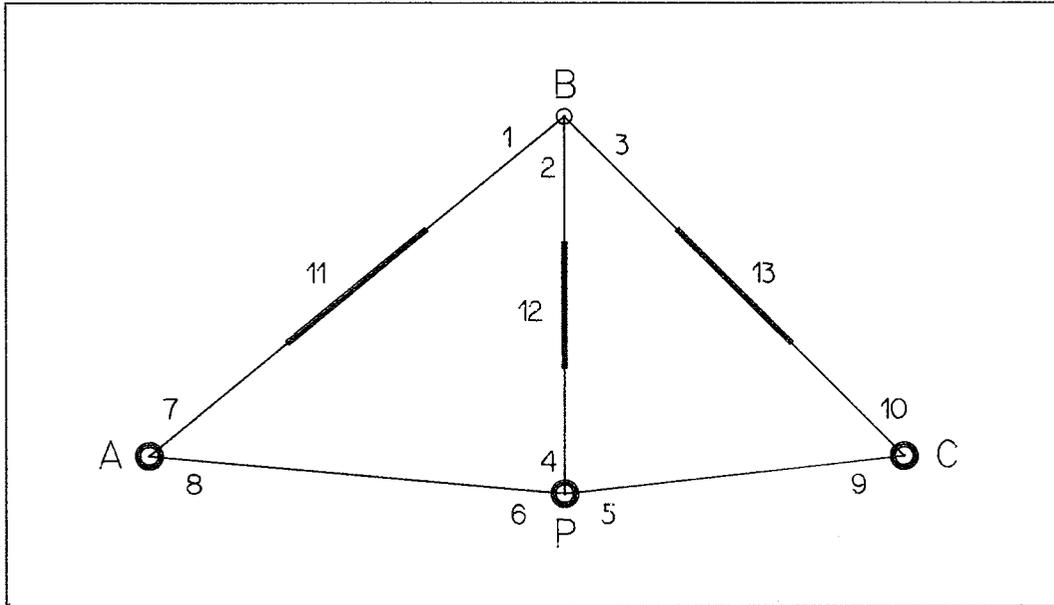


Abb. 29. Das kombinierte Netz.

Lokales Zuverlässigkeitsmass :

| | Messung | q_{vv}/q_{11} |
|-------------|---------|-----------------|
| Richtungen: | 1 | 0.50 |
| | 2 | 0.60 |
| | 3 | 0.51 |
| | 4 | 0.42 |
| | 5 | 0.60 |
| | 6 | 0.60 |
| | 7 | 0.43 |
| | 8 | 0.43 |
| | 9 | 0.42 |
| | 10 | 0.42 |
| Distanzen: | 11 | 0.69 |
| | 12 | 0.70 |
| | 13 | 0.66 |

20 Hauptkomponentenanalyse und Zuverlässigkeit

20.1 Einführung

In der Beschreibung der Beurteilungsverfahren aufgrund der durchgeführten Messungen (Kapitel 13) wurde darauf verwiesen, dass die Hauptkomponentenanalyse und der NMAX-Test sehr geeignete Prüfverfahren sind, da sie einerseits die lokale Wirkung von eventuellen groben Fehlern berücksichtigen und andererseits auch einen Gesamttest ermöglichen.

Selbstverständlich kann man sich jetzt fragen, ob die Zuverlässigkeit des Messsystems streng berechnet werden kann, wenn die zum System gehörenden Testverfahren die Hauptkomponentenanalyse oder der gleichwertige NMAX-Test sind.

20.2 Die Lösung

In Kapitel 12.2 wurden die Hauptkomponenten des Verbesserungsvektors berechnet:

$$W = U^T V$$

(V ist der Verbesserungsvektor und U die Eigenvektorenmatrix der Kofaktorenmatrix Q_{VV}). Für die Durchführung des Tests wurden dann die Hauptkomponenten W standardisiert

$$S = (w_1/\sqrt{\lambda_1}, w_2/\sqrt{\lambda_2}, \dots),$$

wo die λ_i die Eigenwerte der Matrix Q_{VV} sind. Die Komponenten von S , für welche $\lambda_i = 0$ ist, werden gestrichen (sodass S nur f -dimensional ist). Wenn die Matrix

$$\Lambda^{-1/2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{vmatrix}$$

eingeführt ist, kann die folgende Beziehung hergestellt werden:

$$S = \Lambda^{-1/2} U^T V .$$

Gemäss /Linkwitz 1960/ ist für unkorrelierte Beobachtungen

$$V = -Q_{VV}^T P L ,$$

sodass

$$S = - \Lambda^{-1/2} U^T Q_{VV}^T P L ,$$

und wenn

$$G^T = - \Lambda^{-1/2} U^T Q_{VV}^T P$$

ist, dann gilt

$$S = G^T L .$$

Die standardisierten Hauptkomponenten s_i sind die linearen Funktionen der Beobachtungen, welche durch die Matrix G^T (f, n) definiert sind.

Falls ein grober Fehler Δ_i die i -te Beobachtung verfälscht, verändern sich auch die Komponenten s_k von S .

Nach diesen Vorbemerkungen ist es möglich, in Anlehnung an die Herleitungen von W. Baarda die Zuverlässigkeit des Messsystems zu prüfen.

Folgendes wird vorausgesetzt:

Auf die einzelnen Testgrössen s_k wirkt nur ein einziger eventueller grober Fehler, d.h. die Häufigkeit der groben Fehler ist so gering, dass im Einflussbereich jeder Beobachtung höchstens einer zu befürchten ist.

Falls die i -te Beobachtung durch einen groben Fehler Δ_i verfälscht ist, ist s_k weiterhin normalverteilt aber mit Erwartungswert

$$\lambda_k = \xi_{ik} \Delta_i$$

anstatt Null (λ_k = Nichtzentralitätsparameter).

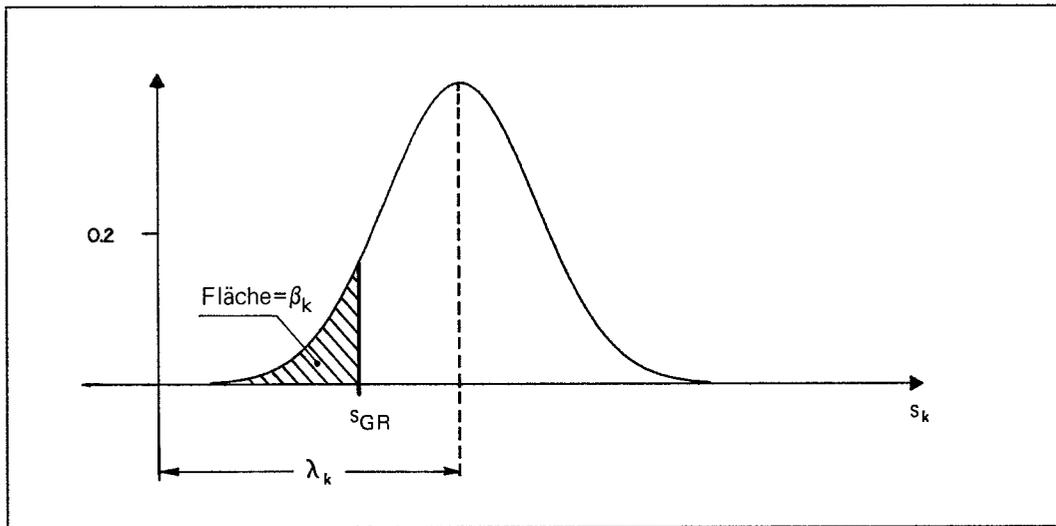


Abb. 30. Wahrscheinlichkeitsdichte einer Komponente des Testvektors S beim Auftreten eines groben Fehlers.

Beweis

Es seien:

$$S = (s_1, s_2, \dots, s_f)$$

der Testvektor für das fehlerfreie Modell und

$$S^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_f^*)$$

der Testvektor für das Modell, in dem die i -te Messung l_i durch $l_i + \Delta_i$ ersetzt ist und

$$\lambda_k = E(s_k)$$

der Erwartungswert für die k -te Komponente des Testvektors S^* .

Da

$$s_k^* = g_{1k} l_1 + g_{2k} l_2 + \dots + g_{ik}(l_i + \Delta_i) + \dots + g_{nk} l_n = s_k + g_{ik} \Delta_i$$

ist, folgt :

$$E(s_k^*) = E(s_k) + E(g_{ik} \Delta_i) = 0 + g_{ik} \Delta_i$$

und danach

$$\lambda_k = g_{ik} \Delta_i$$

Von der Annahmeschranke s_{GR} des NMAX-Tests (siehe Testbeschreibung in Kapitel 13) und von der Tabelle der Normalverteilung kann die Wahrscheinlichkeit β_k abgelesen werden, dass trotz dem groben Fehler Δ_i die k-te Komponente von S^* in den Annahmebereich fällt (Fehler 2. Art).

Die angegebenen Beziehungen erlauben es, für jede Komponente zu berechnen, wie gut die Hauptkomponentenanalyse mit der Annahmeschranke α wirkt und wie gross die Wahrscheinlichkeit (β_k) ist, dass trotz dem groben Fehler die k-te Komponente von S in den Annahmebereich fällt.

Ein Fehler zweiter Art (d.h. fälschlicherweise Annahme der Nullhypothese) entsteht, wenn trotz dem groben Fehler alle Komponenten von S in den Annahmebereich fallen. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\beta = \iiint \dots \int_{\text{Annahmebereich}} f(S) ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3 \dots$$

wo f die mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte der multivariaten stochastischen Variablen S ist, welche den Erwartungswert $(g_{i1}, g_{i2}, g_{i3} \dots) \cdot \Delta_i$ aufweist.

Da die einzelnen Komponenten statistisch unabhängig sind, kann die oben angegebene Gesamtwahrscheinlichkeit aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers 2. Art für jede einzelne

Komponente berechnet werden

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_f$$

$$\beta = \int_{\substack{\text{Annahme-} \\ \text{bereich} \\ \text{(1-dimensional)}}} f_1(s_1) ds_1 \int_{\substack{\text{Annahme-} \\ \text{bereich} \\ \text{(1-dimensional)}}} f_2(s_2) ds_2 \cdot \dots$$

Die f_k sind die eindimensionalen Normalverteilungen der einzelnen Komponenten von S. Sie haben Varianz = 1 und Erwartungswert

$$E(f_k) = \lambda_k = \xi_{ik} \cdot \Delta_i$$

Die Werte der einzelnen Integrale sind der Tabelle der Normalverteilung zu entnehmen.

Nachdem für jede Beobachtung der grösste, noch unschädliche grobe Fehler festgelegt worden ist, kann die Wahrscheinlichkeit β berechnet werden, dass der Fehler nicht entdeckt wird (erste Zuverlässigkeitsdefinition).

In ähnlicher Art kann man festlegen, wie gross der Fehler V_i ist, der mit einer bestimmten vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1 - \beta_0)$ aufgedeckt werden kann (zweite Zuverlässigkeitsdefinition).

20.3 Rechnerisches Vorgehen

Die Zuverlässigkeit eines Messsystems, in welchem als Testverfahren die Hauptkomponentenanalyse gewählt wurde, kann im Fall der vermittelnden Ausgleichung (Gauss-Markov-Modell) in folgender Reihenfolge berechnet werden:

- Verbesserungsgleichungen und Gewichtsmatrix bilden ($\sigma = 1$ einfachheitshalber)
- Ausgleichung

- Q_{VV} rechnen aus

$$Q_{VV} = Q_{11} - A (A^T P A)^{-1} A^T$$
- Hauptachsentransformation von Q_{VV} berechnen mit Bestimmung der Eigenvektorenmatrix U und der Eigenwertmatrix Λ
- Nulleigenwerte und entsprechende Eigenvektoren streichen
- Berechnen von $\Lambda^{-1/2}$,

$$G^T = - \Lambda^{-1/2} U^T Q_{VV} P$$
 und

$$S = G^T L .$$
- Der NMAX-Verteilung für den Freiheitsgrad f des Netzes sind Werte x_{GR} zu entnehmen, sodass

$$NMAX (-x_{GR}, x_{GR}) = \alpha .$$
- Aus den grössten, noch als unschädlich angenommenen groben Fehlern jeder Beobachtung kann dann für jede Komponente s_k des Testvektors S berechnet werden, wie gross die Wahrscheinlichkeit β_k eines Fehlers 2. Art ist.
- Daraus folgt dann durch einfache Multiplikation die Gesamtwahrscheinlichkeit β eines Fehlers 2. Art für die entsprechende Beobachtung.
- Falls sich die β aller Beobachtungen im tolerierten Bereich befinden, ist das Messsystem zuverlässig (innere Zuverlässigkeit).
- Falls die zweite Zuverlässigkeitsdefinition vorgezogen wird, kann für jede Beobachtung aus der gewählten Wahrscheinlichkeit β_0 das entsprechende V_i iterativ berechnet werden. Falls die V_i aller Beobachtungen kleiner sind als die grössten noch unschädlichen groben Fehler, ist das Messsystem zuverlässig. In den

beigelegten Rechenprogrammen wurde in Anlehnung an die früheren Publikationen /Baarda 1968/ diese Lösung gewählt.

- Mit Hilfe der Matrix $-(A^T P A)^{-1} A^T P$ ist es möglich, die Wirkung der ∇_i auf die Unbekannten zu bestimmen. Davon ausgehend kann man die äussere Zuverlässigkeit berechnen.

Anhang 1 enthält das entsprechende FORTRAN-Programm für die Berechnung der ∇_i .

20.4 Anwendungen

20.4.1 Dreiecksnetz

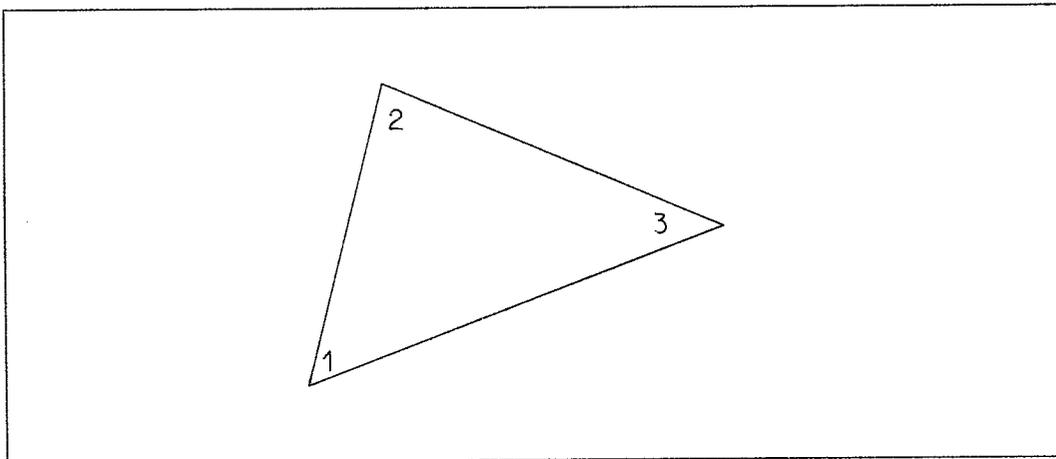


Abb. 31. Einfaches Dreiecksnetz.

$$G^T = -\Lambda^{-1/2} U^T Q_{VV} P$$

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---------|---------|---------|
| G | 0.11547 | 0.11547 | 0.11547 |

Zuverlässigkeit (nach dem NMAX-Test)

für $\alpha = 5\%$, $\beta = 20\%$ und $f = 1$

| Messung | σ_i | V_i | V_i/σ_i |
|---------|------------|-------|----------------|
| 1 | 5.0 | 24.3 | 4.9 |
| 2 | 5.0 | 24.3 | 4.9 |
| 3 | 5.0 | 24.3 | 4.9 |

Da für $f = 1$ NMAX-Test und F-Test identisch sind, fallen die Zuverlässigkeiten nach Baarda und nach dem NMAX-Test, abgesehen von kleinen Rechenungenauigkeiten, gleich aus.

20.4.2 Mehrfaches Dreiecksnetz (3 Dreiecke)

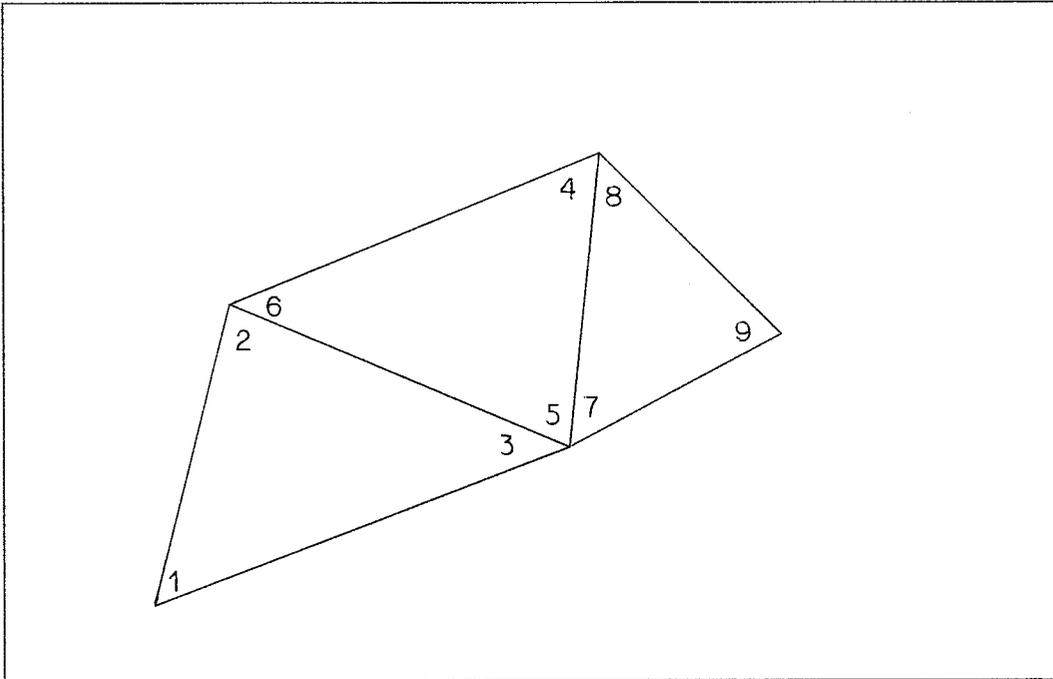


Abb. 32. Dreifaches Dreiecksnetz.

$$G^T = - \Lambda^{-1/2} U^T \cdot Q_{VV} \cdot P$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| G1 | 0.11547 | 0.11547 | 0.11547 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G2 | 0 | 0 | 0 | 0.11547 | 0.11547 | 0.11547 | 0 | 0 | 0 |
| G3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.11547 | 0.11547 | 0.11547 |

Zuverlässigkeit (nach dem NMAX-Test)
 für $\alpha = 5\%$, $\beta = 20\%$ und $f = 30$

| Messung | σ_i | V_i | V_i/σ_i |
|---------|------------|-------|----------------|
| 1 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| 2 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| 3 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| 4 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| 5 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| 6 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| 7 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| 8 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| 9 | 5.0 | 34.4 | 6.9 |
| | | | |
| | | | |

Die Berechnung der Zuverlässigkeit nach dem F-Test ergibt
 $V_i/\sigma_i = 8.5$

20.4.4 Mehrfaches Dreiecksnetz (100 Dreiecke)

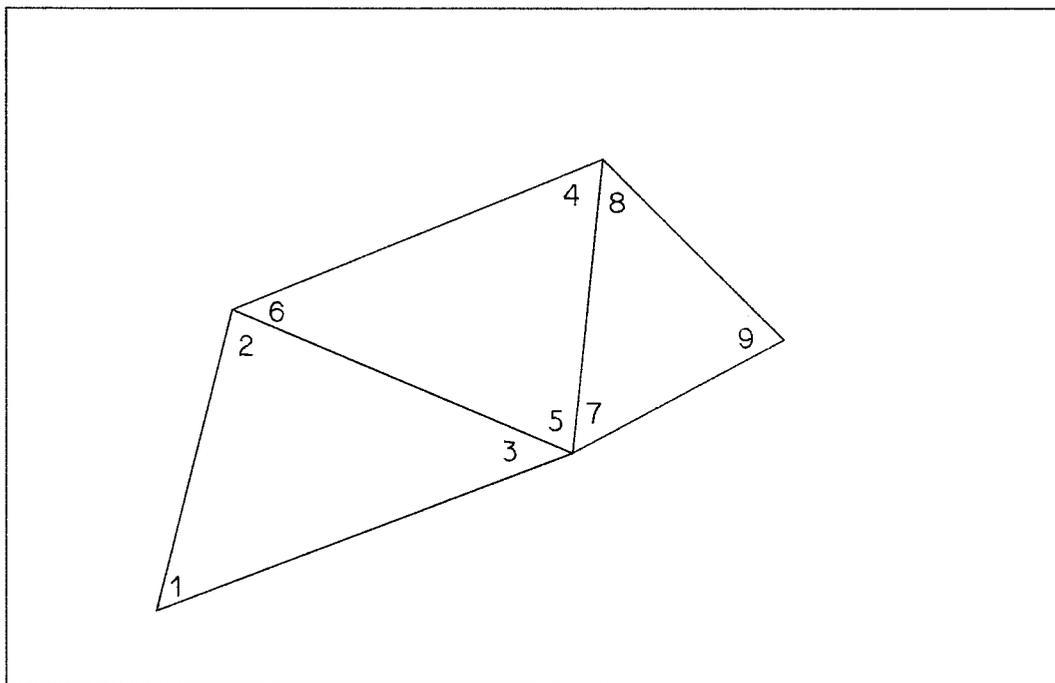


Abb. 34. Mehrfaches Dreiecksnetz.

$$G^T = - \frac{1}{2} U^T \cdot Q_{VV} \cdot P$$

| | | | | | | | | | | |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| G1 | 0.11547 | 0.11547 | 0.11547 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G2 | 0 | 0 | 0 | 0.11547 | 0.11547 | 0.11547 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.11547 | 0.11547 | 0.11547 | 0 |
| ... | | | | | | | | | | |
| ... | | | | | | | | | | |
| G100 | ... | ... | | | | | | | | |

Zuverlässigkeit (nach dem NMAX-Test)

für $\alpha = 5\%$, $\beta = 20\%$ und $f = 100$

| Messung | σ_i | V_i | V_i/σ_i |
|---------|------------|-------|----------------|
| 1 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| 2 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| 3 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| 4 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| 5 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| 6 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| 7 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| 8 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| 9 | 5.0 | 37.4 | 7.5 |
| | | | |
| | | | |

Das gleiche Beispiel ergab bei der Berechnung der Zuverlässigkeit nach dem F-Test $V_i/\sigma_i = 11.0$.

20.4.5 Kombiniertes Netz

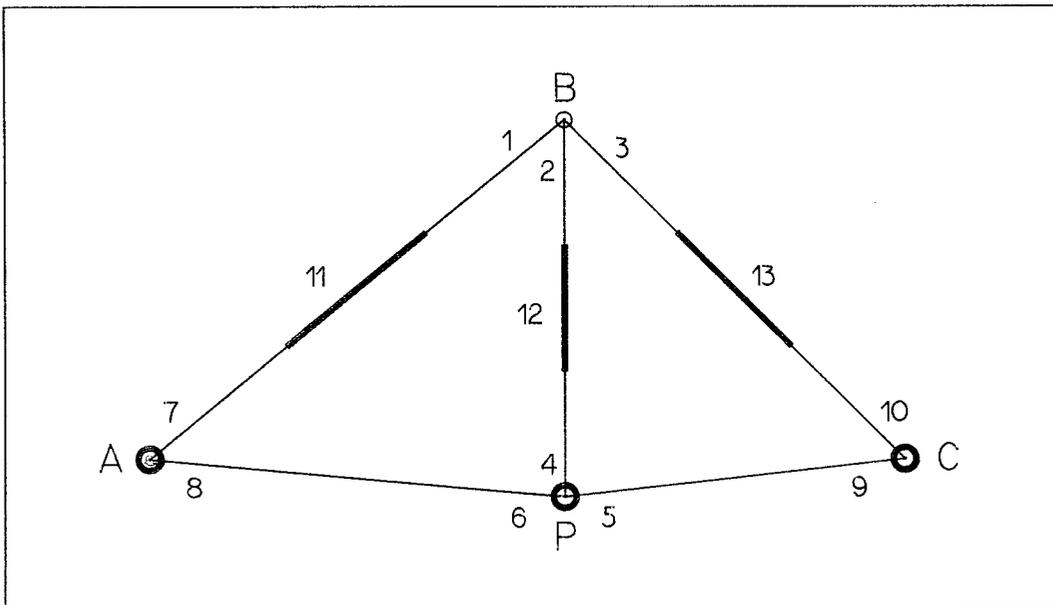


Abb. 35. Ein kombiniertes Netz

$$G^T = -\Lambda^{-1/2} U^T \cdot Q_{VV} \cdot P$$

| | | | | | | | | |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| G1 | -0.09633 | 0.14291 | -0.04658 | -0.05869 | 0.02935 | 0.02935 | 0.01127 | -0.01127 |
| G2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.14142 | -0.14142 | 0 | 0 |
| G3 | -0.04273 | -0.04411 | 0.08685 | -0.02865 | 0.01432 | 0.01432 | 0.11622 | -0.11622 |
| G4 | 0.03604 | 0.01397 | -0.05000 | -0.07740 | 0.03870 | 0.03870 | 0.02803 | -0.02803 |
| G5 | 0.03231 | -0.03877 | 0.00646 | -0.07771 | 0.03886 | 0.03886 | -0.02274 | 0.02274 |
| G6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G7 | 0.08089 | 0.00937 | -0.09027 | 0.01761 | -0.00880 | -0.00880 | 0.04897 | -0.04897 |
| | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | | | |
| G1 | 0.03679 | -0.03679 | 0 | 0 | 0 | | | |
| G2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| G3 | 0.01482 | -0.01482 | 0 | 0 | 0 | | | |
| G4 | -0.11280 | 0.11280 | 0 | 0 | 0 | | | |
| G5 | 0.03567 | -0.03567 | 0.06243 | 0.00757 | -0.04731 | | | |
| G6 | 0 | 0 | -0.04892 | 0.06884 | -0.05355 | | | |
| G7 | 0.03662 | -0.03662 | 0.02382 | 0.04725 | 0.03899 | | | |

Zuverlässigkeit (nach dem NMAX-Test)

für $\alpha = 5\%$, $\beta = 20\%$ und $f = 7$

| Messung | σ_i | V_i | V_i/σ_i (NMAX-Test) | V_i/σ_i (F-Test) |
|--------------|------------|-------|-------------------------------|----------------------------|
| Richtungen 1 | 5.0 | 30.2 | 6.0 | 5.3 |
| 2 | 5.0 | 24.0 | 4.8 | 4.8 |
| 3 | 5.0 | 30.1 | 6.0 | 5.3 |
| 4 | 5.0 | 33.5 | 6.7 | 5.8 |
| 5 | 5.0 | 24.2 | 4.8 | 4.8 |
| 6 | 5.0 | 24.2 | 4.8 | 4.8 |
| 7 | 5.0 | 29.1 | 5.8 | 5.7 |
| 8 | 5.0 | 29.1 | 5.8 | 5.7 |
| 9 | 5.0 | 29.9 | 6.0 | 5.8 |
| 10 | 5.0 | 29.9 | 6.0 | 5.8 |
| Distanzen 11 | 10.0 | 48.8 | 4.9 | 4.5 |
| 12 | 10.0 | 46.5 | 4.6 | 4.5 |
| 13 | 10.0 | 51.7 | 5.2 | 4.6 |

Das Beispiel zeigt, dass die Zuverlässigkeit nach dem NMAX-Test nicht immer höher ist als diejenige nach dem F-Test. Vor allem wenn der Freiheitsgrad klein ist, kann sich der F-Test als wirksamer erweisen.

Schlussfolgerungen

Schlussfolgerungen

Die Planung geodätischer Messoperationen, die Beurteilung der Eigenschaften des vorgesehenen Messsystems sowie die sich daraus ergebenden Konklusionen über die Resultate nach Abschluss der Arbeit gehören zu den wichtigsten Aufgaben des Vermessungsingenieurs.

Zur Interpretation der Resultate ist eine Ueberprüfung der Modellannahmen und eine Untersuchung auf allfällig vorhandene Modellfehler nötig. Dafür können zahlreiche Verfahren, von den klassischen, mehr intuitiven Lösungen ausgehend bis zu den modernen Methoden der mathematischen Statistik, eingesetzt werden.

In einer kurzen Gegenüberstellung wird gezeigt, dass die intuitiven Methoden der Praktiker (z.B. der V-Test oder der Test der geometrischen Bedingungen) empfindlich reagieren beim Auftreten lokaler Modellfehler (z.B. grober Fehler), sich jedoch für den Aufbau eines mathematisch korrekten Globaltests nicht eignen, während die üblichen Globaltests wie der F-Test die Beurteilung der geodätischen Netze in ihrer Gesamtheit sowie die Aufdeckung von nicht lokal begrenzten Modellfehlern erlauben, aber vor allem in ausgedehnten Netzen nur recht grosse lokale Modellunstimmigkeiten aufzeigen.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, wird im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit der NMAX-Test zur Anwendung empfohlen, mit welchem der Verbesserungsvektor einer Ausgleichung überprüft werden kann. Es handelt sich um eine Applikation der Hauptkomponentenanalyse und der Ordnungsstatistiken, die die Durchführung eines statistischen Tests für das gesamte Netz (Globaltest) erlaubt und das Auftreten von lokalen Modellfehlern mit in der Regel besserer Empfindlichkeit als der F-Test aufdeckt. Die positiven Eigenschaften der intuitiven Methoden und die klaren mathematischen Grundlagen der bisher verwendeten Globaltests sind also im NMAX-Test vereint.

Mittels einiger Beispiele wird gezeigt, wie kleine grobe Fehler, die dem F-Test entgehen, vom NMAX-Test hingegen aufgedeckt werden (13.3.2 und 13.3.3).

Neben der Antwort auf die Frage, ob das mathematische Modell angenommen oder verworfen werden soll, liefert der NMAX-Test Hinweise, die die Lokalisierung des eventuell aufgetretenen Fehlers erleichtern. Die linearen Beziehungen zwischen den Beobachtungen und den Testgrössen geben durch die Beträge ihrer Koeffizienten Informationen, die die Abgrenzung des fehlerverdächtigen Netzteils ermöglichen.

Die erste Auswirkung des vorgestellten Testverfahrens ist hier bereits zu erkennen. Da der NMAX-Test auf einem mathematischen Modell aufgebaut ist, eignet er sich für eine automatische Durchführung in einer elektronischen Rechenanlage und kann daher ohne besondere Schwierigkeiten Bestandteil von Computerprogrammen für die Ausgleichung geodätischer Netze werden (ein möglicher Rechenablauf ist in 13.9 beschrieben; das entsprechende FORTRAN-Programm ist als Anhang beigelegt). Wenn man bedenkt, dass das Verfahren mindestens so empfindlich wie die zur Zeit noch eingesetzten intuitiven Methoden und unter vielen Gesichtspunkten nichts anderes als deren mathematische Formulierung ist, ist leicht einzusehen, dass der NMAX-Test eine grosse Bedeutung für die Rechenpraxis erlangen kann.

Eine zweite Folge des NMAX-Tests betrifft die Theorie der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme und bildet den dritten Teil der vorliegenden Arbeit.

In den einleitenden Kapiteln wird erklärt, dass die Zuverlässigkeit keineswegs eine Eigenschaft des geodätischen Netzes allein ist sondern ein Merkmal des Zusammenwirkens der Netzgeometrie, der Anforderungen an das Vermessungswerk und der statistischen Tests, die man für die Beurteilung der Resultate einsetzen wird. Diese drei Elemente bilden das Messsystem, das das eigentliche Objekt der Zuverlässigkeitstheorie ist. Die Entwicklung eines neuen Tests beeinflusst daher auch die Berechnung der Zuverlässigkeit des geodätischen Messsystems.

W. Baarda bezieht seine bahnbrechende Theorie über die Zuverlässigkeit auf die Durchführung des F-Tests zur Ueberprüfung der Modelleigenschaften. Die Verwendung des NMAX-Tests zur Beurteilung des mathematischen Modells führt zu einer anderen Bewertung der Zuverlässigkeit. In Kapitel 20 (III. Teil) sind die theoretischen Grundlagen dafür dargestellt. Einige Resultate können den Beispielen entnommen werden und zeigen, dass die

Zuverlässigkeit nach Baarda (F-Test) in der Regel grössere kritische Fehler (∇_i/σ_i) angibt als die Zuverlässigkeit nach dem NMAX-Test. Die Unterschiede werden umso deutlicher, je grösser der Freiheitsgrad des Netzes ist. Die folgende Tabelle zeigt die Zuverlässigkeitskenngrössen für beide Testverfahren und für reine Dreiecksnetze verschiedener Ausdehnung (Kapitel 17.2 und 20.4).

| Netz | f | ∇_i/σ_i F-Test | ∇_i/σ_i NMAX-Test |
|---------------------------------|-----|-------------------------------|----------------------------------|
| 1 Dreieck | 1 | 4.8 | 4.9 |
| 3 Dreiecke | 3 | 5.7 | 5.6 |
| 30 Dreiecke | 30 | 8.5 | 6.9 |
| 100 Dreiecke | 100 | 11.0 | 7.5 |
| $\alpha = 5\%$, $\beta = 20\%$ | | | |

Für $f=1$ sind beide Tests identisch, und die aufgetretene Differenz ist auf die verwendeten Näherungen in der Berechnungsmethode zurückzuführen. Die grösseren Dreiecksnetze zeigen eindeutig, dass wer mit dem NMAX-Test eventuell vorhandene grobe Fehler sucht, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit kleinere Fehler finden kann, als wer den einfacheren, aber weniger wirksamen F-Test verwendet.

Neben den beiden erwähnten Konsequenzen für die Praxis sind die Folgen im theoretischen Bereich besonders zu betonen. Die dargestellte Verallgemeinerung der Zuverlässigkeitstheorie erlaubt eine klare Beschreibung der Grundlagen und bietet eine Uebersicht über die Beziehungen zwischen statistischem Test und Zuverlässigkeit sowie zwischen intuitiven Verfahren aus der geodätischen Praxis und denjenigen der analytischen Statistik, die immer mehr an Bedeutung gewinnen. Der Praktiker wird in der beschriebenen Theorie die mathematische Formulierung einiger ihm bekannter Arbeitsmethoden wiederfinden; der Theoretiker wird aus der Klarstellung einiger Begriffe und aus den Anregungen zu weiteren Entwicklungen ebenfalls Nutzen ziehen können.

Die Arbeit stellt viele Fragen; einige davon wurden beantwortet. Zahlreicher jedoch sind die Probleme, die der Lösung noch harren. Manche

der offen gebliebenen Fragen sind im Text formuliert und sollen als Vorschlag für weitere Studien und Untersuchungen gelten. Hier einige Beispiele: Die Optimierung der Algorithmen für die Hauptachsentransformation, das Testverfahren mit den geschätzten Varianzen (TMAX-Test), die Optimierung des Prüfvektors S des NMAX-Tests mit den Methoden der Faktorenanalyse, die Berechnung des Prüfvektors S aus den Bedingungs-gleichungen, verfeinerte Verfahren für die Fehlerlokalisierung, die Entwicklung von für die Praxis geeigneten Computerprogrammen usw.

Der Verfasser beabsichtigte, mit der vorliegenden, hiermit abgeschlossenen Abhandlung einige moderne mathematische Instrumente für die geodätische Praxis zu entwickeln und durch eine weitgehend elementare Formulierung die Beziehungen zwischen den üblichen intuitiven Methoden und den entsprechenden Verfahren der analytischen Statistik auch dem Praktiker zugänglich zu machen. Er hofft, aufgrund der erreichten Resultate diesem Ziel einigermaßen nahe gekommen zu sein.

Literatur

- (1) H.R. Andris, 1967. ITRGA05. FORTRAN-Programm für die automatische Berechnung von Dreieckschlussfehler.
Programmbeschreibung. Vermessungsamt Baselland, Liestal.
- (2) W. Baarda, 1968. A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, 2/5.
- (3) W.K. Bachmann, 1973. Estimation stochastique de la précision des mesures, Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Zürich, 4-1973.
- (4) A. Carosio, 1972. Programmbeschreibung Konetz.
- (5) A. Carosio, 1974. Austauschverfahren und Elimination der Orientierungsunbekannten, Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Zürich, 8-1974.
- (6) H. Chernoff, 1971. The use of faces to represent points in n-dimensional space graphically. Technical Report 71, Stanford University, Dep. of Statistics.
- (7) R. Conzett, 1972. Kontrolle der Punktkoordinaten einer Einzelpunkteinschaltung mittels statistischer Tests (nach Baarda), Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich (Vorlesung).
- (8) R. Conzett, 1978. Das Austausch-Verfahren bei der Berechnung geodätischer Netze, Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kulturtechnik an der Technischen Universität Hannover, Nr. 83.
- (9) R. Conzett, 1981. Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, (Vorlesung).
- (10) H. A. David, 1981. Order Statistics, Wiley + Sons Inc. New York.
- (11) H. Dupraz, W. Niemeier 1979. Un critère pour l'analyse des réseaux géodésiques de contrôle, Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Zürich, 4-1979.
- (12) B. Flury und H. Riedwyl, 1980. Angewandte multivariate Statistik, Vorabdruck.
- (13) B. Flury und H. Riedwyl 1981. Graphical representation of multivariate data by means of asymmetrical faces. Journal of the American Statistical Association, dec. 1981 vol 76, number 376.
- (14) P. Gerber, 1974. Das Durchschlagsnetz zur Gotthard-Basislinie, Schweiz. Bauzeitung, Heft 13, 1974.

- (15) E. Grafarend, H. Heisler, R. Kelm, H. Kropff, B. Schaffrin, 1979. Optimierung geodätischer Messoperationen, Wichmann, Karlsruhe.
- (16) W. Grossmann, 1969. Grundzüge der Ausgleichsrechnung, Springer, Berlin.
- (17) E. Gubler, 1975. Elektronische Triangulationsberechnung, Programmbeschreibung. Bundesamt für Landestopographie, Wabern.
- (18) B. Heck, 1980. Statistische Ausreisserkriterien zur Kontrolle geodätischer Beobachtungen. VIII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung, Zürich, 24.9. - 1.10.1980.
- (19) C. Just, 1979. Statistische Methoden zur Beurteilung der Qualität einer Vermessung. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, Mitteilung Nr. 27.
- (20) H. J. Kowalsky, 1965. Lineare Algebra, de Gruyter + Co., Berlin.
- (21) K. Kraus, 1975. Verschiedene Transformationen und Indikatoren zur Lokalisierung grober Datenfehler, Allgemeine Vermessungsnachrichten, 1-1975.
- (22) E. Kreyszig, 1968. Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Vandenhoeck + Ruprecht, Göttingen.
- (23) A. Lichnerowicz, 1960. Algèbre et analyse linéaires, Masson et Cie, Paris.
- (24) K. Linkwitz, 1960. Ueber die Systematik verschiedener Formeln der Ausgleichsrechnung, Zeitschrift für Vermessungswesen, 5-1960.
- (25) W. Maurer, 1979. Multivariate Methoden, Anwendungen und Zusammenhänge, Seminar der Internationalen biometrischen Gesellschaft, Interlaken.
- (26) W. Maurer, 1983. Kommentar zur F-Verteilung, Manuskript.
- (27) J. van Mierlo, 1980. Hypothesentests und Zuverlässigkeitsaussagen in Tunnelnetzen. VIII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessung, Zürich, 24.9. - 1.10.1980.
- (28) H. J. Oettli, 1960-1975. Formularsammlung für die Berechnung der Triangulation, Bundesamt für Landestopographie, Wabern.
- (29) H. Pelzer, 1976. Ueber die statistischen Eigenschaften der Ergebnisse von Deformationsmessungen, VII. Internationaler Kurs für Ingenieurvermessungen hoher Präzision, Darmstadt.

- (30) H. Pelzer, 1980. Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung, Konrad Wittwer, Stuttgart.
- (31) C. de Rham, 1981. Einführung in stochastische Simulationsmethoden, System Consult, Fürst + de Rham, Bern, Kursunterlagen.
- (32) H.R. Schwarz, 1970. Die Methode der konjugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 4 - 1970.
- (33) H.R. Schwarz, H. Rutishauser, E. Stiefel, 1972. Matrizen-Numerik, Teubner, Stuttgart.
- (34) E. Stiefel, 1963. Einführung in die numerische Mathematik, Teubner, Stuttgart.
- (35) M. Walter, 1980. Compensation d'observations médiatees par la methode robuste, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich, Bericht Nr. 37.
- (36) H. Wolf, 1975. Ausgleichsrechnung, Dümmler, Bonn.

Anhang

```

Anhang 1: FORTRAN-Programm VERMHA
C
C VERMHA
C VERMITTLANDE AUSGLEICHUNG MIT HAUPTKOMPONENTENANALYSE
C
LOGICAL LOGIC,OPNP$A,FEHL
REAL*8
1 A(34,20),L(34,1),RMF(34),P(34,1),XX,
XALPHA,XBETA,W,BETAO,DELTAO,DELTA1,BETA1,XO,XX1,
3 WO,WI,DICCHI,CC,SS,GI,GM,DI,WURZ,GKR(34)
+ EVERT(34,34),EWERT(34),GMATR(34,34),F(34)
+ ,RR,LAMBDA,ALPHA,DELTA,BETA,DD,DDO,DD1,SMAX
+ ,FF,FGR
+ INTEGER*2 IFILE(16),NOFILE(16),N,M,NMAX,MMAX,I,J,K,LVORZ,
INP,IOUT,KM,NF,ISMAX,INDGKR(34)
C
INP = 5 /* EINGABE
IOUT = 6 /* AUSGABE
KM = 0 /* 0 = KEIN TEST-OUTPUT
C
NMAX = 34 /* MAX. ANZ. MESSUNGEN
MMAX = 20 /* MAX. ANZ. UNBEKANNTE
C
WRITE(1,200)
FORMAT(/15X,45('**')/15X,**,43X,**/15X,**,
1 ,
2 ,
3 43X,**/15X,45('**')//)
C
FILES-ZUTEILUNG
C
LOGIC = OPNP$A('INPUT-FILE',11,1,IFILE,34,1)
IF(IFILE(1).EQ.'') INP = 1
IF(.NOT.LOGIC.AND.INP.NE.1) GO TO 25
LOGIC = OPNP$A('OUTPUT-FILE',11,2,NOFILE,34,2)
IF(NOFILE(1).EQ.'') IOUT = 1
IF(.NOT.LOGIC.AND.IOUT.NE.1) GO TO 26
C
58 WRITE(1,11)
11 FORMAT(
4/' ALPHA UND BETA FUER DIE HAUPTKOMPONENTENANALYSE//
5 ' UND DIE ZUVERLAESSIGKEITSBERECHNUNG (DEF: 5)')//
2 '<- ALPHA-><-BETA-->'
READ(1,5001,ERR=58) ALPHA,BETA
FORMAT(
5001 (1,5001,2F10.0)
IF(ALPHA.LE.0.D0) ALPHA = .05 D0
IF(ALPHA.GT.1.D0) ALPHA = ALPHA/100.D0
IF(BETA.LE.0.D0) BETA = .20 D0
IF(BETA.GT.1.D0) BETA = BETA/100.D0
C
WRITE(IOUT,200)
225 WRITE(IOUT,225)IFILE,NOFILE
FORMAT('EINGABEFIL : ',16A2/
2 'AUSGABEFIL : ',16A2//)
C
EINGABE DER VERBESSERUNGSGLEICHUNGEN
C
IF(INP.EQ.1) WRITE(1,230)
230 FORMAT('N-UNBEKANNTE,N-MESSUNGEN,(EV. FREIHEITSGRAD,VORZ.) :')
READ(INP,731)M,N,NF,LVORZ
731 FORMAT(4I10)
91 IF(N.EQ.0) N = 10000
IF(INP.EQ.1) WRITE(1,91)
FORMAT(/' COEFF., TERMES ABS., ERR.MOY. :'//)
DO 31 I=1,N
READ(INP,*END=32)(A(I,J),J=1,M),L(I,1),RMF(I)
IF(LVORZ.NE.-1) L(I,1) = -L(I,1) /* FUER GEN - GENAEH
P(I,1) = 1.D0/RMF(I)**2 /* GEWICHT
GO TO 33
CONTINUE
N = I
CONTINUE
IF(NF.LE.0) NF = N - M /* WENN NICHT ANDERS GEGEB.
WRITE(IOUT,3)
WRITE(IOUT,4)
FORMAT(/15X,'DATEN DER AUSGLEICHUNG'//)
3
4 FORMAT(1X,'A-MATRIX, ABS.GL, MITTL.FEHLER' ,/)
DO 29 I=1,N
WRITE(IOUT,5)(A(I,J),J=1,M),L(I,1),RMF(I)
5
6 FORMAT(1X,12F10.4)
C
CALL VERMAUS(N,M,NMAX,MMAX,A,L,P,X,QXX,V,PVV,SIGMA,KM,IOUT)
C
IF(KM.EQ.1) CALL MOUT('QXX',3,QXX,M,M,MMAX,MMAX,IOUT)
C
UNBEKANNTE
C
WRITE(IOUT,7)
7 FORMAT(/' 1X,UNBEKANNTE'//)
DO 50 I=1,M
WRITE(IOUT,6) X(I,1)
50
6 FORMAT(F12.4)
WRITE(IOUT,9)
9
9 FORMAT(/)
C
WRITE(IOUT,240)
240 FORMAT(1X,'VERBESSERUNGEN :')
DO 39 I=1,N
WRITE(IOUT,8) I,V(I,1),RMF(I)
39
8 FORMAT(14X,I3,10X,F12.1,2(6X,F10.2))
5000
FORMAT(A2)
WRITE(IOUT,713) PVV
713
713 FORMAT(1X,SUMME PVV = ',F12.2)
FF = SIGMA * SIGMA
WRITE(IOUT,715) SIGMA
715
715 FORMAT(1X,SIGMA = ',F12.2)
C
FGR = DICCHI(1.D0-ALPHA,N-M) / NF
C
WRITE (IOUT,717) ALPHA, NF,FGR,FF
FORMAT(/' VERMERFUNGSGRENZE (FUER DEN F-TEST) :'
717 + ,
+ ' FUER ALPHA =',F8.3,' UND',
+ ' FREIHEITSGRAD =',I8/
+ ' F-GR =',F8.3//
+ ' FUER DAS VORLIEGENDE MODELL IST:'//
+ ' F
+ =',F8.3//)
C
IF(DABS(FF).GT.FGR) WRITE(IOUT,405)
C
IF(DABS(FF).LE.FGR) WRITE(IOUT,406)
C
CALL AQAT(A,QXX,QVV,N,M,NMAX,MMAX)
DO 1110 I=1,N

```

```

1100 DO 1100 J=1,N
1110 QVV(I,J) = -QVV(I,J)
C      QVV(I,I) = QVV(I,I) + RMF(I)**2
C
C      CALL MOUT('QVV',3,QVV,N,N,NMAX,NMAX,IOUT)
C
C      BESTIMMUNG DES NICHTZENTRALITAETSPARAMETER
C      AUS DEN NOMOGRAMMEN IN /BAARDA 1969/
C
C      CALL BAARDA(NF,ALPHA,BETA,LAMBDA)
C
C      BERECHNUNG DER ZUVERLAESSIGKEIT FUER DIE EINZELNEN BEOBSACHTUNGEN
C      FUER DEN F-TEST
C
510   WRITE (IOUT,510) ALPHA,BETA,NF,LAMBDA
      FORMAT(' ZUVERLAESSIGKEIT (FUER DEN F-TEST, NACH BAARDA) ' /
+        ' FUER ALPHA =',F8.3, ' UND BETA =',F8.3 /
+        ' FREIHEITSGRAD =',I6//
+        ' ---> LAMBDA=',F8.3//
+        ' I DELTA DELTA/MF QV/QL MF'//)
      DO 500 I = 1,N
      RR = QVV(I,I) / RMF(I)**2
      DD = DSORT(LAMBDA/QVV(I,I)) * RMF(I)
      DELTA = DD * RMF(I)
      WRITE(IOUT,506) I,DELTA,DD,RR,RMF(I)
      FORMAT('X,I5.2(F10.1,2X),F12.2,F10.1)
      CONTINUE
506
500
C
C      BERECHNUNG DER HAUPTKOMONENTENANALYSE
C
      CALL EIGEN(QVV,EVEKT,EWERT,NMAX,N)
      CALL MOUT
+      ('TRANSFORMIERTE EIGENVEKTOREN',27,EVEKT,N,N,NMAX,NMAX,IOUT)
      WRITE(IOUT,14)
      FORMAT('//IX,'EIGENWERTE'//)
      DO 30 I = 1,N
      WRITE(IOUT,100) EWERT(I)
      FORMAT('F16.6)
      CONTINUE
14
30
100
C
      IF(KM.EQ.1) CALL MOUT
+      ('UT*QVV*U (KONTROLLE)',20,GMATR,N,N,NMAX,NMAX,IOUT)
C
C      EVT * V / SQRT(EW)
C
      WRITE(IOUT,12)
      FORMAT('//IX,'S-WERTE'//
+      ' UT*V S'//)
12
C
      PVV = 0.00
      SMAX = 0.00
C
      DO 1210 I = 1,N
      DO 1200 J=1,N
      F(I) = F(I) + EVEKT(I,J)*V(J,1)
      RR = 0.00
      IF(EWERT(I).GE.1.-D-6) RR = F(I)/DSORT(EWERT(I))
      IF(DABS(RR).GT.DABS(SMAX)) ISMAX= I
      IF(DABS(RR).GT.DABS(SMAX)) SMAX= RR
      IF(EWERT(I).GE.1.-D-6) WRITE(IOUT,206) F(I),RR
      FORMAT('F12.5)
      IF(EWERT(I).GE.1.-D-6) PVV = PVV + RR*RR
      IF(EWERT(I).LT.1.-D-6) WRITE(IOUT,106)
      CONTINUE
1200
C
      F(I) = F(I) + EVEKT(I,J)*L(J,1)
      IF(EWERT(I).GE.1.-D-6) RR = F(I)*DSORT(EWERT(I))
      IF(EWERT(I).GE.1.-D-6) WRITE(IOUT,206) RR,F(I)
      IF(EWERT(I).LT.1.-D-6) WRITE(IOUT,106)
      CONTINUE
350
C
      BESTIMMUNG DES NICHTZENTRALITAETSPARAMETER
C
      BERECHNUNG VON X-ALPHA
C
      W = (ALPHA)/2.00
      CALL XNMAX(NF,XALPHA,W)
      XALPHA = -XALPHA
C
      WRITE (IOUT,408) ALPHA, NF,XALPHA,SMAX
      FORMAT('// VERWERFUNGSGRENZE (FUER DEN NMAX-TEST) : '
+      ' FUER ALPHA =',F8.3,' UND',
+      ' FREIHEITSGRAD =',I8/
+      ' S-GR =',F8.3//
+      ' FUER DAS VORLIEGENDE MODELL IST:'//
+      ' SMAX =',F8.3//)
408
C
      FEHL = .FALSE.
      IF(DABS(SMAX).GT.XALPHA) FEHL = .TRUE.
      IF(DABS(SMAX).GT.XALPHA) WRITE(IOUT,405)
      FORMAT(' DAS MODELL WIRD VERWORFEN'//)
405
C
      IF(DABS(SMAX).LE.XALPHA) WRITE(IOUT,406)
      FORMAT(' DAS MODELL WIRD ANGENOMMEN'//)
406
C
106   FORMAT('IX,'O', '
1210 CONTINUE
C
1212 WRITE(IOUT,1212) PVV,SMAX
      FORMAT('// SUMME SS =',F12.2/
+      ' SMAX =',F12.2//)
C
C      BERECHNUNG VON -QVV * P
C
      DO 300 J=1,N
      DO 300 I=1,N
      QVV(I,J) = QVV(I,J)/RMF(J)**2
      CONTINUE
300
C
C      BERECHNUNG VON -(EW**-1/2) * UT * QVV * P
C
      DO 320 I=1,N
      DO 320 J=1,N
      RR = 0.00
      DO 310 K = 1,N
      RR = RR + EVEKT(I,K)*QVV(K,J)
      IF(EWERT(I).GE.1.-D-6) RR = RR/DSORT(EWERT(I))
      GMATR(I,J) = RR
      CALL MOUT(' GT = -(EW**-1/2) * UT*QVV*P',29,
+      GMATR,N,N,NMAX,NMAX,IOUT)
      CONTINUE
310
320
C
C      GT * L / SQRT(EW)
C
      WRITE(IOUT,340)
      FORMAT('//IX,'G-WERTE'//
+      ' GT*L S (KONTROLLE)'//)
      DO 350 I = 1,N
      F(I) = 0.00
      DO 345 J=1,N
      F(I) = F(I) + GMATR(I,J)*L(J,1)
      IF(EWERT(I).GE.1.-D-6) RR = F(I)*DSORT(EWERT(I))
      IF(EWERT(I).GE.1.-D-6) WRITE(IOUT,206) RR,F(I)
      IF(EWERT(I).LT.1.-D-6) WRITE(IOUT,106)
      CONTINUE
340
345
350
C
      BESTIMMUNG DES NICHTZENTRALITAETSPARAMETER
C
      BERECHNUNG VON X-ALPHA
C
      W = (ALPHA)/2.00
      CALL XNMAX(NF,XALPHA,W)
      XALPHA = -XALPHA
C
      WRITE (IOUT,408) ALPHA, NF,XALPHA,SMAX
      FORMAT('// VERWERFUNGSGRENZE (FUER DEN NMAX-TEST) : '
+      ' FUER ALPHA =',F8.3,' UND',
+      ' FREIHEITSGRAD =',I8/
+      ' S-GR =',F8.3//
+      ' FUER DAS VORLIEGENDE MODELL IST:'//
+      ' SMAX =',F8.3//)
408
C
      FEHL = .FALSE.
      IF(DABS(SMAX).GT.XALPHA) FEHL = .TRUE.
      IF(DABS(SMAX).GT.XALPHA) WRITE(IOUT,405)
      FORMAT(' DAS MODELL WIRD VERWORFEN'//)
405
C
      IF(DABS(SMAX).LE.XALPHA) WRITE(IOUT,406)
      FORMAT(' DAS MODELL WIRD ANGENOMMEN'//)
406
C

```



```

40 CONTINUE
   ICODE = 0
90 RETURN
   ICODE = -1
   RETURN
   END

C
C SUBROUTINE EIGEN(AMATR,EVEKT,EWERT,NO,N)
   REAL*8 AMATR(NO,NO),EVEKT(NO,NO),EWERT(NO)
   INTEGER*2 NO,N

C SUBROUTINE FUER DIE BERECHNUNG DER EIGENWERTE (EWERT)
C UND DER EIGENVEKTOREN (EVEKT) DER MATRIX AMATR
C NO IST DIE DIMENSION DER DEKLARIERTE FELDER IM HAUPTPROGR.
C N IST DIE DIMENSION DER MATRIZEN (N .LE. NO)

C INTERNE VARIABLEN
C
   REAL*8 A(60,60),AMAX,EPS,THETA,T,C,S
   INTEGER*2 I,J,IP,IQ,NIO,II,JJ
   EPS = 1.D-6
   NIO = 60
   IF(N.GT.NIO) CALL TNOU('ZU GROSSE MATRIX',15)
   IF(N.GT.NIO) CALL EXIT

C DO 100 J = 1,N
   DO 100 I = 1,N
     A(I,J) = AMATR(I,J)
     EVEKT(I,J) = 0.D0
     EVEKT(I,I) = 1.D0

C JACOBI 1
   AMAX = 0.D0
   II = N-1
   DO 1100 I = 1,II
     JJ = I+1
     DO 1100 J = JJ,N
       IF(DABS(A(I,J)).LE.AMAX) GO TO 1100
       AMAX = DABS(A(I,J))
       IP = I
       IQ = J
       CONTINUE
     IF(N*AMAX.LT.EPS) GO TO 2000 /* ABRBRUCHKRITERIUM

C THETA = 0.5D0 * (A(IQ,IQ)-A(IP,IP))/ (A(IP,IQ)
   IF(THETA .NE. 0.D0) GO TO 1200
   T = 1.D0
   GO TO 1300
CONTINUE
T = 1.00 / (THETA + DSIGN(1.D0,THETA)*DSQRT(1.D0+THETA*THETA))
C C = 1.D0/DSQRT(1.D0 + T*T)
S = C * T

C CALL ROT(NIO,N,C,S,IP,IQ,A) /* ROTATION DER MATRIX
CALL EVROT(NO,N,C,S,IP,IQ,EVEKT) /* ROTATION DER EIGENVEKTOREN
CALL MOUT(' ',1,A,N,N,NIO,NIO,1) /* TEST

C GO TO 1000

2000 DO 2100 I = 1,N
   EWERT(I) = A(I,I)
CONTINUE
2100 RETURN
9900 RETURN
   END

C SUBROUTINE EVROT(NO,N,C,S,IP,IQ,A)
   INTEGER*2 N,NO,IP,IQ
   REAL*8 C,S,A(NO,NO), APJ,AQJ

C INTERNE VARIABLEN
C
   INTEGER*2 I,J
   DO 100 J = 1,N
     APJ = A(IP,J)
     AQJ = A(IQ,J)
     A(IP,J) = APJ * C - AQJ * S
     A(IQ,J) = APJ * S + AQJ * C
CONTINUE
RETURN
END

C SUBROUTINE ROT(NO,N,C,S,IP,IQ,A)
   INTEGER*2 NO,N,IP,IQ
   REAL*8 C,S,A(NO,NO)

C INTERNE VARIABLEN
C
   INTEGER*2 J,JJ
   REAL*8 G,H
   H = C*C * A(IP,IP) - 2.D0*C*S*A(IP,IQ) + S*S*A(IQ,IQ)
   G = S*S * A(IP,IP) + 2.D0*C*S*A(IP,IQ) + C*C*A(IQ,IQ)
   A(IP,IQ) = C*S*(A(IP,IP)-A(IQ,IQ)) + (C*C-S*S)*A(IP,IQ)
   A(IP,IP) = H
   A(IQ,IQ) = G

C JJ = IP - 1
   IF(JJ.LT.1) GO TO 110
   DO 100 J = 1,JJ
     H = C * A(J,IP) - S * A(J,IQ)
     A(J,IQ) = S * A(J,IP) + C * A(J,IQ)
     A(J,IP) = H
CONTINUE
110 CONTINUE

C J = IP + 1
   JJ = IQ - 1
   IF(JJ.LT.J) GO TO 210
   DO 200 J = J,JJ
     H = C * A(IP,J) - S * A(J,IQ)
     A(J,IQ) = S * A(IP,J) + C * A(J,IQ)
     A(IP,J) = H
CONTINUE
210 CONTINUE

C J = IQ + 1
   IF(N.LT.J) GO TO 310
   DO 300 J = J,N

```

```

H      = C * A(IP,J) - S * A(IQ,J)
A(IQ,J) = S * A(IP,J) + C * A(IQ,J)
A(IP,J) = H
CONTINUE
CONTINUE
300  RETURN
310  END
9900
C
SUBROUTINE ATPA(A,P,R,N,M,NO,MO)
REAL*8 A(NO,MO),P(NO,NO),R(MO,MO)
INTEGER*2 N,M,NO,MO
C
INTEGER*2 I,J,K
REAL*8 HV(100),RR
C
N = N
M = M
DO 200 K=1,M
DO 130 J=1,N
HV(J) = 0.DO
DO 100 I=1,N
HV(J) = HV(J) + A(I,K)*P(I,J)
CONTINUE
DO 180 I=1,M
RR = 0.DO
DO 150 J=1,N
RR=RR + HV(J)*A(J,I)
R(K,I)=RR
CONTINUE
200  RETURN
990  END
C
SUBROUTINE AQAT(A,Q,R,N,M,NO,MO)
REAL*8 A(NO,MO),Q(MO,MO),R(NO,NO)
INTEGER*2 N,M,NO,MO
C
INTEGER*2 I,J,K
REAL*8 HV(100),RR
C
MATRIZEN-MULTIPLIKATIONEN
N = N
M = M
DO 200 K=1,N
DO 130 J=1,M
HV(J) = 0.DO
DO 100 I=1,M
HV(J) = HV(J) + A(K,I)*Q(I,J)
CONTINUE
DO 180 I=1,N
RR = 0.DO
DO 150 J=1,M
RR=RR + HV(J)*A(I,J)
R(K,I)=RR
CONTINUE
200  RETURN
990  END
C
SUBROUTINE MOUT(ITIT,ITLEN,A,N,M,NMAX,MMAX,IOUT)
INTEGER*2 ITIT(40),ITLEN,NMAX,MMAX,N,M,IOUT
REAL*8 A(NMAX,MMAX)
C
AUSGABE EINER MATRIX A
INTEGER I,J,IA,IE,IW,NPK,IPK,IBUFF(66),K,L
IPK = ' '
IW = (ITLEN+1)/2
IA = 1
IE = M
IF(ITLEN.LE.0) GO TO 10
WRITE(IOUT,5)(ITIT(I),I=1,IW)
FORMAT(/1X,40A2 )
C
CONTINUE
IF(IA+9.LT. IE) IE = IA + 9
NPK = ( 8 + (IE-IA+1)*12 ) / 2 + 1
WRITE(IOUT,15) (I,I=IA,IE)
FORMAT(7X,10(I8,4X) )
DO 30 I=1,N
ENCODE(132,35,IBUFF) I,(A(I,J),J=IA,IE)
FORMAT(I4,2X,10F12.5)
K = 3
DO 32 J = IA,IE
IF(DABS(A(I,J)).GT.1.D-6) GO TO 32
DO 34 L = 1,5
IBUFF(K+L) = ' '
IBUFF(K+6) = ' 0'
K = K+6
32  WRITE(IOUT,38)(IBUFF(J),J=1,66)
FORMAT(1X,66A2)
C
IF(MOD(I,10).EQ.0) WRITE(IOUT,38) (IPK ,J=1,NPK)
CONTINUE
IF(M.LE.IE) GO TO 90
IA = IE + 1
IE = M
WRITE(IOUT,50)
FORMAT(///)
GO TO 10
90  WRITE(IOUT,50)
RETURN
END
C
SUBROUTINE MOUT(ITIT,ITLEN,A,N,M,NMAX,MMAX,IOUT)
INTEGER*2 ITIT(40),ITLEN,NMAX,MMAX,N,M,IOUT
REAL*8 A(NMAX,MMAX)
C
AUSGABE EINER MATRIX A IN TRANSPONIRTER FORM ( AT )
INTEGER I,J,IA,IE,IW,NPK,IPK,IBUFF(66),K,L
IPK = ' '
IW = (ITLEN+1)/2
IA = 1
IE = N
IF(ITLEN.LE.0) GO TO 10
WRITE(IOUT,5)(ITIT(I),I=1,IW)
FORMAT(/1X,40A2 )
5

```



```

IF(WW.GT.WM) W1 = WM
GO TO 10
C
90 X = XM
IF(W.LT..5D0) X = -XM
RETURN
END
9000
C
SUBROUTINE BAARDA(NF, ALPHA, BETA, LAMBDA)
REAL*8 ALPHA, BETA, LAMBDA
INTEGER*2 NF
C
BERECHNUNG VON LAMBDA AUS DEN NOMOGRAMMEN IN /BAARDA 1969/
C
REAL*4 X1, Y1, X2, Y2, XM, YM, XF, YF, P
C
LAMBDA = 0.D0
XF = NF
YF = ALOG10(XF)
C
IF(ALPHA.NE..05D0.AND.BETA.NE..2D0) GO TO 100
C
X1 = ALOG10( 1.)
X2 = ALOG10(150.)
C
Y1 = ALOG10( 7.8)
Y2 = ALOG10( 48.5)
YM = ALOG10( 17.3)
C
GO TO 1000
CONTINUE
/* ALPHA ODER BETA NICHTVORHANDEN
X1 = (X1 + X2) / 2.
P = YM - (Y1+Y2)/2.
IF(P.LT.0) P = P - P * (XF - XM)**2 / (XM - X1)**2
IF(P.GE.0) P = P + P * (XF - XM)**2 / (XM - X1)**2
YF = Y1 + (Y2-Y1)*(XF-X1)/(X2-X1)
YF = YF + P
C
LAMBDA = 10**YF
RETURN
END
C
SUBROUTINE FNORM( X, W)
REAL*8 X, W
C
NORMALVERTEILUNG ( P( -X<Z<X) )
C
INTEGER*2 I, J, N, IA(15), IE, NF
REAL*8 X1, X2, DD, FF, DTRAP, DNORM, DSIMPS, DINGR, SINT(15), XX
+ EXTERNAL DNORM
N = 10
X1 = DABS(X)
CONTINUE
XX = -X1
S2 = - DSIMPS(DNORM, XX, 0.D0, N)
2.D0 * S2
250
C
SUBROUTINE XNORM( X, W)
REAL*8 X, W
C
INVERSE DER NORMALVERTEILUNG
GEBEBEN WAHRSCH. GESUCHT X
C
REAL*8 X1, X2, XM, W1, W2, WM, WW
C
WW = W
IF(W.EQ..5D0) XM = 0.D0
IF(W.EQ..5D0) GO TO 90
IF(W.LT..5D0) WW = 1.D0 - W
X1 = 0.D0
X2 = 10.D0
CALL FNORM( X1, W1)
CALL FNORM( X2, W2)
C
XM = (X1+X2)/2.D0
CALL FNORM( XM, WM)
C
IF(DABS(WM-WW).LT. 1.D-4) GO TO 90
IF(WW.LT.WM) X2 = XM
IF(WW.LT.WM) W2 = WM
IF(WW.GT.WM) X1 = XM
IF(WW.GT.WM) W1 = WM
GO TO 10
C
X = XM
IF(W.LT..5D0) X = -XM
RETURN
END
9000
C
SUBROUTINE FNORM2(X1, X2, W)
REAL*8 X1, X2, W
C
NORMALVERTEILUNG
W = P(-X1<Z<X2)
C
INTEGER*2 I, J, N, IA(15), IE, NF
REAL*8 DD, FF, DTRAP, DNORM, DSIMPS, DINGR, SINT(15), XX
+ EXTERNAL DNORM
N = 30
S1 = 0.D0
S2 = 0.D0
IF(X1.GE.0.D0) GO TO 200
XX = X2
IF(X2.GT.0.0) XX = 0.D0
S1 = DSIMPS(DNORM, X1, XX, N)
C
IF(X2.LE.0.D0) GO TO 300
XX = X1
IF(X1.LE.0.D0) XX = 0.D0
S2 = - DSIMPS(DNORM, X2, XX, N)
W = S1 + S2
300

```

```

9000 RETURN
      END
C
C REAL*8 FUNCTION DSIMP2(FUNC,NF,X1,X2,N)
      REAL*8 X1,X2
      INTEGER*2 N,NF
      EXTERNAL FUNC
C
C INTEGRATION DER FUNKTION FUNC ZWISCHEN X1 UND X2
C NACH SIMPSON
      INTEGER *2 I,J
      REAL*8 DINCR,F1,F2,S1,S2,XI,TS1,TS2,FM,XM
C
      DINCR = (X2-X1)/N
      F1 = FUNC(X1,NF)
      XI = X1
      TS1 = 0.0
      DO 10 I = 1,N
      XM = XI + DINCR/2.0
      FM = FUNC(XM,NF)
      XI = XI + DINCR
      F2 = FUNC(XI,NF)
      TS1 = TS1 + DINCR*(F1+F2+4.0*FM)/6.0
      F1 = F2
10 CONTINUE
      DSIMP2 = TS1
90 RETURN
      END

```

Anhang 2: FORTRAN-Programm NMAX

Berechnung der NMAX-Verteilung und Simulationen.

```

C      NMAX (NMAX-VERTEILUNG, SIMULATIONEN)
      INTEGER*2 I,J,N,IA(15),IE,NF,IFU,K,NVERW(100),NTOT,NCOVERW
      ;IMAX,IOUT
      REAL*8 X1,X2,DD,FF,DTRAP,DNORM,DSIMPS,DINCR,SINT(15),XX,S3
      ,S1,S2,DEPS,EX(100),Y(100),YGR1,YGR2
      EXTERNAL DNORM
      $INSERT SYSCOM>ASKEYS
      CALL OPNPSA('OUTPUTFILE',10,ASAMF+A$WRIT,IA,32,1)
      IOUT = 5
C
1      WRITE(1,2)
2      FORMAT('FUNKTIONEN:/'
+      'TA - TABELLE DER NMAX-VERTEILUNG/'
+      'NM - EINZELWERTE DER NMAX-VERTEILUNG/'
+      'XN - INVERSE FUNKTION/'
+      'SI - SIMULATION/'
+      'IQ - QUIT'/)
      CALL TNOUA('FUNKTION : ',11)
      READ(1,8000) IFU
8000  FORMAT(A2)
      IF(IFU.EQ.'TA') GO TO 20
      IF(IFU.EQ.'Q') GO TO 300
      IF(IFU.EQ.'NM') GO TO 250
      IF(IFU.EQ.'XN') GO TO 450
      IF(IFU.EQ.'SI') GO TO 2000
      GO TO 1
20      DINCR = 0.1*DO
      X1 = -DINCR
      X2 = -DINCR
      IE = 0
      DO 50 I = 1,3
      DO 50 J = 1,5
      IE = IE + 1
      IA(IE) = J * 10**(I-1)
      WRITE(5,1010)
1010  FORMAT('1NMAX(-Z,+Z)')
      WRITE(5,1001)(IA(J),J=1,15)
      FORMAT('Z/F ',15I8//)
      DO 200 I=0,50
      X1 = X1 + DINCR
      XX = -X1
      S2 = 2.00 * S2
      DSIMPS(DNORM,XX,0.00,10)
      S1 = S2
      X2 = X1
      DO 100 J = 1,15
      IE = IA(J)
      SINT(J) = S2**IE
      WRITE(5,1002) X1,(SINT(J),J=1,15),
      FORMAT('IX,FG.2,2X,15F8.4')
      CONTINUE
C
100      X1 = -DINCR
      X2 = -DINCR
      WRITE(5,1025)
      WRITE(5,1001)(IA(J),J=1,15)
      DO1200 I=0,50
      X1 = X1 + DINCR
      XX = -X1
      S2 = 2.00 * DSIMPS(DNORM,XX,0.00,10)
      S1 = S2
      DO1100 J = 1,15
      IE = IA(J)
      SINT(J) = ( S2**(IE-1) ) * IE * DNORM(X1)
      WRITE(5,1002) XX,(SINT(J),J=1,15)
      CONTINUE
C
1100      X1 = -DINCR
      X2 = -DINCR
      WRITE(5,1015)
      FORMAT('1NMAX(Z) ' //)

```

```

WRITE(5,1001)(IA(J),J=1,15)
DO 600 I=0,50
X1 = X1 + DINCR
XX = -X1
DSIMPS(DNORM,XX,0.00,10)
S2 = 2.00 * S2
S1 = S2
X2 = X1
DO 500 J = 1,15
IE = IA(J)
SINT(J) = (.5DO+S2**IE/2.00)
WRITE(5,1002) X1,(SINT(J),J=1,15)
CONTINUE

```

```

500
600
C

```

```

X1 = -DINCR
X2 = -DINCR
WRITE(5,1015)
WRITE(5,1001)(IA(J),J=1,15)
DO 800 I=0,50
X1 = X1 + DINCR
XX = -X1
DSIMPS(DNORM,XX,0.00,10)
S2 = 2.00 * S2
S1 = S2
X2 = X1
DO 700 J = 1,15
IE = IA(J)
SINT(J) = (.5DO-S2**IE/2.00)
WRITE(5,1002) XX,(SINT(J),J=1,15)
CONTINUE

```

```

700
800
C

```

```

X1 = -DINCR
X2 = -DINCR
WRITE(5,1025)
FORMAT('1WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTE dNMAX(Z) / dz')
WRITE(5,1001)(IA(J),J=1,15)
DO1000 I=0,50
X1 = X1 + DINCR
XX = -X1
S2 = 2.00 * DSIMPS(DNORM,XX,0.00,10)
S1 = S2
X2 = X1
DO 900 J = 1,15
IE = IA(J)
SINT(J) = ( S2**(IE-1) ) * IE * DNORM(X1)
WRITE(5,1002) X1,(SINT(J),J=1,15)
CONTINUE

```

```

900
1000
C

```

```

X1 = -DINCR
X2 = -DINCR
WRITE(5,1025)
WRITE(5,1001)(IA(J),J=1,15)
DO1200 I=0,50
X1 = X1 + DINCR
XX = -X1
S2 = 2.00 * DSIMPS(DNORM,XX,0.00,10)
S1 = S2
X2 = X1
DO1100 J = 1,15
IE = IA(J)
SINT(J) = ( S2**(IE-1) ) * IE * DNORM(X1)
WRITE(5,1002) XX,(SINT(J),J=1,15)
CONTINUE

```

```

1100
C

```

```

1200 CONTINUE
GO TO 300
250 CONTINUE
CALL TMOU ('<---Z ---><---NF---><---NINT--->', 30)
READ(1,10)X1,NF,N
IF(N.LE.0) N = 30
FORMAT(F10.0,2I10)
10 XX = -X1
S2 = DSIMPS(DNORM,XX,0.DO,N)
S2 = 2.DO * S2
S1 = DSIMPS(DNORM,-20.DO,XX,100)
S1 = .5DO - S1
S1 = 2.DO * S1
S1 = S1 ** NF
CALL NNMAX(NF,X1,NF,S3)
WRITE(1,160) X1,NF,S3
WRITE(5,160) X1,NF,S3
FORMAT(' NMAX(',F6.2,',I6,') =', F10.6, ' (',2F10.6,')')
160 GO TO 1
450 CONTINUE
CALL TMOU ('<---W ---><---NF--->', 30)
READ(1,10)S1,NF
CALL NNMAX(NF,X1,S1)
WRITE(1,160) X1,NF,S1
WRITE(5,160) X1,NF,S1
GO TO 1
C SIMULATION
2000 CONTINUE
CALL TMOUA('STICHPROBEUMFANG : ',20)
READ(1,*) N
CALL TMOUA('FREIHEITSGRAD : ',20)
READ(1,*) NF
DO 2010 I=1,NF
NVERW(I) = 0
EX(I) = 0.DO
CALL TMOUA('NICHTZENTRALITAET : ',20)
READ(1,*) (EX(I),I=1,NF)
CALL TMOUA('VERW.GRENZE NMAX: ',20)
READ(1,*) YGR1
CALL TMOUA('VERW.GRENZE CHIQU: ',20)
READ(1,*) YGR2
WRITE(IOUT,2102)
FORMAT(' SIMULATION'//)
2102 C
K = 1
XX = RND(K)
NCVERW = 0
C DO 2100 I = 1, N
C DO 2110 J = 1, NF
XX = RND(0)
CALL XNORM(X1,XX)
Y(J) = X1 + EX(J)
CONTINUE
WRITE(1,2900) I,(Y(J),J=1,NF)
WRITE(IOUT,2900) I,(Y(J),J=1,NF)
FORMAT(1X,I6,') ',10F8.3)
2900 C
NMAX - TEST
C
XX = 0.DO
DO 2130 J = 1,NF
IF(DABS(Y(J)).LT.XX) GO TO 2130
XX = DABS(Y(J))
IMAX = J
CONTINUE
2130 C
IF(XX.LE.YGR1) GO TO 2150
NVERW(IMAX) = NVERW(IMAX) + 1
CONTINUE
2150 C
CHIQUADRAT TEST
C
XX = 0.DO
DO 2160 J = 1,NF
XX = XX + Y(J)**2
IF(XX.LE.YGR2) GO TO 2180
NCVERW = NCVERW + 1
CONTINUE
2180 C
NTOT = 0
DO 2200 I = 1,NF
NTOT = NTOT + NVERW(I)
WRITE(1,2205) N,NF,(EX(I),I=1,NF)
FORMAT('//', SIMULATION MIT',I5,' ELEMENTE (F=',I4,')'//)
+ NICHTZENTRALITAET :',(10F8.3)
WRITE(1,2210) YGR1,NTOT,(NVERW(I),I=1,NF)
FORMAT(/
+ NMAX TEST MIT XGR =',F10.3/
+ VERWORFEN :',I10/
+ NACH KOMPONENTEN :',/2X(20I4))
YGR2,NCVERW
2210 C
WRITE(1,2220)
FORMAT(/
+ CHIQU-TEST MIT XGR =',F10.3/
+ VERWORFEN :',I10)
WRITE(IOUT,2205) N,NF,(EX(I),I=1,NF)
WRITE(IOUT,2210) YGR1,NTOT,(NVERW(I),I=1,NF)
WRITE(IOUT,2220)
GO TO 1
C
3000 CONTINUE
CALL TRNC$(A(1))
300 CALL CLOS$(A(1))
CALL EXIT
END
C
REAL*8 FUNCTION DSIMPS(FUNC,X1,X2,N)
Siehe Programm VERMHA
REAL*8 FUNCTION DNORM(X)
Siehe Programm VERMHA
SUBROUTINE NMAX(F,X,W)
Siehe Programm VERMHA
SUBROUTINE XNMAX(F,X,W)
Siehe Programm VERMHA
SUBROUTINE FNORM(X,W)
Siehe Programm VERMHA
SUBROUTINE XNORM(X,W)
Siehe Programm VERMHA
SUBROUTINE FNORM2(X1,X2,W)
Siehe Programm VERMHA

```

Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Hönggerberg, 8093 Zürich

ab 1975

| | | |
|---------|--|------|
| 18 1975 | Der Beitrag der Photogrammetrie zum heutigen Stand der Geodäsie. Prof. Dr. Hellmut Schmid | 15.– |
| 19 1976 | Das Amtliche Vermessungswesen der Schweiz. Rückblick, Umschau und Ausblick. Prof. Dr. Herbert J. Matthias | 25.– |
| 20 1978 | Das Geoid in der Schweiz. Dr. Werner Gurtner | 25.– |
| 21 1978 | Mehrweckkataster. Vorträge an der Informationstagung vom 18./19. Februar 1977 | 15.– |
| 22 1978 | Ein allgemeiner Ausgleichungs-Algorithmus für die numerische Auswertung in der Photogrammetrie. Prof. Dr. Hellmut Schmid | 15.– |
| 23 1978 | Räumliche Koordinatentransformation. Eine pseudo-lineare Formulierung als Annäherungslösung für eine strenge Ausgleichung mit entsprechendem Fortran-Programm. Prof. Dr. Hellmut Schmid und Siegfried Heggli | 15.– |
| 24 1978 | Der Uebersichtsplan der amtlichen Vermessung. Bedeutung, Erhaltung, Erneuerung. Vorträge an der Informationstagung vom 10./11. Februar 1978 an der ETH Hönggerberg | 25.– |
| 25 1979 | Der Mehrweckkataster im Flughafen Kloten. Paul Kasper | 15.– |
| 26 1979 | ALGOL - Programm TGREFR. Modellatmosphäre und Refraktion. Niklaus Wunderlin | 20.– |
| 27 1979 | Statistische Methoden zur Beurteilung der Qualität einer Vermessung. Christian Just | 15.– |
| 28 1980 | De la synthèse d'images appliquée aux maquettes de terrain numériques. Dr. Heinz Hügli | 30.– |
| 29 1980 | Vom freien zum gelagerten Netz. Prof. Dr. Hellmut H. Schmid Anhang I: Anfelderung eines Netzes unter der Bedingung minimalisierter Klaffungen. René Scherrer. Anhang II: Numerische Beispiele. | 15.– |
| 30 1981 | Allgemeine Vermittelnde Netzausgleichung. Herbert J. Matthias | 20.– |
| 31 1981 | Zum Einsatz automatisch registrierender Tachymeter in der schweizerischen Parzellarvermessung. Paul Kasper, R. Conzett, J. Kaufmann, H.J. Matthias, H.-R. Schwendener | 25.– |
| 32 1982 | Das Institut für Geodäsie und Photogrammetrie. Rückblick auf Entstehung und Entwicklung 1855 – 1974. Fritz Kobold. | 15.– |
| 33 1982 | Complex Crustal Strain Approximation. Dr. Dieter Schneider | 40.– |
| 34 1983 | Datenstrukturen für Landinformationssysteme – Semantische, topologische und räumliche Beziehungen in Daten der Geo-Wissenschaften. Dr. André Frank | 30.– |
| 35 1983 | Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme. Dr. Alessandro Carosio | 30.– |

