Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
an der Eidgenössischen Technischen Hochschule
Zürich

Mitteilungen Nr.

41

Bedeutung und Konstruktion von Kovarianzen in der Messtechnik

Herbert J. Matthias

Verbesserte Auflage, September 1992

Bedeutung und Konstruktion von Kovarianzen in der Messtechnik

Herbert J. Matthias

Verbesserte Auflage, September 1992

IGP: Mitteilung Nr. 41, Neuauflage 1992
Bedeutung und Konstruktion von Kovarianzen in der Messtechnik. Herbert J. Matthias

© 1992
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich

Alle Rechte vorbehalten

BEDEUTUNG UND KONSTRUKTION VON KOVARIANZEN IN DER MESSTECHNIK

H.J.Matthias

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
1.	Parameterschätzung für einige einfache Funktionen	5
2.	" Positiver" und " negativer " Korrelationstypus. Merkmale und Bedeutung in der Messtechnik	11
3.	Zur Konstruktion von Varianz-Kovarianzmatrizen mit drei numerischen Beispielen	20
4.	Ausblick	51

ANHANG

	Bezeichnungen	54
5.	Korrekte Modellbildung bei einfachen Fehlerrechnungen	57
6.	Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz	63
7.	Über Korrelation	64
8.	Positive Definitheit von quadratischen Formen und Matrizen	71
	Literatur	

Einleitung und Zusammenfassung

Die Vermutung liegt nahe, dass Korrelationen beim Wahrnehmen und Erkennen von natürlichen und evtl. auch irrationalen Erscheinungen mit den menschlichen Sinnen eine sehr grosse Rolle spielen. In der Mess-, Regel-, Steuer-, Automations- und Robotertechnik ist deren grosse Bedeutung eine Tatsache.

Bei einer so weit gespannten Betrachtungsweise stellt die vorliegende Arbeit nur einen sehr kleinen Beitrag dar.

Kovarianzen werden in mathematischen Modellen zu Präanalysen und Ausgleichungsaufgaben zumeist vernachlässigt, obwohl sie in Wirklichkeit bei Messvorgängen aller Art die Regel sind. Es werden die Begriffe "positive" und "negative" Korrelation eingeführt, deren Bedeutung in der Messtechnik diskutiert, sowie drei Beispiele für die Synthese von Varianz-Kovarianzenmatrizen behandelt. Davon betrifft eines Präzisionsnivellemente für die Feststellung von Erdkrustenbewegungen mit Analogieschlüssen zu Testnetzen für Satellitenempfänger.

Im Anhang sind für Interessenten einige Grundlagen über Korrelation zusammengestellt.

Ich danke Herrn dipl. Ing. W. Shi für die Mithilfe bei vielen numerischen Berechnungen und für die Reinschrift des Manuskriptes, Herrn W. Schneibel für die sorgfältigen Reinzeichnungen und Frau S. Weber für die Reinschrift der Formeln.

1. PARAMETERSCHÄTZUNG FÜR EINIGE EINFACHE FUNKTIONEN

Als Grundlage für die nachfolgende Diskussion, insbesondere über "positive" und "negative" Korrelation, werden in diesem Abschnitt einige Parameterschätzungen berechnet.

1.1 PUNKTSCHÄTZUNG BEI DIREKTEN, KORRELIERTEN BEOBACHTUNGEN VERSCHIEDENER GENAUIGKEIT NACH DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

Gegeben [1)]

$$\underline{\ell}^T \; (\ell_1, \ell_2)$$

$$\underline{C}_{\underline{\ell}} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \sigma_o^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{P_1} & \frac{\rho}{\sqrt{P_1 P_2}} \\ \frac{\rho}{\sqrt{P_1 P_2}} & \frac{1}{P_2} \end{vmatrix}$$

Gesucht

$$\hat{\underline{\ell}} = (\underline{A}^T \underline{P}\, \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P}\, \underline{\ell} \qquad ; \qquad \sigma_{\hat{\ell}}^2$$

Lösung

$$\underline{A}^T : (+1, +1)$$

$$\underline{P} = \sigma_o^2 \underline{C}_{\underline{\ell}}^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)} \begin{vmatrix} P_1 & -\rho\sqrt{P_1 P_2} \\ -\rho\sqrt{P_2 P_1} & P_2 \end{vmatrix}$$

---

1) Bezeichnungen siehe Anhang

$$\hat{\ell} = (\underline{A}^T \underline{P}\, \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{P}\, \underline{\ell} = \frac{(P_1 - \rho\sqrt{P_1P_2})\,\ell_1 + (P_2 - \rho\sqrt{P_1P_2})\,\ell_2}{[P] - 2\rho\sqrt{P_1P_2}} \tag{1.1}$$

$$= \frac{[P\ell]}{[P]} + \underbrace{\frac{\rho\sqrt{P_1P_2}}{[P]-2\rho\sqrt{P_1P_2}} \cdot \frac{(P_2 - P_1)}{[P]}}_{(*)} \cdot (\ell_2 - \ell_1) \tag{1.2}$$

$$P_{\hat{\ell}} = (A^T P A) = \frac{[P] - 2\rho\sqrt{P_1P_2}}{(1-\rho^2)} \tag{1.3}$$

$$= [P] + \underbrace{\frac{\rho}{(1-\rho^2)}\,(\rho[P] - 2\sqrt{P_1P_2})}_{(*)} \tag{1.4}$$

Funktion		$-1 \leqslant \rho \leqslant 0$							$0 \leqslant \rho \leqslant +1$					
(1.2)	(*)	−1.00	−0.99	−0.90	−0.80	−0.50	−0.20	0	+0.20	+0.50	+0.80	+0.90	+0.99	+1.00
$P_1 = 1;\ 10.0 \geqslant P_2 \geqslant 0.1$	0.1	0.15	0.15	0.14	0.13	0.09	0.04	0	−0.05	−0.17	−0.35	−0.44	−0.54	−0.55
	0.2	0.14	0.14	0.13	0.12	0.09	0.04	0	−0.06	−0.20	−0.49	−0.68	−0.94	−0.98
	0.5	0.08	0.08	0.08	0.07	0.05	0.03	0	−0.04	−0.15	−0.51	−0.93	−2.34	−2.75
	0.3	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.01	0	−0.01	−0.05	−0.22	−0.47	−3.39	−8.92
	0.9	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0	0	−0.01	−0.03	−0.10	−0.23	−2.29	−19.0
	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\left(\frac{(-)\infty}{(+)\infty}\right)$
	1.5	−0.05	−0.05	−0.05	−0.04	−0.03	−0.02	0	0.02	0.10	0.36	0.75	3.23	4.85
	2.0	−0.08	−0.08	−0.08	−0.07	−0.05	−0.03	0	0.04	0.15	0.51	0.93	2.34	2.75
	5.0	−0.14	−0.14	−0.13	−0.12	−0.09	−0.04	0	0.06	0.20	0.49	0.68	0.94	0.98
	10.0	−0.15	−0.15	−0.14	−0.13	−0.09	−0.04	0	0.05	0.17	0.35	0.44	0.54	0.55

Tabelle 1 Punktschätzung

Wertetabelle der Korrekturfaktoren (*) gemäss

Funktion (1. 2) für $P_1 = 1$

Funktion		-1 ≤ ρ ≤ 0							0 ≤ ρ ≤ +1					
(1.4) (*)		−1.00	−0.99	−0.90	−0.80	−0.50	−0.20	0	+0.20	+0.50	+0.80	+0.90	+0.99	+1.00
$P_1 = 1$; 10.0 ≥ P_2 ≥ 0.1	0.1	∞	+ 86	+ 7.7	+ 3.4	+0.79	+0.18	0	−0.09	−0.05	+0.55	+1.69	+ 23	∞
	0.2	∞	+104	+ 9.4	+ 4.1	+1.00	+0.24	0	−0.14	−0.20	+0.15	+0.88	+ 15	∞
	0.5	∞	+144	+13	+ 5.8	+1.44	+0.36	0	−0.23	−0.44	−0.48	−0.30	+ 3.5	∞
	0.8	∞	+178	+16	+ 7.2	+1.79	+0.45	0	−0.30	−0.59	−0.78	−0.80	− 0.34	∞
	0.9	∞	+188	+17	+ 7.6	+1.90	+0.47	0	−0.32	−0.63	−0.84	−0.89	− 0.81	∞
	1.0	∞	+198	+18	+ 8.0	+2.0	+0.50	0	−0.33	−0.67	−0.89	−0.95	− 0.99	∞
	1.5	∞	+245	+22	+ 9.9	+2.5	+0.61	0	−0.41	−0.80	−1.00	−0.90	+ 1.3	∞
	2.0	∞	+288	+26	+12	+2.9	+0.71	0	−0.46	−0.89	−0.95	−0.61	+ 7.0	∞
	5.0	∞	+518	+47	+21	+4.8	+1.18	0	−0.68	−0.98	+0.73	+4.4	+ 73	∞
	10.0	∞	+856	+77	+34	+7.9	+1.78	0	−0.86	−0.55	+5.50	+17	+227	∞

Tabelle 2 Gewichte

Korrekturwerte (*) gemäss Funktion (1.4)

für $P_1 = 1$. Die Grenzwerte in den Tabellen 1, 2 wurden

mit Grenzwertbetrachtungen ermittelt

1.2 VARIANZ VON SUMME, DIFFERENZ UND GEWOGENEM MITTELWERT VON KORRELIERTEN BEOBACHTUNGEN

Funktionales Modell [2)]

$$\underset{(3,1)}{\underline{\phi}} \quad : \quad \begin{vmatrix} \bar{\ell} + \bar{p} \\ \bar{\ell} - \bar{p} \\ \frac{1}{[P]} \cdot (P_{\bar{\ell}} \cdot \bar{\ell} + P_{\bar{p}} \cdot \bar{p}) \end{vmatrix}$$

Stochastisches Modell

$$\underset{(2,2)}{\underline{C}_{\bar{\ell},\bar{p}}} \quad : \quad \sigma_o^2 \cdot \begin{vmatrix} q_{\bar{\ell}} & \rho \sqrt{q_{\bar{\ell}} q_{\bar{p}}} \\ \rho \sqrt{q_{\bar{\ell}} q_{\bar{p}}} & q_{\bar{p}} \end{vmatrix}$$

$$\rho \quad \rho_{\bar{\ell}\bar{p}} \; ; \quad q_{\bar{\ell}} = \frac{1}{P_{\bar{\ell}}} \; ; \quad q_{\bar{p}} = \frac{1}{P_{\bar{p}}}$$

Differentialoperator

$$\underset{(3,2)}{\underline{f}} \quad : \quad \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \\ +\frac{P_{\bar{\ell}}}{[P]} & +\frac{P_{\bar{p}}}{[P]} \end{vmatrix}$$

---

2) Formelapparat siehe Ziffer 6
Bezeichnungen siehe Anhang

Lösung

$$\underline{C}_{\phi\phi} = \underline{f} \; \underline{C}_{\bar{\ell}\bar{p}} \cdot \underline{f}^T$$

$$\underline{C}_{\phi\phi} : \sigma_o^2 \begin{vmatrix} [q] + 2\rho\sqrt{q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}}} & q_{\bar{\ell}} - q_{\bar{p}} & 2\dfrac{q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}}}{[q]} + \rho\sqrt{q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}}} \\ -q_{\bar{p}} + q_{\bar{\ell}} & [q] - 2\rho\sqrt{q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}}} & \dfrac{\rho\sqrt{q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}}}}{[q]}(q_{\bar{\ell}} - q_{\bar{p}}) \\ 2\dfrac{q_{\bar{p}}\,q_{\bar{\ell}}}{[q]} + \rho\sqrt{q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}}} & \dfrac{\rho\sqrt{q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}}}}{[q]}(-q_{\bar{p}} + q_{\bar{\ell}}) & \dfrac{q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}}}{[q]} + 2\rho\dfrac{(q_{\bar{\ell}}q_{\bar{p}})^{\frac{3}{2}}}{[q]^2} \end{vmatrix}$$

Korrelations-koeffizient $\rho_{\bar{\ell}\bar{p}}$	Summe $(\bar{\ell} + \bar{p})$	Differenz $(\bar{\ell} - \bar{p})$	Mittel $\frac{1}{2}(\bar{\ell} + \bar{p})$	Kommentar
+1	$p = 0.25$ $\sigma = 2\sigma_o$	$p = \infty$ $\sigma = 0$	$p = 1$ $\sigma = \sigma_o$	$0 < \rho < +1$ "positiver" Korrelationstypus; pseudosystematischer Korrelationstypus
+0.5	$p = 0.33$ $\sigma = 1.7\sigma_o$	$p = 1$ $\sigma = \sigma_o$	$p = 1.33$ $\sigma = 0.87\sigma_o$	
0	$p = 0.5$ $\sigma = 1.4\sigma_o$	$p = 0.5$ $\sigma = 1.4\sigma_o$	$p = 2$ $\sigma = 0.71\sigma_o$	$\rho = 0$ stochastisch unabhängige Zufallsgrössen; EFFG
−0.5	$p = 1$ $\sigma = \sigma_o$	$p = 0.33$ $\sigma = 1.7\sigma_o$	$p = 4$ $\sigma = 0.5\sigma_o$	$-1 < \rho < 0$ "negativer" Korrelationstypus
−1	$p = \infty$ $\sigma = 0$	$p = 0.25$ $\sigma = 2\sigma_o$	$p = \infty$ $\sigma = 0$	

Tabelle 3 Gewicht und Varianz von Summe, Differenz und Mittelwert bei direkten, gleichgenauen korrelierten Beobachtungen;

$P_{\bar{\ell}} = P_{\bar{p}} = 1$

	$C_{\bar{\ell}\bar{p}} = \sigma_0^2 \begin{vmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{vmatrix}$			$\underline{C}_{\bar{\ell}\bar{p}} = \sigma_0^2 \begin{vmatrix} q_{\bar{\ell}} & \rho\sqrt{q_{\bar{\ell}} q_{\bar{p}}} \\ \rho\sqrt{q_{\bar{\ell}} q_{\bar{p}}} & q_{\bar{p}} \end{vmatrix}$			$\underline{P}_{\ell_1} = \underline{P}_{\ell_2} = P$ $\quad A_1 = A_2 = A$ $\underline{Q}_1 = \underline{Q}_2 = \underline{Q}_{\ell\ell} = P^{-1}$ $\quad \underline{Q}_{X_1X_1} = \underline{Q}_{X_2X_2} = \underline{Q}_{XX}$ $\underline{Q}_{XX} = (A^T P A)^{-1}$ $\underline{C}_{\ell_1\ell_2}: \sigma_0^2 \begin{vmatrix} \underline{Q}_{\ell\ell} & \rho\underline{Q}_{\ell\ell} \\ \rho\underline{Q}_{\ell\ell} & \underline{Q}_{\ell\ell} \end{vmatrix}$ $\quad \underline{Q}_{X_1X_2}: \sigma_0^2 \begin{vmatrix} \underline{Q}_{XX} & \rho\underline{Q}_{XX} \\ \rho\underline{Q}_{XX} & \underline{Q}_{XX} \end{vmatrix}$					
	Summe	Differenz	einfacher Mittelwert	Summe	Differenz	gewogener Mittelwert	Summe	Differenz	einfacher Mittelwert
	$\phi = \bar{\ell} + \bar{p}$	$\phi = \bar{\ell} - \bar{p}$	$\phi = \frac{1}{2}(\bar{\ell} + \bar{p})$	$\phi = \bar{\ell} + \bar{p}$	$\phi = \bar{\ell} - \bar{p}$	$\phi = \frac{1}{[p]}(P_{\bar{\ell}}\bar{\ell} + P_{\bar{p}}\bar{p})$	$\phi = \underline{X}_1 + \underline{X}_2$	$\phi = \underline{X}_1 - \underline{X}_2$	$\phi = \frac{1}{2}(\underline{X}_1 + \underline{X}_2)$
	$\sigma_\phi^2 = 2\sigma_0^2(1+\rho)$	$\sigma_\phi^2 = 2\sigma_0^2(1-\rho)$	$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2(1+\rho)$	$\sigma_\phi^2 = \sigma_0^2(q_{\bar{\ell}} + q_{\bar{p}} + 2\rho\sqrt{q_{\bar{\ell}} q_{\bar{p}}})$	$\sigma_\phi^2 = \sigma_0^2(q_{\bar{\ell}} + q_{\bar{p}} - 2\rho\sqrt{q_{\bar{\ell}} q_{\bar{p}}})$	$\sigma_\phi^2 = \sigma_0^2\left(\frac{q_{\bar{\ell}} \cdot q_{\bar{p}}}{[q]} + 2\rho\frac{(q_{\bar{\ell}} \cdot q_{\bar{p}})^{\frac{3}{2}}}{[q]^2}\right)$	$\sigma_\phi^2 = 2\sigma_0^2\underline{Q}_{XX}(1+\rho)$	$\sigma_\phi^2 = 2\sigma_0^2\underline{Q}_{XX}(1-\rho)$	$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2\underline{Q}_{XX}(1+\rho)$
"Positive" Korrelation $0<\rho<1$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$
$(*)$ $\rho = 0$	$\sigma_*^2 = 2\sigma_0^2$	$\sigma_*^2 = 2\sigma_0^2$	$\sigma_*^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2$	$\sigma_*^2 = \sigma_0^2(q_{\bar{\ell}} + q_{\bar{p}})$	$\sigma_*^2 = \sigma_0^2(q_{\bar{\ell}} + q_{\bar{p}})$	$\sigma_*^2 = \sigma_0^2\frac{q_{\bar{\ell}} \cdot q_{\bar{p}}}{[q]}$	$\sigma_*^2 = 2\sigma_0^2\underline{Q}_{XX}$	$\sigma_*^2 = 2\sigma_0^2\underline{Q}_{XX}$	$\sigma_*^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2\underline{Q}_{XX}$
"negative" Korrelation $-1<\rho<0$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$	$\sigma^2 > \sigma_*^2$	$\sigma^2 < \sigma_*^2$

Tabelle 4 Varianzen von Summen, Differenzen und Mittelwert bei korrelierten Beobachtungen

2. POSITIVER UND NEGATIVER KORRELATIONSTYPUS MERKMALE, BEDEUTUNG IN DER MESSTECHNIK

Nach Kenntnis des Autors gibt es in der Literatur die Begriffe "positiver" und "negativer" Korrelationstypus nicht. Sie werden für diese Arbeit eingeführt.

2.1 DER POSITIVE KORRELATONSTYPUS [3)]

"Positive" Korrelation kann als Autokorrelation und/oder Kreuzkorrelation vorkommen.

Positive Korrelation mit $0 < \rho < +1$ kommt vor, wenn die Realisierungen von derselben oder von verschiedenen Zufallsgrössen mit systematischen Fehlern mit demselben - positiven oder negativen - Vorzeichen behaftet sind. Positive Korrelation kommt auch vor, wenn die Realisierungen von derselben oder von verschiedenen Zufallsgrössen mit pseudosystematischen Fehlern behaftet sind. [4)]

Der Fall $\rho \approx +1$ ist durchaus realistisch; vielleicht nicht im Vermessungswesen aber z.B. in der Feinwerktechnik. Er kann dann vorliegen, wenn die absolute Grösse der zufälligen Fehler gegenüber der absoluten Grösse der systematischen Einflüsse vernachlässigbar klein ist. Das stochastische Modell könnte in diesem Fall ganz durch ein zutreffender formuliertes funktionales Modell ersetzt werden.

---

3) Allgemeines über Korrelation in der Messtechnik siehe im Anhang, Ziffer 7.

4) In [1] ist die Parameterschätzung bei Messreihen und Messprozessen behandelt, die mit pseudosystematischen Fehlern behaftet sind.

2:2 ÜBER VARIANZEN VON FUNKTIONEN VON ZUFALLSGRÖSSEN BEI POSITIVER KORRELATION

Die Interpretation der Tabellen 3, 4 führt beim Vergleich von positiv kreuzkorrelierten Beobachtungen mit korrelationsfreien Beobachtungen zu den folgenden Aussagen:

- die Varianzen von Differenzen sind kleiner
  bzw. die Vertrauensintervalle auf gleichem Niveau für den wahren Wert von Differenzen sind kleiner

- die Varianzen von Summen und Mittelwerten sind grösser
  bzw. die Vertrauensintervalle auf gleichem Niveau für den wahren Wert von Summen und Mittelwerten sind grösser

- erwartungstreue [5] Schätzungen für Differenzen können eher erzielt werden als für Summen und/oder Mittelwerte.

2.3 DER NEGATIVE KORRELATIONSTYPUS

" Negative " Korrelation kann als Autokorrelation und/oder Kreuzkorrelation vorkommen. Negative Korrelation mit $-1 < \rho < 0$ kommt vor, wenn eine oder mehrere Realisierungen von derselben oder von verschiedenen Zufallsgrössen mit systematischen Fehlern behaftet sind, deren Vorzeichen verschieden ist. Das kann z.B. auftreten, wenn ein mechanisches Messsystem "Spiel" aufweist und die Messrichtung bei jeder Messung wechselt; das Analoge für elektrische Messsysteme ist Hysterese.

---

[5] Eine Schätzung wird dann als erwartungstreu (unverzerrt; englisch: unbiased) bezeichnet, " wenn bei sehr vielen Wiederholungen des Versuches mit gleichem Stichprobenumfang der Mittelwert der Schätzwerte gegen den wahren Wert der Grundgesamtheit strebt"; aus [2]

Negative Kreuzkorrelation kann z. B. auftreten, wenn Messreihen miteinander verarbeitet werden, die unter verschiedenen äusseren Bedingungen erhoben wurden, z.B. Sommer, Winter; Tag, Nacht; hoher, niedriger Atmosphärendruck; u.a.m.

Auch hier ist der Fall von $\rho \approx -1$ durchaus denkbar.

2.4 ÜBER VARIANZEN VON FUNKTIONEN VON ZUFALLSGRÖSSEN BEI NEGATIVER KORRELATION

Die Interpretation der Tabellen 3, 4 führt beim Vergleich von negativ korrelierten Beobachtungen mit korrelationsfreien Beobachtungen zu den folgenden Aussagen:

- die Varianzen von Differenzen sind grösser
  bzw. die Vertrauensintervalle auf gleichem Niveau für den wahren Wert von Differenzen sind grösser

- die Varianzen von Summen und Mittelwerten sind kleiner
  bzw. die Vertrauensintervalle auf gleichem Niveau für den wahren Wert von Summen und Mittelwerten sind kleiner

- erwartungstreue [5)] Schätzungen für Summen und Mittelwerte können eher erzielt werden als für Differenzen.

2.5 GEMEINSAME BEMERKUNGEN ZU VARIANZEN VON FUNKTIONEN VON ZUFALLSGRÖSSEN BEI POSITIVER UND NEGATIVER KORRELATION

Die Berechnungen in Ziffer 1 und die Interpretation der Resultate in Ziffer 2 sind theoretische Betrachtungen. Es werden für einfache aber sehr wichtige Funktionen mit verschiedenen stochastischen Modellen die Varianzen berechnet und miteinander verglichen. Deshalb erhebt sich die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen die Aussagen von Ziffer 2.2, 2.4 auf empirische Fälle übertragen werden dürfen:

Unter Voraussetzung der zugrunde gelegten Modelle können die Aussagen über Vertrauensintervalle qualitativ auf empirische Fälle übertragen werden. Ins Gewicht fällt dabei vor allem, dass die betrachteten Funktionen zwischen einzelnen Zufallsgrössen gebildet werden und nicht ihrerseits, z. B. Summe oder Differenz, selbständige Beobachtungs- bzw. Zufallsgrössen darstellen. Zu beachten ist ferner, dass die empirisch geschätzten Varianzen der Zufallsgrössen und insbesondere die allenfalls empirisch bestimmten Korrelationskoeffizienten ihrerseits Zufallsgrössen sind, die zwar zu qualitativ übertragbaren Resultaten, jedoch mit tieferem Vertrauensniveau oder grösseren Vertrauensintervallen führen.

2.6 ÜBER PUNKTSCHÄTZUNGEN BEI AUTOKORRELIERTEN EINDIMENTIONALEN ZUFALLSGRÖSSEN UND ÜBER GRENZFÄLLE

In Ziffer 1.1 ist mit der Methode der kleinsten Quadrate bei einer sehr kleinen Stichprobe von nur zwei Realisierungen der Erwartungswert einer Zufallsgrösse geschätzt. Dennoch können aus den Resultaten wichtige allgemeine Schlüsse abgeleitet werden:

2.6.1 Schätzung von Erwartungswerten

- Beim Vorliegen von systematischen Fehlern gewährleistet die Einführung von Korrelationen ins stochastische Modell im allgemeinen nicht erwartungstreue Schätzungen. [6)]

- Beim negativen Korrelationstypus sind erwartungstreue Schätzungen immerhin möglich, aber nicht gewährleistet.

- Beim Vorliegen von systematischen Fehlern können erwartungstreue Punktschätzungen nur erzielt werden, wenn die Korrelationen durch eine hinreichende Verfeinerung des funktionalen Modells beseitigt werden.

Nachfolgend sind die Ergebnisse der Formeln (1.1) (1. 2) und der Tabelle 1 in Worten wiederholt:

$\ell_2 = \ell_1$; $P_2 = P_1$; $P_2 \neq P_1$;	$-1 \leq \rho \leq +1$
Schä g.a.M. = Schä M.kl.Q.	
$\ell_2 \neq \ell_1$; $P_2 = P_1$	$-1 \leq \rho < +1$
Schä g.a.M. = Schä M.kl.Q.	
$\ell_2 \neq \ell_1$; $P_2 = P_1$	$\rho = +1$
Schä g.a.M. ≠ Schä M.kl.Q. ; Korr. (±) ∞	
$\ell_2 \neq \ell_1$; $P_2 \neq P_1$	$-1 \leq \rho < 0$
Schä g.a.M. ≠ Schä M.kl.Q.; kleine Korr. pos.	

6) Diese Aussage gilt für sog. stationäre Prozesse. Bei allgemeinen stochastischen Prozessen sind mit der Kollokationsmethode und anderen Verfahren Schätzungen und Prädiktionen möglich, wenn Stützwerte zur Verfügung stehen.

$\ell_2 \neq \ell_1$; $P_2 > P_1$	$-1 \leqslant \rho < 0$
Schä g.a.M. $\neq$ Schä M.kl.Q.;	kleine Korr. neg.
$\ell_2 \neq \ell_1$; $P_2 < P_1$	$0 < \rho \ll +1$
Schä g.a.M. $\neq$ Schä M.kl.Q.;	kleine Korr. neg.
	$\rho \overset{<}{\approx} +1$
	grosse Korr. neg.
$\ell_2 \neq \ell_1$; $P_2 > P_1$	$0 < \rho \ll +1$
Schä g.a.M. $\neq$ Schä M.kl.Q.;	kleine Korr. pos.
	$\rho \overset{<}{\approx} 1$
	grosse Korr. pos.

Schä	Schätzung
g. a. M.	gewogenes arithmetisches Mittel
M. kl. Q.	Methode der kleinsten Quadrate
Korr.	Korrekturen

- Beim Grenzfall $\ell_2 \neq \ell_1$, $P_2 = P_1$, $\rho = -1$ ist die Schä g. a. M. = Schä M.kl.Q. trotz der vollständigen funktionalen Abhängigkeit. Dies ist dem negativen Korrelationstypus zuzuschreiben; die systematischen "verzerrenden" Einflüsse haben umgekehrte Vorzeichen.

- Bei den Grenzfällen $\ell_2 \neq \ell_1$; $P_2 < P_1$; $P_2 > 1$; $\rho \approx +1$ werden die Korrekturwerte sehr gross und überschreiten im Grenzfall $\ell_2 \neq \ell_1$; $P_2 \approx P_1$, $\rho = +1$ sogar alle Grenzen. Wie ist das erklärbar? Es besteht vollständige funktionale Abhängigkeit; der Unterschied zwischen der "linearen" Schä g. a. M. und der "nichtlinearen" Schä M.kl.Q. wächst beim positiven Korrelationstypus sehr stark.

2.6.2 Über die Gewichte

In Tabelle 2 sind die Korrekturwerte der Gewichte bei Schä M.kl.Q. gegenüber dem Gewicht bei Schä g. a. M. (= [P]) dargestellt.

- Bei negativer Korrelation mit $-1 < \rho < 0$ ist das Gewicht der Schä M.kl.Q. stets grösser als für Schä g. a. M.; bei vollständiger funktionaler Abhängigkeit mit $\rho = -1$ wächst es über alle Grenzen. Es handelt sich nicht mehr um die Schätzung einer Zufallsgrösse; zwischen den beiden Messvorgängen besteht vollständige funktionale Abhängigkeit.

- Bei positiver Korrelation mit $0 < \rho < +1$ gibt es interessante Fakten: Für kleine Werte von ρ und geringe Gewichtsunterschiede überwiegen negative Korrekturwerte; die Gewichte von Schä M.kl. Q. sind kleiner als von Schä g. a. M. Für grössere Gewichtsdifferenzen und grössere Werte von ρ überwiegt die zunehmende funktionale Abhängigkeit; die Gewichte von Schä M.kl.Q. sind grösser als von Schä g. a. M. und wachsen für $\rho = +1$ wieder über alle Grenzen.

- Interessant ist jedoch der Grenzfall $P_2 = P_1 = 1$; $\rho = +1$: Der Korrekturwert beträgt -1; das Gewicht von Schä g. a. M.: $P = 2$; Gewicht von Schä M.kl.Q. : $P = 1$

2.7 ÜBER PUNKTSCHÄTZUNGEN BEI MEHRDIMENSIONALEN ZUFALLSGRÖSSEN

Die Aussagen über Punktschätzungen bei autokorrelierten eindimensionalen Zufallsgrössen können nur in Ausnahmefällen auf mehrdimensionale Zufallsgrössen übertragen werden; in der Regel gelten sie nicht.

Als einziges Beispiel wird die Punktschätzung in einem zweidimensionalen geodätischen Lagenetz erwähnt. Auch wenn positive Korrelationen vorkommen, sind erwartungstreueSchätzungen durchaus möglich. Massgeblich ist hier die Wirkung der Konfigurationsmatrix $\underline{A}$,

Dimension (n, u) des funktionalen Modells, mit beliebigen positiven und negativen Werten der Koeffizienten.

Beim eindimensionalen Fall handelt es sich um eine (n,1) - $\underline{A}$ Matrix, wobei

$\underline{A}^T$: (+1, +1, ... +1)

2.8 DIE BEDEUTUNG VON POSITIVER UND NEGATIVER KORRELATION FÜR DIE MESSTHECHNIK

Auf die nachfolgend behandelten sog. Absolut - und Differentialverfahren können die Erkenntnisse von Ziffer 2.2, 2.4 über autokorrelierte eindimensionale Zufallsgrössen qualitativ übertragen werden.

2.8.1 "Absolute" Verfahren

Bei derartigen Messmethoden und Messsystemen sind die unbekannten Parameter

- in einem Bezugssystem definiert und
- werden aus einem "direkt gemessenen" Messwert - ohne oder mit Wiederholungen - "direkt" bestimmt, oder
- werden aus mehreren "direkt gemessenen" Messwerten - ohne oder mit Wiederholungen - "indirekt" bestimmt, vermessen.

Die Resultate der Tabellen 3, 4 in Ziffer 1.2 und die Interpretation führen zur folgenden Aussage:

- bei "absoluten" Messverfahren mit direkten Beobachtungen ist negative Korrelation gegenüber positiver Korrelation ein grosser Vorteil. Bei negativer Korrelation sind erwartungstreue Schätzungen möglich.
  Vorbehalten bleiben die Aussagen in Ziffer 2.7 .

2.8.2 Differentialverfahren

Bei diesen Messmethoden und Messsystemen

- sind die unbekannten Parameter Differenzen, die unabhängig von einem Bezugssystem, Datum, definiert sind. Sie werden - wie zuvor ausgeführt -
- auch direkt gemessen oder indirekt vermessen.

Die Resultate der Tabellen 3, 4 in Ziffer 1.2 führen zur Aussage, dass

- bei Differentialverfahren positive gegenüber negativer Korrelation von Vorteil ist.

  Bei positiver Korrelation können mit Differentialverfahren erwartungstreue Schätzungen hoher Genauigkeit erzielt werden.

2.8.3 Klassische und moderne Beispiele von Differentialverfahren aus Vermessungswesen und Geodäsie sind

- Methode von Leit- und Folgepunkt in der Triangulationstechnik
- Ermittlung von kurzen Strecken aus Bildkoordinaten in der Photogrammetrie
- Deformationsmessungen aller Art mit Differenzbildung zwischen verschiedenen Epochen
- Differentialverfahren in der Satellitengeodäsie

3. ZUR KONSTRUKTION VON VARIANZ - KOVARIANZMATRIZEN

3.1 MATHEMATISCHE VORAUSSETZUNGEN

In der Regel interessieren - Sonderfälle vorbehalten - nur Fälle mit positiv definiten VKM; siehe hiezu Ziffer 8.

3.2 MÖGLICHKEITEN, METHODEN

a) Empirische Schätzung mit wahrscheinlichsten Verbesserungen aus Beobachtungsreihen mit Formeln (7.4).

b) Empirische Schätzung mit wahren Verbesserungen aus Beobachtungsreihen mit Formeln (7.3). Es handelt sich um Experimente, bei denen wahre Werte ("praktisch" fehlerfreie Werte) bekannt sind. Siehe Beispiele in Ziffern 3.5, 3.6.

c) Theoretische Herleitung. Analyse der möglichen Fehlerquellen; nach dem Elementarfehlerkonzept - siehe z.B. [3] - in zufällige und systematische Anteile aufteilen; absolute Grössen abschätzen; VKM mit Formeln (7.3) berechnen, " konstruieren". Siehe Beispiel in Ziffer 3.7. Literaturhilfen [4], [5], [6].

3.3 NUMERISCHE HILFEN ZUM VERFAHREN Ziffer 3.2, c)

Der wahre Verbesserungsvektor ε_i einer Beobachtung setze sich zusammen aus μ zufälligen Elementarfehlern ζ_i und υ systematischen Elementarfehlern γ_i . Diese werden in den Summen z_i und c_i zusammengefasst.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_1^{\mu} \zeta_i + \sum_1^{\upsilon} \gamma_i \\ &= z_i + c_i \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Somit kann für die wahren Verbesserungen der i-ten Realisierungen der beiden Zufallsgrössen ℓ, p geschrieben werden:

$\underline{\ell}$

$$\ell_i + \varepsilon_{\ell_i} = \tilde{\ell}$$

$$\varepsilon_{\ell_i} = z_{\ell_i} + c_{\ell_i} \qquad (3.2)$$

$\underline{p}$

$$p_i + \varepsilon_{p_i} = \tilde{p}$$

$$\varepsilon_{p_i} = z_{p_i} + c_{p_i}$$

Nun werden die Ausdrücke (3.2) für die Schätzung der Korrelationskoeffizienten ρ gemäss (7.3) angewendet:

$$\begin{aligned}\sigma_\ell^2 &= E\{\varepsilon_\ell^2\}\\ &= E\{(z_\ell + c_\ell)^2\}\\ &= E\{z_\ell^2\} + 2c_\ell\, E\{z_\ell\} + c_\ell^2\end{aligned}$$

$$E\{z_\ell\} = 0\ ; \quad E\{z_\ell^2\} = \sigma_{z_\ell}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_\ell^2 = \sigma_{z_\ell}^2 + c_\ell^2 \qquad (3.3)$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_{z_p}^2 + c_p^2$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\ell p} &= E\{\varepsilon_\ell \cdot \varepsilon_p\}\\ &= E\{(z_\ell + c_\ell)(z_p + c_p)\}\\ &= E\{z_\ell z_p + c_\ell z_p + c_p z_\ell + c_\ell c_p\}\\ &= E\{z_\ell\} \cdot E\{z_p\} + c_\ell E\{z_p\} + c_p E\{z_\ell\} + c_\ell c_p\end{aligned}$$

$$E\{z_\ell\} = E\{z_p\} = 0 \qquad (3.4)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\ell p} = c_\ell c_p$$

Damit ergibt sich mit (7.3)

$$\rho_{\ell p} = \rho_{p\ell} = \frac{c_\ell c_p}{\sqrt{\sigma^2_{z_\ell} + c^2_\ell} \cdot \sqrt{\sigma^2_{z_p} + c^2_p}} \qquad (3.5)$$

und für

$$|c_\ell| \approx |c_p| \approx |c| \quad \text{und}$$

$$\sigma^2_{z_\ell} \approx \sigma^2_{z_p} = \sigma^2_z$$

$$|\rho_{\ell p}| = |\rho_{p\ell}| = \frac{1}{1 + (\frac{\sigma_z}{c})^2} \qquad (3.6)$$

Bei Verwendung der Formel (3.6) muss das Vorzeichen des Korrelationskoeffizienten mit (3.5) ermittelt werden oder aus theoretischen Überlegungen über positive und negative Korrelation.

$\frac{\lvert c \rvert}{\sigma_z}$	$\lvert \rho \rvert$
32	0.9990
10.0	0.990
5.0	0.96
3.0	0.90
2.5	0.86
2.0	0.80
1.5	0.69
1.25	0.61
1.0	0.50
0.75	0.36
0.5	0.20
0.33...	0.10
0.25	0.06
0.2	0.04
0.1	0.01

Tabelle 5

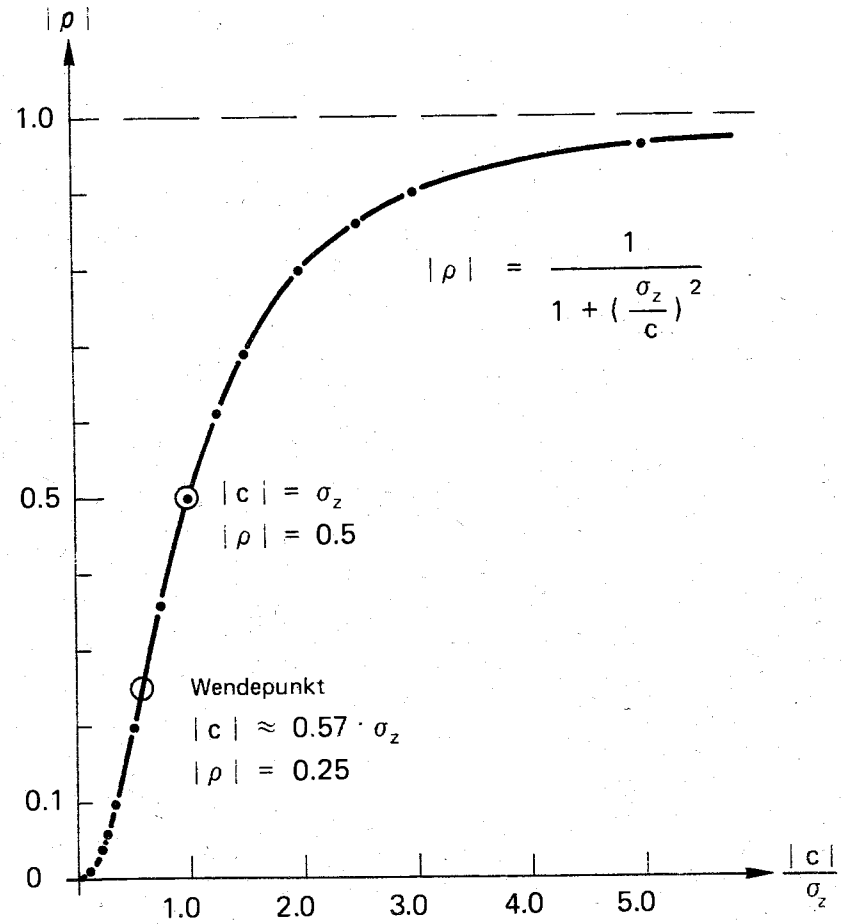

Abbildung 6

Korrelationskoeffizient als Funktion des Verhältnisses von systematischen zu zufälligen Fehleranteilen

ρ : Korrelationskoeffizient

σ_z: Standardabweichung der zufälligen Fehleranteile

c : Summe der systematischen Elementarfehler

Tabelle 5 und Abbildung 6 stellen die Funktion (3.6) dar und sind bei der Anwendung der Methode Ziffer 3.2, c) nützlich.

3.4 GENAUIGKEIT VON EMPIRISCH ERMITTELTEN KORRELATIONSKOEFFIZIENTEN

Empirisch ermittelte Korrelationskoeffizienten gemäss Ziffer 3. 2 a), b) sind Schätzwerte für den Erwartungswert von Zufallsgrössen. Die Konfidenzbereiche für geringen Stichprobenumfang sind sehr weit, liegen zudem unsymmetrisch und derart, dass die Tendenz besteht, das Ausmass von Korrelationen empirisch zu überschätzen; siehe [2], [3]

3.5 BEISPIEL : MESSBANDMESSUNG

In Rahmen der praktischen Vermessungsübungen für Bauingenieurstudenten gibt es auch eine Stahlband -Messkonkurrenz. In coupiertem, geneigtem, bewaldetem Gelände ist die horizontale Länge einer Strecke von ca 60 m mit Staffelmessung und Bandlängen von ca 15 m möglichst genau zu bestimmen. Die "flüssigen" Preise fallen dabei (evtl. ungerechterweise) jenen drei Gruppen zu, deren Messwerte mit den kleinsten wahren Fehlern behaftet sind. Die "wahren" Werte wurden mit EDM bestimmt. In Tabelle 7 sind für die Strecken ℓ und p - von total sieben Strecken - die Resultate der Jahre 1982 - 1984 dargestellt.

	Strecke ℓ	v	ϵ		Strecke p	v	ϵ
1982	[m]	[cm]	[cm]	1982	[m]	[cm]	[cm]
ℓ_1	59.94	− 9.5	− 15	p_1	61.30	+ 2	− 5
ℓ_2	.79	+ 5.5	0	p_2	.32	0	− 7
ℓ_3	.81	+ 3.5	− 2	p_3	.34	− 2	− 9
ℓ_4	.88	− 3.5	− 9	p_4	.40	− 8	− 15
1983 ℓ_5	.79	+ 5.5	0	1983 p_5	.31	+ 1	− 6
ℓ_6	.86	− 1.5	− 7	p_6	.31	+ 1	− 6
ℓ_7	.87	− 2.5	− 8	p_7	.27	+ 5	− 2
ℓ_8	.82	+ 2.5	− 3	p_8	.29	+ 3	− 4
1984 ℓ_9	.84	+ 0.5	− 5	1984 p_9	.32	0	− 7
ℓ_{10}	.87	− 2.5	− 8	p_{10}	.29	+ 3	− 4
ℓ_{11}	.85	− 0.5	− 6	p_{11}	.37	− 5	− 12
ℓ_{12}	.84	+ 0.5	− 5	p_{12}	.34	− 2	− 9
	[m]				[m]		
$\tilde{\ell}$	59.79			$\tilde{p}$	61.25		
$\bar{\ell}$	59.845			$\bar{p}$	61.32		
	[cm]				[cm]		
s'_ℓ	4.2	$= (\pm)\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}}$		s'_p	3.6		
s''_ℓ	7.0	$= (\pm)\sqrt{\frac{[\epsilon\epsilon]}{n}}$		s''_p	8.0		
	[cm^2]						
$s'_{\ell p}$	− 0.45	$= \frac{[v_\ell v_p]}{(n-1)}$		$r'_{\ell p}$	− 0.03	$= \frac{s'_{\ell p}}{s'_\ell \cdot s'_p}$	
$s''_{\ell p}$	+ 40	$= \frac{[\epsilon_\ell \epsilon_p]}{n}$		$r''_{\ell p}$	+ 0.71	$= \frac{s''_{\ell p}}{s''_\ell \cdot s''_p}$	

Tabelle 7 Kovarianzen bei der Messbandmessung

Die Bezeichnungen s´, bzw. s", r´, bzw. r" werden hier verwendet für empirische Schätzwerte aus wahrscheinlichsten bzw. wahren Verbesserungen

Die Ergebnisse von mit dem Messband gemessenen Strecken sind , wenn systematische Fehler im Modell nicht berücksichtigt werden, sehr stark korreliert. Von den vielen möglichen systematischen Fehlern sind beim Beispiel gemäss Tabelle 7 vor allem der Durchhang und die Schieflage beteiligt.

Dies sind pseudosystematische Fehler wie in [1] behandelt. Die Messwerte sind nicht normal sondern χ^2 - verteilt; die Mittelwertbildung stellt keine erwartungstreue Schätzung dar.

In [1] sind erwartungstreue Schätzungen für verschiedene Fälle hergeleitet. Für Beispiele der Art der Strecken ℓ, p in Tabelle 7 lautet die Schätzformel

$$\hat{\ell} = \bar{\ell} - \sqrt{\frac{t}{2}}\, s'_{\ell} \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{p} = \bar{p} - \sqrt{\frac{t}{2}}\, s'_{p} \qquad (3.7)$$

t ist die Anzahl der Teilstrecken, hier t = 8. Das ergibt $\hat{\ell} = 59.845 - \sqrt{4} \cdot 0.042 = 59.76$; $\hat{p} = 61.32 - \sqrt{4} \cdot 0.036 = 61.25$, was sehr schön mit den wahren Werten übereinstimmt.

Die Berechnung des Korrelationskoeffizenten $r_{\ell p}$ aus wahrscheinlichsten Verbesserungen ist bei diesem Beispiel nicht möglich. Auch der mit der Definitionsformel aus wahren Verbesserungen gerechnete Wert $r_{\ell p} = +0.71$ ist eine Schätzung aus einer relativ kleinen Stichprobe und kann seinerseits erheblich streuen. Auf die Schätzung eines Vertrauensintervalles wird hier verzichtet. Darüber wird, wie bereits erwähnt, z.B. in [2] , [3] berichtet.

3.6 BEISPIEL: PRÄZISIONSMESSMASCHINE

In Tabelle 9 sind Ergebnisse der Genauigkeitskontrolle einer numerisch gesteuerten NC - Bestückungsmaschine [7] dargestellt.

Automatisch wurden die Positionen ϕ, 2, 5, 10, 17 im Hin- und im Rückweg in fünf Sätzen angesteuert und mit einem Laserinterferometer "eingemessen". In den Kolonen 1 bis 5 sind die Messwerte in Einheiten von 10^{-7} m dargestellt. Da die Interferometermesswerte als fehlerfrei angenommen werden dürfen, handelt es sich um wahre Fehler gegenüber der Soll- (Nenn-) Positionierung. Bei der Positionierung "Null" wurde der Interferometermesswert jeweils mit dem Positionierungswert identisch gesetzt.

In den Kolonnen 1' - 5' stehen die Werte der auf eine "mittlere" Positionierung reduzierten Sätze.

In Abbildung 8 sind die Werte der reduzierten Sätze graphisch dargestellt. Auf einen Blick erkennt man die starke Korrelation, die Art der systematischen Fehler, z.B. Nichtlinearität, toter Gang, Massstabfehler und die Genauigkeitsmerkmale.

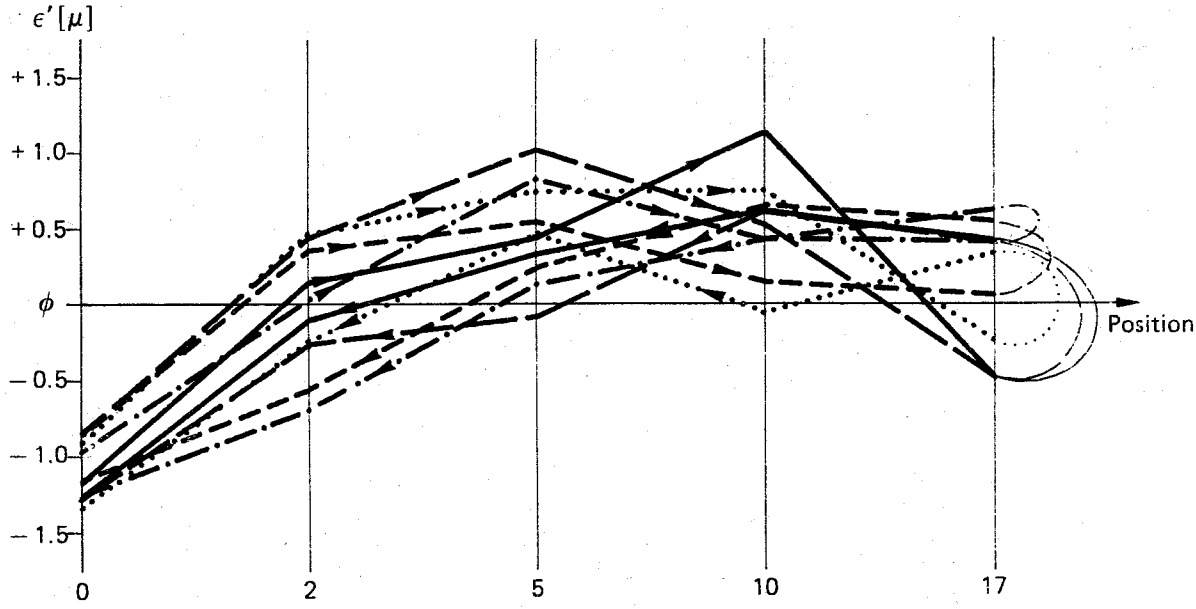

Abbildung 8 Prüfung der NC-Bestückungsmaschine [7] Nr. 52001, Verfahrensrichtung X

Aus Tabelle 9 wird mit den reduzierten Messwerten die VKM gemäss den Formeln (7.1), (7.5) für alle Positionierungen $H\phi \div H17$, $R17 \ldots R\phi$ geschätzt. Solche VKM sind ausgezeichnete Mittel für die numerische Charakterisierung, Klassierung und Überprüfung der Genauigkeit von Messsystemen; s. Abbildung 10. Bei einer idealen Messmaschine sind alle Elemente der Spur klein und gleich gross; alle übrigen Elemente sind Null.

Mit den Elementen der VKM können mit dem AFFG, Formel (6.1), Standardabweichungen von realisierten Strecken zwischen beliebigen Positionierungen geschätzt werden, z.B:

Gesucht

$$\sigma_{\overline{(H10,R\phi)}}$$

Lösung

$$\underset{(1,1)}{\underline{\Phi}} : (+ H10 - R\phi)$$

$$\underset{(1,2)}{\underline{f}} : (+ 1, - 1)$$

$$\underset{(2,2)}{\underline{C}_{\phi\phi}} : \begin{vmatrix} + 47 & - 77 \\ - 77 & + 160 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_{\phi}^{2} = \underline{f} \; \underline{C} \; \underline{f}^{T} = 361 \quad [10^{-7} \text{ m}]^{2}$$

$$\sigma_{\overline{(H10,R\phi)}} = 19.0 \; 10^{-7} \text{ m} \simeq 2 \; \mu \qquad (3.8)$$

Hin Rück	Position	Gemessene Sätze Wahre Streckenfehler gegenüber Ø					Reduzierte Sätze. Wahre Streckenfehler gegenüber mittlerer Positionierung				
		Kol. 1	2	3	4	5	Kol. 1'	2'	3'	4'	5'
		ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ	ϵ'	ϵ'	ϵ'	ϵ'	ϵ'
H	Ø	0	0	0	0	0	−11.7	− 8.8	− 8.5	− 9.7	− 9.4
↓	2	+ 13	+ 13	+ 12	+ 10	+ 14	+ 1.3	+ 4.2	+ 3.5	+ 0.3	+ 4.6
↓	5	+ 16	+ 19	+ 14	+ 18	+ 17	+ 4.3	+10.2	+ 5.5	+ 8.3	+ 7.6
↓	10	+ 23	+ 14	+ 10	+ 14	+ 17	+11.3	+ 5.2	+ 1.5	+ 4.3	+ 7.6
H	17	+ 7	+ 4	+ 9	+ 14	+ 7	− 4.7	− 4.8	+ 0.5	+ 4.3	− 2.4
R	17	+ 16	+ 13	+ 14	+ 16	+ 13	+ 4.3	+ 4.2	+ 5.5	+ 6.3	+ 3.6
↓	10	+ 18	+ 15	+ 15	+ 14	+ 9	+ 6.3	+ 6.2	+ 6.5	+ 4.3	− 0.4
↓	5	+ 15	+ 8	+ 11	+ 11	+ 14	+ 3.3	− 0.8	+ 2.5	+ 1.3	+ 4.6
↓	2	+ 10	+ 6	+ 3	+ 3	+ 7	− 1.7	− 2.8	− 5.5	− 6.7	− 2.4
R	Ø	− 1	− 4	− 3	− 3	− 4	−12.7	−12.8	−11.5	−12.7	−13.4
		[ϵ]	[ϵ]	[ϵ]	[ϵ]	[ϵ]	[ϵ']	[ϵ']	[ϵ']	[ϵ']	[ϵ']
		+117	+ 88	+ 85	+ 97	+ 94	0	0	0	0	0

Einheiten [10^{-7} m]

Tabelle 9 Prüfung der NC - Bestückungsmaschine [7] Nr.52001

Verfahrenrichtung X

---

[7] Numerisch gesteuerte Bestückungsmaschine, 2- dimensional für die Fabrikation von gedruckten elektronischen Schaltungen. Die einzelnen elektronischen Elemente werden zum anschliessenden Verlöten auf Platinen positioniert.

	H Ø	H 2	H 5	H 10	H 17	R 17	R 10	R 5	R 2	R Ø
H Ø	**94**	– 26	– 68	– 61	+ 15	– 49	– 44	– 22	+ 36	+122
H 2	– 26	**11**	+ 21	+ 16	– 7	+ 12	+ 11	+ 6	– 9	– 35
H 5	– 68	+ 21	**56**	+ 41	– 10	+ 34	+ 32	+ 13	– 28	– 91
H 10	– 61	+ 16	+ 41	**47**	– 15	+ 27	+ 26	+ 15	– 18	– 77
H 17	+ 15	– 7	– 10	– 15	**14**	– 4	– 7	– 3	– 1	+ 19
R 17	– 49	+ 12	+ 34	+ 27	– 4	**24**	+ 23	+ 10	– 20	– 60
R 10	– 44	+ 11	+ 32	+ 26	– 7	+ 23	**28**	+ 7	– 18	– 57
R 5	– 22	+ 6	+ 13	+ 15	– 3	+ 10	+ 7	**8**	– 7	– 28
R 2	+ 36	– 9	– 28	– 18	– 1	– 20	– 18	– 7	**18**	+ 48
R Ø	+122	– 35	– 91	– 77	+ 19	– 60	– 57	– 28	+ 48	**160**

Abbildung 10 Varianz- Kovarianz-Matrix für die NC-Bestückungsmaschine [7)]

Nr. 52001

Verfahrensrichtung X

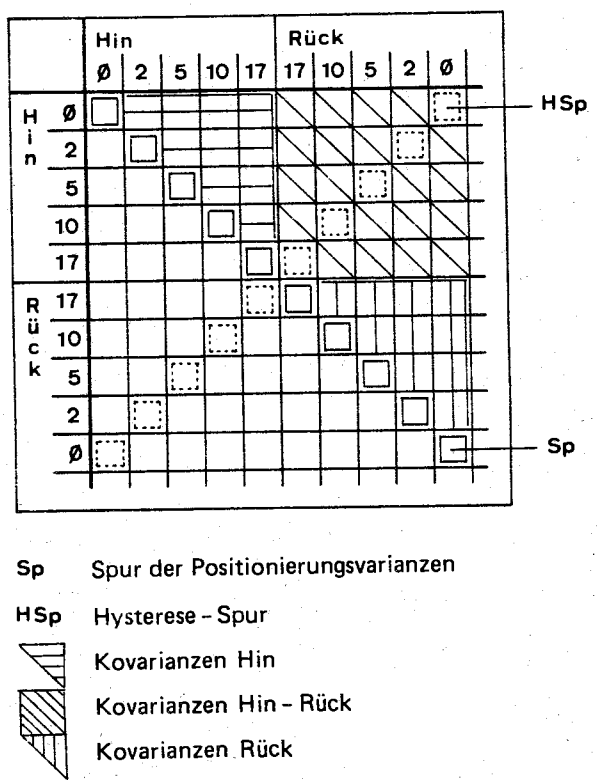

Abbildung 11 Varianz- Kovarianz-Matrizen als Messbrief für ein Messsystem

3.7 BEISPIEL: PRÄZISIONSNIVELLEMENT

3.7.1 Aufgabe

Ein letztes Beispiel betrifft die theoretische Herleitung, Konstruktion einer VKM gemäss Ziffer 3.2 c). Das geometrische Nivellement ist zwar ein sehr einfaches Verfahren, in der Perfektion des Präzisionsnivellementes wird es aber zu einem äusserst diffizilen stochastischen Prozess, bei dem eine grosse Zahl von systematischen Fehlern eine Rolle spielen und zu starken Korrelationen führen können.

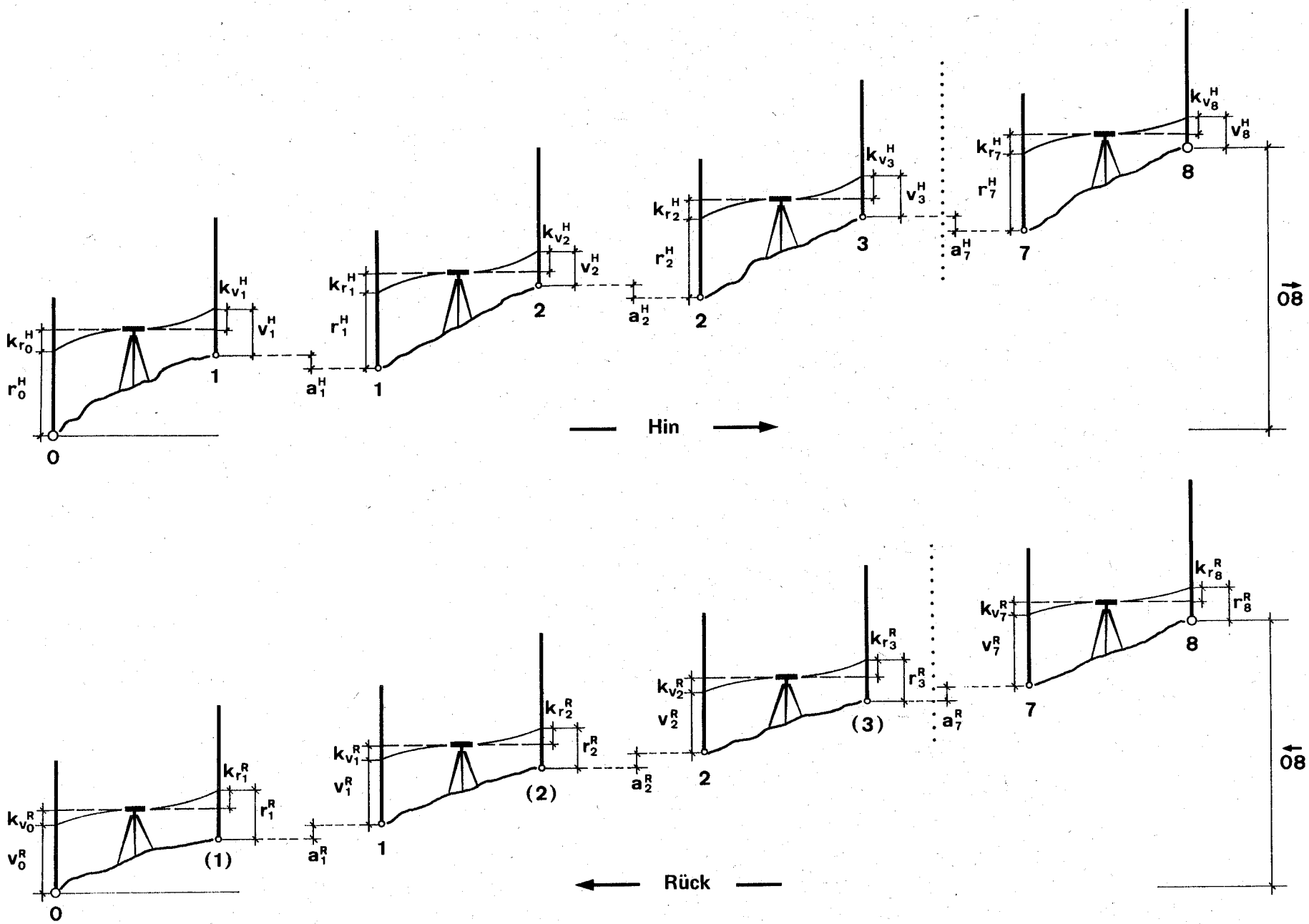

Abbildung 12 Funktionales Modell des Präzisionsnivellementes

Funktionales Modell

Es wird nur die Teilstrecke der Punkte 0 bis 8 behandelt; s. Abbildung 12. Das Nivellement wird im Hinweg, Punkte 0 bis 8, und im Rückweg, Punkte 8 bis 0, gemessen und mit den Formeln berechnet:

$$(\vec{ij}) = (r_i^H - v_j^H)$$
$$(\overleftarrow{ij}) = (r_j^R - v_i^R)$$

Stochastisches Modell

Von den vielen möglichen, zum Teil sehr bedeutsamen systematischen Fehlern, s. Tabelle 13, werden nur die Refraktion und das Absinken der Messlatten beim Wechsel des Instrumentes von einem auf den nächsten Standort betrachtet. Dies ist in Abbildung 12 dargestellt. Beim Refraktionseinfluss wird stark steigendes Gelände angenommen, qualitativ derart, dass vom Nivellierinstrument aus in Richtung der Messlatte unterhalb der Einfluss der Refraktion - k und in Richtung der Messlatte oberhalb + k ist.

Modellfehler

Erdkrümmung

Nicht - Parallelität von benachbarten Niveauflächen

Symmetrische Refraktion

Differentialrefraktion. Abweichung von der Symmetrie

Störeinfluss elektromagnetischer Fehler

Restfehler der Justierung und unvermeidliche Instrumentenfehler

Neigungsfehler der Ziellinie

Ziellinienkrümmung für verschiedene Distanzen

Unsymmetrische Kompensatorjustierung

Nichtlinearität der Kompensatorfunktion, Horizontschräge

Exzentrizität der mechanischen Kippachse oder der optischen Kippachse des Kompensators

Nichtlinearität der optischen Wirkung des Mikrometers

Kreuzungsfehler

Fehler der Nivellierlatten

Nullpunktfehler

Lattenmeter

Teilungsfehler

Schiefe der Auflage

Lattenschiefe

Temperaturausdehnung des Lattenbandes

Einsinken des Instrumentenstatives

Einsinken der Messlatten während Stationierung und Stationswechsel

Tabelle 13 Mögliche systematische Fehler beim Präzisionsnivellement.

$(\vec{ij}) = (r_i^H - v_j^H)$

$(\overleftarrow{ij}) = (r_j^R - v_i^R)$

Hinweg | *Rückweg*

$\underline{\ell}$ ℓ_1: $\varepsilon(\vec{01}) = z(r_0^H - v_1^H) + k(\vec{01})$

ℓ_2: $\varepsilon(\vec{12}) = z(r_1^H - v_2^H) + k(\vec{12}) - a_1^H$

ℓ_3: $\varepsilon(\vec{23}) = z(r_2^H - v_3^H) + k(\vec{23}) - a_2^H$

$\vdots$

ℓ_8: $\varepsilon(\vec{78}) = z(r_7^H - v_8^H) + k(\vec{78}) - a_7^H$

(3.9)

$\underline{p}$ p_1: $\varepsilon(\overleftarrow{01}) = z(r_1^R - v_0^R) - k(\overleftarrow{01}) - a_1^R$

p_2: $\varepsilon(\overleftarrow{12}) = z(r_2^R - v_1^R) - k(\overleftarrow{12}) - a_2^R$

p_3: $\varepsilon(\overleftarrow{23}) = z(r_3^R - v_2^R) - k(\overleftarrow{23}) - a_3^R$

$\vdots$

p_8: $\varepsilon(\overleftarrow{78}) = z(r_8^R - v_7^R) - k(\overleftarrow{78})$

(3.10)

Modellannahmen

$k(\vec{ij}) = k(\overleftarrow{ij}) = k$; $i = 0 \div 7;\ j = i+1$

$a_i^H = a_i^R = a$; $i = 1 \div 7$

Landesnivellement L + T[8], 1981

Tiefenkastel ⊕ E (851 m.ü.M) bis Pass dal güglia ⊕ 66 (2285 m.ü.M.)

D_{E-66}: 36.5 km; ΔH_{E-66} : + 1434 m; Anzahl Abschnitte: t = 136

Im Durchschnitt: $D_z \approx 270$ m; $|\Delta H| \approx 10.5$ m

Anzahl Instrumenten - Standpunkte ≈ 8 pro t; D pro (r - v) ≈ 34 m;

$|\Delta H|$ pro (r - v) ≈ 1.5 m

---

8) Bundesamt für Landestopographie

$\sigma_{(r-v)} = 7.5 \cdot 10^{-2}$ mm	Zufälliger Messfehler an (r - v) für D ≈ 34 m zwischen zwei Messlattenstandpunkten (= $\sigma \approx 0.3$ mm für 1 km Doppelnivellement)
$a = 4.5 \cdot 10^{-2}$ mm	Absinken der Messlatten. Erfahrungswert des L + T bei ungünstigen Verhältnissen
$k = 9 \cdot 10^{-2}$ mm	Betrag der Vertikalrefraktion für D ≈ 34 m; $\lvert \Delta H \rvert \approx 1.5$ m (aus [7] : $k = s^2 \cdot \lvert \Delta H \rvert \cdot \eta$; s, ΔH in [m]; $\eta = 10^{-7}$ für Kontinentalklima; η in [m^{-2}]). Es wird hier nur der *halbe* Betrag berücksichtigt.

Bemerkung

Natürlich ist es eine sehr starke Vereinfachung, für die ganze Strecke dieselben numerischen Werte einzuführen.

Gesucht

– Theoretisch hergeleitete VKM
  - für einen Abschnitt t_i
  - für alle Abschnitte zusammen

– $\sigma_{(\Delta H^H + \Delta H^R)}$, Schleifenschluss, $\sigma_{(\Delta H)}$, Mittelwert
  - für einen Abschnitt t_i
  - für alle Abschnitte der Strecke Tiefenkastel bis Pass dal güglia zusammen

3.7.2 Lösung für einen Abschnitt t_i

$$\underset{(2,1)}{\underline{\phi}} : \left| \begin{array}{l} (\ell_1 + \ell_2 + \cdots \ell_8 + p_8 + p_7 + \cdots + p_1) \\ \frac{1}{2}\left(\sum_1^8 \ell_i - \sum_1^8 p_i\right) \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{(Schleifenschluss)} \\ \text{(Mittel)} \end{array} \qquad (3.11)$$

$$\underset{(2,16)}{\underline{f}} : \left| \begin{array}{l} +1, +1, \cdots +1, +1, +1, \cdots +1 \\ +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \cdots +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \cdots -\frac{1}{2} \end{array} \right|$$

Konstruktion der Elemente der VKM

$$E\left\{\varepsilon(\vec{01})\varepsilon(\vec{01})\right\} = E\left\{[z(r_0^H - v_1^H) + k][z(r_0^H - v_1^H) + k]\right\}$$

$$= E\left\{z(r_0^H - v_1^H)z(r_0^H - v_1^H)\right\} + 2k \cdot E\{z\} + k^2$$

$$= \sigma_z^2 + k^2 = 137 \qquad [10^{-2}\text{mm}]^2$$

$$E\left\{[\varepsilon(\vec{01})]\,[\varepsilon(\overleftarrow{01})]\right\} = E\left\{[z(r_0^H - v_1^H) + k]\,[z(r_1^R - v_0^R) - k - a]\right\}$$

$$= E\left\{[z(r_0^H - v_1^H)] \cdot [z(r_1^R - v_0^R)]\right\} - k \cdot E\{z\} - a \cdot E\{z\}$$
$$+ k\,E\{z\} - k^2 - ka$$

$$= -k^2 - ka = -121 \qquad [10^{-2}\text{mm}]^2$$

$$E\left\{[\varepsilon(\vec{78})]\,[\varepsilon(\overleftarrow{01})]\right\} = E\left\{[z(r_7^H - v_8^H) + k - a] \cdot [z(r_1^R - v_0^R) - k - a]\right\}$$

$$= E\left\{[z(r_7^H - v_8^H)]\,[z(r_1^R - v_0^R)]\right\} - k\,E\{z\} - aE\{z\}$$
$$+ k\,E\{z\} - k^2 - ka - aE\{z\} + ak + a^2$$

$$= -k^2 + a^2$$

$$= -81 + 20 = -61 \qquad [10^{-2}\text{mm}]^2$$

u.s.w. In Tabelle 14 ist die derart berechnete VKM dargestellt.

$\underline{C}_{\ell p}$ (16,16)	ℓ_1 $\overrightarrow{(01)}$	ℓ_2 $\overrightarrow{(12)}$	ℓ_3 $\overrightarrow{(23)}$	ℓ_4 $\overrightarrow{(34)}$	ℓ_5 $\overrightarrow{(45)}$	ℓ_6 $\overrightarrow{(56)}$	ℓ_7 $\overrightarrow{(67)}$	ℓ_8 $\overrightarrow{(78)}$	p_8 $\overleftarrow{(78)}$	p_7 $\overleftarrow{(67)}$	p_6 $\overleftarrow{(56)}$	p_5 $\overleftarrow{(45)}$	p_4 $\overleftarrow{(34)}$	p_3 $\overleftarrow{(23)}$	p_2 $\overleftarrow{(12)}$	p_1 $\overleftarrow{(01)}$
$\overrightarrow{(01)}$	137	40	40	40	40	40	40	40	-81	-121	-121	-121	-121	-121	-121	-121
$\overrightarrow{(12)}$		76	20	20	20	20	20	20	-40	-61	-61	-61	-61	-61	-61	-61
$\overrightarrow{(23)}$			76	20	20	20	20	20	-40	-61	-61	-61	-61	-61	-61	-61
$\overrightarrow{(34)}$				76	20	20	20	20	-40	-61	-61	-61	-61	-61	-61	-61
$\overrightarrow{(45)}$					76	20	20	20	-40	-61	-61	-61	-61	-61	-61	-61
$\overrightarrow{(56)}$						76	20	20	-40	-61	-61	-61	-61	-61	-61	-61
$\overrightarrow{(67)}$							76	20	-40	-61	-61	-61	-61	-61	-61	-61
$\overrightarrow{(78)}$								76	-40	-61	-61	-61	-61	-61	-61	-61
$\overleftarrow{(78)}$									137	121	121	121	121	121	121	121
$\overleftarrow{(67)}$										238	182	182	182	182	182	182
$\overleftarrow{(56)}$											238	182	182	182	182	182
$\overleftarrow{(45)}$												238	182	182	182	182
$\overleftarrow{(34)}$													238	182	182	182
$\overleftarrow{(23)}$														238	182	182
$\overleftarrow{(12)}$															238	182
$\overleftarrow{(01)}$																238

Einheit: [0.01mm]^2

Tabelle 14 Varianz - Kovarianzmatrix für einen Abschnitt t_i eines Präzisionsnivellementes im Gebirge von ca. 270 m Länge

$\sigma_{(r-v)} = 7.5$ [10^{-2} mm]; | a | = 4.5 [10^{-2} mm]; | k | = 9 [10^{-2} mm]

Resultate für einen Abschnitt t_i

Mit ϕ gemäss (3.11) und der VKM von Tabelle 14 bilden wir

$$\underline{C}_{\phi\phi} = \underline{f}\ \underline{C}_{\ell p}\ \underline{f}^T = \begin{vmatrix} 4816 & -4536 \\ -4536 & 5401 \end{vmatrix} \qquad (3.12)$$

$$[0.01\ \text{mm}]^2$$

Hieraus ergeben sich:

Theoretischer mittlerer Schleifenschlussfehler

$$(\sigma_{\Delta H^H+\Delta H^R})^2 = 4816\ [0.01\ \text{mm}]^2$$

$$\sigma_{\Delta H^H+\Delta H^R} = 69\ [0.01\ \text{mm}] \qquad (3.13)$$

$$\simeq 0.7\ \text{mm}$$

Der entsprechende *Werte ohne Korrelation* beträgt

$$(\sigma_{\Delta H^H+\Delta H^R})^2 = \left(\sqrt{\frac{270}{1000}}\right)^2 (\sqrt{2}\ \sqrt{2})^2\, 30^2$$

$$= 972\ [0.01\ \text{mm}]^2$$

$$\sigma'_{\Delta H^H+\Delta H^R} = 31\ [0.01\ \text{mm}]$$

Theoretischer mittlerer Fehler am Mittel von Hin- und Rücknivellement

$$(\sigma_{\overline{\Delta H}})^2 = 5401\ [0.01\ \text{mm}]^2$$

$$\sigma_{\overline{\Delta H}} = 73\ [0.01\ \text{mm}] \qquad (3.14)$$

$$\simeq 0.7\ \text{mm}$$

Der entsprechende *Wert ohne Korrelation* beträgt

$$(\sigma'_{\overline{\Delta H}})^2 = \left(\sqrt{\frac{270}{1000}}\right)^2 30^2$$

$$= 243\ [0.01\ \text{mm}]^2$$

$$\sigma'_{\overline{\Delta H}} = 16\ [0.01\ \text{mm}]$$

3.7.3 Lösung für die ganze Strecke

Annahmen zum mathematischen Modell

Es sollen auf der ganzen Strecke dieselben äusseren Verhältnisse herrschen. Alle 136 Abschnitte seien deshalb untereinander in gleicher Weise kreuzkorreliert.

Korrelation der Elemente der VKM für 136 Teilstrecken

Analog wie in Ziffer 3.7.2

$$E\{[\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_1]\} =$$

$$E\{[z(\ell_1)+z(\ell_2)+ \cdots z(\ell_8)+8k-7a][z(\ell_1)+z(\ell_2)+ \cdots z(\ell_8)+8k-7a]\}$$

$$= 8\,\sigma^2_{(r-v)} + 64\,k^2 + 49\,a^2 - 112\,k \cdot a$$

$$= +\,2090.25 \qquad [0.01\ \text{mm}]^2$$

$$\simeq +\,0.21 \qquad [\text{mm}]^2$$

$$E\{[\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_1]\} =$$

$$E\{[z(\ell_1)+z(\ell_2)+ \cdots z(\ell_8)+8k-7a][z(p_8)+z(p_7)+ \cdots z(p_1)-8k-7a]\}$$

$$= -\,64\,k^2 + 49\,a^2$$

$$= -\,4192 \qquad [0.01\ \text{mm}]^2$$

$$\simeq -\,0.42 \qquad [\text{mm}]^2$$

In Tabelle 15 ist die VKM für alle 136 Teilstrecken dargestellt

$\underline{C}_{t_i t_j}$	$\vec{t}_1$	$\overleftarrow{t}_1$	$\vec{t}_2$	$\overleftarrow{t}_2$	$\vec{t}_3$	.....	$\overleftarrow{t}_{134}$	$\vec{t}_{135}$	$\overleftarrow{t}_{135}$	$\vec{t}_{136}$	$\overleftarrow{t}_{136}$
$\vec{t}_1$	+0.21	−0.42	+0.16	−0.42						+0.16	−0.42
$\overleftarrow{t}_1$	−0.42	+1.11	−0.42	+1.07							+1.07
$\vec{t}_2$	+0.16	−0.42	+0.21	−0.42							
$\overleftarrow{t}_2$	−0.42	+1.07	−0.42	+1.11							
$\vec{t}_3$	+0.16	−0.42									
⋮											
$\vec{t}_{135}$								+0.21	−0.42	+0.16	−0.42
$\overleftarrow{t}_{135}$								−0.42	+1.11	−0.42	+1.07
$\vec{t}_{136}$	+0.16	−0.42						+0.16	−0.42	+0.21	−0.42
$\overleftarrow{t}_{136}$	−0.42	+1.07						−0.42	+1.07	−0.42	+1.11

Einheiten: $[\,mm]^2$

Tabelle 15 Varianz - Kovarianzmatrix für alle 136 Teilstrecken t_i je mit Hin- und Rücknivellement. $\sigma_{(r-v)} = 7.5\ [10^{-2}mm\,]$, $|a| = 4.5\ [10^{-2}mm\,]$, $|k| = 9\ [10^{-2}\,mm\,]$

Resultate für die ganze Strecke

Funktionalvektor

$$\underset{(2,1)}{\underline{\phi}} : \begin{vmatrix} \overleftrightarrow{t}_1 + \overleftarrow{t}_1 + \overleftrightarrow{t}_2 + \overleftarrow{t}_2 + \cdots + \overleftrightarrow{t}_{136} + \overleftarrow{t}_{136} \\ \\ +\frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 - \frac{1}{2}t_2 + \cdots + \frac{1}{2}t_{136} - \frac{1}{2}t_{136} \end{vmatrix}$$

Differentialoperator

$$\underset{(2,272)}{\underline{f}} : \begin{vmatrix} +1, +1, +1, \cdots & +1, +1 \\ \\ +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \cdots & +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Resultat

$$\underset{(2,2)}{\underline{C}_{\phi\phi}} = \underline{f}\ \underline{C}\ \underline{f}^T : \begin{vmatrix} 7225 & -8416 \\ \\ -8416 & 9574 \end{vmatrix}$$

$$[\mathrm{mm}]^2$$

Theoretischer mittlerer Schleifenschlussfehler für die ganze Strecke

$$\sigma_{\Delta H^H + \Delta H^R} = \sqrt{7225} \simeq 85 \quad \mathrm{mm}$$

Der entsprechende *Wert ohne Korrelation* bzw. ohne systematische Fehler beträgt

$$\sigma'_{\Delta H^H + \Delta H^R} = 0.3 \cdot \sqrt{36.5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \simeq 3.6 \quad \mathrm{mm}$$

Theoretischer mittlerer Fehler am Mittel von Hin - und Rücknivellement

$$\sigma_{\overline{\Delta H}} = \sqrt{9574} = 98 \text{ mm}$$

Der entsprechende *Wert ohne Korrelation* bzw. ohne systematische Fehler beträgt

$$\sigma'_{\overline{\Delta H}} = \sqrt{36.5} \cdot 0.3 \approx 1.8 \text{ mm}$$

3.7.4 Varianz- Kovarianzmatrix der Höhen

In Tabelle 16 ist die VKM der Höhen ("-Positionierung") einzelner Zwischenpunkte auf der ganzen Messstrecke bei Hin - und Rücknivellement dargestellt.

Diese Darstellung ist direkt vergleichbar mit den Abbildungen 10, 11.

$C_{\emptyset\emptyset}$	H_0	H_{34}	H_{68}	H_{102}	H_{136}	H'_{102}	H'_{68}	H'_{34}	H'_0
H_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H_{34}		191	379	569	758	274	–211	–695	–1180
H_{68}			762	1138	1517	548	–421	–1390	–2360
H_{102}				1711	2275	822	–632	–2086	–3539
H_{136}					3040	1096	–843	–2781	–4719
H'_{102}						403	–304	–1004	–1704
H'_{68}							243	–772	–1311
H'_{34}								2560	4326
H'_0									7353

Einheiten: $[\,mm\,]^2$

Tabelle 16 Varianz- Kovarianzmatrix der Höhen ("-Positionierung") einzelner Zwischenpunkte auf der ganzen Messstrecke mit Hin- und Rücknivellement.

$\sigma_{(r-v)} = 7.5\ [\,10^{-2}\,mm\,]$, $|\,a\,| = 4.5\ [\,10^{-2}\,mm\,]$, $|\,k\,| = 9\ [\,10^{-2}\,mm\,]$

Seiten 45 , 46

Seiten 47 , 48

3.7.6 Diskussion der Resultate

Das Beispiel zeigt eindrücklich, dass der vorteihafte Charakter der Fehlerfortpflanzung des Nivellementes ($\sigma \sim D^{1/2}$) verloren geht wenn systematische Fehler beteiligt sind. Summen werden dann zu unvorteilhaften Funktionen. Im vorliegenden Fall beträgt die Anzahl der Summanden für Hin- und Rücknivellement über die ganze Messstrecke 2176.

Die Summenbildung beim Nivellement führt zu unüberblickbarer Fehlerfortpflanzung. Je nach der Wahl der Anzahl und der Grösse der systematischen Fehler führt der stochastische Prozess zu ganz verschiedenen Varianzen. Als Beispiel wird auf Tabelle 16 verwiesen: Zusammen mit der Höhe H_{34} ist die Horizontangabe H'_{68} gegenüber H_0 - berechnet aus Hinnivellement über die Passhöhe und einem Teilstück Rücknivellement abwärts - mit der weitaus kleinsten Varianz behaftet.

Bei Schätzungen von Vertrauensintervallen für Höhen, die mit Nivellement gewonnen werden, ist deshalb grosse Sorgfalt geboten. In den Beispielen sind für den Einfluss der Differentialrefraktion nur 1/2 bzw. 1/4 des in [7] nachgewiesenen Betrages und von den vielen möglichen systematischen Fehlern gemäss Tabelle 13 nur deren zwei berücksichtigt.

Die durchwegs starke Korrelation aller Teilstrecken t_i untereinander gemäss Tabellen 15, 18 ist vielleicht etwas gross; immerhin scheint diese Modellannahme für die beiden berücksichtigten systematischen Fehler durchaus gerechtfertigt. In [6] wird auch ein Beispiel mit sehr schwach abklingender Korrelation beschrieben.

In Tabelle 18 sind die Kovarianzen unter den einzelnen Teilstrecken viel kleiner als in Tabelle 15. Das hängt damit zusammen, dass der absolute Betrag der Lattensetzung ($|a|$) und der Differential refraktion ($|k|$) fast gleich gewählt wurden.

Für Untersuchungen von rezenten Erdkrustenbewegungen ergeben sich glücklicherweise günstigere Werte als in den Ziffer 3.7.3, 3.7.5 ausgewiesen, da Differenzen von positiv korrelierten Grössen gebildet werden; siehe Ziffer 2.2 .

4. AUSBLICK

In dem Mass in dem in der Geodäsie genauer gemessen werden soll, nimmt die Bedeutung der systematischen Fehler aller Art und damit die Bedeutung von Korrelationen zu.

Für die Untersuchung von Messsystem und Verfahren aller Art, z.B. geometrisches Nivellement, Satelittenpositionierung, Inertialmesstechnik sind schematisch aufgebaute Testanlagen, deren Raumgeometrie mit aller Rafinesse möglichst fehlerfrei bestimmt ist, von grossem Nutzen.

Dann können VKM gemäss Abbildung 11 hergeleitet werden, die die Genauigkeit von Instrumenten und Verfahren, einschliesslich der äusseren Einflüsse, umfassend und zuverlässig kennzeichnen.

In Abbildung 20 sind zwei gleichartige Testnetze mit den Punkten Nr. 1- 10 schematisch dargestellt. Das eine hat die Form von zwei aneinandergefügten Satteldächern, wie man es sich z.B. im Mittelland vorstellen kann, das andere diejenige von zwei auf ihren Schneiden stehenden Keilen, im Fall von Gebirgstälern.

Die Segmente Satelliten, Kontrollstationen und Empfänger können als globale 3D-Koordinatenmessmaschine betrachtet werden. Mit dieser werden Kontrollkörper,[9] realisiert durch Testnetze, vermessen; dabei können verschiedene Verfahrensmodi zur Anwendung kommen, z.B. Positionierungs- und/oder Differentialverfahren aller Art, einzeln oder kombiniert.

Freie Netzausgleichungen mit anschliessender geeigneter Lagerung, einerseits mit den Messwerten von klassischen terrestrischen Verfahren und anderseits mit denjenigen der zu untersuchenden Verfahren liefern dann die Daten zur Darstellung der Testresultate in einer VKM, z.B. gemäss Tabelle 21.

---

9) in der Feinwerktechnik z.B. Kreise, Kugeln

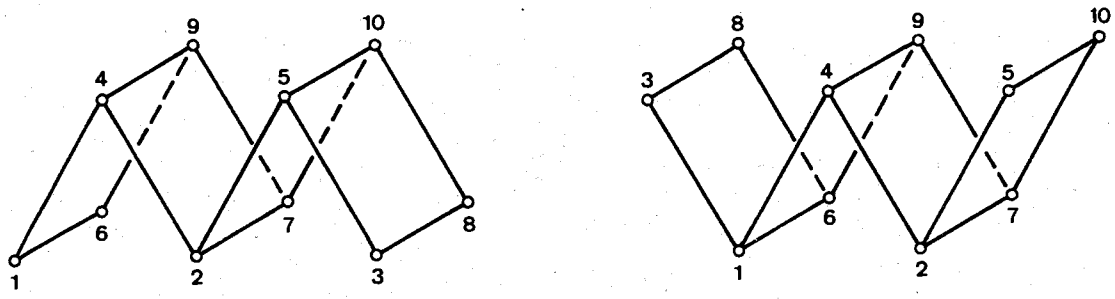

Abbildung 20 Testnetze, 3D-Kontrollkörper

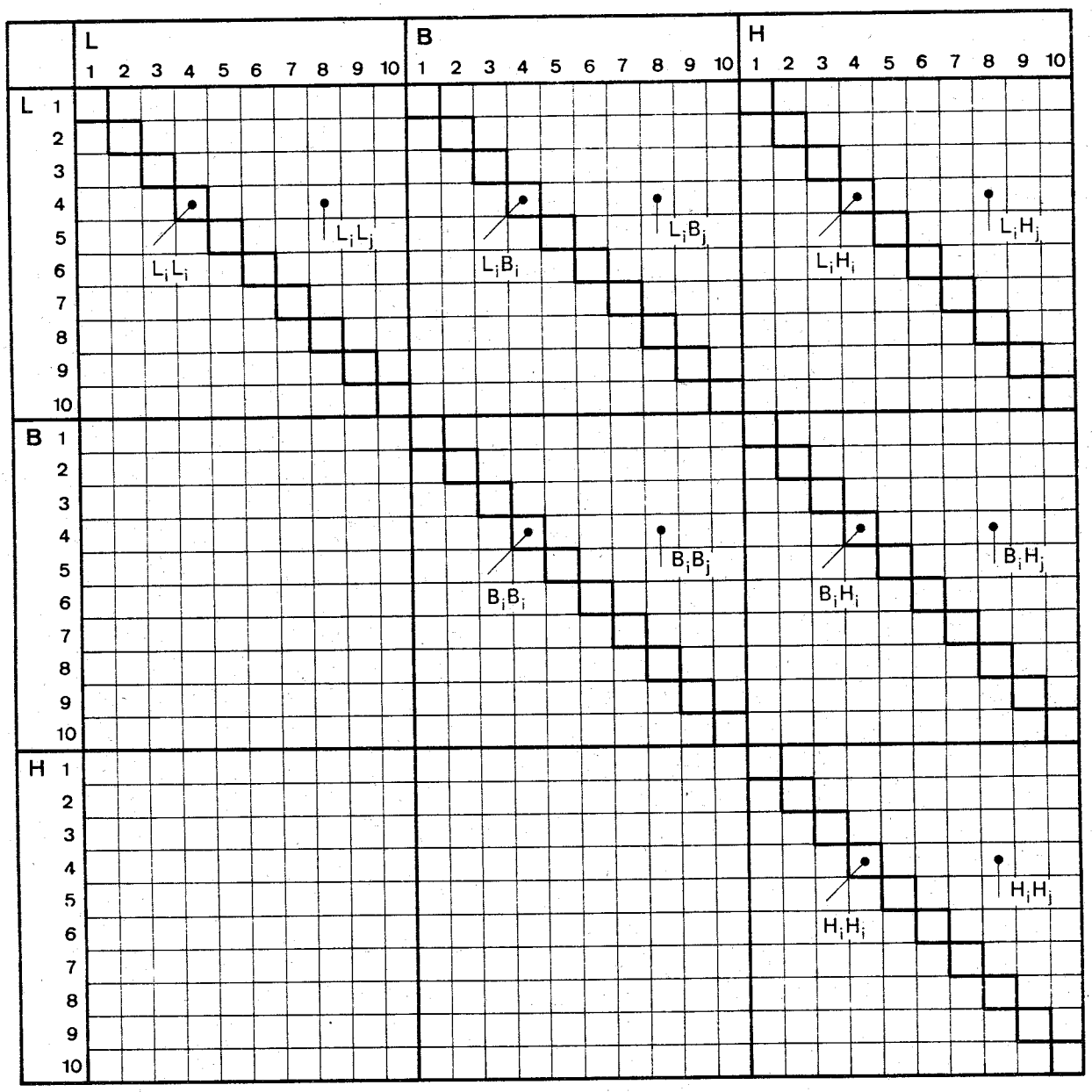

Tabelle 21 Varianz- Kovarianzmatrix, Messbrief,eines 3D- Messsystems; z.B. Satellitenpositionierung.

L, B, H: geometrische, räumliche Koordinaten. Z.B. geographische Länge, Breite und ellipsoidische Höhe, oder kartesische Koordinaten Y, X in einem Projektionssystem und ellipsoidische Höhe, oder geozentrisches oder topozentrisches räumliches kartesisches System.

Bezeichnungen

$\underset{(n,u)}{\underline{A}}$	- Koeffizientenmatrix der Verbesserungsgleichungen
	- Konfigurationsmatrix bei der vermittelnden Ausgleichung
a	Messlattenabsinken
AFFG	allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz
$\underline{b}$	beliebiger reeller Vektor
$\underline{C}$	Varianz- Kovarianzmatrix
c	systematische Verbesserung (- Fehler)
D	Distanz
$\underline{D}$	Matrix der Form
Δ	Differenz
E	Erwartungswert
ε	wahre Verbesserung (- Fehler)
EFFG	einfaches Fehlerfortpflantzungsgesetz
$\underline{f}$	Differentialoperator; (Matrix)
$\underline{\phi}$	Funktion; Funktionalvektor
H	- Höhe
	- Hin-
h	reelle positive ganze Zahl
i, j	laufende Indizes
k	- Konstante
	- Refraktionseinfluss
ℓ, p, q	Zufallsgrössen, Beobachtungen
ℓ_i, p_i, q_i	i - te Beobachtung; Realisierung
$\underline{\ell}$, $\underline{p}$, $\underline{q}$	Zufallsvektoren, Beobachtungsvektoren
$\underline{L}$	Vektor, zusammengesetzt aus verschiedenen Zufallsgrössen

n	Anzahl Beobachtungen
$\underline{P}$	Gewichtsmatrix
$\underline{Q}$	Kofaktorenmatrix
q	Kofaktor
qF	quadratische Form
R	Rück-
ρ, r	- Korrelationskoeffizienten ρ: theoretischer Wert; r: empirischer Wert; - Rückblick
σ, s	Standardabweichung; Streuungsmass, mittlerer Fehler σ: theoretischer Wert; s: empirischer Wert
σ^2, s^2	Varianz σ^2 : theoretischer Wert; s^2 : empirischer Wert
σ_o^2, s_o^2	Varianzfaktor σ_o^2 : theoretischer Wert; s_o^2 : empirischer Wert
$\sigma_{p\ell}$, $s_{p\ell}$	Kovarianzen
$\sigma_{\ell p}$, $s_{\ell p}$	$\sigma_{p\ell}$: theoretischer Wert; $s_{p\ell}$: empirischer Wert
T	Zeichen für transponierte Vektoren oder Matrizen
t	Anzahl Teilstrecken
u	Anzahl Unbekannte

v_i, $\hat{v}_i$	- wahrscheinlichste Verbesserungen
	an der i - ten Beobachtung
	$v_i = \bar{\ell} - \ell_i$; $\hat{v}_i = \hat{\ell} - \ell_i$
	- Vorblick
γ	systematische Elementarverbesserung (- Fehler)
VKM	Varianz-Kovarianz- Matrix
$\underset{(u,l)}{\underline{x}}$	Vektor der unbekannten Parameter
z	Zufallsgrösse
ξ	zufällige Elementarverbesserung (- Fehler)
$\tilde{\ell}$	Zeichen für wahrer Wert
$\bar{\ell}$	Zeichen für Mittelwert
$\hat{\ell}$	Zeichen für Schätzwert
	- nach der Methode der kleinsten Quadrate
	- mit anderen besonderen Schätzverfahren
$\underline{L}$	Zeichen für Vektor
$\approx$	ungefähr gleich
$\hat{=}$	entspricht

5. KORREKTE MODELLBILDUNG BEI EINFACHEN FEHLERRECHNUNGEN

5.1 EIN WIDERSPRUCH ?

Gegeben

$$\phi = \ell + \ell + \ell$$

$$\sigma_\ell$$

Gemessen

$$\ell$$

Gesucht

$$\sigma_\phi$$

Lösungsweg " Eins "

$$\phi = 3 \cdot \ell \qquad (5.1)$$

$$\alpha = \frac{d\phi}{d\ell} = 3 \; ; \quad [\alpha\alpha] = 9$$

EFFG:

$$\sigma_\phi^2 = [\alpha\alpha] \cdot \sigma_\ell^2 \qquad (5.2)$$

$$\underline{\sigma_\phi = 3 \cdot \sigma_\ell} \qquad (5.3)$$

Lösungsweg "Zwei"

$$\phi = \ell + \ell + \ell \qquad (5.4)$$

EFFG:

$$\sigma^2_\phi \quad \sigma^2_\ell + \sigma^2_\ell + \sigma^2_\ell$$

$$\sigma_\phi \quad \sqrt{3} \cdot \sigma_\ell \qquad (5.5)$$

Fragen

- Gibt es zwischen den offensichtlich verschiedenen Resultaten (5. 3) und (5. 5) der beiden Lösungswege tatsächlich oder nur scheinbar einen Widerspruch ?

- Welches der beiden Resultate ist gegebenfalls richtig ?

Antworten und Erklärung

- Es gibt keinen tatsächlichen Widerspruch ; der Widerspruch ist nur scheinbar .

- Beide Resultate sind richtig .

Die beiden Funktionen (5. 1) und (5. 4) sind funktional zwar äquivalent. Die beiden Lösungswege sind aber nur für verschiedenartige stochastische Modelle richtig; s. Beispiele in Ziffer 5. 2.

Die Formulierung der Aufgabenstellung ist zu wenig präzis, bzw. zu wenig eindeutig. Deshalb wird empfohlen, auch für Aufgaben der sog. einfachen Fehlerrechnung den Begriff des mathematischen Modells mit funktionalem und stochastischem Teil einzuführen und zu formulieren. Wie wichtig das ist, kann an den sehr einfachen Beispielen in Ziffer 5.2 erkannt werden.

Bei weniger übersichtlichen Aufgaben der Fehlerbetrachtung von Messsystemen und insbesondere bei Messprozessen besteht eine Hauptschwierigkeit ja gerade darin, das mathematische Modell zu erkennen und bestmöglichst der Wirklichkeit entsprechend zu formulieren. Beispiele siehe z. B. in [1] , [8], [9] und in Ziffer 3.7 . Die Lösung ist hernach nur noch Formalismus.

5. 2 MUSTERBEISPIELE

Musterbeispiel Nr. 1

Funktionales Modell

$$\phi = k \cdot \ell_i \qquad (5.6)$$

$$i = 1$$

$$\underset{(1,1)}{\underline{f}} = k$$

Stochastisches Modell

$$\underset{(1,1)}{\underline{C}_{\ell\ell}} = \sigma^2_{\ell_i}$$

Erläuterungen zum mathematischen Modell

Wir haben es mit einer einzigen Zufallsgrösse zu tun und davon mit einer einzigen Realisierung ℓ_i, $i = 1$. Die Funktion ϕ stellt ein Vielfaches (das k- fache) von ℓ_i dar.

Lösung

AFFG:

$$\underset{(1,1)}{\underline{C}_{\phi\phi}} = \underline{f} \cdot \underline{C}_{\ell} \cdot \underline{f}^T = \sigma^2_{\phi}$$

$$\sigma_{\phi} = k \cdot \sigma_{\ell_i} \qquad (5.7)$$

Musterbeispiel Nr. 2

Demselben Sachverhalt der Wirklichkeit von Musterbeispiel Nr. 1 wird auch eine andere Schreibweise des funktionalen und des stochastischen Modells gerecht; es handelt sich dabei um die Summe von k - Summanden derselben einzigen Realisierung.

Funktionales Modell

$$\phi = \ell_i + \ell_i + \dots \ell_i \qquad (5.8)$$

$$i = 1$$

$$k = \text{Summanden}$$

$$\underset{(1,k)}{"\underline{f}"} = \left| +1, +1, \dots +1 \right|$$

Stochastisches Modell

$$\underset{(k,k)}{\underline{C}_{\ell\ell}} : \qquad \sigma^2_{\ell_i} \begin{vmatrix} +1 & +1 & +1 & \cdot\cdot & +1 \\ +1 & +1 & & & \vdots \\ +1 & +1 & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ +1 & & & & +1 \end{vmatrix}$$

Es besteht vollständige Korrelation

Lösung

$$\underset{(1,1)}{\underline{C}_{\phi\phi}} = "\underline{f}" \cdot \underline{C}_{\ell\ell} \cdot "\underline{f}"^T = k^2 \cdot \sigma^2_{\ell_i} \qquad (5.9)$$

$$\sigma_\phi = k \cdot \sigma_{\ell_i}$$

Musterbeispiel Nr. 3

Funktionales Modell

$$\phi = [\ell_i] \qquad (5.10)$$

$$i = 1 \text{ bis } k$$

$$\underset{(1,k)}{\underline{f}} : \; |+1, +1, \ldots\ldots +1|$$

Stochastisches Modell

$$\underset{(k,k)}{\underline{C}_{\ell\ell}} : \begin{vmatrix} \sigma_\ell^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_\ell^2 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots\cdots & & & \sigma_\ell^2 \end{vmatrix}$$

Erläuterungen zum mathematischen Modell

Wiederum handelt es sich um eine einzige Zufallsgrösse, davon aber um k verschiedene Realisierungen.

Die Funktion ϕ ist die Summe der k - verschiedenden Realisierungen.

Lösung

$$\underset{(1,1)}{\underline{C}_{\phi\phi}} = \underset{(1,k)}{\underline{f}} \cdot \underset{(k,k)}{\underline{C}_{\ell\ell}} \cdot \underset{(k,1)}{\underline{f}^T} = k \cdot \sigma_\ell^2$$

$$\sigma_\phi = \sqrt{k} \cdot \sigma_\ell \qquad (5.11)$$

Musterbeispiel Nr. 4

Funktionales Modell

$$\phi = \ell_i + p_i + q_i$$

$$i = 1 \qquad (5.12)$$

$$\underset{(1,3)}{\underline{f}} : \left| +1, +1, +1 \right|$$

Stochastisches Modell

$$\underset{(3,3)}{\underline{C}_{\ell,p,q}} : \sigma_o^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_\ell = \sigma_p = \sigma_q = \sigma_o$$

Erläuterungen zum mathematischen Modell

Hier handelt es sich um drei verschiedene Zufallsgrössen, die verschiedenen Grundgesamtheiten angehören, deren Standardabweichungen allerdings alle gleich gross sind, und davon aber um je nur eine einzige Realisierung.

Lösung

$$\underset{(1,1)}{C_{\phi\phi}} = \underset{(1,3)}{\underline{f}} \; \underset{(3,3)}{\underline{C}_{\ell,p,q}} \; \underset{(3,1)}{\underline{f}^T} = 3\,\sigma_o^2$$

$$\sigma_\phi = \sqrt{3}\,\sigma_o$$

Lehren aus den Musterbeispielen

- Mathematische Modelle auch bei einfachen Fehlerrechnungen sorgfältig formulieren

- AFFG ansetzen

6. DAS ALLGEMEINE FEHLERFORTPFLANZUNGSGESETZ

Es wird hier nur der Formelapparat dargestellt. Eine Herleitung ist z. B. in [3] zu finden.

Dabei wird nachgewiesen, dass

$$E\{\varepsilon_\phi \varepsilon_\phi^T\} = \underline{C}_{\phi\phi} = \underline{f} \cdot \underline{C}_{\ell\ell} \cdot \underline{f}^T \qquad (6.1)$$

Beobachtungsvektor mit 3 Zufallsgrössen

$$\underset{(1,3)}{\underline{L}^T} : \; | \; \bar{\ell} \; , \; \bar{p} \; , \; \bar{q} \; | \qquad (6.2)$$

Varianz - Kovarianz - Matrix

$$\underline{C}_{LL} : \begin{vmatrix} \sigma^2_{\bar{\ell}} & \sigma_{\bar{\ell}\bar{p}} & \sigma_{\bar{\ell}\bar{q}} \\ \sigma_{\bar{p}\bar{\ell}} & \sigma^2_{\bar{p}} & \sigma_{\bar{p}\bar{q}} \\ \sigma_{\bar{q}\bar{\ell}} & \sigma_{\bar{q}\bar{p}} & \sigma^2_{\bar{q}} \end{vmatrix} \qquad (6.3)$$

Funktionalvektor

$$\underset{(h,1)}{\underline{\phi}} : \begin{vmatrix} \phi_1 \; (\underline{L}) \\ \phi_2 \; (\underline{L}) \\ \vdots \\ \phi_h \; (\underline{L}) \end{vmatrix} \qquad (6.4)$$

h : Anzahl Funktionen

Differentialoperator

$$\underset{(h,3)}{\underline{f}} : \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{\ell}}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{p}}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{q}}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{\ell}}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{p}}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \bar{q}}\right)_0 \\ \vdots & & \\ \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial \bar{\ell}}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial \bar{p}}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_h}{\partial \bar{q}}\right)_0 \end{vmatrix} \qquad (6.5)$$

Partielle Ableitungen in Umgebung des interessierenden Wertes L_0 des Beobachtungsvektors $\underline{L}$

7 ÜBER KORRELATION

Zwei einander in geeigneter Weise zugeordnete Realisierungen von Zufallsgrössen können untereinander korreliert sein. Dadurch wird diesen Grössen - je nach dem Ausmass der Korrelation - der Charakter von reinen Zufallsgrössen mehr oder minder entzogen; sie werden voneinander abhängig. Die Realisierung eines bestimmten Wertes auf der Werteskala ist nicht mehr, wie bei reinen Zufallsgrössen, durch eine Häufigkeitsverteilungsfunktion alleine bestimmt.

Korrelation hat ihre Ursache immer in der Überlagerung der reinen Zufälligkeit mit systematischen Einflüssen; Fehlern, denen das funktionale Modell nicht oder nicht genügend gut Rechnung trägt oder u. U. überhaupt nicht tragen kann. Man nennt diese auch Modellfehler; die Wirklichkeit ist durch das Modell ungenügend fein modelliert.

Korrelation ist eine Mischform von vollständiger Unabhängigkeit und funktionaler Abhängigkeit je zweier Realisierungen von Zufallsgrössen. Sie umfasst die ganze grosse Zahl aller Fälle der Wirklichkeit zwischen den beiden Grenzfällen: einerseits der reinen Zufallsereignisse und anderseits des völligen funktionalen Zusammenhangs.

In aller Strenge kommen Korrelationen in der Messtechnik wahrscheinlich immer vor. Je genauer " man " messen kann, d.h. je kleiner die Varianz der Häufigkeitsverteilung der Realisierungen der reinen Zufallsgrössen wird, desto grösser wird die Bedeutung von Korrelationen aller Art in der Messtechnik.

7.1 AUTOKORRELATION

Die Korrelation besteht zwischen je zwei einzelnen Realisierungen derselben Zufallsgrösse; siehe (7. 1).

7.2 KREUZKORRELATION

Die Korrelation besteht zwischen je zwei einzelnen Realisierungen zweier verschiedener Zufallsgrössen; siehe (7. 2).

7.3 (AUS) - MASS DER KORRELATION

Das Mass der Korrelation kommt im Korrelationskoeffizient, in der Kovarianz oder auch im Kofaktor zum Ausdruck.

7.4 KORRELATIONSKOEFFIZIENT

Siehe (7. 3), (7. 4).

7.5 KOVARIANZ

Siehe (7.5), (7.6).

7.6 FUNKTIONALE KORRELATION

Wenn zwischen zwei oder mehreren Realisierungen einer oder mehrerer Zufallsgrössen im funktionalen Modell zu einer Ausgleichung ein funktionaler Zusammenhang formuliert wird, so entsteht zwischen je zwei der sich ergebenden Schätzwerte dieser Zufallsgrössen eine funktionale Korrelation. Sie findet ihren Ausdruck in Kofaktoren; s. (7. 7).

Für reguläre $\underline{A}$-, $\underline{P}$ - Matrizen entsteht die funktionale Korrelation für $n > u$; für $n = u$ ist die funktionale Korrelation Null. [10)]

---

10) Merke: Das gilt für die Kofaktoren der ausgeglichenen Beobachtungen, nicht aber für die Kofaktoren der unbekannten Parameter; diese sind auch für $n = u$ funktional korreliert.

In Formeln (7. 8), (7. 9) sind zwei numerische Beispiele berechnet.

7.7 PHYSIKALISCHE KORRELATION

Die sog. physikalische Korrelation zwischen je zwei Realisierungen von Zufallsgrössen kann ihre Ursache in verschiedenen systematischen Fehlern haben, die im funktionalen Modell nicht oder nur ungenügend erfasst sind. Beispiele: Einflüsse des Beobachters, systematische Instrumentenfehler aller Art; Eichfehler, Nichtlinearität von Messtransducern ; Witterungseinflüsse, Druck, Temperatur, Feuchtigkeit;topographische Einflüsse, Bebauung, Vegetation; elektromagnetische Fremdfelder u. a. m.

Physikalische Korrelationen werden in der Varianz - Kovarianzmatrix des stochastischen Modells berücksichtigt.

7.8 KOFAKTOREN

In Ziffer 7.10 Formel (7.8), (7.9) ist das stochastische Modell mit den Kofaktoren als Ergebnis eines Schätzverfahrens, in diesem Fall Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, dargestellt. Die einzelnen Kofaktoren $q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$ der Kofaktorenmatrix $Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$ bringen die gesamte Korrelation, - die funktionale und physikalische Korrelation zusammen - zum Ausdruck, die der Ausgleichung mit dem mathematischen Modell a priori zu Grunde gelegt wurden. Die numerischen Werte der realisierten Zufallsgrössen, die ausgeglichen werden, haben auf die Kofaktoren gar keinen Einfluss.

7.9 POSITIVER UND NEGATIVER KORREALTIONSTYPUS

Siehe Ziffer 2.

7.10 FORMELN ZUR KORRELATION [11)]

Zufallsvektoren

$$\underline{\ell}^T : \left| \ell_1, \ell_2 \,..\, \ell_i \,..\, \ell_n \right|$$

$$\underline{p}^T : \left| p_1, p_2 \,..\, p_i \,..\, p_n \right|$$

Wahre Verbesserungen

$$\underline{\varepsilon}_\ell^T : \left| \varepsilon_{\ell 1}, \varepsilon_{\ell 2} \,..\, \varepsilon_{\ell i}, \varepsilon_{\ell j} \,..\, \varepsilon_{\ell n} \right|$$

$$\underline{\varepsilon}_p^T : \left| \varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2} \,..\, \varepsilon_{pi}, \varepsilon_{pj} \,..\, \varepsilon_{pn} \right|$$

$$E\,\{\ell_i\} = \ell_i + \varepsilon_{\ell i}$$

$$E\,\{p_i\} = p_i + \varepsilon_{pi}$$

Autokorrelation

$$\sigma_{\ell_i \ell_j} = E\,\{\varepsilon_{\ell_i} \cdot \varepsilon_{\ell_j}\}$$

oder (7.1)

$$\sigma_{\bar{\ell}_i \bar{\ell}_j} = E\,\{\varepsilon_{\bar{\ell}_i} \cdot \varepsilon_{\bar{\ell}_j}\}$$

für i,j : 1 bis n
$i \neq j$

Kreuzkorrelation

$$\sigma_{\ell_i p_j} = E\,\{\varepsilon_{\ell_i} \cdot \varepsilon_{p_j}\}$$

für i,j : 1 bis n (7.2)

oder

$$\sigma_{\bar{\ell}\bar{p}} = E\,\{\varepsilon_{\bar{\ell}} \cdot \varepsilon_{\bar{p}}\}$$

---

11) in Anlehnung an [3]

Theoretische Varianzen, Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten

$$\sigma_\ell^2 = E\{\varepsilon_\ell^2\} \; ; \; \sigma_p^2 = E\{\varepsilon_p^2\}$$

$$\sigma_{\ell p} = E\{\varepsilon_\ell \varepsilon_p\} = \sigma_{p\ell} = E\{\varepsilon_p \varepsilon_\ell\} \tag{7.3}$$

$$\rho_{\ell p} = \frac{\sigma_{\ell p}}{\sigma_\ell \sigma_p} = \rho_{p\ell} = \frac{\sigma_{p\ell}}{\sigma_p \sigma_\ell}$$

$$-1 \leqslant \rho_{\ell p}, \rho_{p\ell} \leqslant +1$$

Empirische Varianzen, Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten

$$s_\ell^2 = \frac{1}{n-1}[v_\ell v_\ell] \; ; \; s_p^2 = \frac{1}{n-1}[v_p v_p]$$

$$s_{\ell p} = \frac{1}{n-1}[v_\ell v_p] = s_{p\ell} = \frac{1}{n-1}[v_p v_\ell] \tag{7.4}$$

$$r_{\ell p} = \frac{s_{\ell p}}{s_\ell s_p} = r_{p\ell} = \frac{s_p}{s_p s_\ell}$$

$$-1 \leqslant r_{\ell p}, r_{p\ell} \leqslant +1$$

Theoretische Varianz - Kovarianz - Matrix

$$\underline{C}_{\ell p} : \begin{vmatrix} \sigma_\ell^2 & \sigma_{\ell p} \\ \sigma_{p\ell} & \sigma_p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_\ell^2 & \rho_{\ell p}\, \sigma_\ell\, \sigma_p \\ \rho_{p\ell}\, \sigma_p\, \sigma_\ell & \sigma_p^2 \end{vmatrix} \tag{7.5}$$

Empirische Varianz - Kovarianz - Matrix

$$\underline{C}_{\ell p} : \begin{vmatrix} s_\ell^2 & s_{\ell p} \\ s_{p\ell} & s_p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_\ell^2 & r_{\ell p}\, s_\ell\, s_p \\ r_{p\ell}\, s_p\, s_\ell & s_p^2 \end{vmatrix} \tag{7.6}$$

Schätzen der Kofaktoren von realisierten Zufallsgrössen mit Ausgleichungsrechnung;

Schätzverfahren

Methode der kleinsten Quadrate; vermittelnde Ausgleichung

Funktionales Modell ; linearisiert.

$$\underset{(n,1)}{\underline{v}} = \underset{(n,u)}{\underline{A}} \; \underset{(u,1)}{\underline{x}} - \underset{(n,1)}{\underline{\ell}}$$

Stochastisches Modell

$$\underline{C}_{\ell\ell};\ \sigma_o^2 \quad | \quad E(\underline{v}) = E(\underline{A}\,\underline{x} - \underline{\ell}) = 0$$

Lösung

$$\underline{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \underline{A}\,(\underline{A}^T \underline{P}\,\underline{A})^{-1}\,\underline{A}^T \;;\; \hat{s}_o^2 = \frac{1}{n-u}\,(\hat{\underline{v}}^T\,\underline{p}\,\hat{\underline{v}}) \;; \qquad (7.7)$$

$$\underline{C}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \hat{s}_o^2 \cdot \underline{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$$

Numerische Beispiele zur funktionalen Korrelation

$$\underline{A} : \begin{vmatrix} +2 & +1 \\ +0.5 & -1 \\ -1.5 & +1.5 \end{vmatrix} ; \quad \underline{P} : \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A\,(A^T\,P\,A)^{-1}\,A^T : \begin{vmatrix} +0.98 & -0.13 & -0.07 \\ -0.13 & +0.25 & -0.42 \\ -0.07 & -0.42 & +0.77 \end{vmatrix} \qquad (7.8)$$

$n > u$

Es entsteht funktionale Korrelation;

$$\underline{A} \;:\; \begin{vmatrix} +2 & +1 \\ +0.5 & -1 \\ -1.5 & +1.5 \end{vmatrix} \;; \qquad \underline{P}_1 \;:\; \begin{vmatrix} +1 & +0.2 & +0.5 \\ +0.2 & +1 & +0.3 \\ +0.5 & +0.3 & +1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad A\,(A^T P_1 A)^{-1} A^T \;:\; \begin{vmatrix} +1.30 & +0.10 & -0.57 \\ +0.10 & +0.33 & -0.62 \\ -0.57 & -0.62 & +1.28 \end{vmatrix} \qquad (7.9)$$

$n > u$

physikalische und funktionale

Korrelation zusammen

Für n = u entsteht keine funktionale Korrelation

$$\underline{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \underset{(u,u)}{\underline{A}} \; (\underset{(u,u)}{\underline{A}^T} \; \underset{(u,u)}{\underline{P}} \; \underset{(u,u)}{\underline{A}})^{-1} \; \underset{(u,u)}{\underline{A}^T}$$

$$= \underline{A} \; (\underline{A}^{-1} \; \underline{P}^{-1} \; \underline{A}^{T^{-1}}) \; \underline{A}^T = P^{-1} \qquad (7.10)$$

$$\Rightarrow \quad \underset{(u,u)}{\underline{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}} = \underset{(u,u)}{\underline{Q}_{\ell\ell}}$$

Übrigens: Ausgeglichene Beobachtungen und Verbesserungen sind nicht korreliert.

$$Q_{\hat{\ell}v} = 0 \qquad ; \qquad v = \hat{\ell} - \ell \; ; \; n \geqq u \qquad (7.11)$$

wie man mit AFFG beweisen kann.

8. POSITIVE DEFINITHEIT VON QUADRATISCHEN FORMEN UND MATRIZEN

8.1 ALLGEMEINES

nach [10]

$$qF = \underline{b}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{b} \qquad (8.1)$$

wobei

$\underset{(h,1)}{\underline{b}}$	Vektor mit h reellen veränderlichen Komponenten
$\underset{(h,h)}{\underline{D}}$	quadratische, symmetrische Matrix mit reelen Koeffizienten, h x h, $d_{ij} = d_{ji}$
$\underline{b}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{b}$	homogener Ausdruck zweiten Grades; Skalar

Benennungen:

qF	quadratische Form
D	Matrix der Form

In Anwendungen, z.B. Energieausdrücke in Mechanik, Baustatik, Elektrotechnik, bei Kegelschnitten, in Fehlertheorie, Ausgleichungsrechnung spielen solche qF eine wichtige Rolle, die ihrer physikalischen Natur nach nur positiv oder allenfalls Null sein können; nicht aber negativ.

8.2 SYSTEMATIK DER POSITIV DEFINITEN QUADRATISCHEN FORMEN

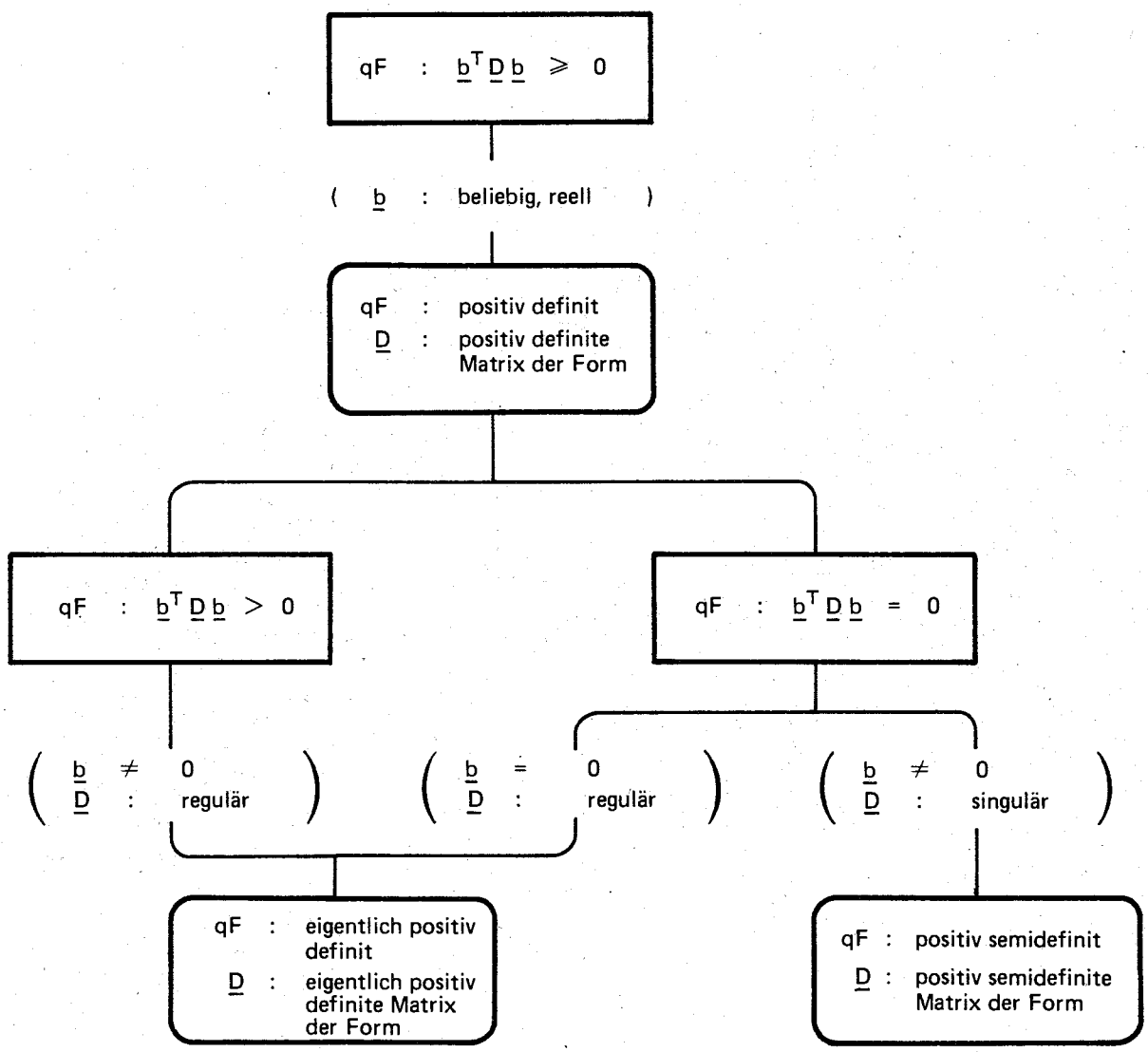

Tabelle 22 Systematik von positiv definiten quadratischen Formen

8.3 ANWENDUNG UND DISKUSSION BEIM AFFG

$$\underset{(h,h)}{\underline{C}_{\phi\phi}} = \underset{(h,n)}{\underline{f}} \cdot \underset{(n,n)}{\underline{C}_{LL}} \cdot \underset{(n,h)}{\underline{f}^T}$$

für $h = 1$

$$C_\phi = \sigma_\phi$$

$\underline{f}\,\underline{Q}_{LL}\,\underline{f}^T$ ist eine quadratische Form. In der Regel interessieren nur Fälle, bei denen diese qF eigentlich positiv definit sind, d.h. $\sigma_\phi > 0$. Die dabei in der Regel a priori, theoretisch oder experimentell, angenommenen oder ermittelten VKM $\underline{C}_{LL}$ müssen nach [10] derart beschaffen sein, dass für ganz beliebige Vektoren $\underline{f} \neq 0$ gilt: $qF > 0$.

Für grössere $\underline{C}_{LL}$ ist nicht ohne weiteres überblickbar, ob diese Bedingung erfüllt ist. Nach [10] ist das dann und nur dann der Fall, wenn bei der Dreieckszerlegung der regulären Matrix in einerseits eine untere Dreiecksmatrix, deren alle Diagonalelemente +1 sind, sich anderseits eine obere Dreiecksmatrix ergibt, deren Diagonalelemente alle positiv sind.

Fälle mit singulärer VKM können aber nicht einfach ausgeschlossen werden. Sie kommen durchaus vor oder können für die Modellbildung zweckmässig sein. Darüber wird in [11] berichtet mit vielen Literaturhinweisen.

[1] Keiser, O.M., Matthias, H.J.
Zur Fehlertheorie von Messreihen mit pseudosystematischen Fehlern
Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik Nr. 6/81

[2] Sachs, L
Statistische Ausgleichungsmethoden. Dritte neu bearbeitete Auflage
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971

[3] Pelzer, H., Hsg.
Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung
Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1980

[4] Bähr, H.-G., Richter, R.
Über die Wahl von a priori Korrelationen
Zeitschrift für Vermessungswesen Nr. 4/1975

[5] Schädlich, M.
Zur Korrelationsanalyse geodätischer Messungen
Vermessungstechnik Nr. 4/1975

[6] Gotthardt, E
Zur Ermittlung von Korrelationen
Zeitschrift für Vermessungswesen Nr. 6/60

[7] Remmer O.
Refraktion und andere systematische Effekte im Nivellement
Vermessungstechnische Rundschau VR 46/2, März 1984

[8] Moritz, H.
An Explanation of the " systematic " Effect of accidental Errors in Aerial Triangulation
Photogrammetria XVII Nr.1/ 1960

[9] Roelofs, R.

Erreurs systematiques ou accidentelles

Photogrammetria VI Nr.1/ 1949

[10] Zumühl, R.

Matrizen. Vierte neubearbeitete Auflage.

Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964

[11] Caspary, W.

Zur Singularität von Varianz - Kovarianz Matrizen

Zeitschrift für Vermessungswesen Nr. 6/83