

**Robuste Schätzverfahren  
für die Parameterschätzung  
in geodätischen Netzen**

**Dr. sc. techn. Fridolin Wicki**

Aarau, November 1998

Diese Publikation ist eine editierte Ausgabe von:

---

DISSERTATION ETH Nr. 12894

# **Robuste Schätzverfahren für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen**

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE  
ZÜRICH

vorgelegt von

Fridolin Wicki

Dipl. Verm.-Ing. ETH Zürich

geboren am 7. März 1964  
von Escholzmatt / LU

Angenommen auf Antrag von:

Referent:

Prof. Dr. A. Carosio, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Korreferent:

Prof. Dr. A. Marazzi, Institut Universitaire de Médecine Sociale et Préventive  
Université de Lausanne

1998

---

Copyright © 1998

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
Eidg. Technische Hochschule Zürich  
ETH Hönggerberg  
8093 Zürich

Alle Rechte vorbehalten

**ISBN 3-906467-16-3**  
ISSN 0252-9335

## Vorwort

---

Die Ausgleichung nach den Methoden der kleinsten Quadrate, entwickelt von C.F. Gauss und A.M. Legendre ist seit 200 Jahren das Standardverfahren für die Parameterschätzung in vielen Disziplinen. Erst vor ca. 25 Jahren wurden die Geodäten auf mögliche Alternativmodelle aufmerksam.

Die Arbeiten von P. Huber in Berkley und später in Zürich hatten das Interesse der mathematischen Welt für die „Robuste Statistik“ geweckt, die gute Resultate liefert, auch wenn die Menge der Beobachtungen einen (kleinen) Anteil grober Messfehler enthält. Für die Anwendungen in der Geodäsie schien die Robuste Statistik von besonderer Bedeutung. Erste Versuche wurden in den 80er Jahren vor allem in der Schweiz und in Dänemark erfolgreich durchgeführt.

F. Wicki übernahm 1990 die ehrgeizige Aufgabe, die in der Geodäsie verwendeten Huber-Schätzer zu verbessern und für einen praktischen Einsatz in der Ausgleichung grosser geodätischer Netze weiter zu entwickeln. Das Ziel wurde 1992 weitgehend erreicht als die robuste Version der schweizerischen Ausgleichungssoftware LTOP nach umfangreichem Test der Öffentlichkeit zur Verfügung gestellt wurde.

Der grosse Erfolg der Robusten Ausgleichung in der Schweiz, wo praktisch jedes Büro heute mit dem Robusten Ausgleichungsverfahren von F. Wicki rechnet, und die starke Zunahme der internationalen Bedeutung der Robusten Statistik in der geodätischen Forschung motivierte Fridolin Wicki, die Verfassung der Promotionsarbeit nachträglich in Angriff zu nehmen.

Die vorliegende Publikation beschreibt das mathematische Modell der Robusten Ausgleichung und erklärt die Vorteile der Maximum-Likelihood-Schätzer (M-Schätzer) für den geodätischen Gebrauch. Das vorgeschlagene Modell für die schweizerische Landesvermessung wird ebenfalls ausführlich erläutert, dessen Besonderheit in der Begrenzung des Einflusses der standardisierten Verbesserungen anstatt der Verbesserung wie bei den Huber-Schätzer liegt. Es ist wesentlich besser als die bisher bekannten Ansätze, da es die variablen lokalen Redundanzen der geodätischen Messanordnungen berücksichtigt.

Bei der Entwicklung neuer Schätzer für geodätische Anwendungen ist zusätzlich zu beachten, dass nicht nur der Schätzer selbst Ziel der Arbeit ist; auch alle Testverfahren und Beurteilungsmethoden (F-Test, standardisierte Verbesserungen, Zuverlässigkeitsindikatoren usw.)

müssen angepasst und allenfalls neu definiert werden. Für Robuste Schätzer verliert die herkömmliche Definition der Zuverlässigkeit ihre Bedeutung. Die Promotionsarbeit beinhaltet daher auch ein neues Konzept für die Zuverlässigkeit geodätischer Arbeiten, das sich im Fall Robuster Verfahren anwenden lässt.

Die vorliegende Mitteilung des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie, die klar und sorgfältig verfasst wurde und für den mathematischen Teil in enger Zusammenarbeit mit der UNI Lausanne (Prof. Dr. A. Marazzi) entstanden ist, bildet nur einen kleinen Teil der wissenschaftlichen Leistung von F. Wicki. Eine grössere Bedeutung hat die entwickelte Software, die seit 1992 in der Praxis eingesetzt wird, sich ausserordentlich gut bewährt hat, theoretisch fundiert ist und die konkreten Bedürfnisse der Praxis berücksichtigt.

Dies erklärt der Erfolg und die rasche Durchsetzung des Lösungsansatzes in der ganzen Schweiz. Die vorliegende Publikation wurde von der ETHZ als Promotionsleistung anerkannt und dadurch Herrn F. Wicki der Titel eines Dr.sc.techn. verliehen.

Ich danke dem Autor für die ausgezeichnete Arbeit, die einen wichtigen und sehr innovativen Beitrag an die mathematische Geodäsie leistet.

Zürich, 24. November 1998

Alessandro Carosio

## Vorwort des Verfassers

---

Die Bestimmung realitätsnaher Schätzwerte aus Messungen in einem überbestimmten System und die Beurteilung der Qualität dieser Schätzwerte ist eine der zentralen Aufgaben des Vermessungswesens. Diese Aufgabe der Ausgleichsrechnung kann mit der Verwendung robuster Schätzverfahren deutlich vereinfacht werden.

Die praktische Anwendung robuster Schätzverfahren in unserem Fachbereich gewinnt zunehmend an Bedeutung, da damit die Beurteilung der Resultate der laufend komplexer und umfangreicher werdenden Ausgleichsprobleme deutlich erleichtert wird. Ich hoffe, dass diese Arbeit dazu beitragen kann, die Verwendung dieses sinnvollen und notwendigen Instrumentes in der geodätischen Praxis weiter zu fördern und das Interesse für dessen mathematische Hintergründe zu wecken.

Die Grundlagen zur vorliegenden Arbeit wurden während meiner Tätigkeit als Assistent am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich erarbeitet, die eigentliche Arbeit entstand parallel zu meiner Anstellung als Adjunkt beim Vermessungsamt des Kantons Aargau.

Die Initiative für dieses Projekt geht auf Prof. Dr. A. Carosio zurück. Er hat die Arbeit begleitet, stand als Diskussionspartner stets zur Verfügung und übernahm das Referat für die Dissertation. Für seinen grossen Einsatz möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken. Prof. Dr. A. Marazzi hat mit seinen wertvollen Anregungen im Bereich der robusten mathematischen Statistik viel zum guten Gelingen dieser Arbeit beigetragen, wofür ihm ein grosser Dank gebührt. Im weiteren bedanken möchte ich mich beim Vermessungsamt des Kantons Aargau, dessen Infrastruktur ich ausserhalb der Arbeitszeit für die Berechnungen und die Abfassung der Arbeit benutzen durfte, bei den Mitarbeitern F. Köferli, R. Vittone und A. Pflugshaupt, die mich redaktionell unterstützt haben sowie im besonderen bei meiner Frau Simone und meinen Kindern Nina und Stefan, auf deren Unterstützung und Verständnis ich jederzeit zählen konnte.



---

# Inhalt

---

<b>1.</b>	<b>Kurzfassung und Arbeitsgliederung</b>	<b>13</b>
<b>2.</b>	<b>Abstracts and organization</b>	<b>15</b>
<b>I. Teil</b>	<b>EINLEITUNG</b>	
<b>3.</b>	<b>Problemstellung</b>	<b>19</b>
3.1	Lösung in der geodätischen Praxis der Vergangenheit und Gegenwart	20
3.2	Lösung mittels robuster Parameterschätzung	22
<b>4.</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>24</b>
<b>5.</b>	<b>Grundlagen der Parameterschätzung</b>	<b>26</b>
5.1	Grundlagen der mathematischen Statistik	27
5.1.1	Eindimensionale Zufallsvariable	27
5.1.2	Einige wichtige Verteilungs- und Dichtefunktionen	30
5.1.3	Mehrdimensionale Zufallsvariablen	31
5.1.4	Fehlerfortpflanzung	32
5.1.5	Schätzfunktionen	33
5.1.6	Einflussfunktionen	35
5.2	Das mathematische Modell einer geodätischen Parameterschätzung	38
5.2.1	Das stochastische Modell	38
5.2.2	Das funktionale Modell	38
5.3	Das Gauss-Markov-Modell	39
<b>6.</b>	<b>Ausgleichungsverfahren</b>	<b>42</b>
6.1	Einleitung	42
6.2	Methode der kleinsten Quadrate (MdkQ)	43

---

## II. Teil **ROBUSTE SCHÄTZVERFAHREN**

<b>7.</b>	<b>Einführung</b>	<b>51</b>
7.1	Das stochastische Modell der robusten Parameterschätzung	51
7.2	Das funktionale Modell der robusten Parameterschätzung	52
	7.2.1 M-Schätzer	52
	7.2.2 L-Schätzer	53
7.3	Robuste M-Schätzung in linearen Modellen (Robuste Ausgleichung)	54
	7.3.1 Mathematisches Modell	54
	7.3.2 Einflussfunktion	55
<b>8.</b>	<b>Eigenschaften robuster Schätzverfahren</b>	<b>57</b>
8.1	Allgemeines	57
8.2	Hebelbeobachtungen	58
8.3	Bruchpunkt	63
<b>9.</b>	<b>Robuste Schätzfunktionen</b>	<b>65</b>
9.1	Einleitung	65
9.2	Ls-Norm-Schätzer	65
	9.2.1 L2-Norm-Schätzung	66
	9.2.2 L1-Norm-Schätzung	67
9.3	M-Schätzer	69
	9.3.1 Huber-Schätzer	69
	9.3.2 Hampel-Schätzer	71
9.4	Robuste Schätzer bei groben Fehlern in Hebelbeobachtungen	72
	9.4.1 Modifizierte M-Schätzer	73
	9.4.2 Balancierte Ausgleichung	75
	9.3.4 LMS-Schätzung	76



---

### III. Teil DAS FÜR DIE SCHWEIZERISCHE LANDESVERMESSUNG GEWÄHLTE VERFAHREN

<b>10.</b>	<b>Einleitung</b>	<b>81</b>
10.1	Geodätische Netze	81
10.2	Eigenschaften geodätischer Messungen	82
10.3	Das entwickelte Schätzverfahren (BIBER-Schätzer)	83
10.4	Indikatoren zur Beurteilung der Resultate	84
10.5	Berechnungen im Programm LTOP	85
10.6	Schätzung der Näherungsorientierung	86
<b>11.</b>	<b>Der BIBER-Schätzer</b>	<b>87</b>
11.1	Mathematisches Modell	87
11.2	Verhalten bei Hebelbeobachtungen	90
11.3	Vergleich von Schweppe- und BIBER-Schätzer	91
<b>12.</b>	<b>Berechnungsverfahren</b>	<b>92</b>
12.1	Modifikation der Normalgleichungsmatrix	94
12.2	Modifikation der Beobachtungen	96
12.3	Reduktion der Gewichte	100
12.4	Bemerkung zum Grenzwert	102
<b>13.</b>	<b>Schätzung von <math>\sigma</math></b>	<b>103</b>
13.1	Methode der kleinsten Quadrate	103
	13.1.1 Schätzung der Standardabweichung der Gewichtseinheit	103
	13.1.2 Schätzung der Varianzkomponenten	103
13.2	BIBER-Schätzer	104
	13.2.1 Schätzung der Standardabweichung der Gewichtseinheit	104
	13.2.2 Schätzung der Varianzkomponenten	106

---

<b>14.</b>	<b>Schätzung der Kovarianzmatrix der Unbekannten</b>	<b>107</b>
14.1	Asymptotische Schätzung	107
14.2	Schätzung mit fiktiven Gewichten	109
14.3	Lösung in LTOP	110
<b>15.</b>	<b>Zuverlässigkeit</b>	<b>112</b>
15.1	Zuverlässigkeit bei der MdkQ	112
15.1.1	Definition	112
15.1.2	Test der standardisierten Verbesserungen	113
15.1.3	Globaler Modelltest	115
15.1.4	Innere Zuverlässigkeit	117
15.1.5	Äussere Zuverlässigkeit	117
15.2	Zuverlässigkeit beim BIBER-Schätzer	118
15.2.1	Definition	118
15.2.2	Herleitung des Einflusses eines groben Fehlers	118
15.2.3	Innere Zuverlässigkeit	122
15.2.4	Äussere Zuverlässigkeit	123
15.3	Beurteilungskriterien in geodätischen Netzen	123
15.3.1	Indikatoren für die einzelnen Beobachtungen	123
15.3.2	Indikatoren für die geschätzten Parameter	126
<b>16.</b>	<b>Ablauf der Berechnung, numerische Probleme</b>	<b>129</b>
16.1	Vorbereitung	129
16.2	1. Phase der Ausgleichung	130
16.3	2. Phase: Robuste Ausgleichung	132
16.4	Darstellung im LTOP-Listing	135
<b>17.</b>	<b>Berechnung der Näherungsorientierung</b>	<b>139</b>
17.1	Gewichtetes arithmetisches Mittel	140
17.2	Gewichteter "Median"	141
17.3	Gewichtung	143

---

<b>18.</b>	<b>Beispiele</b>	<b>144</b>
18.1	Näherungsorientierung	144
	Richtungssatz LFP3-Netz Aarau	
18.1.1	Provisorischer Abriss ohne Fehler	145
18.1.2	Provisorischer Abriss mit 1 Fehler	146
18.1.3	Provisorischer Abriss mit 2 Fehlern	147
18.1.4	Provisorischer Abriss mit 3 Fehlern	147
18.1.5	Grobe Fehler in den Näherungskordinaten (Zielpunkte)	148
18.1.6	Grobe Fehler in den Näherungskordinaten (Stationspunkt)	150
18.2	BIBER-Schätzer: Vergleich der Berechnungsverfahren	151
18.2.1	Allgemeines	151
18.2.2	MdkQ (ohne groben Fehler)	152
18.2.2	MdkQ (2 grobe Fehler)	152
18.2.3	Robuste Schätzung, Modifikation der Normalgleichungsmatrix	153
18.2.4	Robuste Schätzung, Modifikation der Beobachtungen	154
18.2.5	Robuste Schätzung, Modifikation der Gewichte	156
18.3	BIBER-Schätzer: Praxisbeispiel	158
	Mutation Tegerfelden-Döttingen	
18.3.1	Definitive Berechnung	158
18.3.2	Robuste Schätzung	162
18.3.3	Überschreiten des Bruchpunktes	164
18.3.4	Grobe Fehler in Hebelbeobachtungen	167
<b>19.</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>171</b>
	<b>Literatur / Quellen</b>	<b>175</b>
	<b>Verzeichnis der Abbildungen</b>	<b>185</b>



## 1. Kurzfassung und Arbeitsgliederung

---

Die traditionelle Aufgabe der Geodäsie besteht darin, reelle Objekte einzumessen und in einem, meist mathematischen Modell abzubilden. Die unbekannt Parameter dieses Modells sind, ausgehend von den mit kleineren oder grösseren Fehlern behafteten Messungen, zu schätzen.

Anfang des 19. Jahrhunderts wurde von C. F. Gauss und A. M. Legendre die Schätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate (MdkQ) entworfen, die sich seither zum Standardverfahren für die Ausgleichung geodätischer Beobachtungen entwickelt hat. Der Erfolg dieses Schätzverfahrens liegt hauptsächlich in seiner einfachen, übersichtlichen und rechnerisch beherrschbaren Art begründet, obwohl die dem Verfahren zugrundeliegende Modellannahme, die Normalverteilung der Messfehler, in der Praxis nicht zwingend erfüllt werden.

In den 60iger Jahren wurde damit begonnen, Methoden der mathematischen Statistik in der geodätischen Parameterschätzung zu integrieren und auf geodätische Problemstellungen anzuwenden. In diesem Zusammenhang sei vor allem auf Hypothesentests, Intervallschätzungen und Varianzkomponentenschätzungen hingewiesen. Diese Methoden erlauben, die immer komplexer und allgemeiner werdenden Modelle zu interpretieren und bezüglich ihrer Güte zu beurteilen.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit vermittelt im wesentlichen einen Überblick über diese Grundlagen. So behandelt das Kap. 5 gewisse, für die Arbeit relevante Elemente der mathematischen Statistik und das Kap. 6 die Methode der kleinsten Quadrate.

Seit Mitte der 60iger Jahre wurden in der mathematischen Statistik Schätzverfahren entwickelt, die auch bei Modellannahmen, die nicht den Voraussetzungen der MdkQ entsprechen, qualitativ gute Schätzungen der unbekannt Parameter ergeben. Zusätzlich ermöglichen diese *robusten Schätzverfahren* die automatische Lokalisierung grober Fehler im Datenmaterial, was zu einer markanten Vereinfachung und Effizienzsteigerung der Datenbereinigung, Datenanalyse und Auswertung führt.

Im 2. Teil dieser Arbeit werden Grundlagen der robusten Parameterschätzung erläutert. Insbesondere befasst sich das Kap. 7 mit dem mathematischen Modell der robusten Parameterschätzung, das Kap. 8 mit den Eigenschaften dieser robusten Schätzverfahren und im Kap. 9 werden verschiedene gebräuchliche Schätzfunktionen dargestellt.

Die enorme Entwicklung der Computertechnik in den letzten Jahren ermöglicht es, robuste Schätzverfahren in der geodätischen Praxis zu verwenden. Das Ziel dieser Arbeit war es, ein praxistaugliches robustes Schätzverfahren für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen zu entwickeln und dieses im geodätischen Standardauswerteprogramm der Schweiz als Alternative zur Schätzung nach der MdkQ zu integrieren. Damit wurde das Verfahren rasch einem sehr grossen Benutzerkreis innerhalb des schweizerischen Vermessungswesens zugänglich gemacht.

Die Häufigkeit grober Fehler in geodätischen Beobachtungen ist erfahrungsgemäss, unter anderem bedingt durch umfassende Kontrollen der Daten vor der Parameterschätzung, relativ klein. Daher ist es von besonderer Bedeutung, dass das entwickelte robuste Schätzverfahren sich durch eine enge Verwandtschaft mit der MdkQ auszeichnet. Bei Beobachtungen ohne grobe Fehler werden im Normalfall sogar identische Resultate erzielt, bei mit groben Fehlern behaftetem Beobachtungsmaterial werden die Parameter in den meisten Fällen sehr realitätsnah geschätzt und die groben Fehler äusserst effizient lokalisiert.

Das mathematische Modell dieses Schätzverfahrens ist im Kap. 11 detailliert beschrieben. Das Kap. 12 befasst sich mit möglichen Berechnungsverfahren des entstehenden, nichtlinearen Gleichungssystems. Die folgenden Kapitel sind der Schätzung stochastischer Unbekannten gewidmet. Im Kap.13 wird die Schätzung der Standardabweichung der Gewichtseinheit beschrieben, das Kap. 14 befasst sich mit der Schätzung der Kovarianzmatrix und das Kap. 15 mit der Definition der Zuverlässigkeit und der Bestimmung von Zuverlässigkeitsindikatoren. Dabei wurde besonders Wert darauf gelegt, dass die aus der Schätzung nach der MdkQ bekannten Indikatoren und Testgrössen, soweit sinnvoll, weiterhin auch beim robusten Schätzverfahren Verwendung finden.

Im Kap. 16 ist der programmtechnische Berechnungsablauf mit allenfalls auftretenden numerischen Problemen und die Integration in der bestehenden Software beschrieben. Das Kap. 18 demonstriert typische Merkmale des Schätzverfahrens anhand von Beispielen aus der Praxis.

## 2. Abstracts and organization

---

The traditional task of geodesy consists of measuring real objects and representing them mostly with a mathematical model. Based on measurements that are always associated with smaller or larger inaccuracies, the unknown parameters of the mathematical model have to be estimated.

At the beginning of the nineteenth century C.F. Gauss and A. M. Legendre developed the method of the least squares (MLS) and set the standard used to this day for the calculation of adjustments. The success of this method is due to its simplicity, clarity and calculational ease in application. In spite of its wide use however, the principal hypothesis of normal distribution of measurement errors is not necessarily fulfilled in all practical applications.

In the nineteen sixties, for the first time methods of mathematical statistics were integrated in the estimation of geodetic parameters. In this context, hypothesis testing, interval estimation and variance analysis should be mentioned. These methods allow the interpretation and validity-assessment of the increasingly complex and broad models that are used.

The first part of this paper gives an overview of the relevant segments of these fundamentals. Chapter 5 presents the relevant elements of the mathematical statistics and Chapter 6 presents the method of least squares.

In the middle of the sixties, estimation procedures in mathematical statistics were developed which provide qualitatively good estimates of the unknown parameters even in the case of model assumptions which do not fulfill the requirements of the method of least squares. In addition, these robust estimation procedures automatically locate large errors in the data set, which lead to a significant simplification and an increase of efficiency of the process of data preparation and analysis.

The second part of the paper explains the fundamentals of the mathematical model of the robust parameter estimation. The mathematical model for the robust estimation of the parameters is defined in Chapter 7. Chapter 8 treats the model's specific characteristics and Chapter 9 presents the different commonly used approximation functions.

The significant advances in computer technology in the last few years has made it possible to apply robust parameter estimation procedures to the geodetic adjustments. The main goals of this paper are to develop a practical robust estimation procedure for the parameter estimation

in geodetic networks and to integrate this method in the standard geodetic programs of Switzerland, as an alternative to the method of least squares. Through the latter, the new method should be made accessible to a wide circle of users within the Swiss land surveying community.

Experience shows a relatively low occurrence of major errors in geodetic observations not in the least due to extensive checking and verification of the data material before the parameter estimation procedure. Therefore, it is important that the new method is in a close relationship to the traditional MLS method. Under the normal conditions of geodetic observation without any large errors the parameter estimation leads to identical results as the MLS; in the case of large errors in the observations, the estimation of the parameters leads to very realistic results and any large errors are easily and precisely located.

A detailed description of the mathematical model of the new method is given in Chapter 11. Various approaches to solving the resulting non-linear equations are presented in Chapter 12. The subsequent chapters treat the estimations of the unknown stochastic parameters. Chapter 13 describes the estimation of the standard deviation of the weights. Chapter 14 describes the estimation of the covariance matrix and Chapter 15 describes the definition of the reliability and the determination of the reliability indicators. To the degree possible, indicators and standard test measures that are utilized in the method of MLS were also used in the new robust estimation procedure.

Chapter 16 describes the implementation of the new algorithms in the existing software and addresses possible associated numerical problems. Finally, typical characteristics of the robust estimation procedures are demonstrated with real world examples in Chapter 18.



## **I. Teil**

# **EINLEITUNG**



### 3. Problemstellung

---

Die Geodäsie ist nach der klassischen Definition von [HELMERT 1880] die *Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche*. Es sind also zwei Hauptaufgaben, die in der Geodäsie gelöst werden müssen: Einerseits die Ausmessung, das heisst die Erhebung eines definierten Teils der reellen Bedeckung der Erdoberfläche in einem grösseren oder kleineren Gebiet, andererseits die Abbildung des Gemessenen in einem (mathematischen) Modell.

Grundlage des mathematischen Modells bildet grundsätzlich ein Bezugs- oder Koordinatensystem, in dem die Bedeckung der Erdoberfläche geometrisch abgebildet werden kann. Die Abbildung der Realität in einem Modell erfolgt normalerweise über Punkte, die mit verschiedenen Messinstrumenten eingemessen werden. Anschliessend werden deren Koordinaten im Bezugssystem berechnet. Bedingt durch die eingesetzten Messverfahren werden durch die Messungen und die Punkte meistens *geodätische Netze* gebildet (vgl. Kap. 10.1).

Messungen (Beobachtungen) sind grundsätzlich nie absolut genau, sie sind mit kleineren und grösseren Fehlern und Ungenauigkeiten behaftet. Folglich können die Koordinaten dieser Punkte sowie allenfalls weitere unbekannt Parameter nicht absolut genau berechnet werden. Es bedarf einer *Schätzung dieser unbekannt Parameter* unter Verwendung eines Schätzverfahrens. Um neben dem eigentlich Schätzergebnis auch Aussagen über die Güte der Messungen, des mathematischen Modells und des verwendeten Schätzverfahrens zu erhalten, werden grundsätzlich mehr Beobachtungen erhoben, als dies zur reinen Bestimmung der Unbekannten notwendig wäre (Überbestimmung, Redundanz). Die Schätzung der Unbekannten in einem überbestimmten System wird in der Geodäsie als *Ausgleichsrechnung* oder *Ausgleichung* bezeichnet. Dabei werden, unabhängig vom gewählten Schätzverfahren, die folgenden, gleichermassen wichtigen Ziele verfolgt:

- Aufdeckung und (wenn möglich) Elimination von groben Fehlern bzw. von grob fehlerhaften Beobachtungen.
- Aufdeckung von Schwächen im mathematischen Modell.
- Herleitung von möglichst realitätsnahen Werten für die zu schätzenden Parameter.
- Ableitung von Genauigkeits- und Zuverlässigkeitsmassen für die erhaltenen Ergebnisse (Parameter).

### 3.1 Lösung in der geodätischen Praxis der Vergangenheit und Gegenwart

Die heute gängige Methode zur Schätzung geodätischer Parameter ist die auf C. F. Gauss und A. M. Legendre zurückgehende Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (MdkQ) [vgl. z.B. WOLF 1977, CAROSIO 1996]. Diese Methode liefert Schätzwerte, die den Beobachtungen unter Annahme der Normalverteilung die grösste Wahrscheinlichkeit verleihen. Gemäss dem Gauss-Markov-Theorem ist der MdkQ-Schätzer zudem unter allen in den Beobachtungen linearen und erwartungstreuen Schätzern der Schätzer mit der kleinsten Varianz.

Die MdkQ führt als einzige Schätzfunktion zu einem linearen Schätzer und ist daher rechen-technisch besonders einfach zu handhaben. Alternative Methoden sind mathematisch unübersichtlicher und erwiesen sich in der Vergangenheit als rechnerisch nicht beherrschbar. Dies ist ein wesentlicher Grund für die Entwicklung der MdkQ zum Standardverfahren für die Ausgleichung geodätischer Netze.

Eine wesentliche Voraussetzung bei der Ableitung der MdkQ-Schätzfunktion ist, dass die Beobachtungen gleich genau und unabhängig sind bzw. dass sie mit Hilfe von Varianz-Kovarianzmatrizen homogenisiert werden. Für praktische Anwendungen werden die Varianzen der Messungen normalerweise aus Erfahrungswerten a priori festgelegt und mit der Varianzkomponentenschätzung (vgl. Kap. 13.1.2) a posteriori überprüft. Messungen werden dabei in Gruppen mit gleicher Varianz zusammengefasst. Die Kovarianzen lassen sich mathematisch meist nur ungenau beschreiben und sind rechnerisch aufwendig zu handhaben. Da die Korrelationen unter den Messungen jedoch in den meisten Fällen sehr klein sind bzw. durch die Anwendung geeigneter Massnahmen klein gehalten werden, erzielt man auch bei einer Vernachlässigung genügend gute Schätzresultate.

In der Praxis ist man also bestrebt, Messungen so zu erheben, dass sie

- möglichst unabhängig voneinander,
- unberührt von systematischen Einflüssen,
- unter konstanten Bedingungen ausgeführt und
- frei von groben Fehlern sind.

Diese idealen Voraussetzungen sind verständlicherweise nur äusserst selten streng erfüllt. Das verwendete Ausgleichungsmodell ist also meist nur eine mehr oder weniger gute Approximation der Realität. Durch die Anwendung verschiedenster Massnahmen wird versucht, die Abweichungen vom Modell möglichst gering zu halten.

- a) *Korrelationen* zwischen den Messungen versucht man durch das Einhalten genau definierter Messregeln zu vermeiden.  
Ziel ist es, möglichst unabhängige Messungen (Kovarianzen = 0) zu erhalten.
- b) *Systematische Einflüsse* zwischen den Messungen werden durch spezielle Messverfahren und -regeln, Meteomessungen, Bestimmungen von Kalibrierungswerten, Eichung und Kontrolle der Instrumente, etc. verringert.  
Damit soll erreicht werden, dass die auftretenden Fehler einen Erwartungswert = 0 besitzen.
- c) Durch eine geschickte Wahl des Messzeitpunktes, einer möglichst kurzen Messdauer und weiterer Schutzmassnahmen (z.B. Vermeidung von direkter Sonneneinstrahlung) wird versucht, die Bedingungen während den Messungen *möglichst konstant* zu halten.  
Mit diesen Massnahmen soll sichergestellt werden, dass die einer Messgruppe zugeordneten Messungen möglichst gleiche Varianzen aufweisen.
- d) Messregeln und -verfahren sollen einerseits das Entstehen von *groben Fehlern* verhindern, andererseits sollen spezielle Messanordnungen und Testverfahren die Lokalisierung grober Fehler vor oder nach der Ausgleichung erlauben. Derart gefundene grobe Fehler können korrigiert oder die entsprechenden Beobachtungen aus der Parameterschätzung eliminiert werden.  
Angestrebt werden Beobachtungen ohne grobe Fehler.

Der letzte Punkt, das Vermeiden bzw. Lokalisieren von groben Fehlern, hat die Geodäten seit jeher sehr stark beschäftigt.

Vor der Entwicklung der MdkQ gab es drei mögliche Varianten zur Behandlung von voneinander abweichenden Messungen [EHLERT 1995]:

- Sie wurden so wenig wie möglich erwähnt, die Fehler wurden also bewusst in Kauf genommen.
- Es wurde auf eine Überbestimmung bewusst verzichtet, damit keine Messwidersprüche auftraten.
- Sie wurden verworfen und wiederholt, bis sie genügend übereinstimmten.

Mit der Einführung der Parameterschätzung nach der MdkQ wurde es einem breiten Anwendungskreis möglich, aus überbestimmten Gleichungssystemen auf einfache Art plausible Werte zu berechnen. Da sich grobe Fehler bei diesem Schätzverfahren jedoch sehr negativ auf die Güte der Schätzergebnisse auswirken, bestand weiterhin ein sehr grosses Interesse an deren Lokalisierung. Anfänglich hat man sich darauf beschränkt, allgemeine Messanordnungen und -regeln vorzuschreiben, die erlaubten, geodätische Netze zu erstellen, in denen grobe Fehler mit einer hohen Wahrscheinlichkeit gefunden werden konnten [vgl. z.B. Instruktion für die

Triangulation 4. Ordnung von 1919]. Wichtigstes Hilfsmittel zur Lokalisierung grober Fehler war die Beurteilung der Verbesserungen der Beobachtungen (Richtungen, Höhenwinkel, später Distanzen) in den Abrissen. Bei grossen Verbesserungen wurde empfohlen, zur Beurteilung eine „fehlerzeigende Figur“ zu zeichnen oder die Verbesserungen graphisch im Netzplan aufzutragen.

Die Kombination verschiedenster Beobachtungen (Richtungen, Distanzen, Höhenwinkeln, Satellitenbeobachtungen, ...) und die Ausgleichung immer grösserer Netze mit den verschiedensten zu schätzenden Parametern (Koordinaten, Orientierungen, Lotabweichung, Massstabsunbekannten, Additionskonstanten, ...) machten ein intuitives Urteil zunehmend schwieriger und führten zur Entwicklung numerischer Verfahren [BAARDA 1968, CAROSIO 1983].

In der heutigen Praxis wird vor allem der von [BAARDA 1968] entwickelte Test der standardisierten Verbesserungen (vgl. Kap. 15.1.2) angewendet, der die Suche nach groben Fehlern stark vereinfacht. Dieser Test ist sehr gut geeignet, einige wenige, lokal getrennte Fehler in sich gegenseitig kontrollierenden Beobachtungen aufzudecken. Neuere Vorschriften [vgl. z.B. TVAV, Art. 55] verwenden diesen Test, um die zu erreichende Güte der Messungen zu definieren.

Die Ausgleichung nach der MdkQ führt infolge der Minimierung der Quadratsumme der Verbesserungen dazu, dass ein grober Fehler die standardisierten Verbesserungen anderer, korrekter Beobachtungen vergrössert. Die groben Fehler können daher nicht direkt lokalisiert werden, sondern es bedarf dazu eines iterativen manuellen und dementsprechend aufwendigen Prozesses ("data snooping"). Bei geeigneter Messanordnung führt diese Methode jedoch meistens zum gewünschten Erfolg.

### 3.2 Lösung mittels robuster Parameterschätzung

Die rechentechnischen Einschränkungen, die in der Vergangenheit zur nahezu ausschliesslichen Anwendung der MdkQ geführt haben, sind durch die enorme Entwicklung der Computertechnik sekundär geworden. Die heute auch in der Praxis zur Verfügung stehenden grossen Rechnerkapazitäten ermöglichen erstmals, auch für praktische Anwendungen nichtlineare Schätzfunktionen in Betracht zu ziehen. Daher haben in den letzten Jahren in der Geodäsie die *robusten Schätzverfahren* an Aktualität gewonnen.

Eine Parameterschätzung wird ganz allgemein als *robust* bezeichnet, wenn sie auch bei Auftreten von Messfehlern, die nicht der Normalverteilung angehören, „richtige“ Schätzergebnisse liefert. Eine Hauptaufgabe der robusten Schätzverfahren besteht weiterhin in der Lokalisierung grober Messfehler. Ein Zitat aus [HAMPEL 1980] mag dies illustrieren:

*Die Vorzüge guter, robuster Methoden liegen in der schnelleren, zuverlässigeren, automatischen Suche nach einem klaren Datenbild, sowie in der höheren Effizienz gegenüber dem mühsamen, trickreichen Probieren mit Verbesserungen und groben Fehlern.*

Im weiteren haben diese Verfahren jedoch den Vorteil, dass auch bei nicht genau normalverteilten Beobachtungen wirklichkeitsnahe Schätzungen der unbekannt Parameter erreicht werden.

Die bisher in vielen Bereichen so erfolgreiche und den Geodäten vertraute MdkQ soll durch robuste Schätzverfahren nicht ersetzt werden. Es ist jedoch zu hoffen, dass die MdkQ nicht, wie bisher üblich, unkritisch als „Universalschätzmethode“ für alle Aufgaben der Geodäsie benutzt wird, sondern dass die neuen Methoden parallel eingesetzt werden, um je nach Datenqualität oder Modellkenntnissen die bestmöglichen Ergebnisse zu erzielen. Das folgenden Zitat [CASPARY 1988] mag dies unterstreichen:

*" Robuste Schätzer sind mit dem Helm zu vergleichen, den jeder erfahrene Bergsteiger in seiner Ausrüstung hat. Er wird ihn selbstverständlich nicht immer tragen, aber gewiss dann, wenn er auf schwierigen, unsicheren Steigen klettert oder mit Steinschlag rechnen muss."*

---

## 4. Zielsetzung

---

Das Ziel dieser Arbeit war es, ein praxistaugliches robustes Schätzverfahren für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen mit den folgenden Eigenschaften zu entwickeln:

- geringer Einfluss grober Fehler auf das Schätzergebnis
- möglichst hohe Effizienz bei normalverteilten Beobachtungen
- bei Beobachtungen ohne grobe Fehler praktisch gleiche Schätzergebnisse wie bei der MdkQ

Bezogen auf die Bedürfnisse in der Schweiz waren zusätzlich die folgenden Randbedingungen zu beachten:

- Integration des Schätzverfahrens ins Triangulationsprogramm LTOP des Bundesamtes für Landestopographie
- Berechnung der heute in der Landes- und amtlichen Vermessung gebräuchlichen Indikatoren zur Beurteilung geodätischer Netze, soweit diese sinnvoll sind.

Das Programm LTOP wurde Ende der 60iger Jahre beim Bundesamt für Landestopographie erstellt und in den vielen Jahren seines Gebrauches bis heute weiter entwickelt. Von den in der Landesvermessung und der Triangulation 4. Ordnung (Bestandteil der amtlichen Vermessung) tätigen Kantonen und privaten Ingenieurbüros wird fast ausschliesslich dieses Programm zur Ausgleichung geodätischer Netze verwendet; ebenso in der Ausbildung und Forschung an den Eidgenössischen Technischen Hochschulen in Zürich und Lausanne und den Ingenieurschulen in Muttenz und Yverdon. Seit in der Parzellarvermessung anstelle der Polygonzugsberechnung der strenge Ausgleich der Festpunkte zwingend vorgeschrieben wird [vgl. TVAV, Art. 54 Abs. 1], wird das Programm zum Teil auch in diesem Bereich angewendet. Die Software LTOP hat sich in der Schweiz zu einem „de facto“-Standard für die Ausgleichung geodätischer Messungen entwickelt.

Durch die 1993 erfolgte Integration des entwickelten robusten Schätzverfahrens in diese Software [WICKI 1992, GUBLER 1994] wurde es einem sehr grossen Benutzerkreis innerhalb des schweizerischen Vermessungswesens zugänglich gemacht. Seither ist dieses Verfahren nun mit grossem Erfolg in praktischem Gebrauch.

Daher ist es dem Verfasser ein grosses Anliegen, dass die vorliegende Arbeit den Berufskollegen den Hintergrund des Schätzverfahrens, das sie in ihrer täglichen praktischen Arbeit



anwenden, verständlich darstellt. Die in der Literatur der robusten Statistik verwendete Terminologie wurde folglich, soweit dies möglich war, derjenigen der geodätischen Parameterschätzung angepasst. Der Verfasser hegt die Hoffnung, dass diese Arbeit dazu beitragen kann, die Verwendung dieses sinnvollen Instrumentes weiter zu fördern.

---

## 5. Grundlagen der Parameterschätzung

---

Zur mathematischen Erfassung und Darstellung der in der Realität und im speziellen in der geodätischen Praxis auftretenden, zum Teil sehr komplexen Zusammenhänge, bedarf es vereinfachender Annahmen. Diese Vereinfachungen werden häufig in mathematischen Modellen beschrieben, die es erlauben, die Zusammenhänge der komplexen Wirklichkeit zu strukturieren und zu analysieren.

Üblicherweise werden die Parameter in den Ingenieur- und Naturwissenschaften aus Messungen (Beobachtungen) geschätzt. Es liegt in der Natur der Sache, dass diese Messungen Ungenauigkeiten und Fehler aufweisen, deren Ursachen und Eigenschaften sehr vielschichtig sind. Es ist folglich nicht möglich, „wahre“ Werte zu bestimmen. Die Arten der Fehler können in drei Klassen zusammengefasst werden:

- grobe Fehler                    sind Irrtümer (z.B. falsche Ablesungen, Punktverwechslungen, falsche Datenübertragungen, ...).
- systematische Fehler       sind Fehler, die sich regelmässig auswirken. Sie werden primär durch äussere Einflüsse oder Mängel der Messinstrumente hervorgerufen.
- zufällige Fehler               sind unvermeidbare, nicht vorhersehbare Fehler.

Die Fehler der ersten beiden Klassen werden, wenn immer möglich, durch Messverfahren, -regeln oder konstruktive Hilfsmittel vermieden oder allenfalls nachträglich eliminiert.

Die vereinfachte, modellierte Beschreibung der zufälligen Fehler (Unsicherheiten) erfolgt im *stochastischen Modell* (vgl. Kap. 5.2.1), das sich mit den Methoden der mathematischen Statistik beschreiben lässt. (vgl. Kap. 5.1)

Neben den gemessenen Grössen werden im Schätzprozess auch Beziehungen und Bedingungen zwischen den Beobachtungen berücksichtigt, die im *funktionalen Modell* beschrieben werden. Auch dieses ist eine Vereinfachung der Realität, die Beziehungen und Bedingungen gelten nur in der idealisierten Vorstellung des gewählten Modells unter der Annahme, die Messungen seien fehlerfrei (vgl. Kap. 5.2.2).

Da sich die Fehlertheorie und die Ausgleichsrechnung sehr stark an der mathematischen Statistik orientiert, werden im folgenden Kapitel die für die vorliegende Arbeit notwendigen Grundzüge dieser Theorie aufgezeigt

## 5.1 Grundlagen der mathematischen Statistik

### 5.1.1 Eindimensionale Zufallsvariable

Ein einzelner Messvorgang kann als Zufallsexperiment betrachtet werden. Die Messung, die jedem Ereignis dieses Zufallsexperimentes genau einen reellen Wert zuordnet, bezeichnet man dann als Zufallsvariable  $X$ . Diese Modellannahme erlaubt die Verwendung der Werkzeuge der mathematischen Statistik für die Lösung von geodätischen Problemen.

Die Eigenschaften der Zufallsvariablen werden durch Verteilungsfunktionen beschrieben. Realisierungen der Zufallsvariablen sind reelle Werte.

#### *Verteilungsfunktionen*

Eine *empirische Verteilungsfunktion*  $F_n(x)$  ordnet jedem Wert  $x$  (z.B. Messungen) die relative Häufigkeit zu, mit der Werte kleiner oder gleich  $x$  beobachtet worden sind.

$$F_n(x) = \frac{\text{Anz. Werte} \leq x}{n} \quad (5.1.1)$$

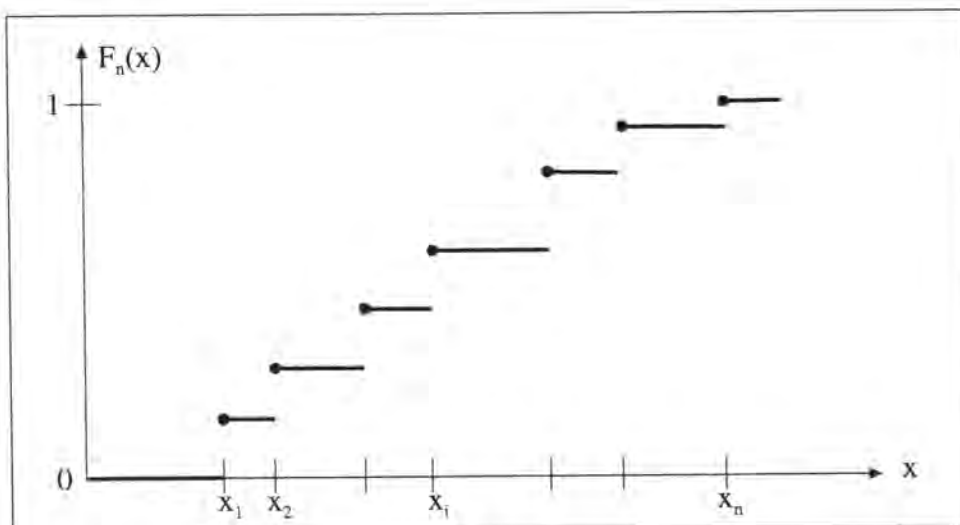


Abb. 5.1: empirische Verteilungsfunktion  $F_n(x)$

Im speziellen Fall mit nur einem Wert  $x_i$  erhält man eine Verteilung  $\delta_x$  der folgenden Form:

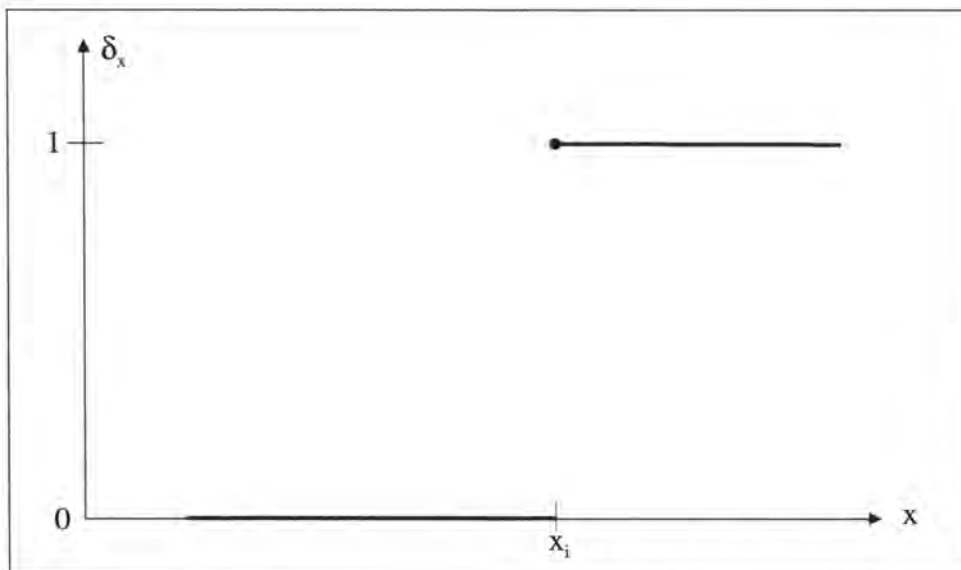


Abb. 5.2: empirische Verteilungsfunktion  $\delta_x$

Analog beschreibt die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  die Wahrscheinlichkeit  $P$ , mit der die Zufallsvariable  $X$  in einem bestimmten Wertebereich liegt:

$$F(x) = P(X \leq x) \tag{5.1.2}$$

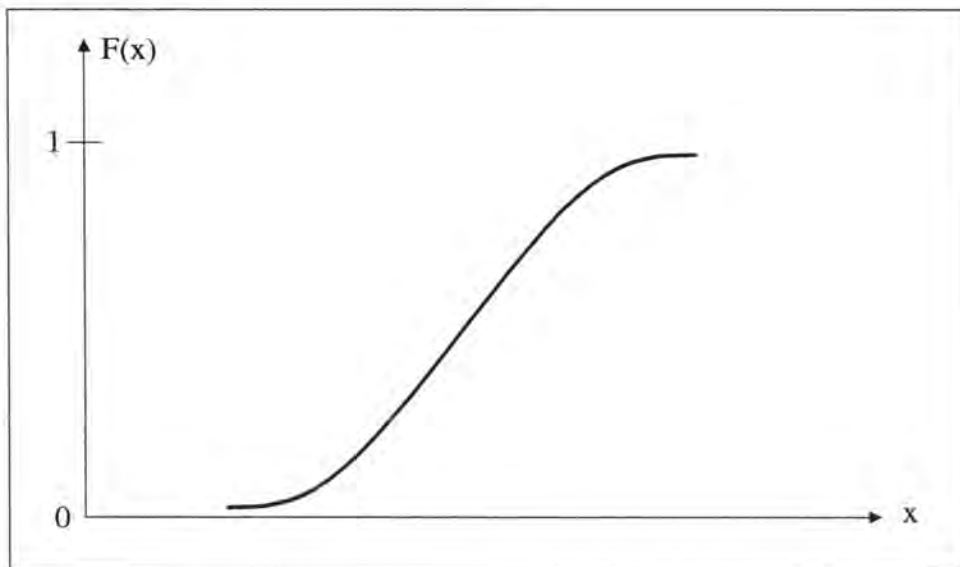


Abb. 5.3: Verteilungsfunktion  $F(x)$

Die empirische Verteilungsfunktion  $F_n(x)$  ist für alle  $x$  ein konsistenter und erwartungstreuer Schätzer (vgl. später in diesem Kapitel) der Verteilungsfunktion  $F(x)$ .

### Dichtefunktion

Falls die Verteilungsfunktion  $F(x)$  differenzierbar ist, so heisst

$$F'(x) = f(x) \tag{5.1.3}$$

die Dichte der Verteilung von  $X$  oder die *Dichtefunktion* von  $X$ .

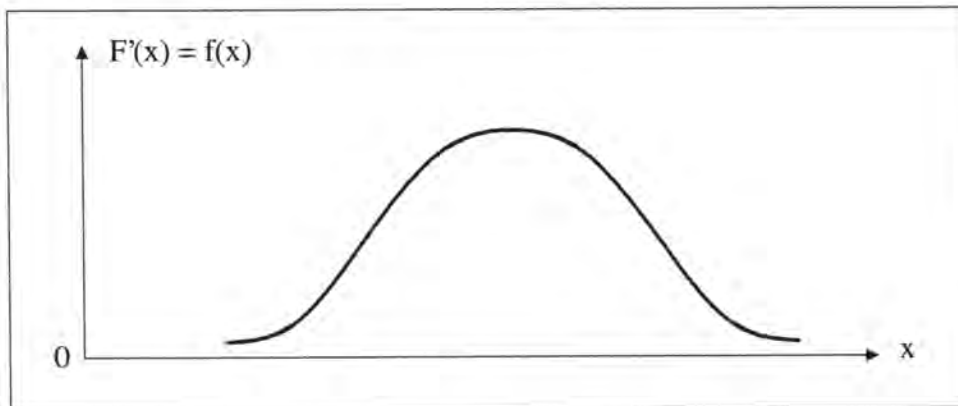


Abb. 5.4: Dichtefunktion  $f(x)$

Für Zufallsvariablen  $X$  mit einer Dichtefunktion gilt:

### Erwartungswert

Der *Erwartungswert*  $E[x]$  ist für eine stetige Zufallsvariable  $X$  mit der Dichte  $f(x)$  durch die folgende Formel definiert:

$$E[x] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{5.1.4}$$

Ist  $g(x)$  eine reelle Funktion, dann gilt:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \tag{5.1.5}$$

### Varianz

Die *Varianz*  $V(x)$  einer Zufallsvariable  $X$  ist definiert durch

$$V(x) = \sigma^2 = E[(x - \mu)^2] \quad (5.1.6)$$

Sie ist ein Mass für die Variabilität von  $X$  um den Erwartungswert.

Für eine stetige Zufallsvariable  $X$  lässt sich für die Varianz mit (5.1.5) und (5.1.6) schreiben:

$$V(x) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (5.1.7)$$

Die Standardabweichung oder Streuung  $\sigma$  wird in der Geodäsie als *mittlerer Fehler* bezeichnet.

### 5.1.2 Einige wichtige Verteilungs- und Dichtefunktionen

Im folgenden sind jene Verteilungs- und Dichtefunktionen aufgeführt, die in dieser Arbeit Verwendung finden.

#### *Normalverteilung*

Eine Zufallsvariable  $X$  mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (5.1.8)$$

heisst normalverteilt. Bei einer normalverteilten Zufallsvariablen  $X$  gilt für den Erwartungswert  $E[X] = \mu$  und für die Varianz  $V(X) = \sigma^2$ .

Die Normalverteilung mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  heisst *Standardnormalverteilung*  $N(0,1)$ . Die entsprechende Dichtefunktion wird, in Folge der besonderen Bedeutung dieser Verteilung, häufig mit  $\varphi(x)$  bezeichnet, die Verteilungsfunktion mit  $\Phi(x)$ .

### Exponentialverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.1.9)$$

beschreibt eine Exponentialverteilung (mit Parameter  $\alpha$ ).

### $\chi^2$ -Verteilung

Die Verteilung der Zufallsvariablen

$$\chi_n^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2 \quad \text{mit unabhängigen } X_i \sim N(0,1), i = 1, \dots, n \quad (5.1.10)$$

nennt man  $\chi^2$  - Verteilung. Die Zufallsvariable  $\chi^2$  hat den Erwartungswert  $E[\chi^2]=n$  und die Varianz  $V(\chi^2)=2n$ .  $n$  ist der Freiheitsgrad der Zufallsvariablen  $\chi_n^2$ .

### F-Verteilung

Der Quotient

$$F = \frac{\frac{\chi_m^2}{m}}{\frac{\chi_n^2}{n}} \quad (5.1.11)$$

zweier unabhängiger,  $\chi^2$  - verteilter Zufallsvariablen mit den Freiheitsgraden  $m$  und  $n$  ist ebenfalls eine Zufallsvariable, die F-verteilt ist.

### 5.1.3 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Wenn in einem Zufallsexperiment  $n$  Zufallsvariablen  $X_i$  mit den Verteilungsfunktionen  $F_i(x)$  bestimmt werden, können diese Variablen als Komponenten einer  $n$ -dimensionalen Zufallsvariablen  $Y$  betrachtet werden:

$$Y = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad (5.1.12)$$

Für die Verteilungs- und Dichtefunktion dieser Zufallsvariablen gilt:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1 \text{ und } \dots \text{ und } X_n \leq x_n) \quad (5.1.13)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n) \quad (5.1.14)$$

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen  $X_i$  und  $X_j$  mit den Erwartungswerten  $\mu_i$  und  $\mu_j$  ist

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \quad (5.1.15)$$

Die symmetrische Kovarianzmatrix erlaubt auf formal einfache Weise die Beschreibung der Varianzen und Kovarianzen.

$$K_{xx} = \begin{pmatrix} V(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ & V(X_2) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & V(X_n) \end{pmatrix} \quad (5.1.16)$$

Bei unabhängigen Zufallsvariablen ist die Kovarianz  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ . Sind alle Zufallsvariablen unabhängig, wird die Kovarianzmatrix folglich zu einer Diagonalmatrix.

Im stochastischen Modell einer geodätischen Parameterschätzung wird die Kovarianzmatrix  $K_{ll}$  für die  $n$  Zufallsvariablen  $L_i$  der Messungen gebildet.

#### 5.1.4 Fehlerfortpflanzung

Für jede lineare Funktion

$$Y = A^T X + b \quad (5.1.17)$$

mit  $n$  verschiedenen Funktionen  $Y_i$  der  $u$  Zufallsvariablen  $X_j$  lässt sich für Beziehung unter den Kovarianzmatrizen schreiben [vgl. CAROSIO 1996]:



$$K_{yy} = A^T K_{xx} A \quad (5.1.18)$$

Diese Beziehung entspricht einer Verallgemeinerung des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

### 5.1.5 Schätzfunktionen

Häufig können Parameter nicht direkt aus Messwerten geschätzt werden. Sie entsprechen Funktionen von Messwerten (z.B. die Schätzung von Koordinaten aus Richtungs- und Distanzmessungen).

Schätzfunktionen sind reelle Funktionen  $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$  der Messungen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Um die Eigenschaften dieser Schätzfunktionen untersuchen zu können, betrachtet man die entsprechenden Funktionen

$$T_n = t(X_1, \dots, X_n) \quad (5.1.19)$$

Somit kann ein unbekannter Parameter  $\tau$  aus einer Reihe von Zufallsvariablen  $X_i$   $i = 1, \dots, n$  geschätzt werden.

#### *Konsistenz*

Eine Schätzfunktion  $T_n$  für den zu schätzenden Parameter  $\tau$  wird als *konsistent* bezeichnet, wenn ihr Wert bei wachsendem Stichprobenumfang  $n$  gegen den zu schätzenden Parameter konvergiert.

#### *Erwartungstreue*

Eine Schätzfunktion  $T_n$  ist erwartungstreu, wenn der Erwartungswert gleich dem zu schätzenden Parameter ist, d.h. wenn

$$E[T_n] = E[t(X_1, \dots, X_n)] = \tau \quad (5.1.20)$$

und dies unabhängig von der Anzahl Realisationen  $n$ .

Die Differenz

$$b = E[T_n] - \tau \tag{5.1.21}$$

heisst *Bias* und ist bei erwartungstreuen Schätzern gleich 0.

Beispiel: Die Zufallsvariablen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  seien unabhängig mit  $E[X_i] = \mu$  und  $V[X_i] = \sigma^2 = E[(X_i - \mu)^2] = E[X_i^2] - \mu^2$

Der Schätzer  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$  ist ein erwartungstreu und konsistenter Schätzer für  $\mu$ .

Gesucht sei ein Schätzer  $T_n$  für  $\sigma^2$ .

Als mögliche Variante wählen wir:  $T_n = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2 - \bar{X}^2$

$$\begin{aligned} E[T_n] &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E[X_i^2]) - E[\bar{X}^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum (V(X_i) + (E[X_i])^2) - V(\bar{X}) - (E[\bar{X}])^2 \\ &= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

Dieser Schätzer  $T_n$  liefert offensichtlich keinen erwartungstreuen Schätzer, im

Gegensatz zum Schätzer  $S^2 = \frac{nT_n}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

### Effizienz

Die Schätzvarianz  $V(T_n) = E[(T_n - \tau)^2]$ , als Mass für die Streuung der Schätzfunktion um den Erwartungswert, sollte möglichst klein sein. Das Verhältnis zwischen der kleinsten, durch eine Schätzfunktion erreichbaren Varianz  $V_{\min}$  und der Varianz der benutzten Schätzfunktion wird als *Effizienz* der Schätzfunktion bezeichnet:

$$e(T_n) = \frac{V_{\min}(T_n)}{V(T_n)} \tag{5.1.22}$$

In der praktischen Anwendung versucht man, eine möglichst hohe asymptotische Effizienz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(T_n) = 1 \quad (5.1.23)$$

für ein bestimmtes Modell zu erreichen.

### 5.1.6 Einflussfunktionen

Gegeben sei eine Schätzfunktion

$$T_{n-1} = T(F_{n-1}) = t_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-1}) \quad (5.1.24)$$

mit den Zufallsvariablen  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) und der empirischen Verteilung  $F_{n-1}$ . Zu dieser Schätzfunktion wird eine weitere Zufallsvariable  $X_n$  mit der Verteilung  $\delta_x$  (vgl. Abb. 5.2) hinzugefügt. Daraus resultiert die Schätzfunktion

$$T_n = T(F_n) = t_n(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) \quad (5.1.25)$$

und die Verteilung

$$F_n = \frac{n-1}{n} F_{n-1} + \frac{1}{n} \delta_x \quad (5.1.26)$$

Wird die Differenz der beiden Schätzfunktionen  $T_n$  und  $T_{n-1}$  mit der Anzahl Zufallsvariablen  $n$  multipliziert, erhält man die Sensitivitätskurve (SC). Die SC beschreibt den Effekt auf die Schätzfunktion, der durch Hinzufügen einer Beobachtung zur gegebenen Stichprobe hervorgerufen wird.

$$SC_{n-1} = n(T_n - T_{n-1}) = \frac{T\left(\frac{n-1}{n} F_{n-1} + \frac{1}{n} \delta_x\right) - T(F_{n-1})}{\frac{1}{n}} \quad (5.1.27)$$

Lassen wir  $n$  gegen  $\infty$  gehen und ersetzen wir  $1/n$  durch  $\varepsilon$ , erhalten wir die Einflussfunktion IF (influence function) der Schätzfunktion  $T$  mit der Verteilung  $F$  [HAMPEL 1986].

$$IF(x; T, F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T((1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_x) - T(F)}{\varepsilon} \quad (5.1.28)$$

Die Einflussfunktion misst für eine bestimmte Schätzfunktion T den Effekt einer infinitesimalen Veränderung der Daten x auf die Schätzung.

Qualitativ werden hauptsächlich vier Typen von Einflussfunktionen unterschieden:

- monoton und unbeschränkt: z.B. arithmetisches Mittel (vgl. 9.2.8)
- monoton und beschränkt: z.B. Median (vgl. 9.2.12), gestutztes Mittel, Huber-Schätzer (vgl. Kap. 9.3.1), BIBER-Schätzer (vgl. Kap. 11)
- beschränkt mit Sprung zurück auf Null: z.B. arithmetisches Mittel mit Verwerfungsregel
- beschränkt mit stetigem Übergang zurück auf Null: z.B. Hampel-Schätzer (vgl. Kap. 9.3.2)

Alle Schätzfunktionen, deren Einflussfunktion beschränkt ist, führen zu robusten Schätzungen im Hinblick auf die Wirkung von groben Fehlern.

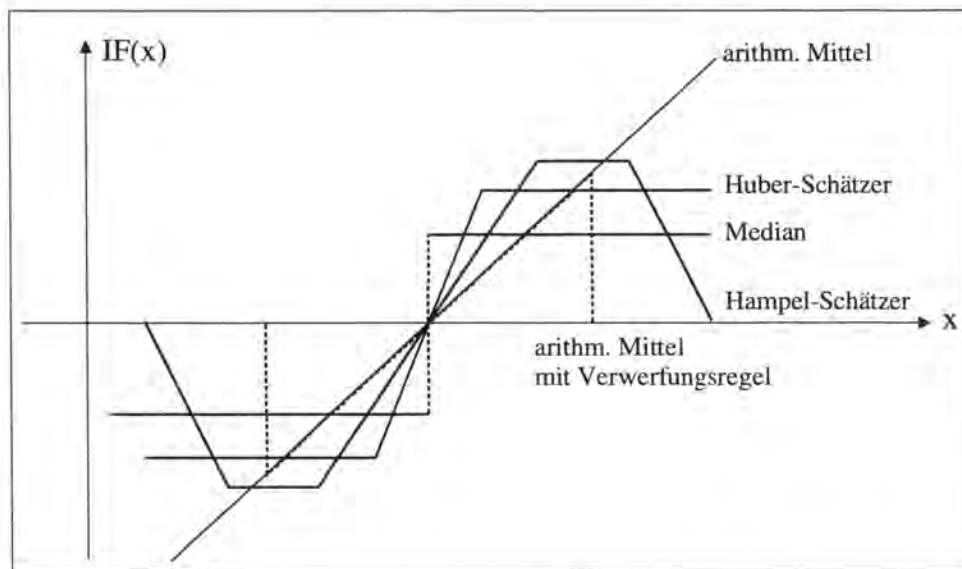


Abb. 5.5: Haupttypen von Einflussfunktionen (IF)

Beispiel zur Einflussfunktion:

Zur Veranschaulichung der Einflussfunktion sei diese am Beispiel des arithmetischen Mittels erläutert. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, die x seien standardnormalverteilt (vgl. Kap. 5.1.2).

$$\bar{x} = E[x] = T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

bzw. mit (5.1.4) und  $n \rightarrow \infty$ :

$$E[x] = T = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = 0 \quad (5.1.29)$$

Mit (5.1.28) und (5.1.29) ergibt sich für die Einflussfunktion:

$$\begin{aligned} \text{IF}(x; T, \Phi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int x d((1-\varepsilon)\Phi + \varepsilon\delta_x)(u) - \int x \varphi(x) du}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1-\varepsilon) \int x \varphi(x) dx + \varepsilon \int x d\delta_x(x) - \int x \varphi(x) dx}{\varepsilon} \\ &= x \end{aligned}$$

## 5.2 Das mathematische Modell einer geodätischen Parameterschätzung

### 5.2.1 Das stochastische Modell

Im stochastischen Teil des mathematischen Modells einer geodätischen Parameterschätzung werden die Eigenschaften der Zufallsvariablen, die man den Messungen  $l_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) zugeordnet hat, beschrieben.

Die Beschreibung erfolgt mit der Kovarianzmatrix der Messungen  $K_{ll}$  (vgl. 5.1.16)

$$K_{ll} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1j} & \dots & \sigma_{1n} \\ & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2j} & \dots & \sigma_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & \sigma_i^2 & \dots & \sigma_{in} \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (5.2.1)$$

Die Varianzen  $\sigma_i^2$  der einzelnen Messungen sind in der Regel Erfahrungswerte, die bereits vor der Berechnung bekannt sind. Die Kovarianzen  $\sigma_{ij}$  sind meist nicht bekannt, jedoch vernachlässigbar klein. Sie werden als Null angenommen (vgl. Kap. 3.1).

### 5.2.2 Das funktionale Modell

Zwischen den gemessenen oder erhobene Grössen (Beobachtungen) mit ihren stochastischen Eigenschaften bestehen Beziehungen und/oder Bedingungen, die in einem funktionalen Modell beschrieben werden können. Ein derartiges, aus Gleichungen bestehendes Modell, beruht auf der vereinfachenden Annahme, die Beobachtungen seien fehlerfrei und die Modellvorstellungen zutreffend. Ein *Ausgleichsproblem* liegt vor, wenn die zur Bestimmung der Modelleigenschaften notwendige Anzahl Modellgleichungen überschritten wird.

Häufig wird ein derartiges Modell ergänzt durch unbekannte Parameter. Diese können einerseits gesuchte Parameter sein, die geschätzt werden sollen, andererseits Hilfsgrössen zur Vereinfachung der Modellgleichungen.

Besondere Bedeutung in der Geodäsie hat die *vermittelnde Ausgleichung*. In diesem Verfahren wird die zur eindeutigen Beschreibung des funktionalen Modells notwendige Anzahl unbekannter Parameter eingeführt, so dass jede Beobachtung als Funktion der unbekannt Parameter dargestellt werden kann.

$$\underline{l}_i = F_i(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_j, \dots, \underline{x}_n) \quad \text{mit } i = 1, \dots, n \quad (5.2.2)$$

mit  $\underline{l}_i$  Erwartungswert („wahrer“ Wert) der Beobachtungen  
 $\underline{x}_j$  unbekannte Parameter  
 $n$  Anzahl Beobachtungen

### 5.3 Das Gauss-Markov-Modell

Die in der Vermessung meist nichtlinearen Funktionen  $F_i$  zwischen den unbekanntem Parametern und den Erwartungswerten der Beobachtungen können, ohne relevanten Informationsverlust, durch passende lineare Funktionen ersetzt werden. Das derart gewonnene „Standard-Auswertemodell“ der Geodäsie für die vermittelnde Ausgleichung ist das *Gauss-Markov-Modell* mit dem funktionalen

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \underline{x}_j) = \underline{l}_i$$

oder in Matrixschreibweise:

$$A \underline{\bar{x}} = \underline{\bar{l}} \quad (5.3.1)$$

und dem stochastischen Modell:

$$\underline{\bar{l}} + \underline{\bar{\varepsilon}} = \underline{\bar{l}}$$

bzw. mit (5.3.1)

$$\underline{\bar{\varepsilon}} = A \underline{\bar{x}} - \underline{\bar{l}} \quad (5.3.2)$$

$$\text{Für den Erwartungswert der wahren Fehler gilt: } E[\underline{\bar{\varepsilon}}] = \underline{\bar{0}} \quad (5.3.3)$$

Da  $A$  und  $\underline{\bar{x}}$  nichtstochastische Größen sind, erhält man somit:

$$E[\underline{\bar{l}}] = A \underline{\bar{x}} \quad (5.3.4)$$

Zusätzlich wird eine der drei folgenden, äquivalenten Matrizen gegeben:

$$K_{\parallel} = E[\bar{\underline{\varepsilon}}\bar{\underline{\varepsilon}}^T] \quad Q_{\parallel} = \frac{1}{\sigma_0^2} K_{\parallel} \quad P = Q_{\parallel}^{-1} \quad (5.3.5)$$

Die wahren Fehler sind üblicherweise normalverteilt mit:

$$\bar{\underline{\varepsilon}} \sim N(0, \sigma_0^2 Q_{\parallel}) = N(0, K_{\parallel}) \quad (5.3.6)$$

Es bedeuten:

- $\bar{\underline{l}}$  Vektor der „wahren“ Beobachtungen mit dem i-ten Wert  $l_i$
- $\bar{\underline{l}}$  Vektor der Beobachtungen mit der i-ten Beobachtung  $l_i$
- $\bar{\underline{\varepsilon}}$  Vektor der wahren Fehler mit dem i-ten Fehler  $\varepsilon_i$
- A Koeffizienten- (Designmatrix) mit den Koeffizienten  $a_{ij}$  der linearen Gleichungen
- $\bar{\underline{x}}$  Vektor der Unbekannten mit der j-ten Unbekannten  $x_j$
- $K_{\parallel}$  Kovarianzmatrix der Beobachtungen
- $Q_{\parallel}$  Kofaktorenmatrix der Beobachtungen
- P Gewichtsmatrix der Beobachtungen
- $\sigma_0^2$  Varianz der Gewichtseinheit

Die unbekannte Varianz der Gewichtseinheit wird neben den unbekanntem Parametern  $\underline{x}_j$  geschätzt.

Durch eine Transformation

$$T^T Q_{\parallel} T = T^T P^{-1} T = E \quad (5.3.7)$$

bzw.

$$T T^T = P \quad (5.3.8)$$

mit einer symmetrischen, nicht singulären Transformationsmatrix T kann das mathematische Modell (5.3.2) und (5.3.6) in das homogenisierte mathematische Modell

$$\bar{\underline{\tilde{\varepsilon}}} = \tilde{A} \bar{\underline{\tilde{x}}} - \tilde{\underline{l}} \quad (5.3.9)$$

$$\bar{\underline{\tilde{\varepsilon}}} \sim N(0, \sigma_0^2 E) \quad (5.3.10)$$



mit der Gewichtsmatrix  $\tilde{P}$  der homogenisierten Beobachtungen gleich der Einheitsmatrix  $E$  überführt werden, ohne dass die Unbekannten  $\underline{x}_j$  dadurch verändert werden.

Durch die Substitution

$$\tilde{A} = T^T A \quad \text{und} \quad \tilde{\bar{l}} = T^T \bar{l} \quad (5.3.11)$$

erhält man für den Erwartungswert der homogenisierten Beobachtungen  $\tilde{\bar{l}}$  mit (5.3.4):

$$E[\tilde{\bar{l}}] = T^T E[\bar{l}] = T^T A \underline{\bar{x}} = \tilde{A} \underline{\bar{x}} \quad (5.3.12)$$

und für die Kovarianzmatrix:

$$K_{\tilde{\bar{l}}} = T^T K_{\bar{l}} T = \sigma_0^2 T^T P^{-1} T = \sigma_0^2 E \quad (5.3.13)$$

---

## 6. Ausgleichungsverfahren

---

### 6.1 Einleitung

Grundsätzlich erfüllen die Beobachtungen (Messungen)  $l_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) die Gleichungen des funktionalen Modells nicht. Es werden daher neue Grössen, die ausgeglichenen Beobachtungen

$$\bar{l}_i = l_i + v_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.1.1)$$

bestimmt, die die Gleichungen des funktionalen Modells erfüllen. Die ausgeglichenen Beobachtungen sind dabei die um die Verbesserungen (Residuen)  $v_i$  korrigierten Beobachtungen.

Um die  $v_i$  (bzw. die ausgeglichenen Beobachtungen) eindeutig bestimmen zu können, bedarf es der Wahl einer Schätzfunktion (vgl. Kap. 5.1.5). Als Verlust einer Schätzfunktion bezeichnet man die Abweichung vom gesuchten optimalen Schätzergebnis. Dieser Verlust wird definiert durch die *Verlustfunktion*  $\rho(v_i)$ .

Durch die Forderung, dass ausgeglichene Beobachtungen gute Schätzungen für die Erwartungswerte der Beobachtung sein sollen, besteht anschaulich das Ziel, die Summe der Verluste zu minimieren.

Im folgenden seien einige häufig verwendete Verlustfunktionen dargestellt:

$\rho(v_i) = v_i^2$  quadratische oder Gauss'sche Verlustfunktion. Die minimale Summe dieser Verlustfunktion führt zur Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (MdkQ) (vgl. Kap. 6.2).

$\rho(v_i) = |v_i|^n$  die minimale Summe dieser Verlustfunktion führt zur L<sub>n</sub>-Norm-Schätzung (vgl. Kap. 9.2).

$\rho(v_i) = \begin{cases} v_i^2 & \text{für } |v_i| < c \\ c|v_i| & \text{für } |v_i| \geq c \end{cases}$  die minimale Summe dieser Verlustfunktion führt zum Huber-Schätzer (vgl. Kap. 9.3.1).

## 6.2 Methode der kleinsten Quadrate (MdkQ)

Für die unbekannt Parameter  $x_j$  des Gauss-Markov-Modelles (vgl. Kap. 5.3) sollen Schätzwerte  $\hat{x}_j$  bestimmt werden. Dabei wird vorausgesetzt, die Messungen seien *normalverteilt* und *frei von groben oder systematischen Fehlern*. Für praktische Anwendungen wird zudem in der Regel die *Unabhängigkeit* der Messungen angenommen. Infolge der Inkonsistenz des Gleichungssystemes  $\tilde{l} = A\tilde{x}$  treten Residuen (Verbesserungen)  $v_i$  auf, die, bei Gültigkeit der obigen Annahmen, nur zufällige Messfehler repräsentieren.

Zur Vereinfachung der in den folgenden Kapiteln aufgezeigten Formeln wird, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, das mathematische Modell gemäss den Ausführungen in Kap. 5.3 transformiert. Unter der Voraussetzung unabhängiger Messungen erhält man für die Transformationsmatrix T:

$$T = T^T = P_{1/2} = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$$

Auf die Angabe der '˜' bei den homogenisierten Matrizen und Vektoren wird, um die Übersichtlichkeit zu wahren, verzichtet.

Das lineare oder linearisierte (vgl. z.B. 16.2.1) mathematische Modell wird gewöhnlich wie folgt dargestellt:

$$\bar{v} = A\bar{x} - \tilde{l} \quad \text{mit} \quad Q_{ii} = \frac{1}{\sigma_0^2} K_{ii} = E \quad (6.2.1)$$

Somit lässt sich für die i-te unabhängige Beobachtung schreiben:

$$v_i = \sum_{j=1}^u (a_{ij}x_j) - l_i \quad \text{mit} \quad (q_{ii})_{ii} = \frac{1}{\sigma_0^2} (k_{ii})_{ii} = 1 \quad (6.2.2)$$

Dabei bedeuten:

- $\bar{v}$ : (n,1) - Vektor der Verbesserungen
- A: (n,u) - Koeffizientenmatrix = Designmatrix
- $\bar{x}$ : (u,1) - Vektor der Unbekannten
- $\tilde{l}$ : (n,1) - Vektor der Beobachtungen
- $Q_{ii}$ : (n,n) - Kofaktorenmatrix des Beobachtungsvektors
- $K_{ii}$ : (n,n) - Kovarianzmatrix des Beobachtungsvektors
- P: (n,n) - Gewichtsmatrix des Beobachtungsvektors
- $\sigma_0^2$ : Varianz der Gewichtseinheit
- n: Anzahl der Beobachtungen (i = 1 ... n)

- u: Anzahl der Unbekannten ( $j = 1 \dots u$ )
- $v_i$ : i-tes Element des Vektors der Verbesserungen
- $x_j$ : j-tes Element des Vektors der Unbekannten
- $l_i$ : i-tes Element des Beobachtungsvektors
- $a_{ij}$ : Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Designmatrix
- $(q_{ii})_{ii}$ : i-tes Diagonalelement der Kofaktorenmatrix des Beobachtungsvektors
- $(k_{ii})_{ii}$ : i-tes Diagonalelement der Kovarianzmatrix des Beobachtungsvektors
- $p_i$ : i-tes Diagonalelement der Gewichtsmatrix des Beobachtungsvektors
- E: (n,n) - Einheitsmatrix

Als Verlustfunktion für die vermittelnde Ausgleichung nach der MdkQ wird  $\rho(v_i) = v_i^2$  gewählt.

Durch die Minimierung der Summe dieser Verlustfunktion

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \vec{v}^T \vec{v} = \min \quad (6.2.3)$$

erhält man die allgemein bekannten Normalgleichungen (vgl. z.B. [CAROSIO 1996]):

$$A^T \vec{v} = \vec{0} \quad (6.2.4)$$

bzw. mit (6.2.1)

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{l} \quad (6.2.5)$$

Für die Kofaktorenmatrix der Unbekannten ergibt sich unter Anwendung des Gauss'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes (vgl. 5.1.8):

$$Q_{xx} = (A^T A)^{-1}$$

Die Varianz der Gewichtseinheit  $s_0^2$  wird normalerweise wie folgt geschätzt:

$$s_0^2 = \frac{\vec{v}^T \vec{v}}{n - u} \quad (6.2.6)$$

Für das Verständnis der in dieser Arbeit beschriebenen Entwicklung des robusten Schätzverfahrens ist es notwendig, gewisse Beziehungen herzuleiten:

Aus der Kombination von (6.2.1) und (6.2.4) erhält man

$$\bar{v} = -(E - H)\bar{1} \quad (6.2.7)$$

mit:

$$H = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (6.2.8)$$

H wird als Projektionsmatrix bezeichnet.

Wird auf die Beziehung (6.2.7) das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz (vgl. 5.1.18) angewendet, so erhält man für die Kofaktorenmatrix der Verbesserungen  $Q_{vv}$ :

$$\begin{aligned} Q_{vv} &= (H - E)Q_{ll}(H - E)^T \\ &= E - A(A^T A)^{-1} A^T \\ &= E - H \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

und mit (6.2.7)

$$\bar{v} = -Q_{vv}\bar{1} \quad (6.2.10)$$

Für die Spur der  $Q_{vv}$ -Matrix gilt mit (6.2.9):

$$sp(Q_{vv})_{ii} = sp(E - H)_{ii} = \sum_{i=1}^n (1 - h_{ii}) = n - \sum_{i=1}^n h_{ii} \quad (6.2.11)$$

Da die Spur einer quadratischen Produktmatrix nicht ändert, wenn die Faktoren zyklisch permutiert werden, gilt:

$$sp(H) = sp(A(A^T A)^{-1} A^T) = sp((A^T A)^{-1} A^T A) = u = \sum_{i=1}^n h_{ii} \quad (6.2.12)$$

mit

$sp(H)$ : Spur der Projektionsmatrix H

$h_{ii}$ : i-tes Diagonalelement der Projektionsmatrix H

Damit folgt aus (6.2.11) und (6.2.12):

$$sp(Q_{vv})_{ii} = \sum_{i=1}^n (q_{vv})_{ii} = (n - u) = \sum_{i=1}^n z_i \quad (6.2.13)$$

und

$$z_i = (q_{vv})_{ii} = 1 - h_{ii} \quad (6.2.14)$$

Die Grösse  $z_i$  wird als „lokaler Zuverlässigkeitsindikator“ oder als „Redundanzanteil der Beobachtungen“ bezeichnet,  $(q_{vv})_{ii}$  ist das  $i$ -te Diagonalelement der Kofaktorenmatrix der Verbesserungen  $Q_{vv}$ .

Die Verbesserungen  $v_i$  dividiert durch ihre Standardabweichungen  $\sigma_{v_i}$

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_0 \sqrt{(q_{vv})_{ii}}} \quad (6.2.15)$$

bezeichnet man als *standardisierte Verbesserungen*  $w_i$ .

Im speziellen 2-dimensionalen Fall mit

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ a_{i2} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{n2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

erhält man aus (6.2.2):

$$v_i = x_2 a_{i2} + x_1 - l_i \quad (6.2.16)$$

Die Minimierung der Summe der Quadrate dieser Verbesserungen führt zur Regressionsgeraden (einfache lineare Regression) mit dem Achsenabschnitt  $x_1$  und der Geradensteigung  $x_2$ .

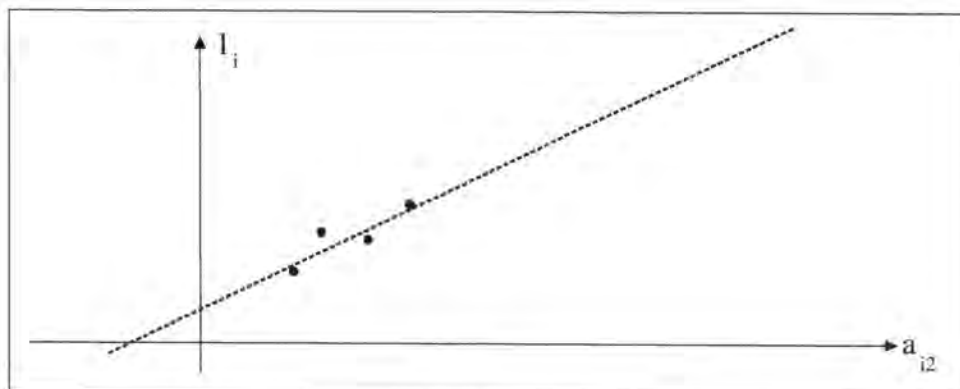


Abb. 6.1: Regressionsgerade

Die folgende Tabelle zeigt die wesentlichen Beziehungen zwischen homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen. Die homogenisierten Grössen sind dabei mit einem 'tilde' gekennzeichnet,  $P_{1/2}$  ist die Transformationsmatrix.

Beziehung	Bezeichnung
$P_{1/2} = \text{diag}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$	
$\tilde{P} = E = (P_{1/2})^{-1} P (P_{1/2})^{-1}$	Gewichtsmatrix der Beobachtungen
$\tilde{A} = P_{1/2} A$	Designmatrix
$\tilde{l} = P_{1/2} l$	Vektor der Beobachtungen
$Q_{\tilde{l}\tilde{l}} = P_{1/2} Q_{ll} P_{1/2} = E$	Kofaktorenmatrix der Beobachtungen
$\tilde{v} = P_{1/2} v$	Vektor der Verbesserungen
$Q_{\tilde{v}\tilde{v}} = P_{1/2} Q_{vv} P_{1/2}$	Kofaktorenmatrix der Verbesserungen
$\tilde{x} = x$	Vektor der Unbekannten
$Q_{\tilde{x}\tilde{x}} = Q_{xx}$	Kofaktorenmatrix der Unbekannten
$\tilde{H} = H$	Projektionsmatrix
$\tilde{z}_i = z_i$	Redundanzanteil der Beobachtungen
$\tilde{w}_i = w_i$	standardisierte Verbesserung

Tab. 6.1: Vergleich von homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen





## **II. Teil**

# **ROBUSTE SCHÄTZVERFAHREN**



---

## 7. Einführung

---

### 7.1 Das stochastische Modell der robusten Parameterschätzung

Betrachtet man die Messfehler  $x$  von Beobachtungen als Zufallsvariablen  $X$ , so kann die Wahrscheinlichkeit  $P$ , mit der  $X$  Werte in einem bestimmten Bereich annehmen kann, als Verteilungsfunktion dargestellt werden (vgl. Kap. 5.1.1).

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (7.1.1)$$

In der geodätischen Ausgleichsrechnung (und in vielen anderen Fachbereichen) nahm und nimmt man an, die Messfehler geodätischer Beobachtungen (und damit die Beobachtungen) seien normalverteilt (vgl. Kap. 5.1.2).

$$F(x) \sim N(0, \sigma) \quad (7.1.2)$$

Diese Hypothese ist richtig, wenn die Messungen

- unberührt von systematischen Einflüssen und
- ohne grobe Fehler

ausgeführt wurden. Dass diese idealen (idealisierten) Voraussetzungen in der Praxis nur sehr selten erfüllt sind, erscheint selbstverständlich. Zahlreiche Untersuchungen an umfangreichem Beobachtungsmaterial zeigen, dass die Annahme der Normalverteilung geodätischer Beobachtungen in den meisten Fällen nicht vollumfänglich bestätigt werden kann [u.a. BIRKENBACH 1916, BORUTTA 1988, CASPARY 1988].

Die Ausgleichung nach der MdkQ liefert nur bei normalverteilten Beobachtungen Schätzwerte mit der grössten Wahrscheinlichkeit. Für nicht streng normalverteilte Beobachtungen existieren Schätzfunktionen, die deutlich bessere Ergebnisse liefern als die MdkQ. Vor allem grobe Fehler (Ausreißer) verfälschen die Modellannahmen und führen zu Verteilungen, die nicht mehr normalverteilt sind.

Den meisten robusten Schätzverfahren liegt eine Verteilungsannahme zugrunde, bei der die Mehrzahl der Messfehler einer Stammverteilung  $G(x)$  angehören, ein Teil der Messfehler (z.B. grobe Fehler) einer Störverteilung  $S(x)$ .  $\epsilon$  definiert die meist geringe Wahrscheinlichkeit, mit der die nicht der Stammverteilung angehörenden Messfehler auftreten.

$$F(x) = (1 - \varepsilon)G(x) + \varepsilon S(x) \quad (7.1.3)$$

Die Stammverteilung  $G(x)$  kann meist als Normalverteilung  $N(0, \sigma)$  angenommen werden.

## 7.2 Das funktionale Modell der robusten Parameterschätzung

Eine Schätzfunktion (vgl. Kap. 5.1.5)

$$\bar{L}_i = g_i(L_1, L_2, \dots, L_n) \quad (7.2.1)$$

gilt als robust, wenn sie gute Werte für  $\bar{L}_i$  liefert, auch wenn die Beobachtungen nicht streng normalverteilt sind. Theoretisch existieren unbegrenzt viele verschiedene robuste Schätzfunktionen. Die für die geodätischen Anwendungen interessanten lassen sich in zwei Klassen gliedern, die im folgenden kurz erläutert werden:

### 7.2.1 M-Schätzer

Bei den M-Schätzern handelt es sich um Schätzfunktionen, die aus einer Verallgemeinerung der Maximum-Likelihood-Methode entwickelt wurden. Für geodätische Anwendungen sind diese Schätzmethoden interessant, da sie eine enge Verwandtschaft zur MdkQ besitzen.

Bei den M-Schätzern wird eine geeignete Verlustfunktion  $\rho(v)$  gewählt und die Schätzfunktion  $\bar{L}_i = g_i(L_1, L_2, \dots, L_n)$  gesucht, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^n \rho(\bar{L}_i - L_i) = \sum_{i=1}^n \rho(v_i) \rightarrow \min \quad (7.2.2)$$

Durch eine geeignete Wahl der Verlustfunktion  $\rho(v_i)$  erhält man die gewünschten robusten Eigenschaften des Schätzverfahrens.

Ein Beispiel im eindimensionalen Fall mit  $\bar{L}_i = \bar{L}$  und  $\rho(\bar{L} - L_i) = (\bar{L} - L_i)^2$  führt zum einfachen arithmetischen Mittel:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\bar{L} - L_i) &= 0 \\ \bar{L} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_i \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Diese Schätzung ist, wie in Kap. 9.2.1 gezeigt wird, nicht robust.

### 7.2.2 L-Schätzer

Als L-Schätzer werden Schätzfunktionen bezeichnet, die sich als Linearkombinationen von Ordnungsstatistiken ergeben.

Im einfachsten Fall von direkt beobachteten Grössen werden die  $n$  Beobachtungen so geordnet, dass

$$L_{(1)} \leq L_{(2)} \leq \dots \leq L_{(i)} \leq \dots \leq L_{(n)} \tag{7.2.4}$$

Dabei wird  $L_{(i)}$  als  $i$ -te Ordnungsstatistik der Stichprobe  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  bezeichnet [BACHMANN 1973].

Die in Klammer gesetzten Indizes ( $i$ ) sollen anzeigen, dass die entsprechenden Werte ihrer Grösse nach geordnet sind.

Die Schätzfunktion  $\bar{L}_i = g(L_1, L_2, \dots, L_n)$  ist vom Typ:

$$\bar{L} = g(L_1, L_2, \dots, L_n) = \sum_{i=1}^n a_i L_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1 \tag{7.2.5}$$

Im eindimensionalen Fall mit  $a_i = 1/n$  erhält man wiederum das einfache arithmetische Mittel (vgl. 7.2.3), mit  $a_1 = a_n = 1/2$  eine Schätzung nach Tschebyscheff:

$$\bar{L} = \frac{L_1 + L_n}{2} \tag{7.2.6}$$

Im Gegensatz zu diesen beiden nicht robusten Schätzverfahren erhält man durch Abschneiden der grössten und kleinsten Stichprobenwerte robuste Schätzungen. Im speziellen Fall, bei dem alle Stichprobenwerte mit Ausnahme des mittleren (falls  $n$  ungerade) bzw. der beiden mittleren (falls  $n$  gerade) ein  $a_i = 0$  erhalten, resultiert die bekannte, sehr robuste Medianschätzung:

n ungerade:

$$i = \frac{n+1}{2} \quad a_{\frac{n+1}{2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{L} = L_{\frac{n+1}{2}} \quad (7.2.7)$$

n gerade:

$$i = \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \quad a_{\frac{n}{2}} = a_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{L} = \frac{1}{2} (L_{\frac{n}{2}} + L_{\frac{n}{2}+1})$$

### 7.3 Robuste M-Schätzung in linearen Modellen (Robuste Ausgleichung)

#### 7.3.1 Mathematisches Modell

Für die Parameterschätzung gehen wir, analog der MdkQ (vgl. Kap. 6.2), vom homogenisierten Gauss-Markov-Modell mit unkorrelierten Beobachtungen aus.

$$\bar{v} = A\bar{x} - \bar{l} \quad \text{mit} \quad Q_{ii} = \frac{1}{\sigma_0^2} K_{ii} = P^{-1} = E \quad (7.3.1)$$

$$v_i = \sum_{j=1}^u (a_{ij} x_j) - l_i \quad \text{mit} \quad (q_{ii})_{ii} = \frac{1}{\sigma_0^2} (k_{ii})_{ii} = \frac{1}{p_i} = 1 \quad (7.3.2)$$

Für die Schätzung wird eine geeignete, robuste Verlustfunktion (oder Zielfunktion)  $\rho(v)$  gesucht und das folgende Minimum bestimmt:

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) \rightarrow \min \quad (7.3.3)$$

oder mit der Ableitung nach  $v_i$ :

$$\Psi(v_i) = \rho'(v_i) = \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial v_i} \quad (7.3.4)$$

Für die Normalgleichungen folgt:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \Psi(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u)$$

und mit (7.3.2):

$$\sum_{i=1}^n \Psi(v_i) a_{ij} = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u) \quad (7.3.5)$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^n \Psi(v_i) \bar{a}_i^T = \bar{0} \quad (7.3.6)$$

mit

$$\bar{a}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{iu}] : i\text{-te Zeile der A-Matrix}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$A^T \bar{\Psi}(v_i) = \bar{0} \quad (7.3.7)$$

mit

$$\bar{\Psi}(v_i) = [\Psi(v_1), \dots, \Psi(v_i), \dots, \Psi(v_n)]^T$$

### 7.3.2 Einflussfunktion

Bei mehrdimensionalen Schätzern wird die Einflussfunktion IF völlig analog zum eindimensionalen Fall (vgl. Kap. 5.1.6) definiert [HAMPEL 1986].

Mit den Normalgleichungen (7.3.6) der M-Schätzer in linearen Modellen lässt sich die u-dimensionale Einflussfunktion IF für M-Schätzer wie folgt beschreiben [HAMPEL 1986, BORUTTA 1988]:

$$\bar{IF}_i(A, \bar{I}; \bar{x}; G) = -S_1^{-1} \bar{a}_i^T \Psi(v_i) \quad (7.3.8)$$

$$S_1 = A^T Y A \quad (7.3.9)$$

$$Y = \text{diag}[E[\Psi'(v_1)], \dots, E[\Psi'(v_i)], \dots, E[\Psi'(v_n)]] \quad (7.3.10)$$

$$\Psi'(v_i) = \frac{\partial \Psi(v_i)}{\partial v_i} \quad (7.3.11)$$

$\bar{a}_i$  beschreibt den Zeilenvektor (i-te Zeile) der A-Matrix. Diese Zeile korrespondiert mit der i-ten Beobachtung  $l_i$ , deren Einfluss auf den Vektor der Unbekannten betrachtet wird. Der Einfluss wird damit als Produkt aus dem skalaren Einfluss der Verbesserungen, dem Gewicht der Beobachtung sowie einem vektorwertigen, vom Design abhängigen Anteil bestimmt.

Die Funktion  $\Psi(v_i)$ , die Ableitung der Verlustfunktion nach den Unbekannten (7.3.4), ist bei M-Schätzern gemäss (7.3.8) proportional zur Einflussfunktion [HAMPEL 1986].

Sobald die Einflussfunktion bzw. die  $\Psi$ -Funktion beschränkt ist, erhält man eine *robuste Schätzfunktion*. Andernfalls ist sie nicht robust.

Mit  $\rho(v_i) = v_i^2 / 2$  bzw.  $\Psi(v_i) = v_i$  erhält man aus (7.3.7) die bekannten Normalgleichungen der MdkQ (6.2.4). Die  $\Psi$ -Funktion ist in diesem Fall nicht beschränkt, die Schätzung demzufolge nicht robust. Ein (grosser) grober Fehler führt in jedem Fall zu unbrauchbaren, willkürlichen Schätzergebnissen.



## 8. Eigenschaften robuster Schätzverfahren

---

### 8.1 Allgemeines

In der Literatur der Statistik wird häufig zwischen den beiden Eigenschaften *resistent* und *robust* unterschieden. Statistische Verfahren sind *resistent*, wenn sie unempfindlich gegen Veränderungen der Daten sind. Diese Methoden sind vollumfänglich datenorientiert, sie dienen vorwiegend der Datenanalyse und diagnostischen Zwecken. Demgegenüber ist ein Schätzverfahren *robust*, wenn es *resistent* ist und zusätzlich theoretisch begründete Schätzkriterien erfüllt.

Die für robuste Schätzverfahren wünschbaren Eigenschaften sind in CASPARY [1988] detailliert beschrieben.

- a) Ein Schätzer soll *Verteilungsrobust* sein. Dies bedeutet, dass ein Schätzer möglichst wenig an Effizienz in der Nachbarschaft des stochastischen Modells, für das er besonders geeignet ist, verlieren soll.
- b) Ein Schätzer soll *Datenrobust* sein. Der Schätzer soll auch dann noch zuverlässige Ergebnisse nahe den „wahren“ zu schätzenden Parametern liefern, wenn die Daten lokale Ungenauigkeiten, Rundungseffekte und grobe Fehler enthalten. Die Ergebnisse sollen also möglichst stark von den „guten“ und möglichst wenig von den „schlechten“ Daten beeinflusst werden.
- c) Ein Schätzer soll *Modellrobust* sein. Dies bedeutet, dass die geschätzten Parameter hauptsächlich auf den modellkonformen Daten basieren sollen, der Einfluss von Modellschwächen soll gedämpft werden.
- d) Ein Schätzverfahren soll so beschaffen sein, dass die „guten“ Beobachtungen durch kleine Verbesserungen, die „schlechten“ Beobachtungen durch grosse Verbesserungen kenntlich gemacht werden. Grobe Fehler und Modellschwächen sollen klar ersichtlich werden. CASPARY [1988] bezeichnet dies als *Trennfähigkeit* eines Schätzverfahrens.
- e) Ein robuster Schätzer soll bei korrekten Modellannahmen und „fehlerfreien“ Beobachtungen nahezu optimale Ergebnisse liefern.

Natürlich ist es sehr schwierig, alle diese Eigenschaften gleichzeitig zu erfüllen und es gilt, je nach gestelltem Problem, die Erfüllung der einen oder anderen Eigenschaft höher zu bewerten.

Diese zu erreichenden Eigenschaften können in 3 Hauptzielen zusammengefasst werden:

- a) Das Schätzverfahren soll einen hohen *Bruchpunkt* aufweisen (vgl. Kap. 8.3). Als Bruchpunkt wird der Anteil an gerade noch tolerierten groben Fehlern bezeichnet, bevor das Schätzverfahren „zusammenbricht“ und vollkommen unzuverlässig wird [HAMPEL 1980].
- b) Die Schätzfunktion soll eine kontinuierliche, überall beschränkte *Einflussfunktion* (vgl. Kap. 7.3.2) haben, damit die groben Fehler keinen dominierenden Einfluss auf die Schätzungen erhalten.
- c) Für gute Daten soll eine möglichst hohe *Effizienz* (vgl. Kap. 5.1.5) erreicht werden.

Zwischen der Robustheit eines Schätzers und dessen Effizienz gilt es, einen möglichst guten Kompromiss zu schliessen.

Bei eindimensionalen Parameterschätzungen ist es einfach, einen Bruchpunkt von nahezu 50% zu erreichen. Bei der mehrdimensionalen Parameterschätzung, z. B. der Ausgleichung geodätischer Netze, ergeben sich erhebliche Probleme. Zwar wurden Methoden mit einem derart hohen Bruchpunkt entwickelt, doch sind diese aufwendig zu berechnen. Zudem muss in Anwendung der geodätischen Praxis nicht mit 50% groben Fehlern (auch nicht lokal) gerechnet werden, so dass ein derart hoher Bruchpunkt für ein Schätzverfahren der geodätischen Ausgleichsrechnung nicht zwingend angestrebt werden muss.

## 8.2 Hebelbeobachtungen

Als Hebelbeobachtung werden definitionsgemäss Daten bezeichnet, die aufgrund ihrer Geometrie, die sich im Vektor  $\bar{a}_i$  der Verbesserungsgleichungen

$$v_i = \bar{a}_i \bar{x} - l_i$$

mit

$$\bar{a}_i = [a_{i1}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}] \quad \text{i-te Zeile der A-Matrix}$$

ausdrückt, weit entfernt von der Masse der übrigen Daten liegen.

Die Hebelproblematik wurde zuerst in der Theorie der einfachen linearen Regression (vgl. Kap. 6.2) untersucht. Daher stammt die oft verwendete Bezeichnung *Hebelpunkte* (*leverage points*), deren Bedeutung in diesem speziellen Fall sehr anschaulich illustriert werden kann:

Als Hebelpunkte werden in diesem Fall Punkte bezeichnet, deren Ordinate  $a_{i2}$  deutlich vom Schwerpunkt der Ordinaten  $a_{i2}$  der übrigen Punkte abweicht (vgl. Abb. 8.1) und die somit einen sehr grossen Einfluss auf die Schätzung ausüben. [vgl. HUBER 1977]

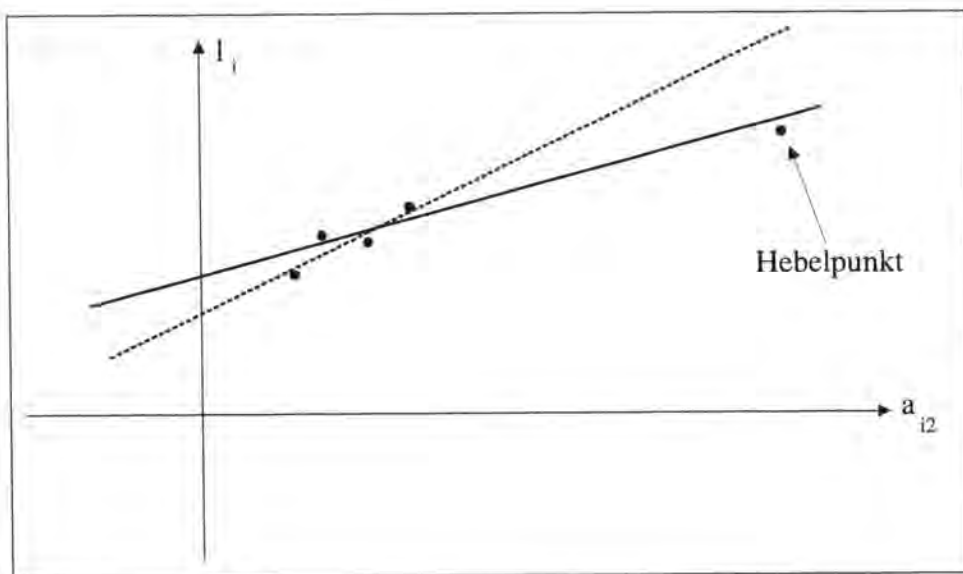


Abb. 8.1: Einfluss einer Hebelbeobachtung (Hebelpunkt) am Beispiel der linearen Regression

Bei  $u$ -dimensionalen Ausgleichsproblemen, bei denen die Parameterschätzung kein 2-dimensionales, punktbezogenes Problem darstellt, ist die Bezeichnung *Hebelbeobachtung* sinnvoller als die Bezeichnung Hebelpunkt.

Verallgemeinert bezeichnet man eine Beobachtung  $l_i$  als Hebelbeobachtung, wenn ihr Wert  $h_{ii}$  auf der Diagonalen der Projektionsmatrix  $H$  (vgl. 6.2.8) gross ist [HUBER 1977 / 1981]. Bei  $n$  Beobachtungen und  $u$  Unbekannten erhält man mit (6.2.12) den Mittelwert  $\bar{h} = u/n$ . Da stets  $0 \leq h_{ii} \leq 1$  gilt, sind grosse Werte  $h_{ii}$  solche, die deutlich grösser als  $u/n$  sind und in der Nähe von 1 liegen.

Anders ausgedrückt sind Beobachtungen mit einem geringen Redundanzanteil  $z_i$  (gem. 6.2.14) Hebelbeobachtungen (vgl. Bsp., Tab. 8.1). Sie sind durch andere Beobachtungen nur schwach kontrolliert, womit grobe Fehler in diesen Beobachtungen sehr schwer zu lokalisieren sind

und normalerweise in ihrem vollen Umfang in die Parameterschätzung eingehen (vgl. Tab. 8.2). Andererseits haben gute Hebelbeobachtungen einen starken positiven Einfluss auf das Schätzergebnis.

Veranschaulichung:

Der Einfluss eines groben Fehlers  $\Delta l_i$  in der  $i$ -ten Beobachtung  $l_i$  (vgl. 15.1.4) auf die Verbesserungen lässt sich mit der Beziehung (6.2.7) wie folgt beschreiben:

$$\Delta \vec{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_i \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{bmatrix} = [H - E]_i \Delta \vec{l}_i = \begin{bmatrix} h_{i1} \\ \vdots \\ h_{ii} - 1 \\ \vdots \\ h_{in} \end{bmatrix} \Delta l_i \quad (8.2.1)$$

mit  $[H - E]_i$  sei die  $i$ -te Zeile der  $[H - E]$ -Matrix (6.2.11) bezeichnet.

Aus dieser Beziehung ist ersichtlich, dass sich bei einem  $h_{ii}$  in der Nähe von 1 ein grober Fehler in der  $i$ -ten Beobachtung nicht bei der  $i$ -ten Verbesserung bemerkbar macht, sondern in anderen Verbesserungen  $v_k$  mit entsprechend grossem Koeffizient  $h_{ik}$  [HUBER 1981].

Dieser Sachverhalt ist grundsätzlich schon lange bekannt. Er hat zu Entwicklungen verschiedener alternativer Lösungen dieses Problems geführt:

- Die *geodätischen Beobachtungspläne* werden bezüglich Netzdesign und stochastischem Modell (durch geeignete Instrumentenwahl) *optimiert*, so dass die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Schätzung der Parameter den Anforderungen entsprechend sichergestellt werden kann. So wird unter anderem in den Richtlinien des Kantons Aargau [WICKI 1996] bestimmt, dass  $z_i$ -Werte unter 25% nur akzeptiert werden, wenn die äussere Zuverlässigkeit der Koordinaten der Neupunkte (vgl. Kap. 15.1.5) den Toleranzvorschriften entspricht.
- Durch die Einführung einer zusätzlichen „Gewichtsmatrix“ wird dafür gesorgt, dass alle Beobachtungen den gleichen Hebelwert  $h_{ii} = u/n = \text{konst.}$  erhalten. Das Modell wird somit willkürlich geändert, um Hebelbeobachtungen zu beseitigen. Dieses Verfahren, das ursprünglich für diagnostische Zwecke geschaffen wurde, findet heute in der Geodäsie unter dem Namen *balancierte Ausgleichung* Verwendung (vgl. Kap. 9.4.2).
- Verschiedene Verfahren versuchen, bei grossen Verbesserungen in Hebelbeobachtungen deren Einfluss auf die Schätzung durch die Einführung von Gewichten zu reduzieren (vgl. *modifizierte M-Schätzer*, Kap. 9.4.1).

- Weitere Verfahren minimieren die Residuen auf der Basis des *Medianes*. Ein Beispiel dieser Art Schätzer ist der LMS-Schätzer, der in Kap. 9.4.3 beschrieben wird.

Es ist jedoch nicht zwingend, dass Hebelbeobachtungen kleine Werte der  $z_i$  aufweisen. Bilden nämlich mehrere Hebelbeobachtungen eine Gruppe, dann erhöht sich ihr  $z_i$  und die Hebelbeobachtung wird maskiert [ROUSSEEUW, LEROY 1987] (vgl. Tab 8.3).

Maskierte Beobachtungen können in geodätischen Netzen häufig auftreten, wenn beispielsweise eine Beobachtung mehrmals nicht unabhängig wiederholt wird.

Zur Illustration der obigen Aussagen das folgenden Beispiel:

Gemessen werden die Distanzen  $a$ ,  $b$  und  $c$ , gegeben sind die Koordinaten der drei Festpunkte, bestimmt werden sollen die Koordinaten des Neupunktes  $N$  (vgl. Abb. 8.2).

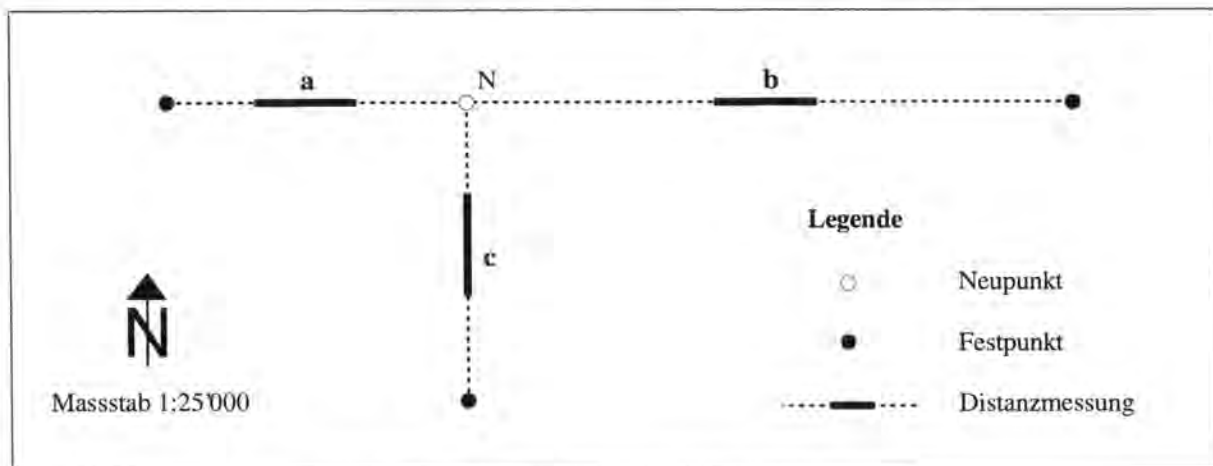


Abb. 8.2: Beispiel einer Hebelbeobachtung

Als Ergebnis erhalten wir, unter Annahme der aufgeführten Standardabweichung  $\sigma_i$ , die folgenden Resultate (Redundanzanteile  $z_i$  der Distanzmessungen, äussere Zuverlässigkeit  $NA$ ,  $NB$  (vgl. Kap. 15.3.2) und Koordinaten  $Y$ ,  $X$  des Neupunktes  $N$ ):

Distanz	$\sigma_i$ [mm]	$z_i$ [%]	Punkt N		
a	8	31	Koordinaten:	Y [m]	601'000.000
b	12	69		X [m]	200'000.000
c	8	0	äussere	NA [mm]	$\infty$
			Zuverlässigkeit:	NB [mm]	51.4

Tab. 8.1: Resultate

Die gemessene Distanz  $c$  ist demzufolge vollständig unkontrolliert und ist definitionsgemäss eine Hebelbeobachtung. Die unendlich grosse äussere Zuverlässigkeit in Nord-Süd-Richtung des Neupunktes besagt, dass ein grober Fehler in der betreffenden Beobachtung (Distanz  $c$ ) vollen Einfluss auf das Resultat nehmen kann.

Wird ein grober Fehler von 10 m in die Beobachtung  $c$  eingeführt, so bleiben die  $z_i$  unverändert, die Verbesserungen  $v_i$  der Distanzmessungen und die Koordinaten des Neupunktes präsentieren sich dann wie folgt:

Distanz	$v_i$ [mm]	Punkt N		
a	23	Koordinaten:	Y [m]	600'999.973
b	52		X [m]	200'010.000
c	0			

Tab. 8.2: Resultate mit einem groben Fehler in der Distanz  $c$

Die Verbesserungen der "fehlerfreien" Beobachtungen werden vergrössert, die falsche Beobachtung bleibt unverbessert. Der Fehler geht unentdeckt und in vollem Umfang in die X-Koordinate des Neupunktes ein.

Wird die Distanz  $c$  doppelt gemessen, so wird die Hebelbeobachtung  $c$  maskiert, was sich an der Erhöhung des Redundanzanteiles  $z_i$  zeigt:

Distanz	$\sigma_i$ [mm]	$z_i$ [%]	äussere Zuverlässigkeit des Punktes N	
a	8	31	NA [mm]:	51.4
b	12	69	NB [mm]:	29.1
c (1. Mess.)	8	50		
c (2. Mess.)	8	50		

Tab. 8.3: Resultate bei doppelter Messung der Distanz  $c$

Ist die Wiederholungsmessung der Distanz  $c$  unabhängig von der 1. Messung, so erfolgt eine Kontrolle dieser Hebelbeobachtung. Der in der 1. Messung der Distanz  $c$  eingeführte grobe Fehler von 10 m wird in den Verbesserungen der Distanzmessungen ersichtlich. Die Redun-

danzanteile  $z_i$  der Distanzmessungen und die äussere Zuverlässigkeit des Neupunktes bleiben unverändert

Distanz	$v_i$ [mm]	Punkt N	
a	6	Koordinaten:	Y [m] 600'999.993
b	13		X [m] 200'004.975
c (1. Mess.)	-5025		
c (2. Mess.)	4975		

Tab. 8.4: Resultate mit einem groben Fehler in der 1. Distanz c

Falls jedoch bei beiden Distanzmessung c der gleiche grobe Fehler gemacht wird (z.B. Punktverwechslung), wird er maskiert und kann anhand der Verbesserungen wiederum nicht entdeckt werden.

### 8.3 Bruchpunkt

Der Bruchpunkt quantifiziert den Grenzwert des kleinsten Prozentsatzes von Ausreissern, der eine Schätzung durch das Liefern falscher Werte zusammenbrechen lässt.

Bei eindimensionalen Schätzungen ist es relativ einfach, den Bruchpunkt zu bestimmen. So hat z.B. das arithmetische Mittel (7.2.3) einen Bruchpunkt von 0%, der Median (7.2.7) erreicht den höchst möglichen Wert von 50%. Bei einem Überschreiten dieses Wertes ist der Anteil an groben Fehler grösser als die „korrekten“ Beobachtungen.

In der Ausgleichsrechnung der Geodäsie werden u-dimensionale Parameterschätzungen durchgeführt. Die Wirkung grober Fehler ist nicht nur vom Schätzverfahren, sondern auch von der Geometrie (A-Matrix), vom stochastischen Modell (P-Matrix) und von der lokalen Verteilung der groben Fehler abhängig. Somit ist auch die Angabe des Bruchpunktes eines Schätzers ohne Berücksichtigung der Geometrie, der Gewichtung und der lokalen Verteilung der groben Fehler normalerweise nicht möglich, ausser ein Schätzer hat einen Bruchpunkt von 0%.

Für robuste M-Schätzer wie z.B. den Huber-Schätzer (vgl. Kap. 9.3.1) oder den L1-Norm-Schätzer (vgl. Kap. 9.2.2) ist es nicht möglich, grobe Fehler in Hebelpunkten zu lokalisieren. Diese Schätzer haben also streng genommen einen Bruchpunkt von 0%, obwohl natürlich grobe Fehler, die sich nicht in Hebelbeobachtungen befinden, lokalisiert werden können [ROUSSEUW, LEROY 1987].

Bessere Resultate liefern die modifizierten M-Schätzungen (vgl. Kap. 9.4.1), in Abhängigkeit der Wahl der Gewichte. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass die Teilredundanzen  $z_i$  für die Hebelbeobachtungen klein sind oder sich zumindest von den übrigen Teilredundanzen unterscheiden, also keine Maskierung auftritt. Ist dies nicht der Fall, sind grobe Fehler ebenfalls nicht lokalisierbar.

Ähnlich verhält es sich bei Verwendung einer balancierten Ausgleichung (vgl. Kap. 9.4.2), bei der ebenfalls grobe Fehler in maskierten Hebelbeobachtungen nicht aufgedeckt werden können [KOCH 1996].

Daher wurden Schätzer entwickelt, die einen Bruchpunkt von gegen 50% aufweisen. Einer dieser Schätzer ist der Least Median Square. Diese Schätzer haben den grossen Nachteil, dass sie sehr rechenintensiv sind (vgl. Kap. 9.4.3).

In [Koch 1996] wird anhand verschiedener Beispiele aufgezeigt, mit welchem Beobachtungsverfahren bei verschiedenen Kombinationen von Hebelbeobachtungen grobe Fehler lokalisiert werden können.



---

## 9. Robuste Schätzfunktionen

---

### 9.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden robuste Schätzverfahren, die für die Lösung geodätischer Aufgaben Verwendung finden, näher dargestellt. Diese Zusammenstellung, die sich beinahe beliebig verlängern liesse, beschränkt sich auf die wichtigsten Schätzverfahren.

### 9.2 Ls-Norm-Schätzer

Als naheliegende Lösung kann eine Verlustfunktion  $\rho(v)$  als beliebige Ls-Norm gewählt werden:

$$\rho(v_i) = |v_i|^s \quad \text{mit } 1 \leq s \leq \infty \quad (9.2.1)$$

Mit der Ableitung nach der i-ten Verbesserungsgleichung erhält man für die  $\Psi$ -Funktion:

$$\Psi(v_i) = s v_i |v_i|^{s-2} \quad (9.2.2)$$

und für die Normalgleichungen mit (7.3.5):

$$\sum_{i=1}^n v_i |v_i|^{s-2} a_{ij} = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u) \quad (9.2.3)$$

Aus der Beziehung (9.2.2) wird ersichtlich, dass die  $\Psi$ -Funktion nur für  $1 \leq s < 2$  beschränkt ist und somit nur in diesem Bereich robuste Schätzungen erreicht werden.

Die beiden Spezialfälle für  $s = 1$  und  $s = 2$  seien im folgenden gesondert dargestellt.

### 9.2.1 L2-Norm-Schätzung

Für den (nicht robusten) Fall  $s = 2$  erhält man aus (9.2.1) und (9.2.2) für die Verlust- und  $\Psi$ -Funktion:

$$\rho(v_i) = v_i^2 \quad (9.2.4)$$

$$\Psi(v_i) = 2v_i \quad (9.2.5)$$

Mit (9.2.3) folgt für die Normalgleichungen die für die *MdkQ* bekannte Beziehung (vgl. 6.2.4)

$$\sum_{i=1}^n v_i a_{ij} = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u) \quad (9.2.6)$$

bzw.

$$A^T \bar{v} = \bar{0} \quad (9.2.7)$$

Die  $\Psi$ -Funktion (9.2.5) ist nicht beschränkt (vgl. Abb. 9.1). Somit ist die Parameterschätzung nach der *MdkQ*, wie bekannt, nicht robust.

Der Sonderfall  $s = 2$  mit nur einer Unbekannten  $x_j = \bar{x}$  und  $a_{ij} = 1$  für  $(i = 1, \dots, n)$  überführt (9.2.6) mit (6.2.2) in das *arithmetische Mittel*:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i &= \sum_{i=1}^n (\bar{x} - l_i) = \bar{x} n - \sum_{i=1}^n l_i = 0 \\ \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n} \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

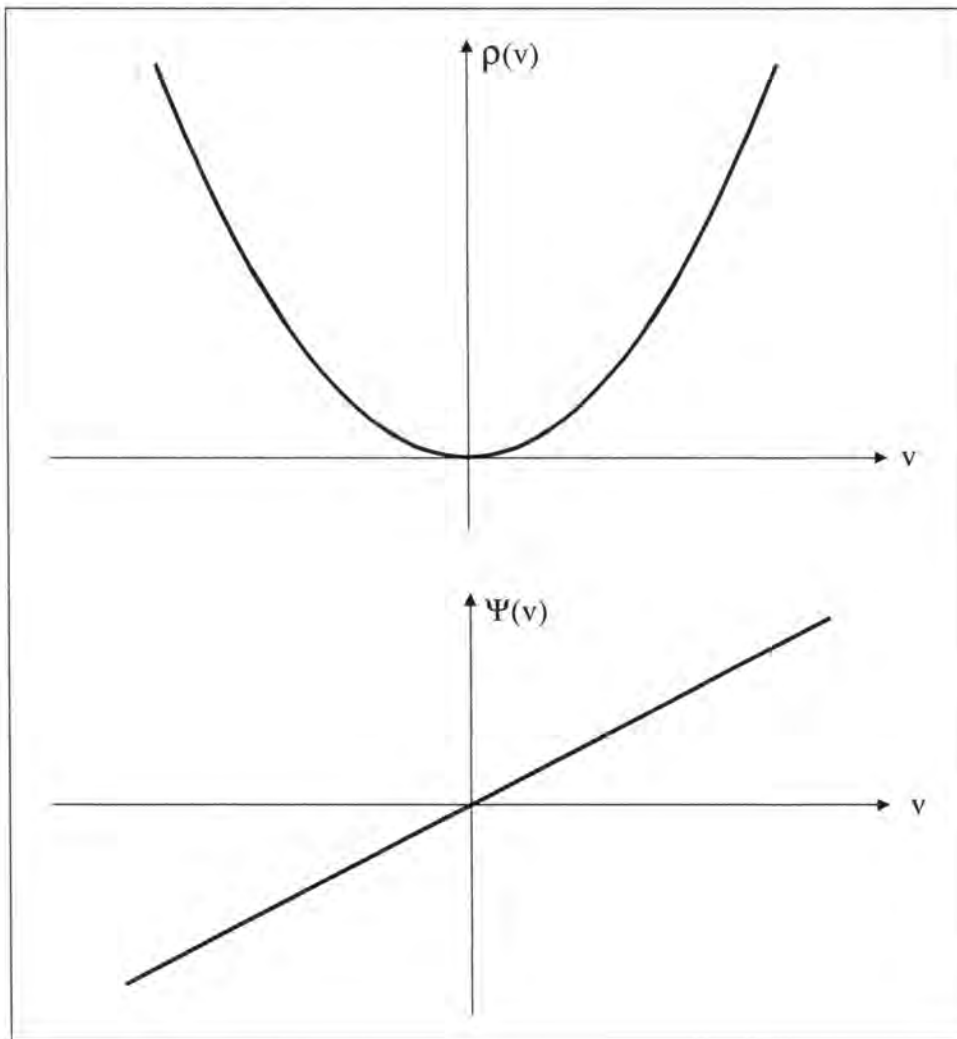


Abb. 9.1:  $\rho$ - und  $\Psi$ -Funktion der L2-Norm-Schätzung (MdkQ)

### 9.2.2 L1-Norm-Schätzung

Bei  $s = 1$  erhält man mit (9.2.1) die in der Geodäsie schon häufig untersuchte L1-Norm-Schätzung.

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \sum_{i=1}^n |v_i| = \min \quad (9.2.9)$$

Die  $\Psi$ -Funktion ergibt sich aus (9.2.2) zu

$$\Psi(v_i) = \text{sign}(v_i) \quad (9.2.10)$$

Diese Funktion ist beschränkt und die Schätzung damit robust, sie findet in der Geodäsie häufig Anwendung bei der Suche nach groben Fehlern [vgl. KAMPMANN 1986 oder KAMPMANN 1989].

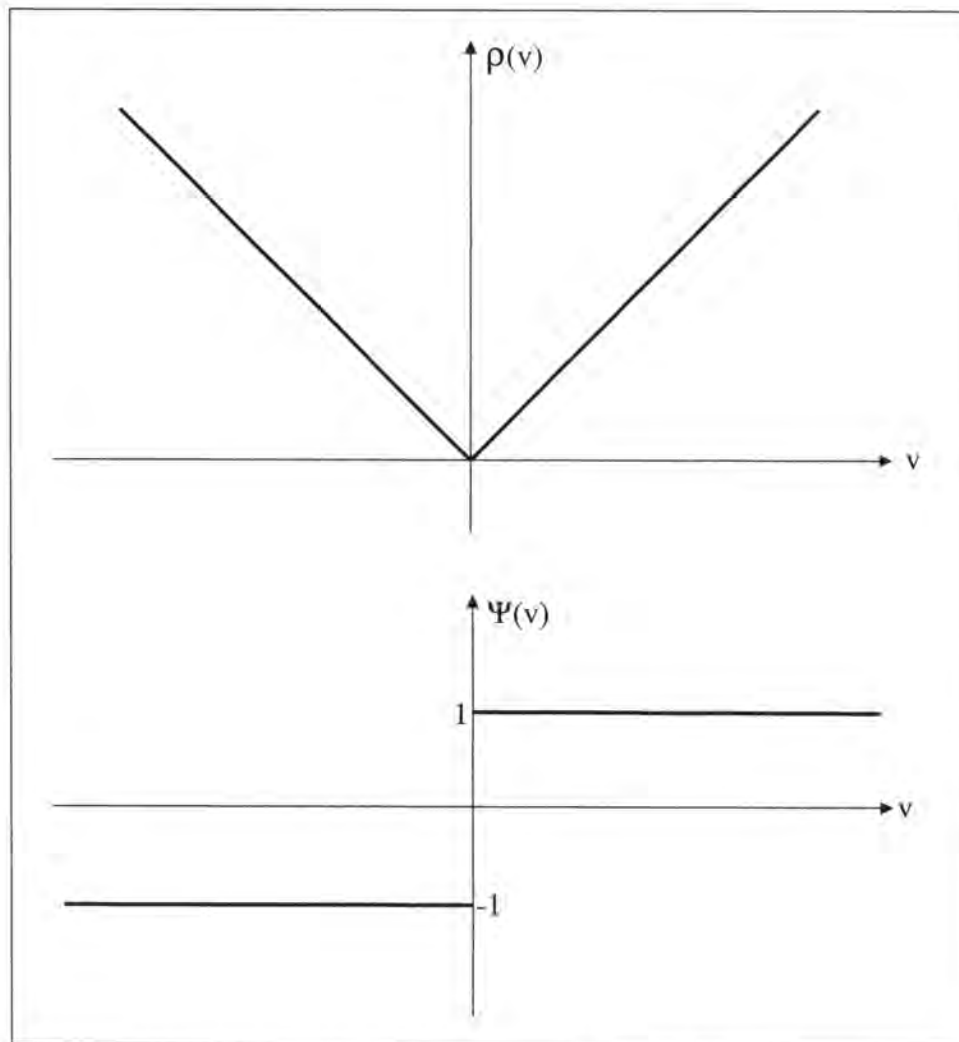


Abb. 9.2:  $\rho$ - und  $\Psi$ -Funktion des L1-Norm-Schätzers

Der Sonderfall  $s = 1$  mit nur einer Unbekannten  $x_j = \tilde{x}$ , und  $a_{ij} = 1$  für  $(i = 1, \dots, n)$  überführt (9.2.3) mit (6.2.2) in:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\tilde{x} - l_i}{|\tilde{x} - l_i|} = \sum_{i=1}^n \text{sign}(\tilde{x} - l_i) = 0 \quad (9.2.11)$$

Diese Summe wird zu 0, wenn die Differenz  $(\bar{x} - l_i)$  ebenso häufig positiv wie negativ wird. Ordnet man die Daten derart, dass  $(l_{(1)} \leq l_{(2)} \leq \dots \leq l_{(n)})$  gilt, so erhält man für die Unbekannte  $\bar{x}$  die *Medianschätzung* mit

$$\begin{aligned} \bar{x} &= l_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} && \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \bar{x} &= \frac{\left( l_{\left(\frac{n}{2}\right)} + l_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right)}{2} && \text{falls } n \text{ gerade} \end{aligned} \tag{9.2.12}$$

Beispiel:

$l_{(i)}$	3	4	<b>5</b>	7	7
$\text{sign}(\bar{x} - l_i)$	-	-	<b>0</b>	+	+

### 9.3 M-Schätzer

#### 9.3.1 Huber-Schätzer

Die Maximum-Likelihood-Schätzung für die Verteilung F der Messfehler

$$F = (1 - \epsilon)G + \epsilon S \tag{9.3.1}$$

$$G \sim N(0, \sigma)$$

führt zum Huber-Schätzer [HUBER 1964].

G ist dabei die Stammverteilung der Messfehler, S eine Störverteilung (z.B. die Verteilung der groben Fehler) und  $\epsilon$  die (meist geringe) Wahrscheinlichkeit, mit der die störenden Messfehler auftreten.

Die daraus resultierende stetige und konvexe Verlustfunktion ist relativ einfach zu berechnen und weist bei entsprechender Wahl von  $\bar{c}$  gute robuste Eigenschaften auf.

$$\rho_{\bar{c}}(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} v_i^2 & \text{für } |v_i| < \bar{c} \\ \bar{c}|v_i| - \frac{1}{2} \bar{c}^2 & \text{für } |v_i| \geq \bar{c} \end{cases} \quad (9.3.2)$$

bzw.

$$\Psi_{\bar{c}}(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{für } |v_i| < \bar{c} \\ \text{sign}(v_i) \bar{c} & \text{für } |v_i| \geq \bar{c} \end{cases} \quad (9.3.3)$$

Die  $\Psi$ -Funktion hat innerhalb der Grenzen  $[-\bar{c}, +\bar{c}]$  eine konstante Steigung, ausserhalb des Intervalls ist die Steigung = 0. Die Grösse von  $\bar{c}$  kann je nach der erwarteten Grösse der groben Fehler gewählt werden.

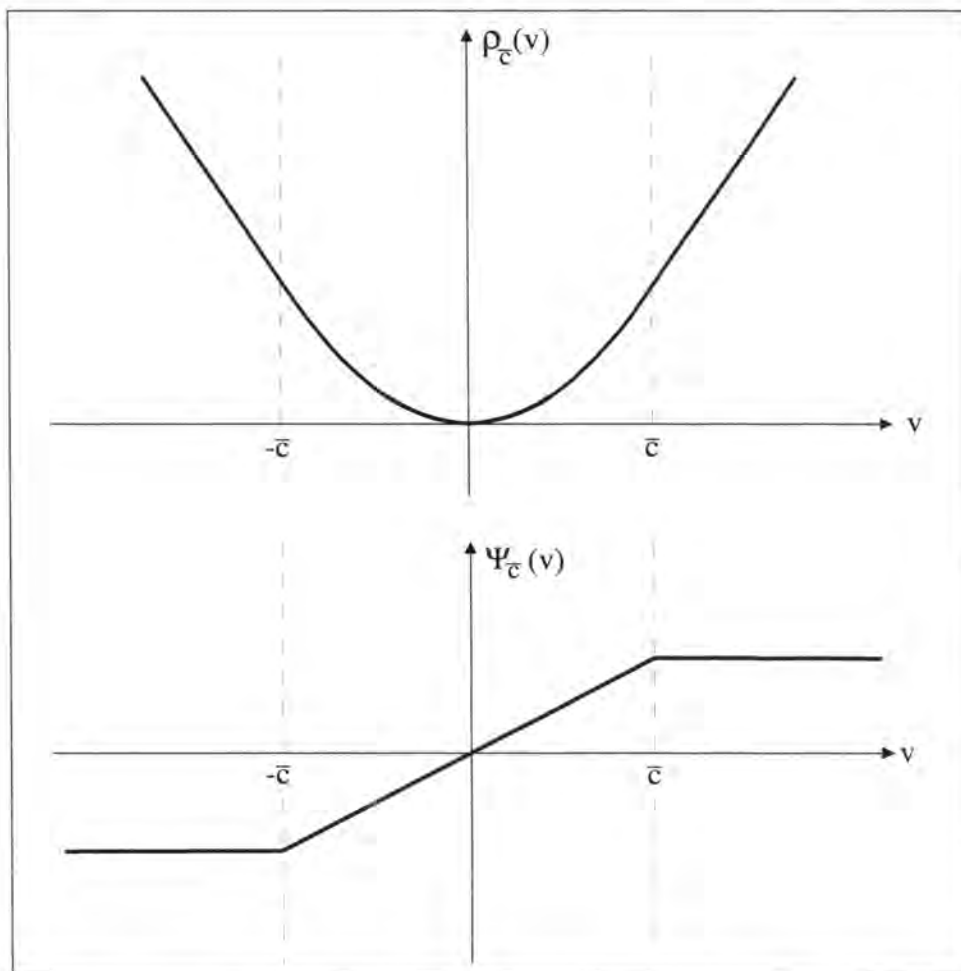


Abb. 9.3:  $\rho$ - und  $\Psi$ -Funktion des Huber-Schätzers

Zur Illustration der Bedeutung der Verteilung (9.3.1) und der Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeit  $\epsilon$  und dem Grenzwert  $\bar{c}$  nehmen wir an, die Stammverteilung  $G$  sei standard-

normalverteilt  $G=\Phi$ . Somit erhält man für die Dichtefunktion des Huber-Schätzers [HUBER 1981]:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} & \text{für } |z| < \bar{c} \\ \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\bar{c}^2 - |z|\bar{c}}{2}} & \text{für } |z| \geq \bar{c} \end{cases} \quad (9.3.4)$$

Die Beobachtungsfehler sind somit mit der Wahrscheinlichkeit  $(1-\varepsilon)$  standardnormalverteilt (vgl. (5.1.8)), ein Teil der Fehler mit der Wahrscheinlichkeit  $\varepsilon$  exponentiell verteilt (vgl. (5.1.9)).

Zwischen  $\varepsilon$  und  $\bar{c}$  besteht die Beziehung [HUBER 1981]:

$$\frac{2\phi(\bar{c})}{\bar{c}} - 2\Phi(-\bar{c}) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad (9.3.5)$$

mit  $\phi = \Phi'$ : Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Die Maximum-Likelihood-Schätzung für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\bar{c} \rightarrow \infty$ ) führt zur L2-Norm-Schätzung (MdkQ) (vgl. Kap. 9.2.1), für  $\varepsilon \rightarrow 1$  ( $\bar{c} \rightarrow 0$ ) zur L1-Norm-Schätzung (vgl. Kap. 9.2.2).

### 9.3.2 Hampel-Schätzer

Beim auf HAMPEL zurückgehenden Schätzer ist charakteristisch, dass der Einfluss der Beobachtungen auf die unbekannt Parameter bis zu einem Grenzwert  $\bar{c}_1$  linear zunimmt, danach bis zu einem zweiten Grenzwert einen konstanten Einfluss ausübt, anschliessend bis zu einem dritten Grenzwert linear abnimmt und dann ohne Einfluss bleibt (vgl. Abb. 9.4).

Die  $\Psi$ -Funktion lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\Psi(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{für } |v_i| \leq \bar{c}_1 \\ \text{sign}(v_i)\bar{c}_1 & \text{für } \bar{c}_1 < |v_i| \leq \bar{c}_2 \\ \frac{\bar{c}_1(v_i - \bar{c}_3 \text{sign}(v_i))}{(\bar{c}_2 - \bar{c}_3)} & \text{für } \bar{c}_2 < |v_i| \leq \bar{c}_3 \\ 0 & \text{für } \bar{c}_4 < |v_i| \end{cases} \quad (9.3.6)$$

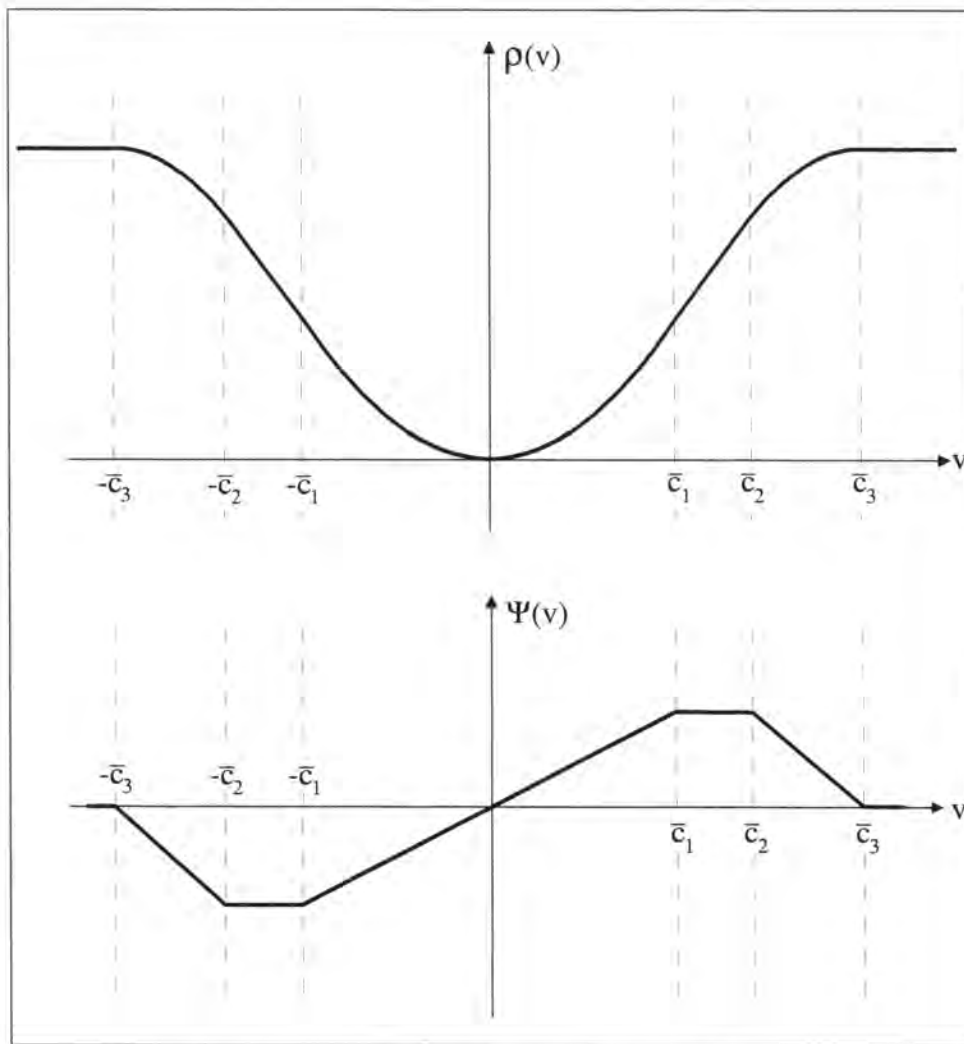


Abb. 9.4:  $\rho$ - und  $\Psi$ -Funktion des Hampel-Schätzers

## 9.4 Robuste Schätzer bei groben Fehlern in Hebelbeobachtungen

In diesem Kapitel wird eine kleine Auswahl an Schätztypen aufgeführt, die alle zum Ziel haben, mehr oder weniger resistent bezüglich grober Fehler in Hebelbeobachtungen (vgl. Kap. 8.2) zu sein. In den geodätischen Anwendungen von besonderem Interesse ist der Schweppe-Schätzer (vgl. Kap. 9.4.1), die balancierte Ausgleichung (Kap. 9.4.2) und der LMS-Schätzer (Kap. 9.4.3).



### 9.4.1 Modifizierte M-Schätzer

Um den Einfluss von groben Fehlern in Hebelbeobachtungen zu reduzieren, wird die Beziehung (7.3.5) wie folgt verallgemeinert:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \Psi_{\varepsilon}(v_i v_i) a_{ij} = 0 \quad (9.4.1)$$

Dabei ist  $\Psi_{\varepsilon}$  beispielsweise die Huber-Funktion (vgl. 9.3.3);  $\mu_i$  und  $v_i$  sind zusätzliche gegebene Gewichte.

Normalerweise sind diese zusätzlichen Gewichte eine Funktion der Distanzen  $d_i$  zwischen den  $\bar{a}_i$  und dem Mittelpunkt der Stichprobe.

$$\mu_i = \mu(d_i) \quad \text{bzw.} \quad v_i = v(d_i)$$

mit

$$d_i = \left| T \bar{a}_i^T \right| = \sqrt{(\bar{a}_i^T T^T T \bar{a}_i^T)} \quad (9.4.2)$$

Die  $\bar{a}_i$  entsprechen der  $i$ -ten-Zeile der A-Matrix, die Matrix T ist eine  $(u \times u)$  - Transformationsmatrix, die so bestimmt wird, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^n g(d_i) T \bar{a}_i^T (T \bar{a}_i^T)^T = E \quad (9.4.3)$$

bzw.

$$T A^T G A T^T = E \quad (9.4.4)$$

E ist die Einheitsmatrix, G ist eine  $(n \times n)$ -Diagonalmatrix mit den Elementen  $g_{ii} = g(d_i)$ ,  $g(d_i)$  ist eine gegebene Funktion der  $d_i$ , z.B.  $g(d_i) = \min(1, b/d_i)$ .

Die  $\mu_i$  bzw.  $v_i$  für jedes  $\bar{a}_i$  sind wiederum eine Funktion der  $d_i$ , z.B.  $\mu_i = \mu(d_i) = \sqrt{g(d_i)}$ .

In der Literatur der robusten Statistik wurden verschiedene Kombinationen der Gewichte vorgeschlagen [HAMPEL 1986 ]:

Huber:  $\mu_i = v_i = 1 \quad \sum_{i=1}^n \Psi_{\varepsilon}(v_i) a_{ij} = 0 \quad (9.4.5)$

Mallows:  $v_i = 1$   $\sum_{i=1}^n \mu_i \Psi_c(v_i) a_{ij} = 0$  (9.4.6)

Andrews:  $\mu_i = 1$   $\sum_{i=1}^n \Psi_c(v_i v_i) a_{ij} = 0$  (9.4.7)

Hill & Ryan:  $v_i = \mu_i$   $\sum_{i=1}^n \mu_i \Psi_c(v_i \mu_i) a_{ij} = 0$  (9.4.8)

Schweppe:  $v_i = \frac{1}{\mu_i}$   $\sum_{i=1}^n \mu_i \Psi_c(v_i \frac{1}{\mu_i}) a_{ij} = 0$  (9.4.9)

Am Beispiel der einfachen linearen Regression (vgl. Kap. 6.2) sei der Effekt der folgenden drei Typen erläutert [HAMPEL 1986]:

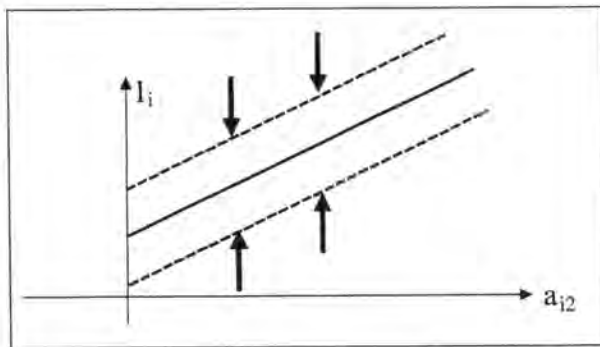


Abb. 9.5: Huber-Typ

Dieser Typ beschränkt den Einfluss von Hebelbeobachtungen nicht.

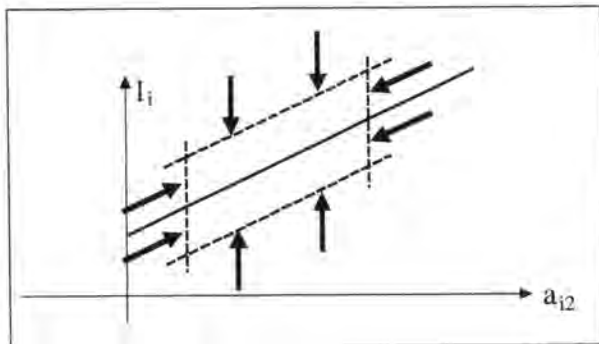


Abb. 9.6: Mallows-Typ

Dieser Typ reduziert die Hebelbeobachtungen unabhängig von der Grösse der Verbesserung. Das heisst, dass alle Beobachtungen, die überdurchschnittlich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, in ihrer Wirkung beschränkt werden (deren Gewicht wird reduziert).

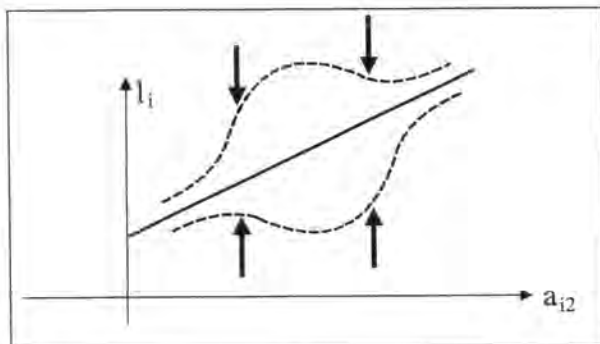


Abb. 9.7: Schweppe-Typ

Dieser Typ reduziert eine Hebelbeobachtung in Funktion der Grösse der Verbesserung und dem  $a_{2i}$  (Design) der entsprechenden Beobachtung. Eine Reduktion der Hebelbeobachtung ergibt sich somit nur, falls die entsprechende Verbesserung gross ist.

### 9.4.2 Balancierte Ausgleichung

Um eine robuste Parameterschätzung zu erhalten, die auch Ausreißer in Hebelbeobachtungen lokalisieren kann, schlägt [KAMPMANN 1994] die balancierte Ausgleichung vor. Die Idee dieses Verfahrens besteht darin, die Beobachtungen für die Parameterschätzung derart mit zusätzlichen Gewichten zu versehen, dass die Teilredundanzen  $z_i$  oder die Diagonalelemente  $h_{ii}$  (6.2.14) identisch werden. Somit gilt:

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{(n-u)}{n} & \text{damit} & & \sum_{i=1}^n z_i &= n-u & \text{bzw.} \\ h_{ii} &= \frac{u}{n} & \text{damit} & & \sum_{i=1}^n h_{ii} &= u & (9.4.10) \end{aligned}$$

Um diese „Entgeometrisierung“ zu erreichen, wird die Ausgangsmatrix  $P$  (im homogenisierten Modell =  $E$ ) in eine Matrix  $P^*$  umgeformt, so dass eine  $H^*$ -Matrix mit den obigen Eigenschaften entsteht.

Mit den Beziehungen

$$\bar{x} = (A^T P^* A)^{-1} A^T P^* \bar{l}$$

$$\bar{v} = -(E - H^*) \bar{l}$$

können die Unbekannten und die Verbesserungen mit der L2-Schätzung bestimmt werden.

Beispiel:

Gesucht sei der Achsenabschnitt  $x_1$  und die Steigung  $x_2$  der Regressionsgeraden (vgl. Kap.6.2). Gegeben seien die 5 Koordinatenpaare  $a_{i2}/l_i = (2/3, 4/4, 6/5, 8/6, 32/2)$ .

Eine L2-Norm-Schätzung (MdkQ) führt zu  $x_1 = 4.76$  und  $x_2 = -0.07$ .

Demgegenüber resultiert für eine balancierte L2-Norm-Schätzung  $x_1 = 3.18$  und  $x_2 = 0.26$  mit den Gewichten  $p_i^* = (4.52, 11.30, 5.67, 10.00, 0.10)$ .

Durch die markante Verringerung des Gewichtes der Hebelbeobachtung (32/2) wird ein deutlich besseres Resultat erzielt (vgl. Abb. 9.8).

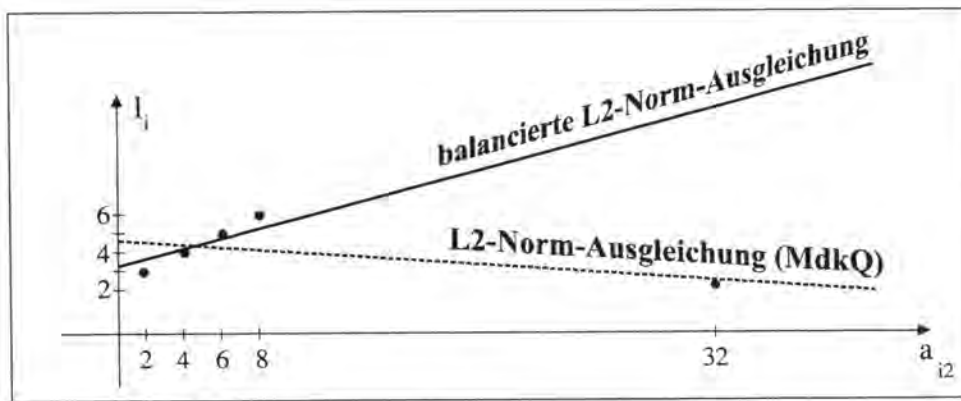


Abb. 9.8: Beispiel zur balancierten L2-Norm-Schätzung

Ein höheres Mass an Robustheit wird erreicht, wenn anstelle der L2-Schätzung die L1-Methode (vgl. Kap. 9.2.2) mit

$$\sum_{i=1}^n |v_i^*| = \sum_{i=1}^n |v_i| p_i^* = \min \quad (9.4.11)$$

angewendet wird.

Die Grundidee des Verfahrens der balancierten Ausgleichung hat eine sehr grosse Ähnlichkeit mit dem Mallows-Schätzer. Anstelle einer Beschränkung von Hebelbeobachtungen, die überdurchschnittlich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, werden alle Beobachtung auf den Mittelpunkt "zentriert".

Die Beispiele in [KOCH 1997] zeigen, dass grobe Fehler in Hebelbeobachtungen, die nicht isoliert auftreten, nicht lokalisiert werden können. Andererseits können Beobachtungen mit grossen  $z_i$  so grossen Einfluss auf die Parameterschätzung gewinnen, dass grobe Fehler in diesen Beobachtungen nicht mehr entdeckt werden.

In diesem Zusammenhang sei für den interessierten Leser auf einen in den geodätischen Fachzeitschriften publizierten Disput bezüglich der Begriffe balanciert bzw. überbalanciert verwiesen [KAMPMANN 1996, KOCH 1996].

### 9.4.3 LMS-Schätzung

Einer der wirksamsten Schätzer in Bezug auf den Bruchpunkt ist der Least-Median Square (LMS). Bei diesem Schätzer wird der Median der quadrierten Verbesserungen minimiert:

$$\text{med}(v_i^2) \rightarrow \min \quad (9.4.12)$$

Dieses Schätzverfahren wird ausführlich in [ROUSSEUW, LEROY 1987] beschrieben, eine Zusammenfassung mit einem Beispiel für eine Helmert-Transformation befindet sich in [DANUSER 1992].

Der LMS besitzt einen Bruchpunkt von nahezu 50%. Sein grosser Nachteil, der einen Einsatz in der geodätischen Netzausgleichung verhindert, ist seine sehr hohe Rechenintensivität. Beim LMS müssen für die  $n$  Beobachtungen eine Kombination  $u$ -ter Ordnung bestimmt werden, es sind also  $(n \text{ tief } u)$  Vektoren  $\bar{x}$  zu berechnen [KOCH 1996].

Bei einer kleinen Triangulationsanwendung mit  $n=50$  Beobachtungen und  $u=8$  Unbekannten erhält man:

$$\text{Anzahl Vektoren} = \binom{n}{u} = \binom{50}{8} = 536878650$$

Bei Netzen der Parzellarvermessung (LFP3-Netze) sind jedoch 2'000 Beobachtungen mit 600 Unbekannten keine Seltenheit, was zu  $10^{500}$  Vektoren führen würde.



**III. Teil**

**DAS FÜR DIE SCHWEIZERISCHE  
LANDESVERMESSUNG  
GEWÄHLTE VERFAHREN**





## 10. Einleitung

### 10.1 Geodätische Netze

Das primäre Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines robusten Schätzverfahrens für die Parameterschätzung in *geodätischen Netzen*, insbesondere für die Anwendung im Bereich der schweizerischen Landesvermessung. Durch diesen Anwendungsbereich sind bereits wesentliche Eigenschaften, die das Schätzverfahren aufweisen muss, vorgegeben.

Geodätische Netze werden gebildet aus *Punkten*, die durch ihre Koordinaten räumlich festgelegt sind und *Beobachtungen* auf oder zwischen diesen Punkten.

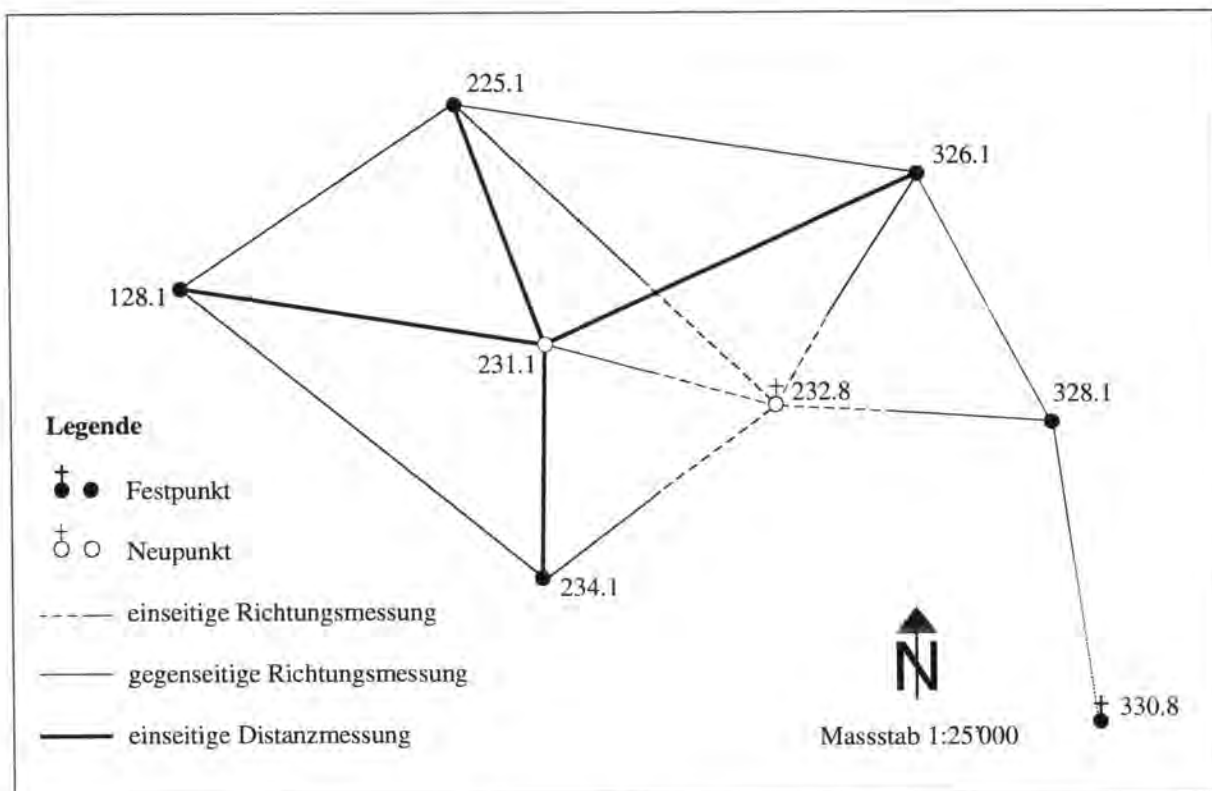


Abb. 10.1: Beispiel eines geodätischen Netzes

Diese Beobachtungen sind, je nach verwendeten Messinstrumenten, sehr verschiedener Art.

Beispielsweise sind dies:

- Richtungssätze
- Azimute
- Distanzen
- Koordinaten
- Koordinatendifferenzen
- Sätze von GPS-Koordinaten (Satellitenbeobachtungen)
- Höhenwinkel
- Höhendifferenzen

Diese Messungen werden für die Berechnung der unbekannt Parameter normalerweise *frei kombiniert*.

Die *unbekannten Parameter* sind primär die Koordinaten der Neupunkte, aber auch zusätzliche Parameter, die von den einzelnen Messtypen benötigt werden, um die Beziehung zwischen den gemessenen Grössen und dem Koordinatensystem zu erstellen. Dies sind unter anderem

- Orientierungsunbekannte bei den Richtungssätzen (vgl. Kap. 17),
- Additions- und Massstabsunbekannte bei den Distanzmessungen,
- Translationen, Rotation und Massstab bei GPS-Koordinatensätzen
- Lotabweichungen

Häufig werden die Netze getrennt nach Lage und Höhe berechnet. Diese Trennung ist bedingt durch die unterschiedlichen Bezugssysteme in der Lage (Projektionssystem oder Ellipsoid) und der Höhe (äquipotentielle Niveaufläche).

Der Standardschätzer für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen ist seit vielen Jahrzehnten die MdkQ (vgl. Kap. 6.2).

## **10.2 Eigenschaften geodätischer Messungen**

In der geodätischen Praxis sind eine Mehrzahl der Beobachtungen normalverteilt, die Anzahl der groben Fehler ist, infolge umfassender Kontrollen der Beobachtungen während den Messarbeiten und vor Beginn der Parameterschätzung, verglichen mit der Gesamtheit der Beobachtungen, gering.

Wichtig für ein Schätzverfahren in diesem Bereich ist somit, dass

- die verbleibenden groben Fehler zuverlässig lokalisiert und deren Einfluss auf das Schätzergebnis deutlich verringert wird,
- das Schätzverfahren eine möglichst hohe Effizienz bei normalverteilten Beobachtungen hat und
- bei Beobachtungsmaterial ohne grobe Fehler die praktisch gleichen Schätzergebnisse wie bei der MdkQ erreicht werden.

### 10.3 Das entwickelte Schätzverfahren (BIBER-Schätzer)

Aufgrund der in den Kapiteln 10.1 und 10.2 beschriebenen Bedingungen erwies sich aus naheliegenden Gründen ein auf den modifizierten M-Schätzern (vgl. Kap. 9.4.1) beruhendes robustes Schätzverfahren als am besten geeignet.

Das entwickelte Schätzverfahren ist eng verwandt mit dem Schweppe Schätzer. Der Vorteil dieses Schätzers liegt darin, dass er die relativ einfache Struktur des Schätzverfahrens nach Huber übernimmt und zusätzlich neben der Quantität der Verbesserung (Grösse) auch deren Qualität (Standardabweichung) berücksichtigt und dadurch der Geometrie der Messanordnung Rechnung trägt (Kap. 11).

Dieser Schätzer wird in diesem Bericht als **BIBER-Schätzer** bezeichnet. Dieser Name leitet sich ab aus dessen Struktur, die den Einfluss grober Fehler auf das Schätzergebnis mit Hilfe der standardisierten Verbesserungen begrenzt (vgl. Abb. 10.2).

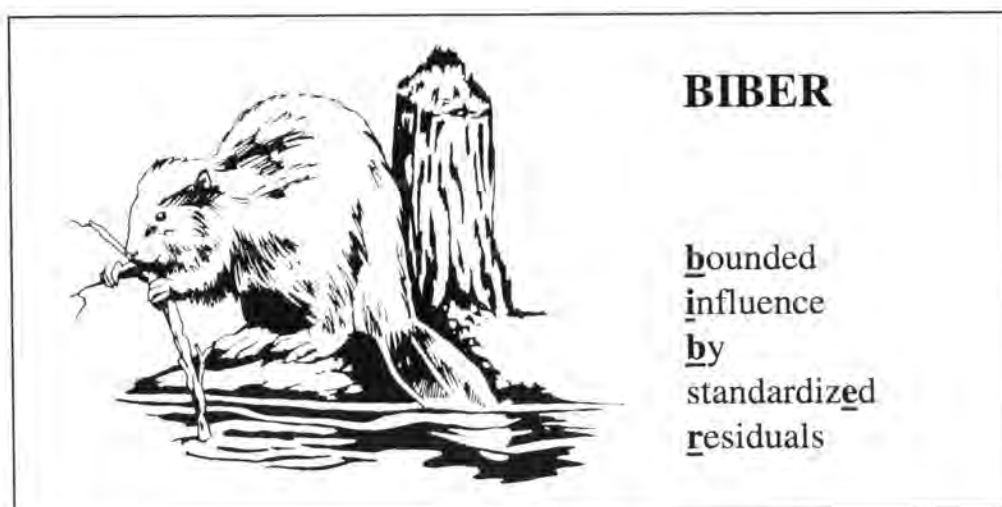


Abb. 10.2: BIBER-Schätzer

Die Gründe für die Wahl dieses Schätzers sind

- seine einfache, auf den M-Schätzern beruhende Struktur,
- seine hohe asymptotische Effizienz (vgl. 5.1.23) bei normalverteilten oder genähert normalverteilten Beobachtungen,
- seine zuverlässige Lokalisierung grober Fehler,
- seine nahezu mit der MdkQ identischen Resultate bei fehlerfreien Daten und
- die Möglichkeit der Integration in bestehende Ausgleichungsprogramme.

Gemäss den Kriterien von Caspary [vgl. Kap. 8.1] ist der gewählte Schätzer somit Verteilungsrobust, Datenrobust und Modellrobust, er hat eine hohe Trennfähigkeit und liefert bei "fehlerfreien" Beobachtungen nahezu optimale Ergebnisse.

In Kap. 12 werden 3 verschiedene Berechnungsverfahren zur Lösung dieser robusten Parameterschätzung dargestellt.

Das Kap. 18 bildet den Abschluss mit zwei Beispielen. Das Beispiel 1 zeigt den Berechnungsablauf für die drei dargestellten Berechnungsverfahren und anhand des 2. Beispiels werden die Eigenschaften des BIBER-Schätzers diskutiert.

## 10.4 Indikatoren zur Beurteilung der Resultate

Ziel einer Ausgleichung eines geodätischen Netzes ist es, die Koordinaten und Höhen der Punkte zu schätzen und den Nachweis zu erbringen, dass erstens das gewählte stochastische Modell zutrifft und zweitens die an die geschätzten Koordinaten *gestellten Anforderungen bezüglich der Qualität* erfüllt werden.

Zur Beurteilung des stochastischen Modells der Ausgleichung dienen die Standardabweichung der Gewichtseinheit (vgl. Kap. 13.1.1 bzw. 13.2.1) und die Varianzkomponenten der verschiedenen Beobachtungsgruppen (vgl. Kap. 13.1.2 bzw. 13.2.2).

Die Schätzung der zur Beurteilung der erzielten Genauigkeit notwendigen Kovarianzmatrix der Unbekannten wird in Kap. 14 beschrieben.

Das Kap. 15 ist der Theorie der Zuverlässigkeit bei der MdkQ (Kap. 15.1), deren Umsetzung beim BIBER-Schätzer (Kap. 15.2) und den verschiedenen in der schweizerischen Landesvermessung gebräuchlichen Indikatoren gewidmet.

## 10.5 Berechnungen im Programm LTOP

Gemäss Zielsetzung (vgl. Kap. 4) wurde der BIBER-Schätzer ins Programm LTOP des Bundesamtes für Landestopographie integriert. Dieser Integration, dem Ablauf der Berechnung und dem Verhalten bei numerischen Problemen ist das Kap. 16 gewidmet.

Das Programm LTOP ermöglicht verschiedene Arten der Berechnung:

- Präanalyse: Die Präanalyse ist eine Ausgleichung ohne durchgeführte Messungen. Diese Berechnung dient der Beurteilung des Netzaufbaus bezüglich Genauigkeit und Zuverlässigkeit vor den Messungen.
- provisorische Abrisse: Die provisorischen Abrisse dienen der Überprüfung der Eingaben auf ihre formale Richtigkeit. Dabei werden nur die Abrisse mit den Näherungskordinaten berechnet.
- zwangsfreies Netz: Eigenschaft einer derartigen Netzberechnung ist die minimale Verknüpfung zwischen Messungen und Koordinatensystem. Auf diese Weise können die Koordinaten eindeutig berechnet werden, ohne dass die Koordinaten der Anschlusspunkte einen Einfluss auf die Verbesserungen, die Varianzschätzung oder die standardisierten Verbesserungen haben.
- Koordinatenbeobachtungen: Gewisse Unsicherheiten in den Koordinaten der Anschlusspunkte werden im stochastischen Modell berücksichtigt, indem die Koordinaten als fiktive Beobachtungen in die Ausgleichung eingeführt werden. Je nach der gewählten Grösse der Standardabweichung a priori dieser Koordinaten wird ein mehr oder weniger zwangsfreies Netz berechnet.
- gezwängtes Netz: Die Koordinaten der Anschlusspunkte werden als fehlerfrei angenommen. Ungenauigkeiten in diesen Koordinaten führen zu Zwängen, die sich auf die ausgeglichenen Messungen, Verbesserungen und Varianzschätzungen auswirken. Diese Berechnungsart wird hauptsächlich dazu verwendet, Fehler in den Anschlusspunkten über das ganze Netz zu verteilen.

Das robuste Schätzverfahren wird primär in zwangsfreien Netzberechnungen oder in Berechnungen mit Koordinatenbeobachtungen angewendet, bedingt auch in gezwängten Netzberechnungen.

Die Häufigkeit von Hebelbeobachtungen ist in geodätischen Netzen, bedingt durch deren Struktur, bei zwangsfrei oder mit Koordinatenbeobachtungen berechneten Netzen relativ häufig (z.B. Richtungsmessung 328.1 - 330.8 in Abb. 10.1). Bei gezwängten Netzen sollten Hebelbeobachtungen nur in Ausnahmefällen auftreten.

## 10.6 Schätzung der Näherungsorientierung

Neben den Koordinaten werden im Programm LTOP, wie bereits erwähnt, auch unbekannte Parameter geschätzt, die von den einzelnen Messtypen benötigt werden, um die Beziehung zwischen den gemessenen Grössen und dem Koordinatensystem zu erstellen. Für die Orientierungsunbekannte bei Richtungssätzen wird dazu vorgängig der eigentlichen Ausgleichsrechnung ein Näherungswert bestimmt. Damit diese Näherungsorientierung auch bei groben Fehlern in den Richtungsmessungen und / oder den Näherungskordinaten genügend genau bestimmt werden kann, wurde ein sehr robustes, mit der Medianschätzung verwandtes Schätzverfahren entwickelt (Kap. 17.2). Da in diesem Verfahren auch die Gewichte mitberücksichtigt werden, wird dieser Schätzer *gewichteter "Median"* genannt.

Diese kleine Anwendung eines robusten Schätzers mit hohem Bruchpunkt ist wichtig, da damit die Konvergenz des BIBER-Schätzers deutlich verbessert werden kann.

---

## 11. BIBER-Schätzer

---

### 11.1 Mathematisches Modell

Das für die robuste Parameterschätzung in der Landesvermessung entwickelte Verfahren beruht auf dem nach Schweppe benannten M-Schätzer (vgl. 9.4.9):

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \Psi_c \left( \frac{v_i}{\mu_i} \right) a_{ij} = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u)$$

Beim BIBER-Schätzer werden als zusätzliche Gewichte  $\mu_i$  die Standardabweichungen der Verbesserungen  $\sigma_v$  gewählt.

$$\sigma_{v_i} = \sigma_0 \sqrt{(q_{vv})_{ii}} \quad (11.1.1)$$

mit  $(q_{vv})_{ii}$  als  $i$ -tes Diagonalelement der Matrix

$$Q_{vv} = E - A(A^T A)^{-1} A^T \quad (11.1.2)$$

Die zusätzlichen Gewichte sind somit nur abhängig von den (gegebenen) Gewichten der Beobachtungen und vom (gegebenen) Design des Netzes.

So erhält man aus (9.4.9):

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{v_i} \Psi_c \left( \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right) a_{ij} = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u) \quad (11.1.3)$$

Die Gewichtswahl nach Schweppe und des BIBER-Schätzers ist, wie in Kap. 12.5 gezeigt wird, nur bei homogenisierten Beobachtungen identisch.

Als Verlust- und  $\Psi$ -Funktion dieses Schätzverfahrens wird die Huber-Funktion (vgl. Kap. 9.3.1) zugrunde gelegt:

$$\rho_c \left( \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_{v_i}} v_i^2 & \text{für } \left| \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right| < c \\ \frac{c}{\sigma_{v_i}} |v_i| - \frac{1}{2} c^2 & \text{für } \left| \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right| \geq c \end{cases} \quad (11.1.4)$$

$$\Psi_c \left( \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right) = \begin{cases} \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} & \text{für } \left| \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right| < c \\ \text{sign}(v_i) c & \text{für } \left| \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right| \geq c \end{cases} \quad (11.1.5)$$

Berücksichtigt man die Beziehung (6.2.15) für die standardisierten Verbesserungen  $w_i$ , so erhält man aus (11.1.5):

$$\Psi_c \left( \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right) = \Psi_c(w_i) = \begin{cases} w_i & \text{für } |w_i| < c \\ \text{sign}(w_i) c & \text{für } |w_i| \geq c \end{cases} \quad (11.1.6)$$

Da die  $\sigma_v$  immer positiv sind, gilt:  $\text{sign}(w_i) = \text{sign}(v_i)$ .

Der Grenzwert  $c$  definiert für jede standardisierte Verbesserung  $w_i$  drei Bereiche:

$$\begin{aligned} w_i &\leq -c \\ -c &< w_i < c \\ w_i &\geq c \end{aligned} \quad (11.1.7)$$

Fällt die standardisierte Verbesserung in den mittleren Bereich, so wird die entsprechende Beobachtung gleich behandelt, wie wenn nach der MdkQ ausgeglichen würde. Andernfalls wird der Einfluss der entsprechenden Beobachtung reduziert. In der Folge werden die beiden äusseren Intervalle als „robustes Intervall“, das mittlere als „MdkQ-Intervall“ bezeichnet.

Die standardisierte Verbesserung ist bei normalverteilten Beobachtungen standardnormalverteilt mit Erwartungswert  $E(w_i) = 0$  und Standardabweichung  $\sigma(w_i) = 1$ . Der konstante Grenzwert  $c$  kann vom Benutzer, abhängig von der Güte der Beobachtungen, frei gewählt werden. Erfahrungsgemäss erweist sich ein Wert im Bereich  $2.5 \leq c \leq 4$  als sinnvoll. Dies entspricht bei normalverteilten Beobachtungen der zweieinhalb bis vierfachen Standardabweichung der  $w_i$ .



Die Beziehung (11.1.6) mit den standardisierten Verbesserungen lässt sich auch mit den Verbesserungen beschreiben:

$$\Psi_{k_i}(v_i) = \begin{cases} v_i & \text{für } |v_i| < k_i \\ \text{sign}(v_i)k_i & \text{für } |v_i| \geq k_i \end{cases} \quad (11.1.8)$$

Die Grenzwerte  $k_i$  sind für jede Verbesserung verschieden, bleiben aber während der Parameterschätzung konstant, da sie mit den  $\sigma_v$  a priori berechnet und anschliessend fest gehalten wurden (vgl. Kap. 12.4). Sie definieren ebenfalls die in (11.1.7) beschriebenen Intervalle für die Verbesserungen.

Der Grenzwert  $k_i$  trägt den Unterschieden in der Gewichtung der Beobachtungen und der Netzgeometrie Rechnung.

Für  $k_i$  gilt:

$$k_i = c \sigma_{v_i} \quad (11.1.9)$$

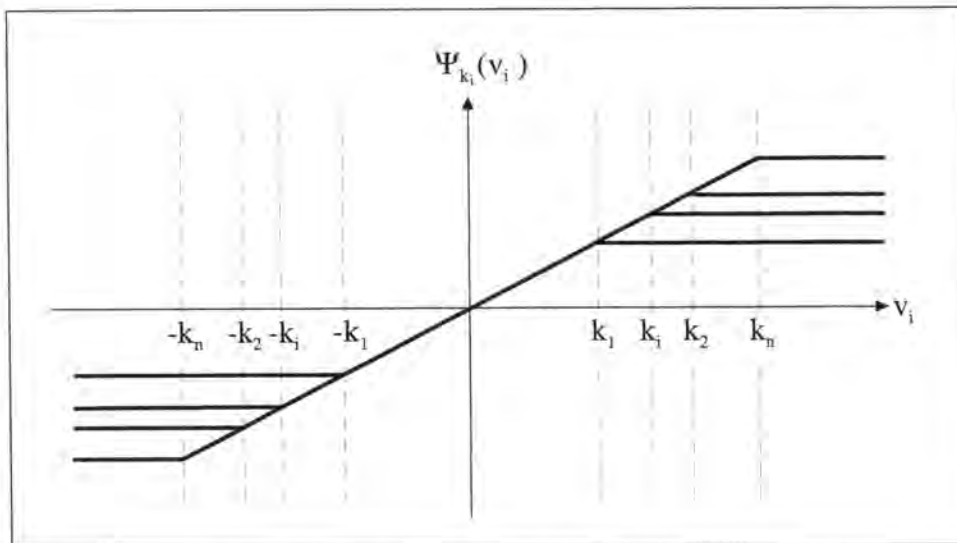


Abb. 11.1:  $\Psi$ -Funktion des BIBER-Schätzers

Zwischen den beiden  $\Psi$ -Funktionen in (11.1.6) und (11.1.8) besteht die folgenden Beziehung:

$$\Psi_{k_i}(v_i) = \sigma_{v_i} \Psi_c(w_j) \quad (11.1.10)$$

Somit erhält man aus (11.1.3):

$$\sum_{i=1}^n \Psi_{k_i}(v_i) a_{ij} = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u) \quad (11.1.11)$$

Die folgende Tabelle zeigt die wesentlichen Beziehungen zwischen homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen. Die homogenisierten Grössen sind dabei mit einem '~' gekennzeichnet,  $P_{1/2}$  ist die Transformationsmatrix (vgl. Tab. 6.1).

Beziehung	Bezeichnung
$\sigma_{\tilde{v}_i} = \sqrt{p_i} \sigma_{v_i}$	Standardabweichung der Verbesserungen
$\tilde{c} = c$	Grenzwert für die standardisierten Verbesserungen
$\tilde{k}_i = \sqrt{p_i} k_i$	Grenzwert für die Verbesserungen
$\Psi_c(\tilde{w}_i) = \Psi_c(w_i)$	$\Psi_c$ -Funktion
$\Psi_{\tilde{k}_i}(\tilde{v}_i) = \Psi_{k_i}(\sqrt{p_i} v_i)$	$\Psi_{k_i}$ -Funktion

Tab. 11.1: Vergleich von homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen

## 11.2 Verhalten bei Hebelbeobachtungen

Beobachtungen mit kleinen Redundanzanteilen  $z_i$  (6.2.14) werden definitionsgemäss (vgl. Kap. 8.2) als Hebelbeobachtungen bezeichnet.

Um grobe Fehler in Hebelbeobachtungen entdecken zu können, ist es notwendig, den Grenzwert  $\tilde{c}$  der  $\Psi$ -Funktion des Huber-Schätzers (vgl. Kap. 9.3.1) in Abhängigkeit des Vektors  $\tilde{a}_i$  (vgl. Kap. 8.2) derart zu variieren, dass er für Hebelbeobachtungen kleiner und damit die "Trennfähigkeit" des Schätzers erhöht wird.

Beim BIBER-Schätzer wird der Grenzwert

$$k_i = c \sigma_{v_i} = c \sigma_0 \sqrt{z_i} \quad (11.2.1)$$

für jede Beobachtung als Funktion des lokalen Redundanzanteils  $z_i$  (und des Gewichtes  $p_i$ ) berechnet. Bei Hebelbeobachtungen mit kleinen  $z_i$  wird somit automatisch ein kleiner Grenzwert  $k_i$  berechnet (vgl. Abb. 11.2).

Beobachtungen mit einem  $z_i = 0$  werden durch die Geometrie des Netzes nicht kontrolliert. Eine Lokalisierung grober Fehler durch den BIBER-Schätzer ist in diesem Fall nicht möglich.

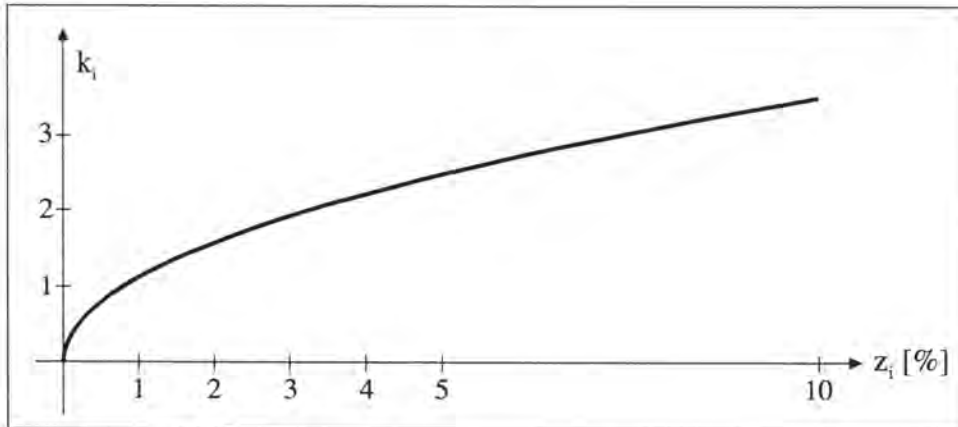


Abb. 11.2: Verhalten des Grenzwertes  $k_i$  des BIBER-Schätzers bei kleinen Redundanzanteilen  $z_i$  (für  $\sigma_0 = 1$ ,  $p_i = 0.1$ ,  $c = 3.5$ )

### 11.3 Vergleich von Schweppe- und BIBER-Schätzer

Der Vorschlag von Schweppe (vgl. z.B. [MARAZZI 1993]) für die Wahl der zusätzlichen Gewichte  $\mu_i$

$$\tilde{\mu}_{i \text{ SCHWEPPE}} = \sqrt{\tilde{z}_i} = \sqrt{1 - \tilde{h}_{ii}} \quad (11.3.1)$$

ist bei homogenisierten Beobachtungen ( $p_i = 1$ ) und  $\sigma_0 = 1$  wegen  $\sigma_{\tilde{v}_i} = \sqrt{\tilde{z}_i}$  identisch mit den zusätzlichen Gewichten des BIBER-Schätzers.

$$\tilde{\mu}_{i \text{ BIBER}} = \sigma_{\tilde{v}_i} \quad (11.3.2)$$

Wird diese Homogenisierung mittels Rücktransformation aufgehoben, erhält man für die zusätzlichen Gewichte (vgl. Tab. 6.1 und Tab. 11.1):

$$\tilde{\mu}_{i \text{ SCHWEPPE}} = \sqrt{\tilde{z}_i} = \sqrt{z_i} = \mu_{i \text{ SCHWEPPE}} \quad (11.3.3)$$

$$\tilde{\mu}_{i \text{ BIBER}} = \sigma_{\tilde{v}_i} = \sqrt{p_i} \sigma_{v_i} = \sqrt{p_i} \mu_{i \text{ BIBER}}$$

Der BIBER-Schätzer stellt somit eine *Erweiterung des Schweppe-Schätzers für  $p_i \neq 1$*  dar.

---

## 12. Berechnungsverfahren

---

Um das in (11.1.11) beschriebene, nichtlineare Gleichungssystem berechnen zu können, müssen alle Beobachtungen (bzw. deren standardisierte Verbesserungen) eindeutig einem der drei in (11.1.7) beschriebenen Intervalle zugeordnet werden können. Diese Zuordnung ist nur iterativ möglich, da die Verbesserungen untereinander korreliert sind und somit eine mit einem groben Fehler behaftete Beobachtung mit einer grossen Verbesserung auch bei einer anderen, „fehlerlosen“ Beobachtung grosse Verbesserungen bewirken kann. Dies würde zu einer falschen Intervallzuordnung führen. Infolge dieses „Verschmierungs-effektes“ wird für die Lösung des Gleichungssystems (11.1.11) das folgende Vorgehen angewandt werden:

### 1. Schritt    **Ausgleichung nach der MdkQ**

Da vor der Ausgleichung nicht bekannt ist, welche Beobachtungen inkonsistent sind, werden anfänglich alle Beobachtungen als modellkonform und somit dem mittleren Intervall angehörend angenommen.

Eine Ausgleichung, bei der alle Beobachtungen im mittleren Intervall liegen, entspricht einer Ausgleichung nach der MdkQ.

Da angenommen wird, dass nur ein kleiner Teil der Beobachtungen grob fehlerhaft ist, wird das Ausgleichsverfahren normalerweise mit einer Ausgleichung nach der MdkQ begonnen.

### 2. Schritt    **Auswahl der Beobachtung mit dem maximalen $w_i$**

Die Frage, welche der Beobachtungen mit einem  $|w_i| \geq c$  tatsächlich einen groben Fehler aufweist, kann nicht eindeutig beantwortet werden. Häufig liegt der Fehler jedoch bei der Beobachtung, deren  $w_i$  betragsmässig am grössten ist. Die Beobachtung wird einem der beiden äusseren Intervalle zugeordnet.

### 3. Schritt    **Berechnung der neuen Unbekannten und der neuen Verbesserungen**

Die neuen Unbekannten  $\bar{x}_{\text{ROB}}$  und Verbesserungen  $\bar{v}_{\text{ROB}}$  werden mit reduziertem Einfluss der im 2. Schritt ausgewählten Beobachtung berechnet. Diese Reduktion kann, führt man sich die Beziehung

$$\bar{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P \bar{l}$$

vor Augen, erreicht werden, indem für die betreffende Beobachtung eines der folgenden Elemente verändert wird:

1. der Anteil an den Normalgleichungen ( $A^T P A$ )
2. die Beobachtung  $l_i$
3. das Gewicht  $p_i$

Eine Veränderung der Normalgleichungen oder der Gewichtsmatrix  $P$  bedingt eine neue Inversion der Normalgleichungsmatrix (oder zumindest eines Teils dieser Matrix), was bei einer grossen Anzahl Beobachtungen und Unbekannten mit einem grossen Berechnungsaufwand verbunden ist. Dies gilt um so mehr, da die Zuordnung der Beobachtungen iterativ erfolgt und diese Inversion bei jeder Iteration durchgeführt werden muss.

Bei der anderen sich bietenden Möglichkeit, der Modifikation der Beobachtungen, wird die Normalgleichungsmatrix nicht verändert. Somit muss die Inversion, falls die Näherungswerte der Unbekannten und somit die Linearisierung relativ gut stimmt, nur einmal im 1. Schritt vollzogen werden.

Die Schritte 2 und 3 werden nun so lange wiederholt, bis alle Verbesserungen eindeutig einem der drei Intervalle zugeordnet sind. Erkennt man, dass eine Verbesserung im Schritt 2 fälschlicherweise einem der äusseren Intervalle zugeordnet wurde, so wird dieser Umstand rückgängig gemacht. Mit der letzten Berechnung erhält man die gewünschten, robust geschätzten Unbekannten.

Da geodätische Netze oft hunderte von Beobachtungen und einige Dutzend Unbekannte umfassen, wurde aufgrund der Vorteile beim Berechnungsaufwand im LTOP die 2. Berechnungsvariante implementiert. Die drei erwähnten Berechnungsvarianten liefern bei gleichen Grenzwerten identische Schätzwerte für die unbekannt Parameter. Diese Äquivalenz wird ausgenützt, um gewisse theoretische Grundlagen und Herleitungen einfach erklären zu können. Gewisse Testgrössen und Indikatoren werden in LTOP mit reduzierten Gewichten (Variante 3) berechnet.

Die drei Berechnungsverfahren werden im folgenden genauer beschrieben:

## 12.1 Modifikation der Normalgleichungsmatrix

Diese erste Berechnungsvariante ist von der theoretischen Herleitung her die klarste.

Die Normalgleichungen (11.1.11) lassen sich auch wie folgt beschreiben:

$$\sum_{i=1}^n \Psi_{k_i}(v_i) a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \begin{cases} v_i & \text{für } |v_i| < k_i \\ \text{sign}(v_i)k_i & \text{für } |v_i| \geq k_i \end{cases} = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u) \quad (12.1.1)$$

Dies ist das Normalgleichungssystem, dessen Lösung die gesuchten Unbekannten der robusten Parameterschätzung sind.

In Matrizenform kann diese Beziehung wie folgt dargestellt werden:

$$A^T \bar{\Psi}_{k_i}(v_i) = A^T \begin{bmatrix} v_1 & \text{oder} & \text{sign}(v_1)k_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_n & \text{oder} & \text{sign}(v_n)k_n \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (12.1.2)$$

Da die Grösse der Verbesserungen erst nach der Lösung des Normalgleichungssystems bekannt sind, bedarf es eines iterativen, im folgenden dargestellten Verfahrens:

- 1. Iteration:  
Es wird angenommen, dass für alle Beobachtungen  $k_i < v_i < k_i$  gilt. (Ausgleichung nach der MdkQ)
- i-te Iteration:  
Das Verfahren wird iterativ so lange wiederholt, bis alle Verbesserungen dem richtigen Intervall zugeordnet sind.

Verwendet man zur Beschreibung dieses Verfahrens die Ableitung der  $\Psi$ -Funktion (vgl. auch 7.3.11),

$$\Psi_{k_i}'(v_i) = \frac{\partial \Psi_{k_i}(v_i)}{\partial v_i} = \begin{cases} 1 & \text{für } |v_i| < k_i \\ 0 & \text{für } |v_i| \geq k_i \end{cases} \quad (12.1.3)$$

so lässt sich für die robust geschätzten Unbekannten  $\bar{x}_{\text{ROB}}$  schreiben:

$$\bar{x}_{\text{ROB}} = \bar{S}_1^{-1} A^T \begin{bmatrix} 1_i \text{ oder } -\text{sign}(v_1)k_1 \\ \vdots \\ 1_n \text{ oder } -\text{sign}(v_n)k_n \end{bmatrix} \quad (12.1.4)$$

mit

$$\bar{S}_1 = A^T \bar{Y} A$$

und

$$\bar{Y} = \text{diag}(\Psi_{k_1}'(v_1), \dots, \Psi_{k_1}'(v_1), \dots, \Psi_{k_n}'(v_n))$$

Aufgeteilt auf die drei Intervallbereiche erhält man aus (12.1.4) die folgenden Normalgleichungsanteile [vgl. auch CAROSIO 1979]:

	$A^T P A$						$A^T P (1 \text{ od. } k)$
$v_i \leq -k_i$	<b>0</b>	<b>0</b>	...	<b>0</b>	...	<b>0</b>	$-\Sigma a_{i1} k_i$
	0	0	...	0	...	0	$-\Sigma a_{i2} k_i$
	...	...		...		...	...
	0	0	...	0	...	0	$-\Sigma a_{ij} k_i$
	...	...		...		...	...
	0	0	...	0	...	0	$-\Sigma a_{iu} k_i$
$-k_i < v_i < k_i$	$\Sigma a_{i1} a_{i1}$	$\Sigma a_{i2} a_{i1}$	...	$\Sigma a_{ij} a_{i1}$	...	$\Sigma a_{iu} a_{i1}$	$\Sigma a_{i1} l_i$
	$\Sigma a_{i1} a_{i2}$	$\Sigma a_{i2} a_{i2}$	...	$\Sigma a_{ij} a_{i2}$	...	$\Sigma a_{iu} a_{i2}$	$\Sigma a_{i2} l_i$
	...	...		...		...	...
	$\Sigma a_{i1} a_{ij}$	$\Sigma a_{i2} a_{ij}$	...	$\Sigma a_{ij} a_{ij}$	...	$\Sigma a_{iu} a_{ij}$	$\Sigma a_{ij} l_i$
	...	...		...		...	...
	$\Sigma a_{i1} a_{iu}$	$\Sigma a_{i2} a_{iu}$	...	$\Sigma a_{ij} a_{iu}$	...	$\Sigma a_{iu} a_{iu}$	$\Sigma a_{iu} l_i$
$v_i \geq k_i$	0	0	...	0	...	0	$\Sigma a_{i1} k_i$
	0	0	...	0	...	0	$\Sigma a_{i2} k_i$
	...	...		...		...	...
	0	0	...	0	...	0	$\Sigma a_{ij} k_i$
	...	...		...		...	...
	0	0	...	0	...	0	$\Sigma a_{iu} k_i$

Die Normalgleichungsanteile im mittleren Intervall sind identisch mit denen der MdkQ, die Beobachtungen in den äusseren Intervallen liefern keinen Anteil für die Koeffizienten der Unbekannten.

Der Vektor  $\bar{v}_{\text{ROB}}$  kann mit Hilfe der  $\Psi$ -Funktion wie folgt beschrieben werden:

$$\bar{v}_{\text{ROB}} = \bar{\Psi}_{k_i}(v_i) = \bar{Y}A\bar{x}_{\text{ROB}} - \begin{bmatrix} 1_1 & \text{oder} & -\text{sign}(v_1)k_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1_n & \text{oder} & -\text{sign}(v_n)k_n \end{bmatrix} \quad (12.1.5)$$

In diesem Vektor steht für jede Beobachtung entweder die Verbesserung  $v_i$  im herkömmlichen Sinn als Differenz der gemessenen und ausgeglichenen Beobachtung (für  $|v_i| < k_i$ ) oder die Grenzwerte  $k_i$  (für  $|v_i| \geq k_i$ ).

Im Vektor  $\bar{v}_{\text{TOT}}$  sind die tatsächlich an den Beobachtungen aufgeführten Verbesserungen enthalten:

$$\bar{v}_{\text{TOT}} = A\bar{x}_{\text{ROB}} - \bar{I} \quad (12.1.6)$$

Ein Zahlenbeispiel zu dieser Berechnungsvariante ist in Kap. 18.2.3 dargestellt.

Die folgende Tabelle zeigt die wesentlichen Beziehungen zwischen homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen. Die homogenisierten Grössen sind dabei mit einem '~' gekennzeichnet,  $P_{1/2}$  ist die Transformationsmatrix (vgl. Tab. 6.1).

Beziehung	Bezeichnung
$\tilde{\bar{v}}_{\text{ROB}} = P_{1/2} \bar{v}_{\text{ROB}}$	Vektor der reduzierten Verbesserungen
$\tilde{\bar{v}}_{\text{TOT}} = P_{1/2} \bar{v}_{\text{TOT}}$	Vektor der tatsächlichen Verbesserungen
$\tilde{\bar{x}}_{\text{ROB}} = \bar{x}_{\text{ROB}}$	Vektor der Unbekannten

Tab. 12.1: Vergleich von homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen

## 12.2 Modifikation der Beobachtungen

Aus der  $\Psi$ -Funktion des BIBER-Schätzers (11.1.8) erkennt man, dass eine Beobachtung mit einer Verbesserung  $v_i$ , die betragsmässig grösser ist als der Grenzwert  $k_i$ , denselben Einfluss auf die Ausgleichung ausübt wie eine Beobachtung mit einer Verbesserung der Grösse  $k_i$ . Diese Tatsache resultiert daher, dass ab der Grenze  $k_i$  die Funktion  $\rho(v_i)$  linear verläuft und deren erste Ableitung daher eine Horizontale ist (vgl. Fig. 11.1). Iterativ können nun alle



Beobachtungen mit einer Verbesserung in einem der beiden 'robusten Intervalle' so modifiziert werden, dass ihre Verbesserung gleich  $+k_i$  oder  $-k_i$  wird.

Wie bereits erwähnt, wird als erstes die Beobachtung mit der betragsmässig grössten standardisierten Verbesserung  $w_i$  ausgewählt. Diese Beobachtung  $l_i$  wird nun so modifiziert, dass bei einer Berechnung der Ausgleichung als Verbesserung genau der Grenzwert  $k_i$  resultiert. Die derart modifizierte Beobachtung  $l_{i \text{ mod}}$  übt auf die mit der Ausgleichung berechneten Unbekannten einen geringeren Einfluss aus als die ursprüngliche Beobachtung  $l_i$ .

Die Grösse der Modifikation wird wie folgt bestimmt:

Die Berechnung der  $i$ -ten Verbesserung nach der MdkQ kann, bei unabhängigen Beobachtungen, wie folgt beschrieben werden (vgl. (6.2.10) und (6.2.14)):

$$v_i = -(q_{vv})_{i1} l_1 - \dots - z_i l_i - \dots - (q_{vv})_{in} l_n \quad (12.2.1)$$

Gesucht wird gemäss beschriebenem Verfahren eine modifizierte Beobachtung  $l_{i \text{ mod}}$  für die gilt:

$$\text{sign}(v_i) k_i = -(q_{vv})_{i1} l_1 - \dots - z_i l_{i \text{ mod}} - \dots - (q_{vv})_{in} l_n \quad (12.2.2)$$

Mit

$$d_i = v_i - \text{sign}(v_i) k_i \quad \text{für } |v_i| > k_i \quad (12.2.3)$$

und einem Vergleich der beiden Beziehungen (12.2.1) und (12.2.2) erhält man:

$$l_{i \text{ mod}} = l_i - \frac{d_i}{-z_i} \quad (12.2.4)$$

Mit dieser modifizierten Beobachtung und dem bestehenden Normalgleichungssystem können neue, robust ausgeglichene Unbekannte  $\bar{x}_{\text{ROB}}$  und Verbesserungen  $\bar{v}_{\text{ROB}}$  berechnet werden.

Da die Koeffizientenmatrix der Verbesserungsgleichungen  $A$  sowie die Gewichtsmatrix  $P$  nicht verändert wurden, ist wie bereits erwähnt *keine* neue Inversion des Normalgleichungssystems notwendig.

$$\bar{x}_{\text{ROB}}^{(1)} = \bar{x} - (A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ -z_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12.2.5)$$

$$\bar{v}_{\text{ROB}}^{(1)} = A \bar{x}_{\text{ROB}}^{(1)} - \left( \bar{1} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ -z_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (12.2.6)$$

Nach diesem ersten Schritt wird überprüft, ob von den neuen Verbesserungen  $v_{i \text{ ROB}}$  wiederum eine oder mehrere ausserhalb des Intervalls  $[|v_i| < k_i]$  liegt. Die Beobachtung mit der grössten standardisierten Verbesserung  $w_i$  wird ausgesucht und das Verfahren erneut wiederholt. Dabei ist zu beachten, dass jetzt sowohl die Beobachtung des 1. Iterationsschrittes als auch die jetzige so angepasst werden müssen, bis beide ein  $v_i$  aufweisen, dass dem entsprechenden  $k_i$  entspricht. Diese Anpassung wird iterativ durchgeführt.

Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis alle Verbesserungen im Intervall  $[-k_i \leq v_{i \text{ ROB}} \leq k_i]$  enthalten sind. Die letzte Berechnung ergibt dann die gesuchten, robust ausgeglichenen Unbekannten.

Alle während den Iterationen an der ursprünglichen, gemessenen Beobachtung  $l_i$  angebrachten Veränderungen können zu einer gesamthaften Modifikation  $\Delta d_i$  dieser Beobachtung aufsummiert werden

$$\Delta d_i = \frac{1}{-z_i} \sum_{t=1}^{s-1} (d_i^{(t)}) \quad \text{mit } (s-1) = \text{Anzahl Iterationen} \quad (12.2.7)$$

Daraus lässt sich auf einfache Weise die Verbesserung an der ursprünglichen Beobachtung  $l_i$  berechnen

$$v_{i \text{ TOT}} = k_i - \Delta d_i \quad (12.2.8)$$

In Matrixschreibweise lässt sich das ganze Verfahren wie folgt zusammenfassen:

$$\bar{x}_{\text{ROB}} = \bar{x} - (A^T A)^{-1} A^T \Delta \bar{d} \quad (12.2.9)$$

$$\bar{v}_{\text{ROB}} = A\bar{x}_{\text{ROB}} - (\bar{l} - \Delta\bar{d}) \quad (12.2.10)$$

$$\bar{v}_{\text{TOT}} = A\bar{x}_{\text{ROB}} - \bar{l} \quad (12.2.11)$$

$$\text{mit } \Delta\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \text{ oder } \frac{1}{-z_1} \sum (d_1) \\ \vdots \\ 0 \text{ oder } \frac{1}{-z_i} \sum (d_i) \\ \vdots \\ 0 \text{ oder } \frac{1}{-z_n} \sum (d_n) \end{pmatrix}$$

Im Vektor  $\bar{v}_{\text{TOT}}$  steht für jede Beobachtung die tatsächliche, am gemessenen Wert angebrachte Verbesserung, im Vektor  $\bar{v}_{\text{ROB}}$  für die Beobachtungen in den robusten Intervallen der Grenzwert  $k_i$  oder  $-k_i$ .

Zwischen den beiden Verbesserungsvektoren besteht die folgende einfache Beziehung:

$$\bar{v}_{\text{TOT}} = \bar{v}_{\text{ROB}} - \Delta\bar{d} \quad (12.2.12)$$

Ein Zahlenbeispiel zu dieser Berechnungsvariante ist in Kap. 18.2.4 dargestellt.

Die folgende Tabelle zeigt die wesentlichen Beziehungen zwischen homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen. Die homogenisierten Grössen sind dabei mit einem '˜' gekennzeichnet,  $P_{1/2}$  ist die Transformationsmatrix (vgl. Tab. 6.1).

Beziehung	Bezeichnung
$\tilde{\Delta\bar{d}} = P_{1/2}\Delta\bar{d}$	Vektor der Modifikationen
$\tilde{\bar{v}}_{\text{ROB}} = P_{1/2}\bar{v}_{\text{ROB}}$	Vektor der reduzierten Verbesserungen
$\tilde{\bar{v}}_{\text{TOT}} = P_{1/2}\bar{v}_{\text{TOT}}$	Vektor der tatsächlichen Verbesserungen
$\tilde{\bar{x}}_{\text{ROB}} = \bar{x}_{\text{ROB}}$	Vektor der Unbekannten

Tab. 12.2: Vergleich von homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen

### 12.3 Reduktion der Gewichte

Die Reduktion des Einflusses einer Beobachtung auf die Unbekannten wird ebenfalls durch Verminderung des Gewichtes dieser Beobachtung erreicht.

Auf dieser Idee beruht das dritte Berechnungsverfahren, dass analog zum ersten Verfahren den Nachteil hat, dass für jede Iteration die Normalgleichungsmatrix neu invertiert werden muss.

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass durch die iterative Regewichtung das funktionale Modell der robusten Parameterschätzung formal völlig identisch zur Ausgleichung nach der MdkQ wird.

Diese Verkleinerung des Gewichtes der inkonsistenten Beobachtungen hat unter anderem auch im Hinblick auf gewisse statistische Grössen der Ausgleichsrechnung ihre Bedeutung. Viele der bekannten Zuverlässigkeitsindikatoren (vgl. Kap. 15.3) lassen sich bei Gebrauch der reduzierten Gewichte  $p_i^*$  bei der Ausgleichung nach der MdkQ und beim verwendeten robusten Schätzverfahren auf formal analoge Weise berechnen. Zudem wurde unter Verwendung dieser Gewichte ein Verfahren zur Schätzung der Varianz-Kovarianz-Matrix der Unbekannten

( $Q_{xx}$ -Matrix) bei robuster Ausgleichung entwickelt (vgl. Kap. 14.2).

Zur Beschreibung des Verfahrens geht man aus von der Normalgleichungsbeziehung der MdkQ (6.2.4). Für unabhängige Beobachtungen lässt sich schreiben:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} v_i = 0 \quad \text{mit } j \in (1, \dots, u) \quad (12.3.1)$$

Nach der Auswahl der Beobachtung mit maximaler standardisierter Verbesserung  $w_i$  muss das 'fiktive' Gewicht  $p_i^*$  gefunden werden, das den Einfluss der Beobachtung so reduziert, dass für die entsprechende Beobachtung eine Verbesserung der Grösse  $k_i$  resultiert.

$p_i^*$  wird wie folgt berechnet:

$$p_i^* = \frac{k_i}{|v_i|} \quad (12.3.2)$$

Anschliessend wird dieses  $p_i^*$  in die Einheitsmatrix - im nichthomogenisierten Fall in die Gewichtsmatrix  $P$  - integriert ( $P^*$ -Matrix) und die Unbekannten und Verbesserungen berechnet ((12.3.3) und (12.3.4)).

Die ganze Prozedur wird, analog zum zweiten Berechnungsverfahren, so lange wiederholt, bis alle Verbesserungen im Intervall  $[-k_i \leq v_{i\text{ROB}} \leq k_i]$  enthalten sind.

In Matrizenform lässt sich das Verfahren wie folgt beschreiben:

$$\bar{x}_{\text{ROB}} = (A^T P^* A)^{-1} A^T P^* \bar{l} \quad (12.3.3)$$

$$\bar{v}_{\text{TOT}} = A \bar{x}_{\text{ROB}} - \bar{l} \quad (12.3.4)$$

Gemäss der Beziehung (11.1.11) gilt:

$$A^T \bar{v}_{\text{ROB}} = \bar{0} \quad (12.3.5)$$

und gemäss Voraussetzung:

$$A^T P^* \bar{v}_{\text{TOT}} = \bar{0} \quad (12.3.6)$$

Dies führt zum folgenden Gleichungssystem:

$$\bar{v}_{\text{ROB}} = P^* \bar{v}_{\text{TOT}} \quad (12.3.7)$$

und bei unabhängigen Beobachtungen mit (12.1.5):

$$P_i^* = \frac{\Psi(v_i)}{v_{i\text{TOT}}} = \begin{cases} 1 & \text{für } |v_i| < k_i \\ \frac{k_i}{|v_{i\text{TOT}}|} & \text{für } |v_i| \geq k_i \end{cases} \quad (12.3.8)$$

und für den Vektor  $\bar{v}_{\text{TOT}}$  lässt sich mit (12.3.3) und (12.3.4) auch direkt schreiben:

$$\bar{v}_{\text{TOT}} = (A(A^T P^* A)^{-1} A^T P^* - E) \bar{l} = -Q_{vv}^* P^* \bar{l} \quad (12.3.9)$$

Wurde bereits mit dem ersten oder dem zweiten Verfahren eine robuste Ausgleichung durchgeführt, so lassen sich die reduzierten Gewichte mit der Beziehung (12.3.7) oder (12.3.8) in einem Berechnungsschritt auf sehr einfache Weise berechnen.

Ein Zahlenbeispiel zu dieser Berechnungsvariante ist in Kap. 18.2.5 dargestellt.

Die folgende Tabelle zeigt die wesentlichen Beziehungen zwischen homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen. Die homogenisierten Grössen sind dabei mit einem 'h' gekennzeichnet,  $P_{\frac{1}{2}}$  ist die Transformationsmatrix (vgl. Tab. 6.1).

Beziehung	Bezeichnung
$\tilde{\mathbf{P}}^* = (\mathbf{P}_{1/2})^{-1} \mathbf{P}^* (\mathbf{P}_{1/2})^{-1}$	fiktive Gewichtsmatrix
$\tilde{\mathbf{v}}_{\text{ROB}} = \mathbf{P}_{1/2} \tilde{\mathbf{v}}_{\text{ROB}}$	Vektor der reduzierten Verbesserungen
$\tilde{\mathbf{v}}_{\text{TOT}} = \mathbf{P}_{1/2} \tilde{\mathbf{v}}_{\text{TOT}}$	Vektor der tatsächlichen Verbesserungen
$\tilde{\mathbf{x}}_{\text{ROB}} = \tilde{\mathbf{x}}_{\text{ROB}}$	Vektor der Unbekannten
$\mathbf{Q}_{\tilde{\mathbf{v}\tilde{\mathbf{v}}}}^* = \mathbf{P}_{1/2} \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^* \mathbf{P}_{1/2}$	fiktive $\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$ -Matrix

Tab. 12.3: Vergleich von homogenisierten und nicht homogenisierten Grössen

## 12.4 Bemerkung zum Grenzwert

Da die Grenzen  $k_j$  des BIBER-Schätzers variabel in Abhängigkeit von  $\sigma_v$  gewählt wurden (vgl. 11.1.9) und  $\sigma_v$  wiederum abhängig von der Normalgleichungs- bzw. der Gewichtsmatrix ist, könnte theoretisch für jede Iteration ein neues  $\sigma_v$  berechnet und es könnten neue Grenzen bestimmt werden. Dies wäre jedoch im Widerspruch zu den Vorgaben der modifizierten M-Schätzer, die von gegebenen zusätzlichen Gewichten ausgehen. Zudem hätte dies die folgenden Nachteile:

- die Grösse der Grenzen könnte a priori nicht bestimmt werden
- der Rechenaufwand der robusten Ausgleichung würde markant gesteigert
- das Ausgleichsverfahren würde an Übersichtlichkeit verlieren
- das zweite Berechnungsverfahren könnte nicht mehr mit den beiden anderen verglichen werden oder dann müsste auch bei diesem Verfahren die Normalgleichungsmatrix jedesmal invertiert werden.

Da es sich bei diesem Grenzwert ohnehin um einen 'willkürlichen', dem jeweiligen Ausgleichungsproblem und der Datenqualität angepassten Wert handelt, ist es also durchaus legitim und unter Berücksichtigung der obigen Nachteile sogar vernünftig, die Grenzwerte mit den ursprünglichen  $\sigma_v$  der Ausgleichung nach der MdkQ zu berechnen und diese auch bei vielen groben Fehlern so zu belassen.

---

## 13. Schätzung von $\sigma$

---

### 13.1 Methode der kleinsten Quadrate

#### 13.1.1 Schätzung der Standardabweichung der Gewichtseinheit

Die Schätzung der Standardabweichung der Gewichtseinheit a posteriori  $s_0$  erfolgt bei der MdkQ nach der folgenden Beziehung:

$$s_0^2 = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^n \Psi^2(v_i) = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (13.1.1)$$

Diese Schätzung liefert für  $\kappa = (n-u)$  bei normalverteilten Verbesserungen ( $v \sim N(0, \sigma_v)$ ) eine erwartungstreue Schätzung für  $\sigma_0$  (vgl. Kap. 5.1.1).

Beweis:

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{\kappa} \sum (v_i^2)\right] &= \frac{1}{\kappa} \sum (E[v_i^2]) \\ &= \frac{1}{\kappa} \sum (\sigma_{v_i}^2) \\ &= \frac{1}{\kappa} \sigma_0^2 \sum (q_{vv})_{ii} \\ &= \frac{1}{\kappa} \sigma_0^2 (n - u) \end{aligned} \quad (13.1.2)$$

E: Erwartungswert

#### 13.1.2 Schätzung der Varianzkomponenten

Für jede Gruppe von Beobachtungen (Richtungen, Distanzen, GPS-Koordinaten, ...) wird bei der MdkQ der Redundanzanteil der Beobachtungsgruppe  $r_g$

$$r_g = \sum_{i=1}^{n_g} (z_i)_g \quad (13.1.3)$$

als Summe der Redundanzanteile  $z_i$  (6.2.14) der betreffenden Beobachtungsgruppe berechnet.

Die Standardabweichung a posteriori für eine Beobachtungsgruppe  $s_g$  berechnet sich aus

$$s_g = \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{v}}_g^T \bar{\mathbf{v}}_g}{r_g}} \quad (13.1.4)$$

mit

$\bar{\mathbf{v}}_g$  : Vektor der Verbesserungen der g-ten Beobachtungsgruppe

## 13.2 BIBER-Schätzer

### 13.2.1 Schätzung der Standardabweichung der Gewichtseinheit

In Analogie zu (13.1.1) wird versucht, bei robuster Parameterschätzung die Standardabweichung der Gewichtseinheit  $s_0$  wie folgt zu schätzen:

$$s_0^2 = \frac{1}{\kappa\beta} \sum_{i=1}^n (\Psi_{k_i}^2(v_i)) \quad (13.2.1)$$

Bedeutung von  $\beta$  und  $\kappa$ :

$$E[s_0^2] = \frac{1}{\kappa\beta} \sum_{i=1}^n (E[\Psi_{k_i}^2(v_i)]) \quad (13.2.2)$$

Für den Erwartungswert  $E[\Psi_{k_i}^2(v_i)]$  erhält man:

$$\begin{aligned} E[\Psi_k^2(v)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^2(v) f(v) dv \\ &= \int_{-k}^{+k} v^2 f(v) dv + 2k^2 \int_{-\infty}^{-k} f(v) dv \\ &= \sigma_v^2 (-2c\phi(c) + (2\Phi(c) - 1) + 2c^2(1 - \Phi(c))) \end{aligned}$$



und durch Umformung:

$$\begin{aligned} E[\Psi_k^2(v)] &= \sigma_v^2 (c^2 + (1 - c^2)(2\Phi(c) - 1) - 2c\phi(c)) \\ &= \sigma_v^2 \gamma \end{aligned} \tag{13.2.3}$$

Durch Einsetzen von (13.2.3) in (13.2.2)

$$\begin{aligned} E[s_0^2] &= \frac{\gamma}{\kappa\beta} \sum_{i=1}^n \sigma_{v_i}^2 \\ &= \sigma_0^2 \frac{\gamma(n-u)}{\kappa\beta} \end{aligned} \tag{13.2.4}$$

Die Schätzung  $s_0$  von  $\sigma_0$  wird also erwartungstreu im Falle normalverteilter Fehler, falls

$$\beta = \gamma = (c^2 + (1 - c^2)(2\Phi(c) - 1) - 2c\phi(c)) \tag{13.2.5}$$

und

$$\kappa = (n - u) \tag{13.2.6}$$

- mit
- $s_0$ : Standardabweichung der Gewichtseinheit a posteriori
  - $\sigma_0$ : Standardabweichung der Gewichtseinheit a priori
  - $c$ : Grenzwert der robusten Parameterschätzung (vgl. (11.1.7))
  - $\Phi$ : Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
  - $\phi$ : Dichtefunktion der Standardnormalverteilung (vgl. 5.1.8)

Im Falle der MdkQ ist  $\beta = 1$  und man erhält die gewohnte Schätzung für  $\sigma_0$ .

Die Schätzung von  $s_0$  (13.2.1) lässt sich mit (11.1.8) und  $\sigma_0 = 1$  wie folgt darstellen:

$$s_0^2 = \frac{1}{(n-u)\beta} \left( \sum_I v_i^2 + c^2 \sum_A z_i \right) \tag{13.2.7}$$

- mit
- $\sum_I$  Summe über alle Beobachtungen, für die gilt:  $|v_i| < k_i$
  - $\sum_A$  Summe über alle Beobachtungen, für die gilt:  $|v_i| \geq k_i$

### 13.2.2 Schätzung der Varianzkomponenten

Die Berechnung der Standardabweichung einer Beobachtungsgruppe erfolgt auf analoge Weise wie die Standardabweichung der Gewichtseinheit.

$$(s_0^2)_g = \frac{1}{(r)_g \beta} \sum_{i=1}^{n_g} \Psi_{k_i}^2(v_i)_g \quad (13.2.8)$$

mit	$(r)_g$ :	Redundanzanteil der Beobachtungsgruppe
	$\beta$ :	Konstante $\beta$ (vgl. Kap. 13.2.1)
	$(s_0)_g$ :	Standardabweichung der Beobachtungsgruppe
	$(z_i)_g$ :	Redundanzanteil der betreffenden Beobachtungsgruppe
	$n_g$ :	Anzahl Beobachtungen dieser Beobachtungsgruppe
	$\Psi_{k_i}(v_i)_g$ :	Robuste Verbesserungen dieser Beobachtungsgruppe

Diese Methode der Schätzung der Gruppenfehler erfolgt in Analogie zur Schätzung bei der MdkQ. Bei der robusten Parameterschätzung wie auch bei der MdkQ werden mit dieser Schätzung gute und plausible Schätzergebnisse erzielt, es fehlt jedoch der strenge Beweis der Erwartungstreue.

Der Redundanzanteil der Gruppe wird als Summe der Redundanzanteile  $z_i$  der betreffenden Gruppe berechnet.

$$(r)_g = \sum_{i=1}^{n_g} (z_i)_g \quad (13.2.9)$$

---

## 14. Schätzung der Kovarianzmatrix der Unbekannten

---

### 14.1 Asymptotische Schätzung

Für die asymptotische Schätzung der Kovarianzmatrix gehen wir aus vom Gauss-Markov-Modell (vgl. Kap. 7.3.1). Somit lässt sich für die Einflussfunktion gem. Kap. 7.3.2 schreiben [HAMPEL 1986]:

$$\begin{aligned}\bar{\text{IF}}_i(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{l}}; \bar{\Psi}; \mathbf{G}) &= -\mathbf{S}_1^{-1} \bar{\mathbf{a}}_i^T \Psi_{k_i}(v_i) \\ &= -\mathbf{S}_1^{-1} \bar{\mathbf{a}}_i^T \sigma_{v_i} \Psi_c\left(\frac{v_i}{\sigma_{v_i}}\right)\end{aligned}\tag{14.1.1}$$

mit

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \mathbf{A}\tag{14.1.2}$$

$$\mathbf{Y} = \text{diag} \left[ E[\Psi_{k_1}'(v_1)], \dots, E[\Psi_{k_i}'(v_i)], \dots, E[\Psi_{k_n}'(v_n)] \right]$$

$$\Psi_{k_i}'(v_i) = \frac{\partial \Psi_{k_i}(v_i)}{\partial v_i} = \begin{cases} 1 & \text{für } |v_i| < k_i \\ 0 & \text{für } |v_i| \geq k_i \end{cases}$$

Dieser Einflussfunktionsvektor beschreibt den Einfluss der  $i$ -ten Beobachtung  $l_i$  auf den Vektor der Unbekannten.

Infolge der Symmetrie der  $\Psi$ -Funktion gilt:

$$E[\Psi_{k_i}'(v_i)] = 0\tag{14.1.3}$$

Der Vektor  $\bar{\mathbf{IF}}_i$  kann für alle Beobachtungen  $i = 1, \dots, n$  berechnet werden. Zusammengefasst werden diese Vektoren in der  $(u \times n)$ -Matrix

$$\mathbf{IF} = [\bar{\mathbf{IF}}_1 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{IF}}_i \quad \dots \quad \bar{\mathbf{IF}}_n] \quad (14.1.4)$$

In Analogie zur Schätzung der Kovarianzmatrix (vgl. Kap. 5.1.3) lässt sich mit der Einflussfunktion (14.1.1) die Kovarianz wie folgt schätzen [HAMPEL 1986]:

$$\mathbf{K}_{xx} = E[\mathbf{IF} \cdot \mathbf{IF}^T] \quad (14.1.5)$$

Durch Einsetzen der Beziehung (14.1.1) in (14.1.5) erhält man für die Kovarianzmatrix  $\mathbf{K}_{xx}$ :

$$\mathbf{K}_{xx} = \mathbf{S}_j^{-1} \mathbf{A}^T E[\bar{\Psi}_{k_i}(v_i) \bar{\Psi}_{k_i}(v_i)^T] \mathbf{A} \mathbf{S}_j^{-1} \quad (14.1.6)$$

mit

$$\bar{\Psi}_{k_j}(v_j) \bar{\Psi}_{k_i}(v_i)^T = \begin{bmatrix} \Psi_{k_1}^2(v_1) & \dots & \Psi_{k_1}(v_1) \Psi_{k_i}(v_i) & \dots & \Psi_{k_1}(v_1) \Psi_{k_n}(v_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{k_i}(v_i) \Psi_{k_1}(v_1) & \dots & \Psi_{k_i}^2(v_i) & \dots & \Psi_{k_i}(v_i) \Psi_{k_n}(v_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{k_n}(v_n) \Psi_{k_j}(v_j) & \dots & \Psi_{k_n}(v_n) \Psi_{k_i}(v_i) & \dots & \Psi_{k_n}^2(v_n) \end{bmatrix}$$

Für den Erwartungswert  $E[\Psi_{k_i}(v_i) \Psi_{k_k}(v_k)]$  gilt unter der Annahme, die Beobachtungen seien unabhängig und unter Berücksichtigung von (14.1.3):

$$E[\Psi_{k_i}(v_i) \Psi_{k_k}(v_k)] = E[\Psi_{k_i}(v_i)] E[\Psi_{k_k}(v_k)] = 0 \quad \text{für } i \neq k \quad (14.1.7)$$

Somit wird (14.1.6) zu:

$$\mathbf{K}_{xx} = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1^{-1} \quad (14.1.8)$$

mit

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{A}^T \mathbf{Z} \mathbf{A} \quad (14.1.9)$$

und

$$\mathbf{Z} = \text{diag} \left[ E[\Psi_{k_1}^2(v_1)], \dots, E[\Psi_{k_i}^2(v_i)], \dots, E[\Psi_{k_n}^2(v_n)] \right] \quad (14.1.10)$$

Für eine a priori-Schätzung der Kovarianzmatrix der Unbekannten  $K_{xx}$  erhält man für die Matrizen  $Y$  (14.1.2) und  $Z$  (14.1.10) [MARAZZI 1993]:

$$\begin{aligned} Y &= \text{diag} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_c' \left( \frac{s}{\sigma_{v_i}} \right) \varphi(s) ds \right) = \text{diag} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k_i}'(s) \varphi(s) ds \right) \\ &= \text{diag}(2\Phi(k_i) - 1) \end{aligned} \quad (14.1.11)$$

$$\begin{aligned} Z &= \text{diag} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{v_i}^2 \Psi_c^2 \left( \frac{s}{\sigma_{v_i}} \right) \varphi(s) ds \right) = \text{diag} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{k_i}^2(s) \varphi(s) ds \right) \\ &= \text{diag}(k_i^2 + (1 - k_i^2)(2\Phi(k_i) - 1) - 2k_i\varphi(k_i)) \end{aligned} \quad (14.1.12)$$

mit  $\Phi(\cdot)$ : Standardnormalverteilung (vgl. Kap. 5.1.2)  
 $\varphi(\cdot)$ : Dichtefunktion der Standardnormalverteilung (vgl. Kap. 5.1.2)

Eine a posteriori-Schätzung  $\bar{K}_{xx} = \bar{S}_1^{-1} \bar{S}_2 \bar{S}_1^{-1}$  ergibt sich mit:

$$\bar{Y} = \text{diag} \left( \Psi_c' \left( \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right) \right) = \text{diag}(\Psi_{k_i}'(v_i)) \quad (14.1.13)$$

$$\bar{Z} = \text{diag} \left( \sigma_{v_i}^2 \Psi_c^2 \left( \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right) \right) = \text{diag}(\Psi_{k_i}^2(v_i)) \quad (14.1.14)$$

## 14.2 Schätzung mit fiktiven Gewichten

Eine zweite Möglichkeit zur a posteriori-Schätzung der Kovarianzmatrix der Unbekannten  $\bar{K}_{xx}$  ergibt sich aus dem Verfahren der Berechnung mit fiktiven Gewichten. Wendet man auf die Beziehung (12.3.3)

$$\bar{x}_{\text{ROB}} = (A^T P^* A)^{-1} A^T P^* \bar{l}$$

mit (12.3.8)

$$p_i^* = \frac{\Psi_{k_i}(v_i)}{|v_i|}$$

das Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz (5.1.18) an, ergibt sich für die Kovarianzmatrix unter Berücksichtigung von  $K_{ii} = \sigma_0^2 E$ :

$$\tilde{K}_{xx}^* = \sigma_0^2 (A^T P^* A)^{-1} A^T P^* P^* A (A^T P^* A)^{-1} \quad (14.2.1)$$

bzw. für die Kofaktorenmatrix:

$$\tilde{Q}_{xx}^* = (A^T P^* A)^{-1} A^T P^* P^* A (A^T P^* A)^{-1} \quad (14.2.2)$$

### 14.3 Lösung in LTOP

In der heutigen Version von LTOP wurde aus praktischen Gründen eine vereinfachte a posteriori-Berechnung der Kovarianzmatrix der Unbekannten

$$\tilde{Q}_{xx}^* = \frac{1}{\sigma_0^2} \tilde{K}_{xx}^* \approx (A^T P^* A)^{-1} \quad (14.3.1)$$

als Näherungslösung implementiert. Diese Berechnung resultiert aus der Beziehung (14.2.2) unter der Annahme  $P^* P^* \approx P^*$ . Diese Hypothese ist approximativ zulässig, falls die Anzahl grober Fehler, das heisst die Anzahl Beobachtungen, deren Gewicht reduziert wird, relativ gering ist und daher die  $P^*$ -Matrix nicht allzu stark von der Ausgangsmatrix  $P$  (= Einheitsmatrix) abweicht. In geodätischen Netzen sind diese Voraussetzungen meist erfüllt, so dass die Abweichungen zwischen den Kofaktorenmatrizen (14.2.2) und (14.3.1) klein sind.

Bei einer *a priori-Berechnung* (Präanalyse, vgl. Kap. 10.5) mit dem BIBER-Schätzer wird in LTOP die Kovarianzmatrix gemäss der MdkQ mit  $Q_{xx} = (A^T A)^{-1}$  berechnet. Auf eine a priori-Schätzung, z.B. mit (14.1.11) und (14.1.12) wird verzichtet, da diese Schätzung nur den Grenzwert  $c$ , nicht aber die Anzahl und die geometrische Verteilung der groben Fehler berücksichtigt. Der Grenzwert  $c$  wird in geodätischen Anwendungen vergleichsweise hoch (normalerweise zwischen 2 und 4) gewählt, womit sein Einfluss auf die Schätzung der Kovarianzmatrix relativ gering ausfällt und daher eine Schätzung mit (14.1.11) und (14.1.12) sehr nahe an die Schätzung der MdkQ zu liegen kommt.

Die Berücksichtigung grober Fehler bei einer a priori-Schätzung ist, da deren Grösse und der Ort ihres Auftretens nicht vorausgesagt werden kann, nicht möglich. Zudem ist die Anzahl grober Fehler, verglichen mit der Gesamtzahl der Beobachtung in geodätischen Netzen, erfahrungsgemäss gering.

## 15. Zuverlässigkeit

---

### 15.1 Zuverlässigkeit bei der MdkQ

Das für die Schweizerische Landesvermessung gewählte und für die amtliche Vermessung übernommene Zuverlässigkeitsmodell beruht auf der von Baarda [BAARDA 1968] begründeten Theorie. Eine Beschreibung dieses Modells findet sich in [CAROSIO 1992] oder [WICKI 1991]. Es ist zu beachten, dass die Theorie von BAARDA davon ausgeht, dass nur eine Beobachtung einen groben Fehler aufweist.

Im folgenden wird dieses Modell in kurzer Form vorgestellt, da das im Kapitel 15.2 hergeleitete Modell beim BIBER-Schätzer auf dieses Modell Bezug nimmt.

#### 15.1.1 Definition

Im Falle der Ausgleichung nach der MdkQ nennt man ein Messsystem zuverlässig im Hinblick auf allfällige grobe Fehler, wenn für  $i = 1, \dots, n$  ein Fehler  $\Delta_i$  an der Grenze der Qualitätsanforderungen als Fehler der  $i$ -ten Beobachtung bei der Durchführung des Tests mit einer Wahrscheinlichkeit  $\geq (1-\beta)$  aufgedeckt wird [CAROSIO 1983].

Falls die Auswirkungen der Fehler  $\Delta_i$  auf die Schätzungen der unbekannt Parameter einer Ausgleichung (z.B. Koordinaten) betrachtet werden, spricht man von *äusserer Zuverlässigkeit*, falls die  $\Delta_i$  direkt als Fehler einer Beobachtung beurteilt werden, von *innerer Zuverlässigkeit*.

Die Zuverlässigkeit ist eine Eigenschaft der folgenden drei Elemente:

- der Struktur des geodätischen Netzes mit dem funktionalen (Designmatrix  $A$ ) und dem stochastischen Modell (Gewichtsmatrix  $P$ ).
- der Alternativhypothese mit den Anforderungen an das Vermessungswerk (Wahrscheinlichkeit  $\beta$ , die man als noch zumutbares Risiko betrachtet, falls ein grober Fehler nicht entdeckt wird.)
- des gewählten statistischen Testverfahrens und der entsprechenden Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  für die irrtümliche Verwerfung des Modells.



Im folgenden werden die zwei in der schweizerischen Landesvermessung verwendeten Testverfahren beschrieben:

### 15.1.2 Test der standardisierten Verbesserungen (lokaler Test)

Bei diesem Test geht man von der Annahme aus, dass die Beobachtungen und die Beobachtungsfehler normalverteilt seien.

Die Verbesserungen  $v_i$  sind bei normalverteilten Beobachtungen ebenfalls normalverteilt (vgl. 5.1.8) mit Erwartungswert 0 und der Standardabweichung  $\sigma_{v_i} = \sigma_0 \sqrt{(q_{vv})_{ii}}$ .

Die standardisierten Verbesserungen

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (15.1.1)$$

haben den Vorteil, dass sie normalverteilt sind mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1 und demzufolge anhand einheitlicher Kriterien unabhängig vom Gewicht der Beobachtungen  $p_i$  getestet werden können.

Für normalverteilte Beobachtungen mit vorgegebener Standardabweichung lässt sich gemäss (6.2.10) schreiben:

$$\bar{v} = -Q_{vv} \bar{l} \quad (15.1.2)$$

Dies ist die Hypothese  $H_0$ , die aussagt, es sei kein grober Fehler vorhanden.

Unter der Annahme, dass nur 1 grober Fehler auftritt, ist es möglich, die Empfindlichkeit des Tests für die Erkennung möglicher Alternativhypothesen zu bestimmen.

Die Alternativhypothese  $H_1$

$$\bar{v}' = -Q_{vv} \bar{l}' \quad (15.1.3)$$

mit

$$\bar{v}' = \bar{v} + \Delta \bar{v}_i$$

$$\bar{l}' = \bar{l} + \Delta \bar{l}_i \quad (15.1.4)$$

$$\Delta \bar{l}_i = (0, \dots, 0, \Delta l_i, 0, \dots, 0)^T$$

besagt, die  $i$ -te Beobachtung sei um den konstanten Wert  $\Delta l_i$  grob verfälscht.

Somit gilt:

$$\Delta \bar{v}_i = -Q_{vv} \Delta \bar{l}_i \quad (15.1.5)$$

und für unabhängige Beobachtungen wegen (15.1.4)

$$\Delta v_i = -\frac{\sigma_{v_i}^2}{\sigma_0^2} \Delta l_i \quad (15.1.6)$$

Für die durch einen groben Fehler verfälschte  $i$ -te standardisierte Verbesserung  $w_i'$  lässt sich schreiben:

$$w_i' = \frac{v_i'}{\sigma_{v_i}} = w_i + \frac{\Delta v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (15.1.7)$$

Betrachtet man die Erwartungswerte von  $w_i$  (Hypothese  $H_0$ ) und  $w_i'$  (Alternative  $H_i$ ), so erhält man:

$$\begin{aligned} E[w_i] &= 0 \\ E[w_i'] &= \frac{1}{\sigma_{v_i}} E[\Delta v_i] = -\frac{\sigma_{v_i}}{\sigma_0^2} \Delta l_i \end{aligned} \quad (15.1.8)$$

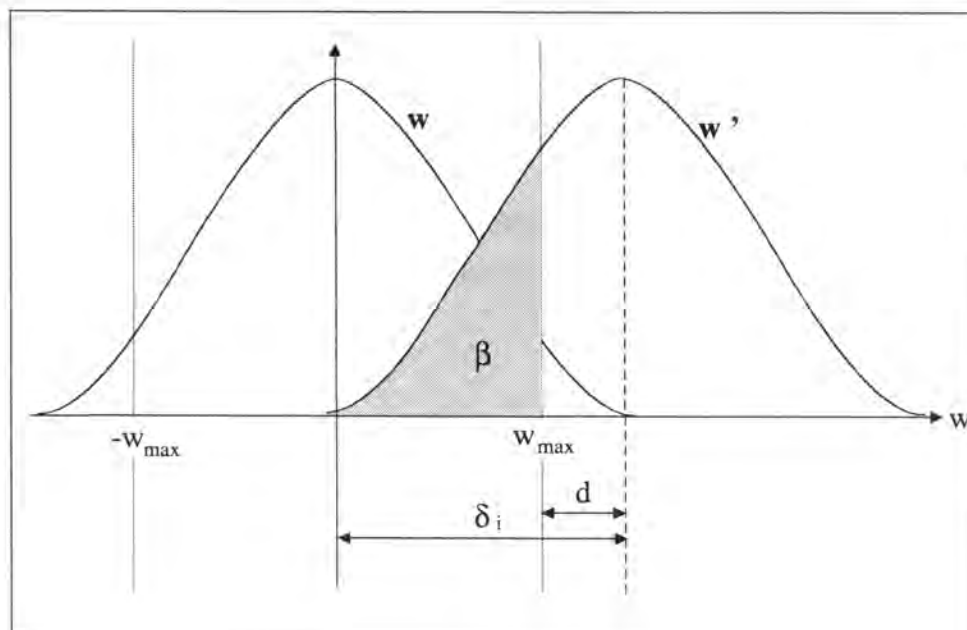


Abb. 15.1: Test der standardisierten Verbesserungen

Bei einem vorgegebenen Grenzwert  $w_{\max}$  für die standardisierte Verbesserung  $w_i$  und einem vorgegebenen Irrtumsrisko 2. Art  $\beta$  kann, wie aus der obigen Abbildung 15.1 ersichtlich wird, der Nichtzentralitätsparameter  $\delta_i$  berechnet werden. Dieser Nichtzentralitätsparameter entspricht dem Erwartungswert von  $w_i'$  (15.1.8).

Die Beziehung (15.1.8) erlaubt für jede Beobachtung den kleinsten, mit diesem Testverfahren noch aufdeckbaren groben Fehler  $\nabla I_i$  zu bestimmen:

$$\nabla I_i = -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{v_i}} \delta_i \quad (15.1.9)$$

### 15.1.3 Globaler Modelltest

Häufig wird als Alternative zum lokalen Test ein globaler Modelltest durchgeführt.

Für die Nullhypothese  $H_0$  mit normalverteilten Beobachtungen und vorgegebenen Standardabweichungen ist der Quotient  $F$  der Varianzen der Gewichtseinheit a posteriori  $s_0^2$  und a priori  $\sigma_0^2$  bei normalverteilten Beobachtungen  $F$ -verteilt (vgl. 5.1.11) mit den Freiheitsgraden  $(n-u)$  für  $s_0^2$  und  $\infty$  für  $\sigma_0^2$ . Mit (6.2.6) erhält man:

$$F = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{\bar{v}^T \bar{v}}{\sigma_0^2 (n-u)} \quad (15.1.10)$$

In analoger Weise zum lokalen Test wird dieser Hypothese eine Alternativhypothese  $H_i$  gegenübergestellt (vgl. 15.1.2 - 15.1.4).

Die Verteilung der Grösse  $F'$  bei zutreffen der Alternativhypothese  $H_i$  ist die nicht-zentrale Fisher-Verteilung mit dem Nichtzentralitätsparameter  $\lambda/(n-u)$ .

$$F' = \frac{s_0'^2}{\sigma_0^2} = \frac{\bar{v}'^T \bar{v}'}{\sigma_0^2 (n-u)} \quad (15.1.11)$$

Für den Erwartungswert dieser Verteilung gilt:

$$E[F'] = E\left[\frac{\bar{v}'^T \bar{v}'}{\sigma_0^2 (n-u)}\right] = E\left[\frac{\bar{v}^T \bar{v}}{\sigma_0^2 (n-u)}\right] + \left|\frac{\Delta \bar{v}^T \Delta \bar{v}}{\sigma_0^2 (n-u)}\right| = E[F] + \frac{\lambda}{n-u} \quad (15.1.12)$$

mit

$$\lambda = \frac{\Delta \bar{v}^T \Delta \bar{v}}{\sigma_0^2} \quad (15.1.13)$$

Mit (15.1.5), (6.2.7), (6.2.8) und (6.2.9) erhält man:

$$\Delta \bar{v}_i^T P \Delta \bar{v}_i = \Delta \bar{l}_i^T (H - E)(H - E) \Delta \bar{l}_i = \Delta \bar{l}_i^T Q_{vv} \Delta \bar{l}_i \quad (15.1.14)$$

Somit lässt sich für  $\lambda$  bei unkorrelierten Beobachtungen schreiben:

$$\lambda = \left( \frac{\Delta l_i \sigma_{v_i}}{\sigma_0^2} \right)^2 \quad (15.1.15)$$

Bei einem festen Grenzwert  $F_{\max}$  und einem vorgegebenen Irrtumsrisiko 2. Art  $\beta$  kann für jede Beobachtung der kleinste, mit diesem Testverfahren noch aufdeckbare grobe Fehler  $\nabla l_i$  festgelegt werden.

Dieser Test hat gegenüber dem lokalen Test (Kap. 15.1.2) den Nachteil, dass bei einem grossen Freiheitsgrad nur grosse grobe Fehler entdeckt werden können.

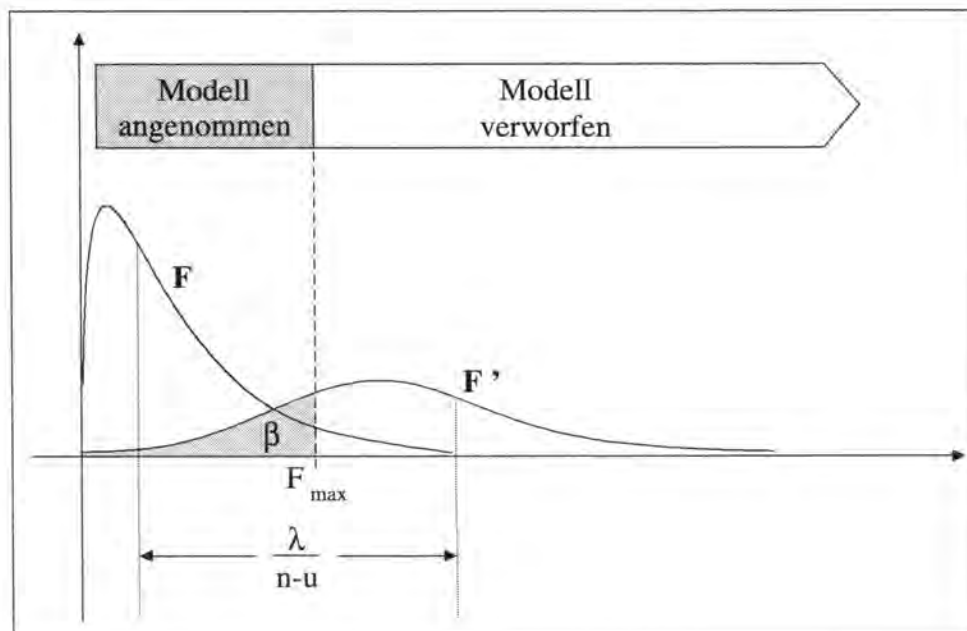


Abb. 15.2: Globaler Modelltest

In den meisten geodätischen Ausgleichsprogrammen ist der F-Test implementiert. Im Programm LTOP wurde z.B. die folgende Lösung gewählt:

Die Varianz der Gewichtseinheit a priori wird mit  $\sigma_0^2 = 1$  festgelegt. Beim globalen Modelltest wird dann geprüft, ob die Testgrösse F (vgl. 15.1.10) signifikant von 1 abweicht.

Das Programm unterscheidet 2 Fälle:

- $F \geq 1$ : Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, bei zutreffenden Modellannahmen einen Quotienten zu erhalten, der ebenso gross oder grösser ist.
- $F < 1$ : Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, bei zutreffenden Modellannahmen einen Quotienten zu erhalten, der kleiner ist.

#### 15.1.4 Innere Zuverlässigkeit

Die innere Zuverlässigkeit der Beobachtungen wird häufig mit den Grenzwerten  $\nabla l_i$  (15.1.9) für die mit dem Test der standardisierten Verbesserungen (vgl. Kap. 15.1.2) erfassbaren groben Fehler der einzelnen Beobachtungen beschrieben. Mit diesen Grenzwerten der inneren Zuverlässigkeit ist es möglich, den Einfluss zu berechnen, den die Grenzfehler auf die zu schätzenden Parameter ausüben ( $\rightarrow$  äussere Zuverlässigkeit).

#### 15.1.5 Äussere Zuverlässigkeit

Mit der Beziehung (6.2.5) kann der Einfluss einer fehlerbehafteten Beobachtung  $l_i$  (15.1.4) auf die Unbekannten wie folgt quantifiziert werden:

$$\bar{x}' = \bar{x} + \Delta \bar{x}_i = (A^T A)^{-1} A^T (\bar{l} + \Delta \bar{l}_i) \quad (15.1.16)$$

$$\Delta \bar{x}_i = (A^T A)^{-1} A^T \Delta \bar{l}_i \quad (15.1.17)$$

Wird anstelle eines beliebigen groben Fehlers  $\Delta l_i$  der Grenzwert eines erfassbaren groben Fehlers  $\nabla l_i$  (15.1.9) eingeführt, so kann für jeden zu schätzenden Parameter ein Grenzwert  $\nabla \bar{x}_i$  berechnet werden, der aufzeigt, wie gross der maximale Einfluss eines nicht entdeckten groben Fehlers in der i-ten Beobachtung ist.

$$\nabla \bar{x}_i = (A^T A)^{-1} A^T \nabla \bar{l}_i \quad (15.1.18)$$

## 15.2 Zuverlässigkeit beim BIBER-Schätzer

### 15.2.1 Definition

Werden die unbekannt Parameter mit einem robusten Schätzverfahren bestimmt, so ist die in Kapitel 15.1.1 beschriebene „herkömmliche“ Definition der Zuverlässigkeit nicht mehr analog verwendbar. Robuste Ausgleichsmodelle nehmen in Kauf, dass grobe Fehler oder sonst abweichende Messwerte vorhanden sein können. Somit erübrigt sich im Prinzip eine gesonderte a posteriori-Analyse der Beobachtungen.

Interessant bleibt jedoch nach wie vor die Frage, wie gross die maximale Verfälschung der zu schätzenden Parameter bei auftreten eines groben Fehlers sein kann. Aus dieser Fragestellung leitet sich die folgende Definition ab:

Definition: Der *maximale Einfluss*, den ein grober Fehler auf die unbekannt Parameter der robusten Schätzung ausüben kann, wird als *spezifische äussere Zuverlässigkeit der robusten Ausgleichung* bezeichnet.

Die *innere Zuverlässigkeit* der MdkQ (vgl. Kap. 15.1.4) wird durch die geringste Beobachtungsverfälschung, die zum Maximaleinfluss führt, ersetzt.

Der maximale Einfluss einzelner Beobachtungen auf das Schätzergebnis ist abhängig von

- der Struktur des geodätischen Netzes mit dem funktionalen (Designmatrix A) und dem stochastischen Modell (Gewichtsmatrix P) und
- der dem Schätzverfahren zugrundeliegenden  $\Psi$ -Funktion.

### 15.2.2 Herleitung des Einflusses eines groben Fehlers

Analog zur Zuverlässigkeitstheorie bei der MdkQ nehmen wir an, die i-te Beobachtung  $l_i$  sei durch einen groben Fehler  $\Delta l_i$  grob verfälscht. Es wird für die folgenden Betrachtungen ebenfalls angenommen, dass nur eine Beobachtung mit einem groben Fehler behaftet sei.

$$l_i = l_{i\text{ oF}} + \Delta l_i \quad (15.2.1)$$

$l_{i\text{ oF}}$  sei die "fehlerlose" i-te Beobachtung.

Beim BIBER-Schätzer (vgl. Kap. 11) ist die  $\Psi$ -Funktion ab einem Grenzwert  $\pm k_i$  konstant (vgl. Abb. 11.1). Der maximale Einfluss auf das Schätzergebnis ist demzufolge beschränkt. Er wird erreicht, wenn (gem. 12.1.5, 12.1.6)

$$v_{i\text{ROB}} = v_{i\text{TOT}} = \text{sign}(v_i)k_i \quad (15.2.2)$$

bzw. mit (12.3.8)

$$p_i^* = 1 \quad (15.2.3)$$

oder mit (12.2.4)

$$\frac{d_i}{-z_i} = 0 \quad (15.2.4)$$

Folglich übt ein unendlich grosser grober Fehler  $\Delta_i \rightarrow \infty$  auf das Schätzergebnis den gleichen Einfluss aus wie ein grober Fehler  $\nabla \hat{1}_i$ , für den resultiert (mit 12.2.2):

$$k_i = -(q_{vv})_{i1} l_1 - \dots - z_i (l_{i\text{oF}} + \nabla \hat{1}_i) - \dots - (q_{vv})_{in} l_n \quad (15.2.5)$$

$\nabla \hat{1}_i$  beschreibt in diesem Fall die geringste Beobachtungsverfälschung, die zum maximalen Einfluss auf das Schätzergebnis führt. Anders ausgedrückt wird durch die robuste Parameterschätzung mit dem BIBER-Schätzer jeder grobe Fehler  $\Delta_i$ , der grösser ist als die geringste Beobachtungsverfälschung, auf diese Grösse reduziert.

Mit

$$k_i = v_{i\text{oF}} + \nabla \hat{v}_i \quad (15.2.6)$$

und (15.2.5) erhält man:

$$\nabla \hat{v}_i = -z_i \nabla \hat{1}_i = -\frac{\sigma_{v_i}^2}{\sigma_0^2} \nabla \hat{1}_i \quad (15.2.7)$$

$v_{i\text{oF}}$  sei die "fehlerlose" i-te Verbesserung aus  $\vec{v}_{i\text{oF}} = Ax - \vec{l}_{i\text{oF}}$

Wird der Ausdruck (15.2.6) durch  $\sigma_v$  dividiert, so ergibt sich mit (15.2.7) und mit  $w_{i\text{oF}} = v_{i\text{oF}} / \sigma_{v_i}$  (vgl. 15.1.1):

$$c = w_{i\text{oF}} - \frac{\sigma_{v_i}}{\sigma_0^2} \nabla \hat{1}_i \quad (15.2.8)$$

Mit  $E[w_{i\text{oF}}] = 0$  erhält man:

$$\nabla \hat{l}_i = -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{v_i}} c \quad (15.2.9)$$

Mit diesem Wert lässt sich für jede Beobachtung der erwartete Einfluss auf die zu schätzenden Parameter berechnen.

Diese Beziehung ist formal identisch mit der Beziehung

$$\nabla l_i = -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{v_i}} \delta_i \quad (15.2.10)$$

des Modells bei der Ausgleichung nach der MdkQ (15.1.9). Bei diesem Modell wurde angenommen, die Beobachtungsfehler seien normalverteilt mit einem Erwartungswert  $E[w_i'] = \delta_i$ . Der Nichtzentralitätsparameter  $\delta_i$  wurde berechnet mit einem vorgegebenen Grenzwert  $w_{\max}$  für die standardisierte Verbesserung und einem vorgegebenen Irrtumsrisiko 2. Art  $\beta$  (vgl. Abb. 15.1).

$$\delta_i = w_{\max} + d_i(\beta) \quad (15.2.11)$$

Mit der Einführung des Risikos  $\beta$  wird dem Umstand Rechnung getragen, dass grobe Fehler, die als konstant angenommen werden, von den normalverteilten zufälligen Fehlern überlagert werden. Mit der Testgrösse  $\nabla l_i$  bei der MdkQ wird somit nicht ausschliesslich der Einfluss der konstanten groben Fehler auf die zu schätzenden Unbekannten beschrieben, sondern die kumulierte Wirkung von zufälligen und groben Fehlern.

Setzt man  $w_{\max} = c$  und  $\beta = 50\%$ , so ergibt sich aus den Beziehungen (15.2.9) und (15.2.10)  $\nabla \hat{l}_i = \nabla l_i$ . Normalerweise ist bei geodätischen Anwendungen  $\beta$  jedoch viel geringer.

Damit die berechneten Indikatoren  $\nabla x_i$  der äusseren Zuverlässigkeiten bei robuster Ausgleichung mit dem BIBER-Schätzer und der Ausgleichung nach der MdkQ auch bei  $\beta \neq 50\%$  quantitativ vergleichbar werden, ist auch im robusten Modell der Einfluss der zufälligen Fehler zu berücksichtigen.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\beta$  lässt sich bei der MdkQ als einseitiges Konfidenzintervall für die standardisierte Verbesserung  $w_i'$  der mit einem groben Fehler behafteten Beobachtung  $l_i'$  interpretieren. Das Konfidenzintervall beschreibt in diesem Fall das Risiko, dass die Beobachtung als richtig interpretiert wird, obwohl ein grober Fehler vorliegt. Es wird mit der Einführung dieser Wahrscheinlichkeit den zufälligen Fehlern einseitig (untere Grenze) Rechnung getragen.  $w_i'$  ist gemäss Annahme normalverteilt mit  $E[w_i'] = \delta_i$  und  $V[w_i'] = 1$ . Somit erhält man beispielsweise bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\beta = 5\%$  und einer Testgrösse  $w_{\max} = 2.5$  für den Nichtzentralitätsparameter  $\delta_i = 4.14$ .



Im Zuverlässigkeitsmodell der robusten Ausgleichung des BIBER-Schätzers (vgl. 15.2.9) wird die standardisierte Verbesserung der fehlerbehafteten Beobachtung  $l_i'$  auf den Grenzwert  $c$  „reduziert“, der Einfluss der zufälligen Fehler wird dabei nicht berücksichtigt. Um die Zuverlässigkeitsbetrachtungen der beiden Modelle vergleichbar zu machen, wird der Grenzwert  $c = w_{\max}$  gesetzt und um einen Betrag  $\tau_w$  erhöht. Dabei wird  $\tau_w$  so gewählt, dass  $\tau_w = d_i(\beta)$  gilt (vgl. Abb. 15.3).

Der Nichtzentralitätsfaktor  $\delta_i$  der MdkQ wird zum *Verschiebungsfaktor*  $\delta_i^*$ , die Differenz zwischen dem Grenzwert  $c$  und  $\delta_i^*$  wird als *Unsicherheitsfaktor*  $\tau_w$  bezeichnet.

$$\delta_i^* = c + \tau_w \quad (15.2.12)$$

Mit dem Verschiebungsfaktor  $\delta_i^*$  lässt sich der geringste Beobachtungsfehler  $\nabla l_i^*$ , der zum maximalen Einfluss auf das Schätzergebnis führt, neu berechnen. Dabei kann interpretiert werden, dass in diesem Verschiebungsfaktor, analog zur MdkQ, die kumulierte Wirkung von groben und zufälligen Fehlern berücksichtigt wird.

$$\nabla l_i^* = -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{v_i}} \delta_i^* \quad (15.2.13)$$

Mit  $c = w_{\max}$  und  $\tau_w = d_i(\beta)$  führt diese Betrachtungsweise mit den Beziehungen (15.2.10) und (15.2.13) zu quantitativ vergleichbaren  $\nabla l_i$  bzw.  $\nabla l_i^*$ .

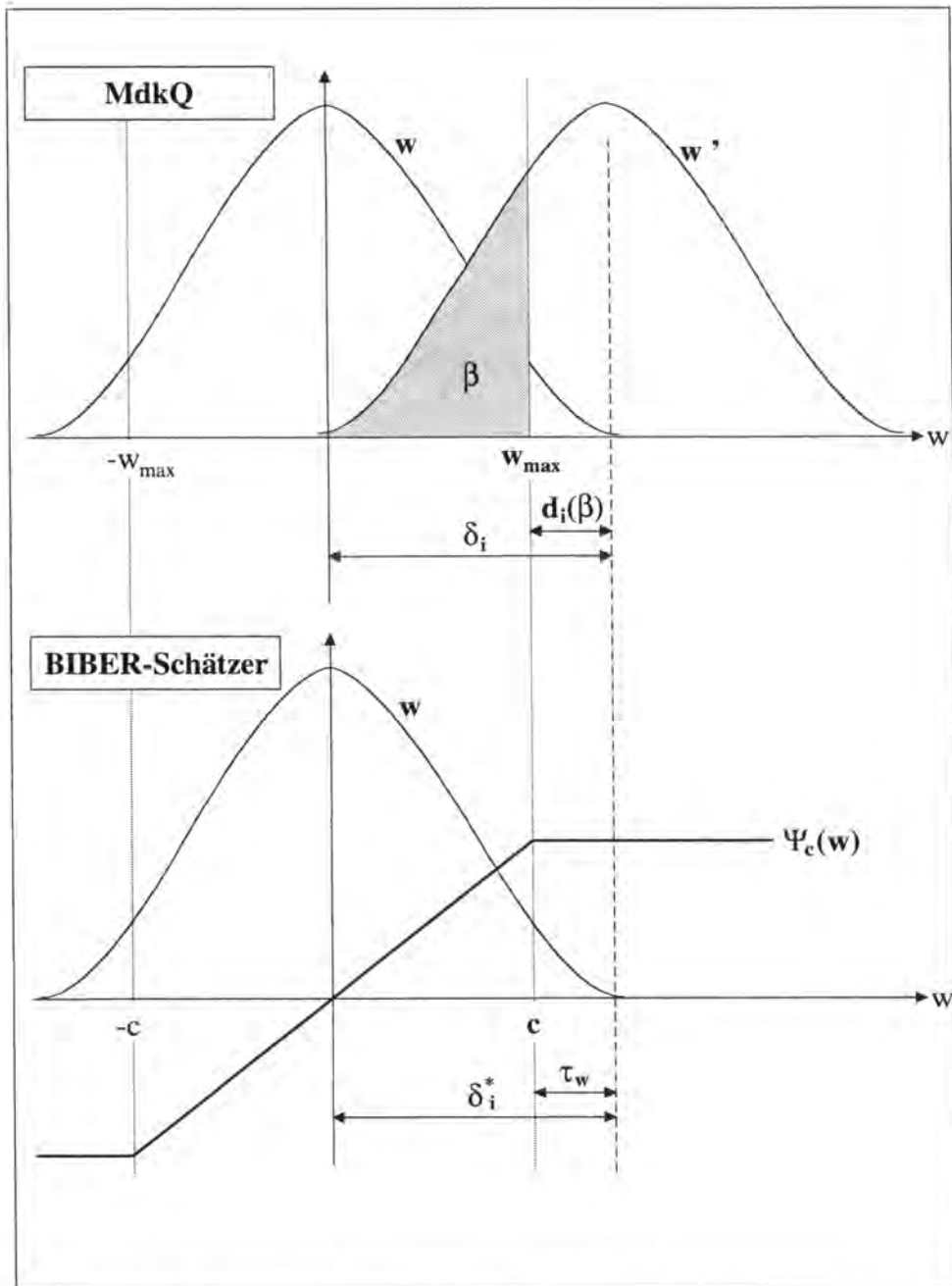


Abb. 15.3: Vergleich der Zuverlässigkeitsmodelle bei der MdkQ und beim BIBER-Schätzer

### 15.2.3 Innere Zuverlässigkeit

Die Grösse  $\nabla I_i^*$  (15.2.13) ist eine mit der inneren Zuverlässigkeit der MdkQ (vgl. Kap. 15.1.4) quantitativ vergleichbare Grösse. Sie wird bei der robusten Ausgleichung mit dem BIBER-Schätzer ebenfalls als innere Zuverlässigkeit bezeichnet und beschreibt den geringsten Beobachtungsfehler, der zum maximalen Einfluss auf das Schätzergebnis führt.

#### 15.2.4 Äussere Zuverlässigkeit

Für den maximalen Einfluss eines groben Fehlers auf die zu schätzenden Parameter lässt sich gemäss (12.3.3) schreiben:

$$\nabla \bar{x}_{i\text{ ROB}}^* = (A^T P^* A)^{-1} A^T P^* \nabla l_i^* \quad (15.2.14)$$

Dieser Ausdruck ist formal identisch mit jenem der äusseren Zuverlässigkeit bei der MdkQ. Es ist jedoch zu beachten, dass im MdkQ-Fall die  $\Delta \bar{x}_i$  beliebig gross werden können, bei der robusten Ausgleichung beschreiben die  $\nabla \bar{x}_{i\text{ ROB}}^*$  die maximal mögliche Verfälschung der Koordinaten. Die so bestimmte äussere Zuverlässigkeit berücksichtigt, im Gegensatz zur spezifischen äusseren Zuverlässigkeit (vgl. Definition im Kap. 15.2.1), nicht nur die groben Fehler, sondern sie lässt sich als Mass für die kumulierte Wirkung von groben und zufälligen Fehlern interpretieren.

### 15.3 Beurteilungskriterien in geodätischen Netzen

Durch die Kombination verschiedener Typen von Beobachtungen und die Ausgleichung immer grösserer und komplexerer geodätischer Netze wird es unumgänglich, die Qualität der Beobachtungen und der geschätzten Parameter anhand von Indikatoren zu beurteilen.

Dabei ist zu beachten, dass die Aussagekraft aller Indikatoren von der Richtigkeit des stochastischen Modells, insbesondere von der Wahl realistischer Standardabweichungen a priori der Beobachtungen abhängt.

#### 15.3.1 Indikatoren für die einzelnen Beobachtungen

*Der lokale Zuverlässigkeitsindikator  $z_i$  bzw.  $z_i^*$ :*

Der lokale Zuverlässigkeitsindikator  $z_i$  (6.2.14) ist ein dimensionsloses Mass für die Verteilung der Redundanz auf die einzelnen Beobachtungen und demzufolge ein Indiz dafür, wie gut eine einzelne Messung innerhalb eines geodätischen Netzes kontrolliert wird. Ein  $z_i = 0$  zeigt, dass eine Messung nicht kontrolliert wird, eine Messung mit einem  $z_i = 1$  ist perfekt kontrolliert.

Dieser Indikator hängt nur vom mathematischen Modell einer Parameterschätzung ab. Er kann demzufolge schon beim Netzentwurf a priori berechnet werden.

$$\text{MdkQ:} \quad z_i = (q_{vv})_{ii} \quad (15.3.1)$$

Bei der *robusten Ausgleichung* wird, falls grobe Fehler vorliegen, der Einfluss der entsprechenden Beobachtungen auf das Schätzergebnis reduziert. Diese Reduktion führt anschaulich dazu, dass der lokale Zuverlässigkeitsindikator (Redundanzanteil)  $z_i$  des Ausgleichsmodells der MdkQ durch diesen Vorgang verändert wird. Der lokale Zuverlässigkeitsindikator  $z_i^*$  der robusten Ausgleichung mit dem BIBER-Schätzer hängt neben dem Netzdesign neu auch von der Anzahl grober Fehler und somit auch von der Grösse des Grenzwertes  $c$  ab.

Aus der Beziehung (12.3.9) lässt sich der lokale Zuverlässigkeitsindikator  $z_i^*$  auf sehr einfache Weise und formal identisch zum  $z_i$  (15.3.1) berechnen:

$$\text{BIBER-Schätzer:} \quad z_i^* = (q_{vv}^*)_{ii} p_i^* \quad (15.3.2)$$

Eine Beobachtung, die mit einem groben Fehler behaftet ist, „verliert“ an Gewicht. Dies bedeutet anschaulich, dass sie die anderen, „fehlerfreien“ Beobachtungen weniger stark kontrollieren kann und von diesen stärker kontrolliert wird. Der Redundanzanteil  $z_i^*$  einer derartigen Beobachtung wird also erhöht, währenddem die  $z_i^*$  der „fehlerfreien“ Beobachtungen, zumindest lokal, verringert werden.

Die Summe der  $z_i^*$  entspricht noch immer dem Freiheitsgrad  $(n-u)$  des Netzes und die  $z_i^*$  sind somit weiterhin ein Mass für die Verteilung der Redundanz auf die einzelnen Messungen.

Ein Vergleich der  $z_i$  und der  $z_i^*$  kann für einzelne Beobachtungen interessante Informationen bezüglich der Reduktion des Redundanzanteiles und somit des Verlustes ihrer Kontrolle bringen. Es ist durchaus möglich, dass ein a priori zuverlässiges Netz durch inkonsistente Beobachtungen derart geschwächt wird, dass das ganze Netz oder einzelne Netzteile unzuverlässig werden.

Im Programm LTOP werden bei robuster Ausgleichung mit dem BIBER-Schätzer die beiden Indikatoren  $z_i$  und  $z_i^*$  einander gegenübergestellt (vgl. Tab. 16.7).

Der kleinste noch entdeckbare Fehler  $\nabla l_i$  bzw. der geringste Beobachtungsfehler  $\nabla l_i^*$

Die  $\nabla l_i$

$$\text{MdkQ:} \quad \nabla l_i = -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{v_i}} \delta_i \quad (15.3.4)$$

beschreiben bei der MdkQ die Grenzwerte für die kleinsten, mit einem bestimmten Test noch entdeckbaren groben Fehlern.

Demgegenüber entsprechen die  $\nabla l_i^*$

$$\text{BIBER-Schätzer:} \quad \nabla l_i^* = -\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{v_i}} \delta_i^* \quad (15.3.5)$$

bei der robusten Ausgleichung mit dem BIBER-Schätzer den geringsten Beobachtungsfehlern, die zum maximalen Einfluss auf die unbekannt Parameter führen.

Da diese Parameter nur vom mathematischen Modell einer Parameterschätzung und vom gewählten Testverfahren (bzw. den daraus abgeleiteten Faktoren bei robuster Ausgleichung) abhängig sind, können sie auch a priori bestimmt werden.

Der Indikator (15.3.4) wird im LTOP mit dem Test der standardisierten Verbesserungen (vgl. Kap. 15.1.2) berechnet, im Listing wird er nur bei der MdkQ ausgewiesen.

*Die standardisierte Verbesserung  $w_i$*

Die *standardisierte Verbesserung*  $w_i$  (15.1.1) ist eine dimensionslose Zahl und dient der qualitativen Beurteilung der einzelnen Messungen. Bei normalverteilten Beobachtungen ist diese Grösse standardnormalverteilt mit  $E(w_i) = 0$  und der Standardabweichung  $\sigma(w_i) = 1$ .

$$\text{MdkQ:} \quad w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (15.3.6)$$

Bei der robusten Ausgleichung werden die standardisierten Verbesserungen gemäss (15.1.1) und den Bemerkungen in Kap. 12.4 wie folgt bestimmt:

BIBER-Schätzer: 
$$w_i = \frac{v_{i \text{ TOT}}}{\sigma_{v_i}} \quad (15.3.7)$$

mit  $v_{i \text{ TOT}}$ : tatsächliche, an der gemessenen Beobachtung  $l_i$  angebrachte Verbesserung (12.1.6, 12.2.11 oder 12.3.9).

Die  $w_i$  können, da sie von den tatsächlichen Messfehlern abhängen, nur a posteriori berechnet werden.

Die [TVAV] schreibt in Art. 55 vor, dass standardisierte Verbesserungen den Wert von 3.5 nicht überschreiten dürfen. Das Irrtumsrisiko zweiter Art  $\beta$  beträgt 5%.

*Die wahrscheinliche Grösse  $g_i$  bzw.  $g_i^*$  eines groben Fehlers:*

Die *wahrscheinliche Grösse  $g_i$  bzw.  $g_i^*$  eines groben Fehlers* gibt an, wie gross ein grober Fehler an der betreffenden Beobachtung sein müsste, um eine standardisierte Verbesserung der vorhanden Grösse zu erreichen.

MdkQ: 
$$g_i = \frac{-v_i}{z_i} \quad (15.3.8)$$

bzw.

BIBER-Schätzer: 
$$g_i^* = \frac{-v_{i \text{ TOT}}}{z_i^*} \quad (15.3.9)$$

Da diese Werte einen Hinweis über die tatsächliche Qualität der Messungen liefern, sind sie natürlich nur a posteriori berechenbar.

### 15.3.2 Indikatoren für die geschätzten Parameter

Mit den Beziehungen (15.1.18) bzw. (15.2.14) kann der Einfluss eines groben Fehlers auf zu schätzenden Parameter berechnet werden. Für die zu schätzenden Lagekoordinaten des j-ten Neupunktes erhält man für die i-te Beobachtung zwei punktsymmetrische Vektoren der Form:

MdkQ: 
$$\nabla \bar{x}_i^j = \begin{bmatrix} \pm \nabla y_i^j \\ \pm \nabla x_i^j \end{bmatrix} \quad (15.3.10)$$

BIBER-Schätzer: 
$$\nabla \bar{x}_{iROB}^{*j} = \begin{bmatrix} \pm \nabla y_{iROB}^{*j} \\ \pm \nabla x_{iROB}^{*j} \end{bmatrix} \quad (15.3.11)$$

Wird diese Berechnung für alle n Beobachtungen durchgeführt, so erhält der j-te Neupunkt ein Vektorbüschel mit 2n Vektoren. Dieses sehr schwierig zu interpretierende Vektorbüschel kann durch geeignete Kenngrößen vereinfacht und graphisch dargestellt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, dieses Vektorbüschel durch ein Rechteck, dessen Länge durch den betragsmässig grössten Vektor, dessen Breite durch die längste Projektion eines Vektors auf die senkrecht zum längsten Vektor stehende Achse bestimmt wird, zu ersetzen (vgl. Abb. 15.4).

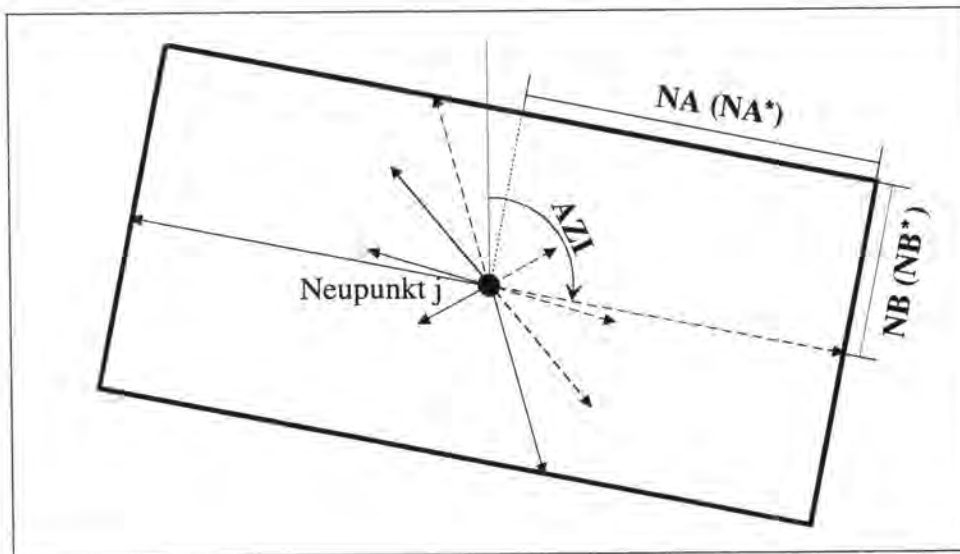


Abb. 15.4: Zuverlässigkeitsrechteck (NA, NB bzw. NA\*, NB\*)

Die beiden halben Rechteckslängen NA und NB (MdkQ) bzw. NA\* und NB\* (BIBER-Schätzer) sind, zusammen mit dem Azimut (AZI) von NA (NA\*), mögliche statistische Kenngrößen für die äussere Zuverlässigkeit von geschätzten Lagekoordinaten.

Verschiedene weitere Varianten der Darstellung der äusseren Zuverlässigkeit sind in [WICKI 1991] dargestellt.

Die Bestimmung der äusseren Zuverlässigkeit der Höhe eines Punktes ist, im Gegensatz zur Lage, nur ein eindimensionales Problem. Für die  $\nabla l_i$  (MdkQ) bzw.  $\nabla l_i^*$  (BIBER-Schätzer) der i-ten Höhenbeobachtung erhält man für die Höhe des j-ten Neupunktes eine skalare Grösse, die als Intervall interpretiert werden kann:

MdkQ: 
$$\nabla x_i^j = \pm \nabla h_i^j \quad (15.3.12)$$

BIBER-Schätzer: 
$$\nabla x_{iROB}^{*j} = \pm \nabla h_{iROB}^{*j} \quad (15.3.13)$$

Für alle  $n$  Höhenbeobachtungen ergeben sich  $n$  Intervalle, das Grösste dieser Intervalle definiert das *Zuverlässigkeitsintervall*  $NH$  ( $NH^*$ ) als *statistische Kenngrösse der äusseren Zuverlässigkeit von geschätzten Punkthöhen*.

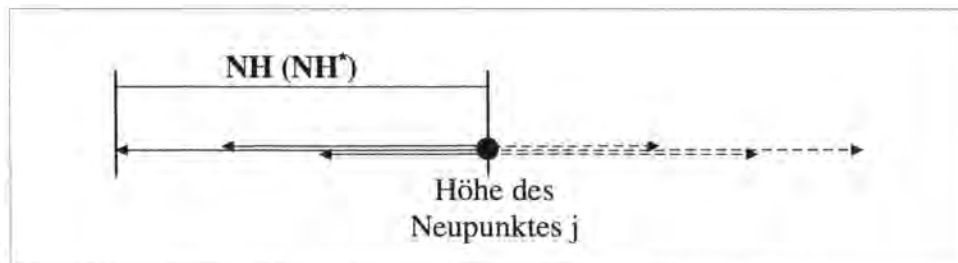


Abb. 15.5: Zuverlässigkeitsintervall ( $NH$  bzw.  $NH^*$ )

Es ist zu beachten, dass infolge der unterschiedlichen Definition der äusseren Zuverlässigkeit bei der Ausgleichung nach der MdkQ (vgl. Kap. 15.1.5) bzw. der robusten Ausgleichung (Kap. 15.2.4) auch die Bedeutung der Rechtecke bzw. Intervalle verschieden ist.

Währenddem bei der MdkQ die Rechtecke und Intervalle (bzw. die Indikatoren  $NA/NB$  bzw.  $NH$ ) dokumentieren, welcher maximale Einfluss ein mit dem Testverfahren nicht entdeckbarer grober Fehler auf die Koordinaten bzw. Höhen ausüben würde, beschreiben die ( $NA^*/NB^*$  bzw.  $NH^*$ ) bei robuster Ausgleichung den maximalen Einfluss eines groben Fehlers auf die Koordinaten bzw. Höhen.

Da inkonsistente Beobachtungen bei der robusten Ausgleichung einen grossen Teil ihrer Kontrollfunktion verlieren, beschreiben diese "robusten" Rechtecke die tatsächlich nach den Messungen bestehenden Zuverlässigkeitsverhältnisse.

Der Art. 34 der [TVAV] bestimmt, dass bei Fixpunkten die äussere Zuverlässigkeit durch *geeignete statistische Kenngrössen* nachzuweisen ist. Die beschriebenen Rechteckseiten bzw. Höhenintervalle entsprechen den für die amtliche und Landesvermessung der Schweiz gebräuchlichen Kenngrössen. In der Richtlinie für die Bestimmung von Fixpunkten [RICHTLINIEN 1996] sind die erlaubten Toleranzwerte definiert.



## 16. Ablauf der Berechnung, numerische Probleme

Dieses Kapitel behandelt die Integration der bisher beschriebenen Algorithmen in das bestehende Ausgleichungsprogramm LTOP, beschreibt die notwendigen Berechnungsschritte und zeigt auf, in welchen Fällen numerische Probleme auftreten können.

Der detaillierte Ablauf der Berechnungen kann dem Schema am Ende dieses Kapitels (Abb. 16.1) entnommen werden.

### 16.1 Vorbereitung

Als Vorbereitungsarbeiten müssen in einem ersten Schritt die Messungen aufbereitet werden (Meteorologische Korrektur an den Distanzen, Transformation der GPS-Messungen ins Landeskoordinatensystem, ...).

Daneben wird das stochastische Modell (die Standardabweichungen a priori der Messungen) festgelegt.

Zusätzlich müssen für die unbekannt Parameter normalerweise, da die Beobachtungsgleichungen (vgl. 6.1.1)

$$\bar{l}_i = l_i + v_i = F_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_u) \quad (\text{für } i = 1, \dots, n) \quad (16.1.1)$$

nichtlineare Funktionen  $F_i$  enthalten, vorgängig der Ausgleichung Näherungswerte (normalerweise Näherungskordinaten)  $x_{0j}$  ( $j = 1, \dots, u$ ) bestimmt werden. Die  $\xi_j$  sind die Differenzen zwischen den ausgeglichenen und den genäherten Unbekannten. Sie werden als Unbekannte mit der Ausgleichung berechnet.

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{\xi} = \begin{bmatrix} x_{01} + \xi_1 \\ \vdots \\ x_{0j} + \xi_j \\ \vdots \\ x_{0u} + \xi_u \end{bmatrix} \quad (16.1.2)$$

## 16.2 1. Phase der Ausgleichung

Eine Linearisierung mittels einer Reihenentwicklung nach Taylor überführt die Beobachtungsgleichungen (16.1.1) in die n Verbesserungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 v_i &= l_i - F_i(x_{01}, \dots, x_{0j}, \dots, x_{0u}) + &= & -f_i + \\
 &\frac{\partial F_i}{\partial x_1}(x_{01}, \dots, x_{0j}, \dots, x_{0u})\xi_1 + && a_{i1}\xi_1 + \\
 &\vdots && \vdots \\
 &\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_{01}, \dots, x_{0j}, \dots, x_{0u})\xi_j + && a_{ij}\xi_j + \\
 &\vdots && \vdots \\
 &\frac{\partial F_i}{\partial x_u}(x_{01}, \dots, x_{0j}, \dots, x_{0u})\xi_u && a_{iu}\xi_u
 \end{aligned} \tag{16.2.1}$$

bzw.

$$\tilde{v} = A\bar{x} - \tilde{f}$$

mit

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1u} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iu} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix} \quad \tilde{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_j \\ \vdots \\ \xi_u \end{bmatrix}$$

Die Glieder 2. und höherer Ordnung werden dabei vernachlässigt.

Anschliessend werden die Normalgleichungen erstellt und invertiert sowie die  $Q_{vv}$ -Matrix berechnet.

Nun entscheidet sich, ob eine robuste Ausgleichung mit dem BIBER-Schätzer oder eine Ausgleichung nach der MdkQ durchgeführt wird.



Diese Wahl wird durch den Benutzer vor Beginn der Berechnung getroffen, indem er für den Grenzwert  $c$  des BIBER-Schätzers (vgl. Kap. 11) einen Wert  $c > 0$  (= robuste Ausgleichung) oder  $c = 0$  (= Ausgleichung nach der MdkQ) eingibt.

```
LTOP 94.2.2 - IBM-PC(LAH/xxxxx) 13/06/95 16:10
(2) Allgemeine Programmsteuerung
-----
- PROGRAMMVERSION --
<1> Programmversion [2/3/4/5]: 4
<2> Rundung im Output [Stellen]: 2
<3> Lotabw.+Geoidh. verwenden [j/N j/N]: J J
<4> Robuste Ausgleichung [k k]: 3.5 3.5
- ANSCHLUSSPUNKTE --
<5> Anschl.Pkt. als Beob. [j/N j/N]: J J
<6> MF Lagekoord. und Höhe [mm mm]: 10.0 10.0
- ABBRUCHKRITERIEN und PROVVISORISCHE ABRISSE ---
<7> Anzahl Iterationen [L H]: 10 5
<8> Abbruchschranke [mm] [L H]: 20.00 20.00
<9> Nur provisorische Abrisse [j/N j/N]:
- PRAEANALYSE ---
<0> Präanalyse rechnen ? [j/N j/N]: J J
-----
Weitere Befehle : <X> | <E> | <Q> | <S> | <P> | <N> | <U> | <M>
Wähle :
```

Tab. 16.1: Wahl der robusten Ausgleichung über die Maske 2 im Programm LTOP (aus [GUBLER 1994])

#### 4.3.4 Option 2.4: Robuste Ausgleichung

Die robuste Ausgleichung erlaubt, grobe Fehler in den Daten aufzuspüren und deren Einfluss auf die Ausgleichung zu minimieren. Mit dieser Option können für Lage- und Höhenausgleichung die Grenzwerte für die standardisierten Verbesserungen  $k$  für die robuste Ausgleichung gewählt werden. Mit einer Null wird verlangt, dass die Ausgleichung vermittelnd, also nicht robust durchgeführt wird [KA=17ROBUST, Pos. 17 und 29].

Voreingestellt:	je 2,5	für Lage- und Höhenausgleichung
1. Eingabe:	xx.xx	Grenzwert für die Lage oder Null
2. Eingabe:	xx.xx	Grenzwert für die Höhe oder Null

Tab. 16.2: Beschreibung der entsprechenden Option gem. Tab. 16.1 (aus [WICKI 1992])

## 16.3 2. Phase: Robuste Ausgleichung

Schlechte Näherungswerte führen zu schlechten Koeffizienten  $a_{ij}$  der Designmatrix  $A$  (vgl. 16.2.1). Dies wiederum kann bei der robusten Parameterschätzung dazu führen, dass sehr viele standardisierte Verbesserungen  $w_i$  den Grenzwert  $c$  überschreiten, was zu Konvergenzproblemen bei den Iterationen (vgl. Kap. 12) führen kann. Entweder führen diese zum Abbruch der Berechnung oder lassen zumindest die Anzahl Iterationen und somit die Rechenzeit sehr gross werden. Dieser Umstand hat zur folgenden Problemlösung geführt:

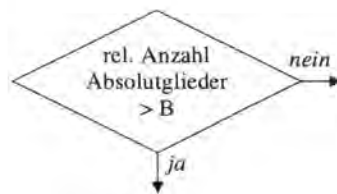
Die Absolutglieder  $f_i$ , die als Differenz zwischen den Beobachtungen und den Beobachtungsnäherungen (aus den Beobachtungsgleichungen und den Näherungswerten berechnet) bestimmt werden, sind ein Mass für die Güte (bzw. deren Abweichung von der Lösung) der Näherungswerte.

Daher werden die Absolutglieder  $f_i$  anhand des Grenzwertes

$$A = 500 \sigma_i \quad (16.3.1)$$

überprüft.

Falls nun viele Absolutglieder grösser als der bezeichnete Grenzwert sind, wird, sofern mehr als  $B = 40\%$  der Absolutglieder grösser als  $A$  sind, intern anstelle von  $c$  ein grösserer Grenzwert  $D$  verwendet.

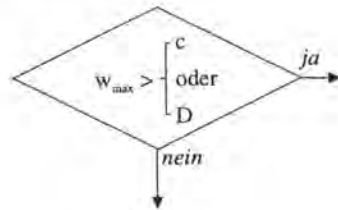


Dieser grössere Grenzwert wird wie folgt bestimmt:

$$D = c + (|w_i| - c)0.9 \quad (16.3.2)$$

Mit diesem Grenzwert  $D$  werden neue Unbekannte berechnet und ein neues Absolutglied bestimmt. Anschliessend wird geprüft, ob weitere Beobachtungen ein  $|w_i| > D$  aufweisen und gegebenenfalls diese ebenfalls reduziert. Die Idee der Vergrösserung des Grenzwertes besteht darin, den Grenzwert den schlechten Näherungskordinaten anzupassen, um damit in einem ersten Schritt die Näherungskordinaten verbessern zu können.

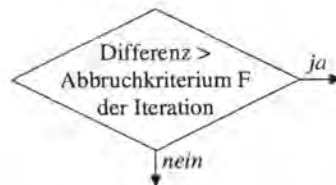
Im Normalfall, d.h. bei ausreichend genauen Näherungskoordinaten, erweist sich eine Vergrößerung des Grenzwertes als unnötig. In diesem Fall wird die Verbesserung mit der grössten standardisierten Verbesserung gesucht und geprüft, ob diese grösser ist als der gewählte Grenzwert der robusten Ausgleichung  $c$ .



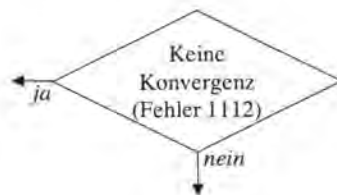
Falls ja, wird das Absolutglied dieser Beobachtung reduziert und es werden neue Unbekannte berechnet. Dieses Vorgehen wiederholt sich für alle Beobachtungen, die ein  $|w_i| > c$  aufweisen. Falls mehr als eine Beobachtung den robusten Intervallen ( $|w_i| > c$ ) zugeordnet ist, müssen zusätzliche Iterationen durchgeführt werden, die die entsprechenden Absolutglieder derart verändern, dass ihr  $|w_i| = c$  wird.

Das Abbruchkriterium  $F$  der Iteration wird wie folgt definiert:

$$F = (|w_i| - c) > \begin{cases} c \cdot 0.05 \\ \text{oder} \\ D \cdot 0.05 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{für alle Beobachtungen in} \\ \text{den robusten Intervallen} \end{array} \quad (16.3.3)$$



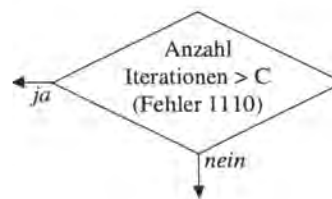
Bei diesem Algorithmus wird vor jedem Iterationsschritt geprüft, ob die aktuelle Beobachtung bereits einmal mit einem  $w_i$  der gleichen Grösse vorgekommen ist. Falls dies zutrifft, weist das Berechnungsverfahren keine Konvergenz auf und die Berechnung wird mit einer Fehlermeldung abgebrochen (Lageausgleichung Fehler 1112, Höhenausgleichung Fehler 1212).



1112 (Lage) 1212 (Höhe)	Robuste Ausgleichung: Der Algorithmus konvergiert nicht. Möglicherweise sind die Näherungskordinaten oder zu viele Beobachtungen grob falsch. In diesem Fall müssen zuerst die Koordinaten oder die Messungen bereinigt werden.
----------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tab. 16.3: Fehlermeldung (aus [WICKI 1992])

Zusätzlich wird die Anzahl der durchgeführten Iterationen gezählt und mit einem Grenzwert C verglichen. Wird dieser Grenzwert überschritten, so scheint das Berechnungsverfahren ebenfalls Konvergenzprobleme aufzuweisen, was zu einem Abbruch führt. (Lageausgleichung Fehler 1110, Höhenausgleichung Fehler 1210). Die maximal zulässige Anzahl Iterationen ist momentan  $C = 100$ .

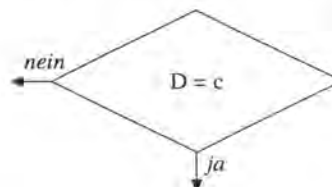


1110 (Lage) 1210 (Höhe)	Robuste Ausgleichung: Die erlaubte Anzahl Iterationen (angegabene Zahl) für die Zuordnung der Beobachtungen zu den korrekten Intervallen ist erreicht. Die Berechnungsverfahren konvergiert nicht. Die Ausgleichung muss mit einem grösseren Grenzwert c wiederholt werden.
----------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Tab. 16.4: Fehlermeldung (aus [WICKI 1992])

Nach Abschluss dieser ersten Phase der robusten Ausgleichung wird die Grösse  $\beta$  zur Berechnung von  $s_0$  (vgl. 13.2.5), die fiktiven Gewichte  $p_i^*$  (vgl. 12.3.8), und die fiktiven Normalgleichungen berechnet, die fiktive Normalgleichungsmatrix invertiert und die fiktive  $Q_{vv}^*$  Matrix  $Q_{vv}^*$  (vgl. 12.3.9) bestimmt.

Nach Abschluss der robusten Ausgleichung wird, falls der Grenzwert D grösser ist als der Grenzwert c und falls dies die Anzahl erlaubter Berechnungsschritte E zulässt, eine weitere Berechnung mit neuen, verbesserten Näherungskordinaten durchgeführt.



Die Eingabe der Anzahl der Berechnungsschritte E erfolgt durch den Benutzer getrennt für den Lage- und den Höhenausgleich. Reicht die erlaubte Anzahl Berechnungsschritte E nicht aus, so wird dies mit einer Fehlermeldung angezeigt (Lageausgleichung Fehler 1111, Höhenausgleichung Fehler 1211).



1111 (Lage)	Robuste Ausgleichung: Die erlaubte Anzahl Iterationen (angegebene Zahl) reicht nicht aus, um für das Berechnungsverfahren der robusten Ausgleichung eine ausreichende Konvergenz zu erreichen. Die Ausgleichung muss mit einer grösseren Anzahl erlaubter Iterationen wiederholt werden. Wird auch bei einer grösseren Anzahl Iterationen keine Konvergenz erreicht, so sind entweder die Näherungskordinaten oder zu viele Beobachtungen grob falsch. In diesem Fall müssen zuerst die Koordinaten oder die Messungen bereinigt werden.
1211 (Höhe)	

Tab. 16.5: Fehlermeldung (aus [WICKI 1992])

Dabei ist zu beachten, dass die Distanzreduktion bei einer erneuten Berechnung nicht einbezogen wird, was bei sehr schlechten Näherungskordinaten zu unpräzisen Resultaten führen kann.

Die Berechnung der Zuverlässigkeitsindikatoren, der Genauigkeitsmasse und von  $\sigma_0$  erfolgt parallel zum Ausdruck der Abrisse.

## 16.4 Darstellung im LTOP-Listing

Wird mit LTOP eine robuste Ausgleichung berechnet, so wird dies an zwei verschiedenen Stellen im Listing deutlich:

- Einerseits wird im Titel des Lage- oder Höhenabrisses angezeigt, dass die Resultate mit einer robusten Ausgleichung berechnet wurden (vgl. Tab. 16.7).
- Andererseits wird in der statistischen Zusammenstellung der Grenzwert der robusten Ausgleichung, getrennt für Lage und Höhe, ausgewiesen. Bei einer Ausgleichung nach der MdkQ steht im betreffenden Feld 'N.ROB.' für 'nicht robust' (vgl. Tab 16.6).

Die im Kapitel (15.4.1) erwähnten Zuverlässigkeitsindikatoren werden im LTOP-Listing wie folgt integriert:

Die  $z_i^*$  (**R-ZI**) (15.3.2) anstelle der NABLA (15.3.4) und die  $g_i^*$  (**R-GI**) (15.3.9) anstelle der GI (15.3.8).

Zusätzlich werden die Beobachtungen, die ein  $|v_i| \geq k_i$  haben, zwischen der Kolonne R-ZI und WI mit einem **R** gekennzeichnet (vgl. Tab. 16.7).

```

Mutation Zu 93/01
Beispiel 2

M. FEHLERQUOT. TOTAL:
OHNE RUNDUNG (Q^):
SCHLUSSKONTROLLE
WAHRSCH. DASS Q </> Q^: N. BER. N. BER.
ANZAHL BEOBACHTUNGEN
ANZAHL UNBEKANNTEN
UEBERBESTIMMUNGEN
SIGNIFIKANTE STELLEN
MAX. M. KOORD. FEHLER
ITERATIONEN (MAX.)
MAX. AEND. LETZTE IT.
ABBRUCHSCHRANKE
GRENZWERT ROB. AUSGL.
RECHENZEIT
Y,X,H NACH RUNDUNG
ANZAHL STATIONEN
BEOBACHTUNGSZEILEN

LAGE      HOEHE
2.14      1.48
2.14      1.48
41.7 MM   17.0 MM
1 ( 1)    1 ( 1)
20.0 MM   3.4 MM
20.0 MM   20.0 MM
3.50      3.50
0.0 SEK. (CPU)
4 DEZ.

FILENAMEN:
-----
EINGABEFILE: 9301_2
K-FILE (NEU): 9301.koo
M-FILE (NEU): 9301_2.mes

DRUCKERFILE: 9301_2.prn
KOORD.-FILE:
PLOT-FILE: 9301_2.ipl
A_MATRIX: (NICHT VORGESEHEN)
USERNAME: (NICHT VORGESEHEN)

MITTLERE FEHLER DER BEOBACHTUNGSGRUPPEN:
DISTANZEN (MF FUER 1KM):
MST-KORR IN PPM      ADD-KORR IN MM
MST  KORR  MF      ADD  KORR  MF  GR
3      247.77  420.84
RICHTUNGEN (MF:1KM):
KOORDINATEN (GPS) :

HOEHENDIFF (MF:1KM HOR):
HOEHEN      (GPS) :

LAGE - NEUPUNKTE: ANZAHL = 4
50.324      .2      50.324      .3      50.324      .8      50.327      .1

HOEHEN-NEUPUNKTE: ANZAHL = 2
50.324      .8      50.327      .1
    
```

Tab. 16.6: Ausschnitt des Titelblattes einer LTOP-Ausgleichung: Angabe des Grenzwertes der robusten Lage- und Höhenausgleichung.

```

ROBUSTE AUSGLEICHUNG: LAGE - ABRISS
*****
MITTL. FEHLER A PRIORI VON REDUZIERTEN DISTANZEN, RICHTUNGEN UND AZIMUTEN
DISTANZ-GRUPPE  ZENTR.  A      B      C      M.F.  F. 1KM
DM503           3      2.00 MM  2.00 MM  2.00 MM/KM  0.00 MM/KM2  4.47 MM
RICHTUNGEN     1      2.00 MM  6.00 CC      6.13 CC
KOORD (GPS)
5.00 MM

NR  PUNKT  TYP  NR  OR/BEOB.  GR  KORR.  VERB.  M.F.  ZI  R-ZI  WI  R-GI  AZI.  AUS  DIST.  AUS  QUER-
      G/M   CC/MM  CC/MM  CC/MM  %    %    %    %    CC/MM  KOORD.(G)  KOORD.(M)  MM
-----
50.225  .1      330.15696      7.9      WB 34/44
-----
1  50.129  .8      0.0000  1      -17.  6.0  63.  63  -2.4      330.1558  1673.763  -31.
2  50.324  .8  N    181.3338  1      4.    6.0  51.  48  1.0      111.4912  1690.427  12.
3  50.333  .1      213.9998*  1      7.    6.0  62.  61  1.5      144.1575  2904.488  32.
-----
50.324  .2  N    319.96218      12.9      WB 34/45
-----
4  50.129  .8      0.0000  1      4.    6.0  4.   0  3.3      319.9626  3234.266  19.
5  50.324  .8  N    227.1831  1      0.    13.8  3.   0  0.0      147.1453  102.800  0.
6  50.324  .3  N    280.4416*  1      -9919.  22.4  46.  99  R*****  9980  199.4119  58.927  -918.
    
```

Tab. 16.7: Neuerungen im Abrissformular des LTOP-Listings (Lage- und Höhenabriss)

In der zum Abriss gehörenden Statistik wird die Anzahl der  $w_i$ , deren Absolutwert grösser als der Toleranzwert, angegeben. Anschliessend sind die 5  $w_i$  mit dem grössten Absolutwert



aufgeführt. Anstelle der Grenze der entdeckbaren Fehler und dem Fehler 2. Art wird die Grösse des **Verschiebungsfaktors**  $\delta_i^*$ , des **Unsicherheitsfaktors**  $\tau_w$  und der entsprechenden **Wahrscheinlichkeit**  $\beta$  ausgedrückt (vgl. Kap. 15.2.2).

```

STATISTIK
*****
 10 WI GROESSER  3.5,          GROESSTER WERT 649.3 BEI BEOBACHTUNG NUMMER  0

DIE 5 GROESSTEN WI AUSSER TOLERANZ
*****
   BEOB  TYP  ABS(WI)
 1      6   RI    649.3
 2     14   DS    460.0
 3     42   LY    235.1
 4     43   LY    229.3
 5     28   LY     28.6

VERSCHIEBUNGSFAKTOR:  5.14,    UNSICHERHEITSAKTOR:  1.64  (ENTSPRICHT EINER WAHRSCHEINLICHKEIT VON  5 %)
    
```

Tab. 16.8: Statistik zum Lage- bzw. Höhenabriss im LTOP-Listing

Die grosse und kleine Halbachse der Zuverlässigkeitsrechtecke bzw. die Grösse des Zuverlässigkeitsintervalles in der Höhe werden mit **R-NA**, **R-NB** bzw. **R-NH** bezeichnet (vgl. Kap. 15.3.2).

```

AEUSSERE ZUVERLAESSIGKEIT UND MITTLERE FEHLERELLIPSEN A PRIORI
*****
PUNKT  TYP  TK  R-NA  R-NB  AZI (NA)  R-NH  NR.A  NR.B  NR.H  DY  DX  DH  MFA  MFB  MPAZ  MFH
      MM  MM  G      MM  MM  G      MM
50.324  .2  176.0  53.8  43.8  106.3  30.1  40  41  10  9.9  17.8  5.8  5.0  -21.3  11.5
50.324  .3  176.0  144.5  399.9  10  9  16  5  49  4.3  13.4  11.0  5.6  0.5  11.5
50.324  .8  83.4  59.5  353.1  30.1  16  5  49  20.0  10.7  3.1  19.5  5.5  -57.4  11.5
50.327  .1  20.7  6.6  269.1  9.3  10  13  54  18.5  8.8  -3.4  3.2  1.4  69.4  3.0
    
```

Tab. 16.9: Äussere Zuverlässigkeit im LTOP-Listing

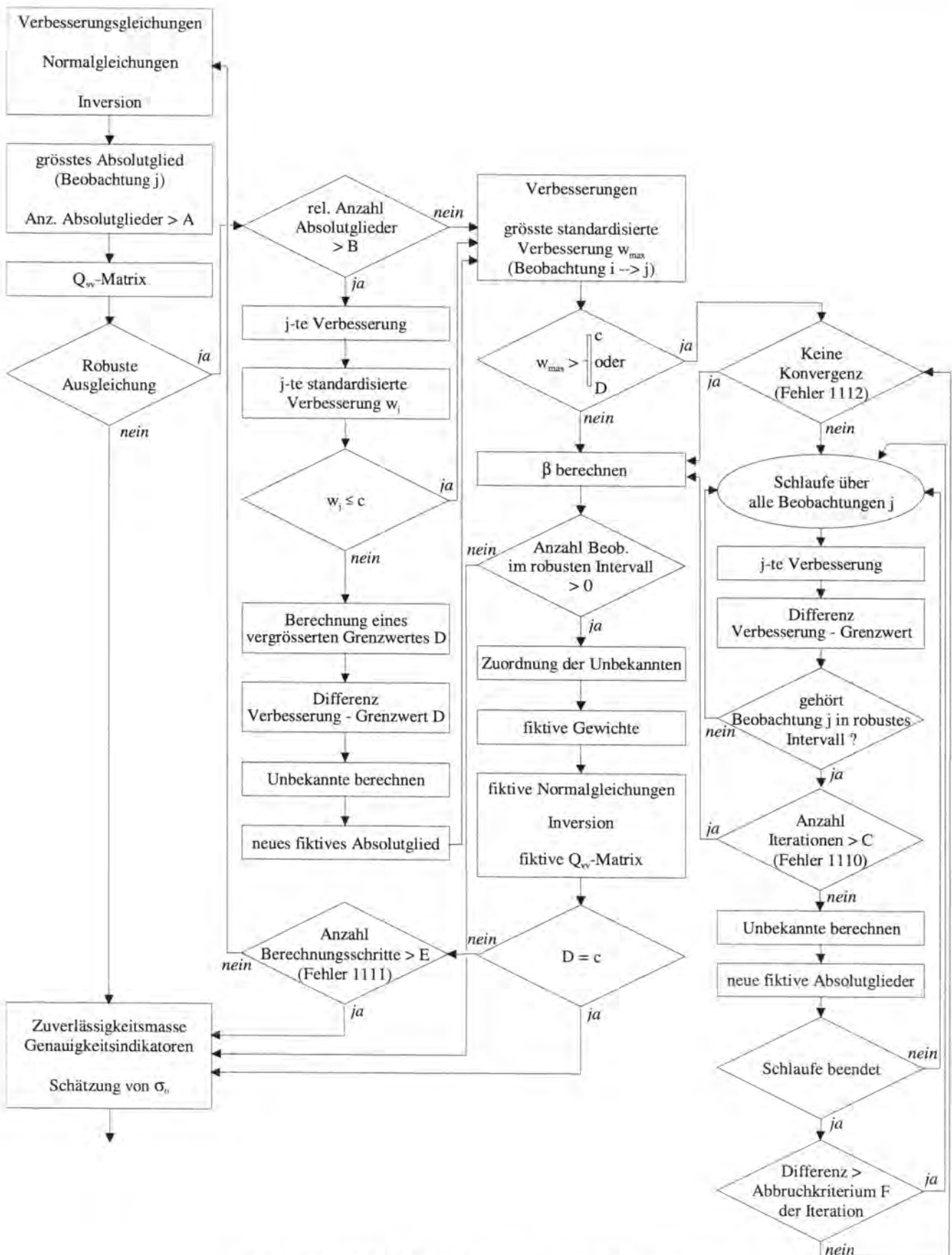


Abb. 16.1: Ablauf der robusten Ausgleichung im LTOP

## 17. Berechnung der Näherungsorientierung

Neben den zu schätzenden Koordinaten der Neupunkte tritt bei Richtungsmessungen pro Richtungssatz eine weitere Unbekannte, die Orientierung  $O$ , in Erscheinung. Diese Unbekannte entsteht aus der Tatsache, dass die gemittelten Richtungen eines Satzes auf eine in der Horizontalebene willkürlich orientierte Nullrichtung bezogen sind (vgl. Abb. 17.1).

Das Rechenschema zur Orientierung eines Richtungssatzes wird in der Terminologie des Vermessungswesens als Richtungsabriss bezeichnet.

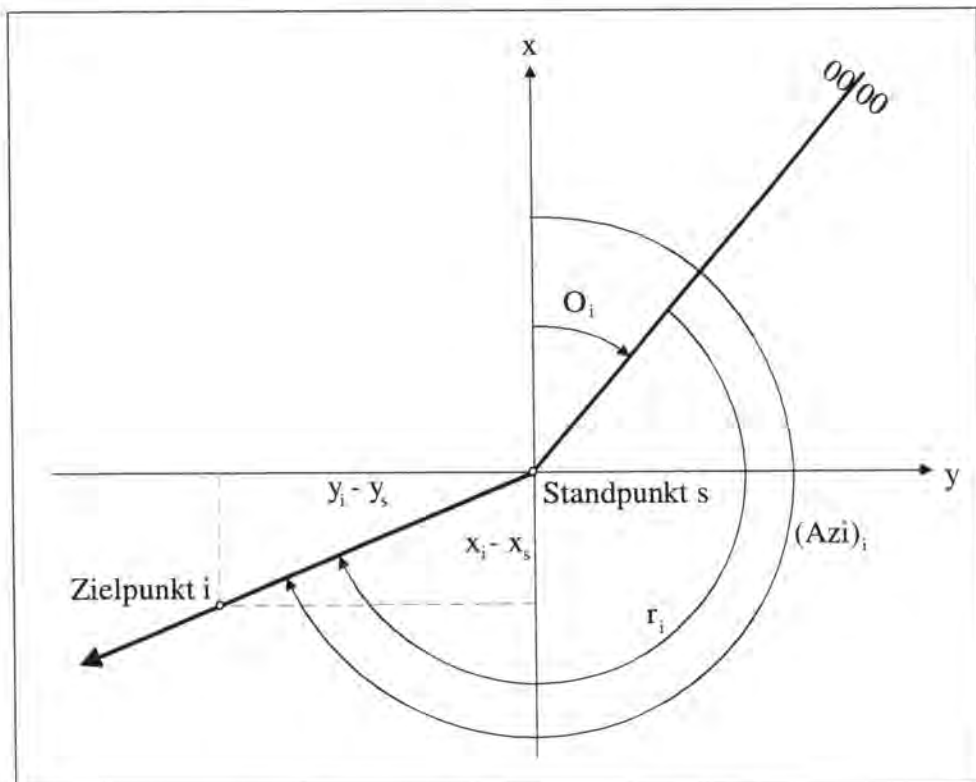


Abb. 17.1: Orientierungsunbekannte

Da die Beobachtungsgleichungen für die Schätzfunktionen linearisiert werden müssen, werden für alle Unbekannten, somit auch für die Orientierung, Näherungswerte benötigt.

## 17.1 Gewichtetes arithmetisches Mittel

Häufig wird die Näherungsorientierung  $O_0$  eines Richtungssatzes unter Verwendung der bekannten (bei Festpunkten) oder genähert bestimmten (bei Neupunkten) Koordinaten der Punkte als *gewichtetes arithmetisches Mittel* wie folgt berechnet:

$$O_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{p}_i O_i}{\sum_{i=1}^n \hat{p}_i} \quad (17.1.1)$$

mit  $O_i = (Azi)_i - r_i$  (17.1.2)

$$(Azi)_i = \arctan \frac{y_i - y_s}{x_i - x_s} + u \cdot 200^g \quad \begin{array}{l} u = 0 \text{ für: } (x_i - x_s) > 0 \\ u = 1 \text{ für: } (x_i - x_s) < 0 \end{array} \quad (17.1.3)$$

Dabei bedeuten:

- $O_0$ : Näherungsorientierung
- $r_i$ : gemessene Richtung
- $O_i$ : Einzelorientierung
- $(Azi)_i$ : Näherungsazimut
- $\hat{p}_i$ : Gewicht der Einzelorientierung
- $n$ : Anzahl Richtungen des Satzes
- $y_i, x_i$ : Koordinaten der Zielpunkte
- $y_s, x_s$ : Koordinaten des Standpunktes

Bei schlechten Näherungskoordinaten oder falls eine der beobachteten Richtungen einen groben Fehler aufweist, wird die Einzelorientierung um den Betrag  $\Delta_i$  verfälscht.

$$O_i + \Delta_i = (Azi)_i - r_i + \Delta_i \quad (17.1.4)$$

Die Verfälschung der Näherungsorientierung  $\Delta_0$  durch einen Fehler  $\Delta_i$  in der  $i$ -ten Einzelorientierung  $O_i$  lässt sich mit (17.1.2) und (17.1.4) wie folgt berechnen:

$$\Delta_0 = \frac{\hat{p}_i \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \hat{p}_i} \quad (17.1.5)$$

Diese Beziehung verdeutlicht, dass ein grober Fehler  $\Delta_i$  linear in den Schätzwert übertragen wird (vgl. Kap. 9.2.1).

Eine schlechte Näherungsorientierung führt bei der Ausgleichung zu grossen Verbesserungen für alle Richtungsmessungen dieses Satzes. Dadurch können beim BIBER-Schätzer Konvergenzprobleme auftreten, da alle  $w_i$  der Richtungsmessungen dieses Satzes grösser sind als der Grenzwert  $c$  und somit lokal der Bruchpunkt überschritten wird.

## 17.2 Gewichteter „Median“

Der Median ist der Mittelwertschätzer mit dem höchsten Bruchpunkt von 0.5. Die L1-Norm-Schätzung mit gegebenen, unterschiedlichen Gewichten führt nur unter speziellen Bedingungen zu einer Lösung.

Um trotzdem das unterschiedliche Gewicht der einzelnen Richtungen zu berücksichtigen, wird ein neuer Mittelwertschätzer, der *gewichtete „Median“*, entwickelt. Dieser Schätzer erfüllt die L1-Norm nicht, zeichnet sich aber durch einen sehr hohen Bruchpunkt aus.

In einem ersten Schritt wird die mittlere Orientierung  $O_{(m)}$  ermittelt, für die gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^m \hat{p}_{(i)} - \sum_{i=m+1}^n \hat{p}_{(i)} \right| = \min \quad \text{für } m \in (1, \dots, n-1) \quad (17.2.1)$$

mit geordneten Orientierungen

$$O_{(1)} \leq O_{(2)} \leq \dots \leq O_{(n)}.$$

Die Beziehung (17.2.1) ist gleichbedeutend mit:

$$\left| 2 \cdot \sum_{i=1}^m \hat{p}_{(i)} - \sum_{i=1}^n \hat{p}_{(i)} \right| = \min \quad (17.2.2)$$

Stellt man sich die Einzelorientierungen  $O_i$  ihrer Grösse nach geordnet auf einer Zahlengeraden vor, so bedeutet dies anschaulich, dass die Differenz der von „unten“ und „oben“ gebildeten Summe der Gewichte minimal sein soll.

Falls  $\left| 2 \sum_{i=1}^m \hat{p}_{(i)} - \sum_{i=1}^n \hat{p}_{(i)} \right| = \left| 2 \sum_{i=1}^{m+1} \hat{p}_{(i)} - \sum_{i=1}^n \hat{p}_{(i)} \right|$ , dann wird die Näherungsorientierung zu:

$$(a) \quad O_0 = O_{(m+1)} \quad (17.2.3)$$

ansonsten:

$$(b) \quad O_0 = \frac{\left( \sum_{i=1}^m \hat{p}_{(i)} \right) O_{(m)} + \left( \sum_{i=m+1}^n \hat{p}_{(i)} \right) O_{(m+1)}}{\sum_{i=1}^n \hat{p}_{(i)}} \quad (17.2.4)$$

(i)	1	2	3	4	5	6
$p_{(i)}$	3	4	3	3	2	2
$p_{(1)}+\dots+p_{(m)}$	3	7	10	13	15	17
$ 2p_{(i)}-\sum p_{(i)} $	11	3	3	9	13	17
Fall (a)	$m=2 \Rightarrow O_0 = O_{(3)}$					

*Bsp.: gewichteter „Median“ im Fall (a)*

(i)	1	2	3	4	5	6
$p_{(i)}$	3	4	3	4	2	2
$p_{(1)}+\dots+p_{(m)}$	3	7	10	14	16	18
$ 2p_{(i)}-\sum p_{(i)} $	12	4	2	10	14	18
Fall (b)	$m=3 \Rightarrow O_0 = (10 \cdot O_{(3)} + 8 \cdot O_{(4)})/18$					

*Bsp.: gewichteter „Median“ im Fall (b)*

Im speziellen Fall gleich genauer Richtungen ( $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \dots = \hat{p}_n$ ) erhält man im Falle (a) die Medianschätzung für eine ungerade Anzahl, im Fall (b) für eine gerade Anzahl Beobachtungen (vgl. 9.2.12).

Durch die robuste Schätzung der Näherungsorientierung erhalten nur jene Richtungsmessungen, die einen groben Fehler aufweisen, eine grosse standardisierte Verbesserung. Der BIBER-Schätzer kann diese groben Fehler in der Regel problemlos lokalisieren und deren Einfluss reduzieren.

### 17.3 Gewichtung

Das Gewicht  $\hat{p}_i$  einer Einzelorientierung setzt sich zusammen aus der Varianz der beobachteten Richtung und der Varianz des Näherungszimuthes. Dieses wiederum wird bestimmt durch die Varianz der verwendeten Näherungskordinaten.

$$\hat{p}_i = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_{Az}^2} \quad (17.3.1)$$

$$\sigma_{Az}^2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sigma_{Stao}^2 + \sigma_{Ziel}^2}}{D}\right) \rho^{cc} \quad (17.3.2)$$

mit

- $\hat{p}_i$  : Gewicht einer Einzelorientierung
- $\sigma_1$  : Standardabweichung der gemessenen Richtung
- $\sigma_{Az}$  : Standardabweichung des Näherungszimuthes
- $\sigma_{Stao}$  : Standardabweichung der Koordinaten des Stationspunktes
- $\sigma_{Ziel}$  : Standardabweichung der Koordinaten des Zielpunktes
- D : Distanz zwischen Stations- und Zielpunkt
- $\rho^{cc}$  : 636619.77

Häufig wird bei der Gewichtsbestimmung die Varianz des Näherungszimuthes vernachlässigt, was sich, vor allem bei kurzen Visuren und ungenau bekannten Koordinaten des Stations- und Zielpunktes, negativ auf die geschätzte Näherungsorientierung auswirkt.

Im Programm LTOP wird für  $\sigma_{Stao}$  und  $\sigma_{Ziel}$  10 cm angenommen, falls es sich um einen Neupunkt handelt. Festpunkte werden als fehlerfrei betrachtet.

## 18. Beispiele

### 18.1 Näherungsorientierung Richtungssatz LFP3-Netz Aarau, Los 6

Das erste Beispiel behandelt die Problematik der Berechnung der Näherungsorientierung (vgl. Kap. 17). Anhand dieses Beispiels soll das Verhalten des gewichteten Medians bei fehlerlosen und fehlerbehafteten Richtungsmessungen und bei schlechten Näherungskoordinaten illustriert werden.

Die Daten dieses Beispiels stammen aus dem LFP3-Netz des Loses 6 der Stadt Aarau, betrachtet wird ein Richtungssatz.

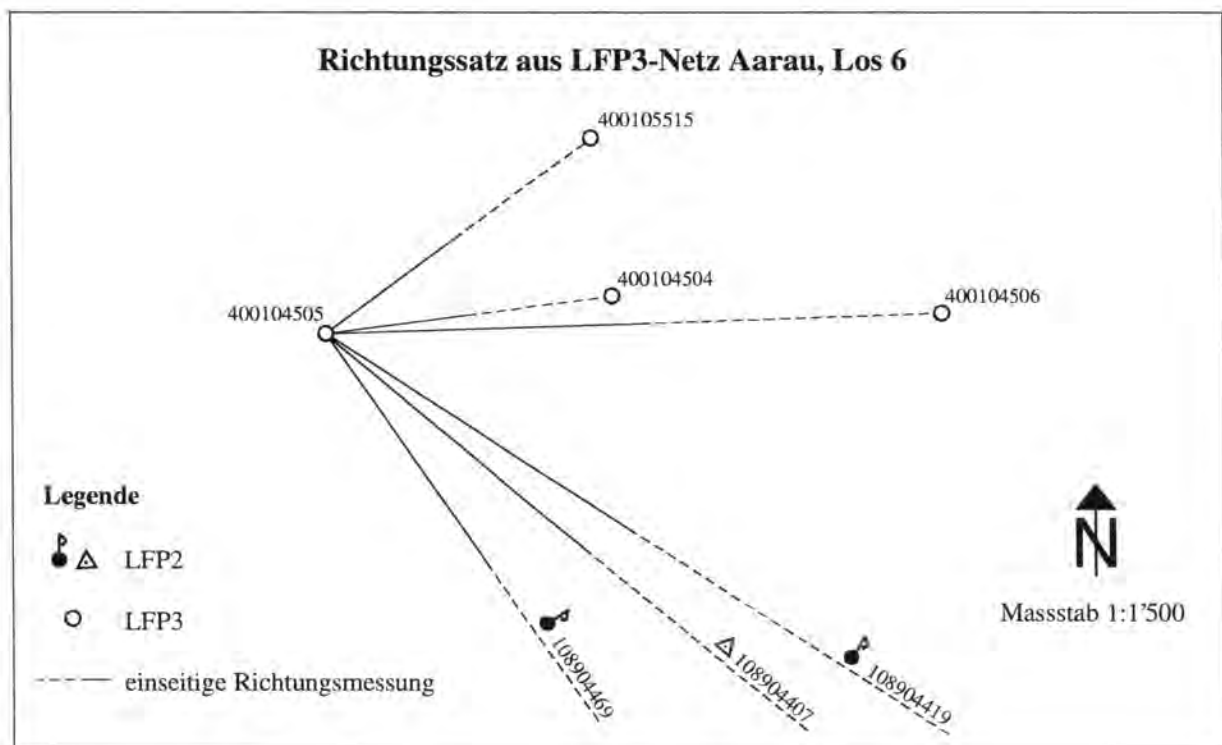


Abb. 18.1: Netzplan Richtungssatz aus LFP3-Netz Aarau, Los 6



### 18.1.1 Provisorischer Abriss ohne Fehler

In einem ersten Schritt wird die Nahrungsorientierung aus den unverfalschten, grobfehler-losen Originaldaten durch das gewichtete arithmetische Mittel (vgl. Kap. 17.1) und den gewichteten Median (vgl. Kap. 17.2) berechnet.

Die Differenz zwischen diesen beiden Berechnungsarten ist mit 2.7<sup>cc</sup> sehr gering (vgl. Tab. 18.3).

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.														
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BOEB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM	AZI. KOORD. (G)	AUS KOORD. (M)	DIST. AUS KOORD. (M)
	400104505		291.94861				0.0							
	400104504		399.9999			0.	22.9					291.9485	57.534	
	400105515		99.9280			11.	40.7					391.8777	31.649	
	400104506		211.2729			10.	20.5					103.2225	64.964	
	108904419		244.8815			5.	6.2					136.8306	899.428	
	108904407		252.0488			-8.	6.1					143.9967	1260.897	
	108904469		269.1165			1.	6.1					161.0652	1142.056	

Tab. 18.1: gewichtetes arithmetisches Mittel (ohne Fehler)

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.														
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BOEB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM	AZI. KOORD. (G)	AUS KOORD. (M)	DIST. AUS KOORD. (M)
	400104505		291.94888				0.0							
	400104504		399.9999	1		-2.	22.9					291.9485	57.534	
	400105515		99.9280	1		9.	40.7					391.8777	31.649	
	400104506		211.2729	1		7.	20.5					103.2225	64.964	
	108904419		244.8815	1		3.	6.2					136.8306	899.428	
	108904407		252.0488	1		-10.	6.1					143.9967	1260.897	
	108904469		269.1165	1		-1.	6.1					161.0652	1142.056	

Tab. 18.2: gewichteter Median (ohne Fehler)

BERECHNETE ORIENTIERUNG			
*****			
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	{0 Fehler):	291.94861	
gewichteter Median [g]	{0 Fehler):	291.94888	Differenz [cc): -2.7

Tab. 18.3: Vergleich der Orientierungen (ohne Fehler)

### 18.1.2 Provisorischer Abriss mit 1 Fehler

Zur Demonstration der robusten Eigenschaften des gewichteten Medians wurde die Richtung zum LFP2 108904407 um +100<sup>cc</sup> verfälscht.

Die mit dem gewichteten arithmetischen Mittel berechnete Orientierung wird, verglichen mit der ersten Berechnung, um 32<sup>cc</sup> verfälscht, währenddem die mit dem gewichteten Median berechnete Orientierung unverändert bleibt.

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.														
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM	AZI. KOORD. (G)	AUS KOORD. (M)	DIST. AUS KOORD. (M)
	400104505		291.94543				0.0							
	400104504		399.9999			32.	22.9					291.9485	57.534	
	400105515		99.9280			43.	40.7					391.8777	31.649	
	400104506		211.2729			42.	20.5					103.2225	64.964	
	108904419		244.8815			37.	6.2					136.8306	899.428	
	<b>108904407</b>		<b>252.0588</b>			<b>-76.</b>	<b>6.1</b>					<b>143.9967</b>	<b>1260.897</b>	
	108904469		269.1165			33.	6.1					161.0652	1142.056	

Tab. 18.4: gewichtetes arithmetisches Mittel (1 Fehler)

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.														
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM	AZI. KOORD. (G)	AUS KOORD. (M)	DIST. AUS KOORD. (M)
	400104505		291.94888				0.0							
	400104504		399.9999	1		-2.	22.9					291.9485	57.534	
	400105515		99.9280	1		9.	40.7					391.8777	31.649	
	400104506		211.2729	1		7.	20.5					103.2225	64.964	
	108904419		244.8815	1		3.	6.2					136.8306	899.428	
	<b>108904407</b>		<b>252.0588</b>	<b>1</b>		<b>-110.</b>	<b>6.1</b>					<b>143.9967</b>	<b>1260.897</b>	
	108904469		269.1165	1		-1.	6.1					161.0652	1142.056	

Tab. 18.5: gewichteter Median (1 Fehler)

BERECHNETE ORIENTIERUNG			
*****			
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(0 Fehler):	291.94861	
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(1 Fehler):	291.94543	Differenz [cc]: 31.8
gewichteter Median [g]	(1 Fehler):	291.94888	Differenz [cc]: -2.7

Tab. 18.6: Vergleich der Orientierungen (1 Fehler)

### 18.1.3 Provisorischer Abriss mit 2 Fehlern

Treten 2 grobe Fehler (Richtung zum LFP2 108904407: + 100 cc, Richtung zum LFP3 400105515: +100 cc), wird wiederum ein ähnliches Resultat wie beim vorherigen Beispiel erzielt (vgl. Tab. 18.9).

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.														
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BOEB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM	AZI. AZI. KOORD. (G)	AUS AUS KOORD. (M)	DIST. AUS DIST. AUS KOORD. (M)
	400104505		291.94536					0.0						
	400104504		399.9999			33.	22.9					291.9485	57.534	
	<b>400105515</b>		<b>99.9380</b>			<b>-56.</b>	<b>40.7</b>					<b>391.8777</b>	<b>31.649</b>	
	400104506		211.2729			42.	20.5					103.2225	64.964	
	108904419		244.8815			38.	6.2					136.8306	899.428	
	<b>108904407</b>		<b>252.0588</b>			<b>-75.</b>	<b>6.1</b>					<b>143.9967</b>	<b>1260.897</b>	
	108904469		269.1165			34.	6.1					161.0652	1142.056	

Tab. 18.7: gewichtetes arithmetisches Mittel (2 Fehler)

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.														
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BOEB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM	AZI. AZI. KOORD. (G)	AUS AUS KOORD. (M)	DIST. AUS DIST. AUS KOORD. (M)
	400104505		291.94871					0.0						
	400104504		399.9999	1		-1.	22.9					291.9485	57.534	
	<b>400105515</b>		<b>99.9380</b>	<b>1</b>		<b>-90.</b>	<b>40.7</b>					<b>391.8777</b>	<b>31.649</b>	
	400104506		211.2729	1		9.	20.5					103.2225	64.964	
	108904419		244.8815	1		4.	6.2					136.8306	899.428	
	<b>108904407</b>		<b>252.0588</b>	<b>1</b>		<b>-108.</b>	<b>6.1</b>					<b>143.9967</b>	<b>1260.897</b>	
	108904469		269.1165	1		0.	6.1					161.0652	1142.056	

Tab. 18.8: gewichteter Median (2 Fehler)

BERECHNETE ORIENTIERUNG			
*****			
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(0 Fehler):	291.94861	
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(2 Fehler):	291.94536	Differenz [cc]: 32.5
gewichteter Median [g]	(2 Fehler):	291.94871	Differenz [cc]: -1.0

Tab. 18.9: Vergleich der Orientierungen (2 Fehler)

### 18.1.4 Provisorischer Abriss mit 3 Fehlern

Bei 3 groben Fehlern (Richtung zum LFP2 108904407: + 100 cc, Richtung zum LFP3 400105515: +100 cc, Richtung zum LFP2 108904419: -100<sup>cc</sup>) wird der Bruchpunkt des gewichteten Medians überschritten und beide Schätzer liefern falsche Resultate (vgl. Tab. 18.12).

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD. *****														
NR	FUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM	AZI. KOORD. (G)	AUS KOORD. (M)	DIST. AUS KOORD. (M)
	400104505		291.94227				0.0							
	400104504		399.9999			64.	22.9					291.9485	57.534	
	<b>400105515</b>		<b>99.9380</b>			<b>-25.</b>	<b>40.7</b>					<b>391.8777</b>	<b>31.649</b>	
	400104506		211.2729			73.	20.5					103.2225	64.964	
	<b>108904419</b>		<b>244.8915</b>			<b>-31.</b>	<b>6.2</b>					<b>136.8306</b>	<b>899.428</b>	
	<b>108904407</b>		<b>252.0588</b>			<b>-44.</b>	<b>6.1</b>					<b>143.9967</b>	<b>1260.897</b>	
	108904469		269.1165			65.	6.1					161.0652	1142.056	

Tab. 18.10: gewichtetes arithmetisches Mittel (3 Fehler)

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD. *****														
NR	FUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	GI CC/MM	AZI. KOORD. (G)	AUS KOORD. (M)	DIST. AUS KOORD. (M)
	400104505		291.93935				0.0							
	400104504		399.9999	1		93.	22.9					291.9485	57.534	
	<b>400105515</b>		<b>99.9380</b>	<b>1</b>		<b>4.</b>	<b>40.7</b>					<b>391.8777</b>	<b>31.649</b>	
	400104506		211.2729	1		102.	20.5					103.2225	64.964	
	<b>108904419</b>		<b>244.8915</b>	<b>1</b>		<b>-2.</b>	<b>6.2</b>					<b>136.8306</b>	<b>899.428</b>	
	<b>108904407</b>		<b>252.0588</b>	<b>1</b>		<b>-15.</b>	<b>6.1</b>					<b>143.9967</b>	<b>1260.897</b>	
	108904469		269.1165	1		94.	6.1					161.0652	1142.056	

Tab. 18.11: gewichteter Median (3 Fehler)

BERECHNETE ORIENTIERUNG *****			
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(0 Fehler):	291.94861	
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(3 Fehler):	291.94227	Differenz [cc]: 63.4
gewichteter Median [g]	(3 Fehler):	291.93935	Differenz [cc]: 92.6

Tab. 18.12: Vergleich der Orientierungen (3 Fehler)

### 18.1.5 Grobe Fehler in Näherungskoodinaten (Zielpunkte)

Im folgenden Beispiel wurden die Näherungskoodinaten für die LFP3-Zielpunkte wie folgt verschlechtert:

400104504	$\Delta Y = +1 \text{ m}$	$\Delta X = -1 \text{ m}$
400104506	$\Delta Y = +1 \text{ m}$	$\Delta X = +1 \text{ m}$
400105515	$\Delta Y = -1 \text{ m}$	$\Delta X = -1 \text{ m}$

Es zeigt sich, dass trotz dieser schlechten Näherungskoodinaten mit dem gewichteten Median eine gute Schätzung der Näherungsorientierung erreicht wird. Dies ist vor allem darauf

zurückzuführen, dass die Festpunkte (LFP2) weiter entfernt sind und daher, infolge des Zentrierfehlers (2 mm) ein grösseres Gewicht erhalten als die LFP3.

Der Querfehler (QUER) beim gewichteten Median (Tab. 18.14) zeigt die Grössenordnung des Fehlers in den Näherungskoodianten.

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.													
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	AZI. AUS KOORD. (G)	DIST. AUS KOORD. (M)	QUER. MM
400104505		N	291.87657				0.0			WB 34/44			
400104504		N	399.9999			-11839.	23.3				290.6925	56.679	-1054.
400105515		N	99.9280			-22401.	41.8				389.5645	30.805	-1084.
400104506		N	211.2729			-9404.	20.2				102.2091	65.921	-974.
108904419			244.8815			726.	6.2				136.8306	899.428	1025.
108904407			252.0488			713.	6.1				143.9967	1260.897	1412.
108904469			269.1165			722.	6.1				161.0652	1142.056	1295.

Tab. 18.13: gewichtetes arithmetisches Mittel (Zielpunkte mit ungenauen Näherungskoodianten)

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.													
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	AZI. AUS KOORD. (G)	DIST. AUS KOORD. (M)	QUER. MM
400104505		N	291.94837				N. B.			WB 34/44			
400104504		N	399.9999	1		-12557.	23.3				290.6925	56.679	-1118.
400105515		N	99.9280	1		-23119.	41.8				389.5645	30.805	-1119.
400104506		N	211.2729	1		-10122.	20.2				102.2091	65.921	-1048.
108904419			244.8815	1		8.	6.2				136.8306	899.428	11.
108904407			252.0488	1		-5.	6.1				143.9967	1260.897	-10.
108904469			269.1165	1		4.	6.1				161.0652	1142.056	7.

Tab. 18.14: gewichteter Median (Zielpunkte mit ungenauen Näherungskoodianten)

BERECHNETE ORIENTIERUNG			
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(0 Fehler):	291.94861	
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(3 Fehler):	291.87657	Differenz [cc]: 720.4
gewichteter Median [g]	(3 Fehler):	291.94837	Differenz [cc]: 2.4

Tab. 18.15 Vergleich der Orientierungen (Zielpunkte mit ungenauen Näherungskoodianten)

### 18.1.6 Grobe Fehler in Näherungskoordinaten (Stationspunkt)

Da die Einzelorientierungen, die zur Berechnung der Näherungsorientierungen verwendet werden aus der Differenz zwischen dem Azimut (berechnet aus Näherungskoordinaten) und der gemessenen Richtung (vgl. 17.1.2 und 17.1.3) berechnet werden, führen falsche Koordinaten im Stationspunkt dazu, dass alle Einzelorientierungen verfälscht werden.

Im folgenden Beispiel wurden die Näherungskoordinaten des Stationspunktes 400104505 um  $\Delta Y = -1$  m und  $\Delta X = +1$  m verfälscht. Die daraus resultierende Verfälschung des AZI. AUS KOORD. führt zu relativ grossen Verbesserungen, beim gewichteten Median aber trotzdem zu einer vernünftigen Schätzung der Näherungsorientierung.

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.													
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	AZI. AUS KOORD. (G)	DIST. AUS KOORD. (M)	QUER. MM
	400104505	N	291.96378				0.0			WB 34/44			
	400104504	N	399.9999			-12711.	33.3				290.6925	56.679	-1132.
	400105515	N	99.9280			17884.	42.1				393.6802	30.542	858.
	400104506	M	211.2729			9001.	20.2				104.1368	66.020	933.
	108904419		244.8815			59.	6.2				136.8512	900.813	83.
	108904407		252.0488			-92.	6.1				144.0034	1262.305	-183.
	108904469		269.1165			-287.	6.1				161.0516	1143.449	-515.

Tab. 18.16: gewichtetes arithmetisches Mittel (Stationspunkt mit ungenauen Näherungskoordinaten)

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.													
NR	PUNKT	TYP NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	NABLA CC/MM	WI	AZI. AUS KOORD. (G)	DIST. AUS KOORD. (M)	QUER. MM
	400104505	N	291.94772				N. B.			WB 34/44			
	400104504	N	399.9999	1		-12551.	23.3				290.6925	56.679	-1117.
	400105515	N	99.9280	1		18045.	42.1				393.6802	30.542	866.
	400104506	N	211.2729	1		9161.	20.2				104.1368	66.020	950.
	108904419		244.8815	1		219.	6.2				136.8512	900.813	310.
	108904407		252.0488	1		69.	6.1				144.0034	1262.305	136.
	108904469		269.1165	1		-126.	6.1				161.0516	1143.449	-225.

Tab. 18.17: gewichteter Median (Stationspunkt mit ungenauen Näherungskoordinaten)

BERECHNETE ORIENTIERUNG			
*****			
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(0 Fehler):	291.94861	
gewichtetes arithmetisches Mittel [g]	(3 Fehler):	291.96378	Differenz [cc]: -151.7
gewichteter Median [g]	(3 Fehler):	291.94772	Differenz [cc]: 8.9

Tab. 18.18: Vergleich der Orientierungen (Stationspunkt mit ungenauen Näherungskoordinaten)

## 18.2 BIBER-Schätzer: Vergleich der Berechnungsverfahren

### 18.2.1 Allgemeines

Anhand des folgenden, sehr einfachen Nivellementsnetzes werden die drei im Kapitel 12 beschriebenen Berechnungsverfahren beschrieben und mit den Resultaten der MdkQ verglichen.

Dieses Beispiel dient dazu, die Berechnungsabläufe der drei Verfahren detailliert zu erläutern, zudem wird gezeigt, dass mit allen drei Berechnungsverfahren identische Schätzergebnisse erzielt werden.

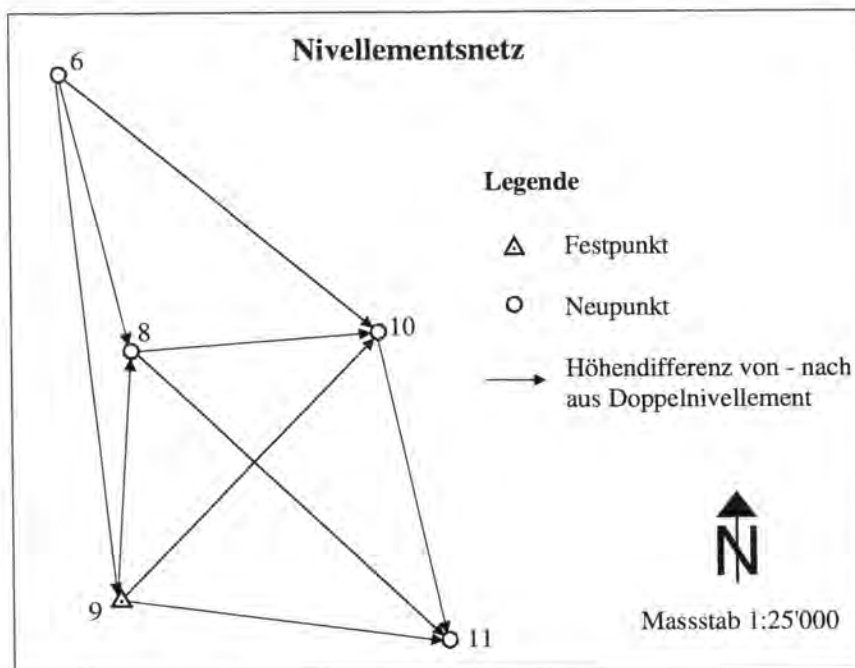


Abb. 18.2: Netzplan Nivellementsnetz

Nr.	von	nach	$\Delta h$ [m]	$p_i$
1	6	8	32.059	0.1276
2	8	10	-6.556	0.1372
3	8	11	26.170	0.0772
4	10	11	32.726	0.1041
5	9	6	-27.809	0.0693
6	9	11	30.419	0.1041
7	9	10	-2.317	0.0918
8	9	8	4.246	0.1372
9	6	10	25.496	0.0865

Tab. 18.19: Beobachtungen  $l_i$ , Gewichte  $p_i$

Matrix A			
-1	1	0	0
0	-1	1	0
0	-1	0	1
0	0	-1	1
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
-1	0	1	0

Tab. 18.20: A-Matrix

### 18.2.2 MdkQ (ohne groben Fehler)

Für die Unbekannten  $x_j$  (6.2.5), die Verbesserungen  $v_i$  (6.2.10) und die standardisierten Verbesserungen  $w_i$  (6.2.15) erhält man:

Nr.	1	2	3	4
$x_j$ [m]	-27.811	4.246	-2.313	30.416

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_i$ [mm]	-2.39	-2.41	0.23	2.65	-1.66	-2.82	4.53	-0.06	2.20
$w_i$	-1.27	-1.23	0.08	1.19	-0.55	-1.27	1.72	-0.03	0.85

Tab. 18.21: Resultate der MdkQ ohne groben Fehler

### 18.2.2 MdkQ (2 grobe Fehler)

In den Beobachtungen 1 und 7 wurden die folgenden groben Fehler eingeführt:

Nr.	gr. Fehler	$\Delta h$ [m]
1	+ 0.1 m	32.159
7	- 0.1 m	-2.417

Tab. 18.22: eingeführte grobe Fehler

Die Ausgleichung nach der MdkQ liefert die folgenden Ergebnisse:

Nr.	1	2	3	4
$x_j$ [m]	-27.868	4.244	-2.350	30.402
$\Delta x_j$ [mm]	57.3	1.7	37.8	14.3

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_i$ [mm]	-46.80	-38.47	-12.26	26.21	-59.05	-17.11	66.68	-1.85	21.73
$w_i$	-24.83	-19.64	-4.30	11.79	-19.40	-7.72	25.37	-0.95	8.42

Tab. 18.23: Resultate der MdkQ mit 2 groben Fehlern

Die Spalte  $\Delta x_j$  enthält die Differenzen der berechneten Höhen zur Ausgleichung nach der MdkQ mit Beobachtungen ohne groben Fehler (Tab. 18.21).



### 18.2.3 Robuste Schätzung, Modifikation der Normalgleichungsmatrix (2 grobe Fehler)

1. Schritt: *Ausgleichung nach der MdkQ:*

Nr.	1	2	3	4
$x_j$ [m]	-27.868	4.244	-2.350	30.402

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_i$ [mm]	-46.80	-38.47	-12.26	26.21	-59.05	-17.11	66.68	-1.85	21.73
$w_i$	-24.83	-19.64	-4.30	11.79	-19.40	-7.72	<b>25.37</b>	-0.95	8.42

Tab. 18.24: *Resultate der MdkQ*

- Die Beobachtung mit der grössten standardisierten Verbesserung wird ausgewählt:  $l_7$

2. Schritt: *Robuste Berechnung für Beobachtung Nr. 7:*

- Der entsprechende Grenzwert  $k_7$  wird berechnet (11.1.9):  $c = 3.5 \rightarrow k_7 = 9.20$  mm.
- Im Beobachtungsvektor wird die entsprechende Beobachtung durch  $-\text{sign}(v_7)k_7$  ersetzt.
- In der Matrix  $\tilde{Y}$  (12.1.4) wird das 7. Diagonalelement durch 0 ersetzt.

Als Ergebnis dieses Berechnungsschrittes erhält man mit (12.1.4), (12.1.5), (12.1.6):

Nr.	1	2	3	4
$x_j$ [m]	-27.850	4.261	-2.317	30.419

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_{i\text{ TOT}}$ [mm]	-47.63	-22.22	-12.50	9.72	-41.32	-0.45	99.83	15.05	37.15
$w_{i\text{ TOT}}$	-25.27	-11.34	-4.38	4.37	-13.57	-0.20	37.99	7.76	14.39
$v_{i\text{ ROB}}$ [mm]	-47.63	-22.22	-12.50	9.72	-41.32	-0.45	9.20	15.05	37.15
$w_{i\text{ ROB}}$	<b>-25.27</b>	-11.34	-4.38	4.37	-13.57	-0.20	3.50	7.76	14.39

Tab. 18.25: *Zwischenresultat nach dem 1. Berechnungsschritt*

Die Beobachtung mit der grössten standardisierten Verbesserung  $w_{i\text{ ROB}}$  wird ausgewählt:  $l_1$

3. Schritt: *Robuste Berechnung für Beobachtungen Nr. 1 und 7:*

- Der entsprechende Grenzwert  $k_1$  wird berechnet (11.1.9):  $c = 3.5 \rightarrow k_1 = 6.60$  mm.
- Im Beobachtungsvektor wird zusätzlich die entsprechende Beobachtung durch  $-\text{sign}(v_1)k_1$  ersetzt.

- In der Matrix  $\tilde{Y}$  (12.1.4) wird zusätzlich das 1. Diagonalelement durch 0 ersetzt.

Als Ergebnis dieses Berechnungsschrittes erhält man mit (12.1.4), (12.1.5), (12.1.6):

Nr.	1	2	3	4
$x_j$ [m]	-27.816	4.246	-2.315	30.415
$\Delta x_j$ [mm]	5.0	-0.2	2.9	1.0

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_{i \text{ TOT}}$ [mm]	-97.17	-5.47	-0.95	4.53	-6.71	-3.82	101.65	0.13	4.36
$w_{i \text{ TOT}}$	-51.54	-2.79	-0.33	2.04	-2.20	-1.72	38.68	0.07	1.69
$v_{i \text{ ROB}}$ [mm]	-6.60	-5.47	-0.95	4.53	-6.71	-3.82	9.20	0.13	4.36
$w_{i \text{ ROB}}$	-3.50	-2.79	-0.33	2.04	-2.20	-1.72	3.50	0.07	1.69

Tab. 18.26: Schlussresultat

Es ist zu beachten, dass trotz der groben Fehler die berechneten Höhen nur um maximal 5 mm von den mit der MdkQ (ohne groben Fehler) berechneten Höhen abweichen.

### 18.2.4 Robuste Schätzung, Modifikation der Beobachtungen (2 grobe Fehler)

1. Schritt: *Ausgleichung nach der MdkQ:*

- Die Beobachtung mit der grössten standardisierten Verbesserung wird ausgewählt:  $l_7$  (vgl. Tab. 18.24).

2. Schritt: *Robuste Berechnung für Beobachtung Nr. 7:*

- Der entsprechende Grenzwert  $k_7$  wird berechnet (11.1.9):  $c = 3.5 \rightarrow k_7 = 9.20$  mm.
- Im Differenzvektor (12.2.7) wird bei der entsprechenden Beobachtung  $d_7/z_7$  eingesetzt.

Als Ergebnis dieses Berechnungsschrittes erhält man mit (12.2.9), (12.2.10), (12.2.11) die gleichen Resultate wie bei der ersten Berechnungsvariante (vgl. Tab. 18.25).

- Die Beobachtung mit der grössten standardisierten Verbesserung wird ausgewählt:  $l_1$

**3. Schritt: Robuste Berechnung für Beobachtung Nr. 1:**

- Der entsprechende Grenzwert  $k_1$  wird berechnet (11.1.9):  $c = 3.5 \rightarrow k_7 = 6.60$  mm.
- Im Differenzvektor (12.2.7) wird bei der entsprechenden Beobachtung  $d_7/z_7$  eingesetzt.

Als Ergebnis dieses Berechnungsschrittes erhält man mit (12.2.9), (12.2.10), (12.2.11):

Nr.	1	2	3	4
$x_j$ [m]	-27.816	4.246	-2.316	30.415

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_{i\text{ TOT}}$ [mm]	-97.13	-5.81	-0.95	4.86	-7.08	-4.16	100.99	-0.21	4.06
$w_{i\text{ TOT}}$	-51.52	-2.96	-0.33	2.19	-2.32	-1.87	38.43	-0.11	1.57
$v_{i\text{ ROB}}$ [mm]	-6.60	-5.81	-0.95	4.86	-7.08	-4.16	10.35	-0.21	4.06
$w_{i\text{ ROB}}$	-3.50	-2.96	-0.33	2.19	-2.32	-1.87	3.94	-0.11	1.57

**Tab. 18.27: Resultate nach dem 3. Schritt**

**4. Schritt: Robuste Berechnung für Beobachtung Nr. 7:**

- Im Differenzvektor (12.2.7) wird bei der entsprechenden Beobachtung  $d_7/z_7$  eingesetzt.

Als Ergebnis dieses Berechnungsschrittes erhält man mit (12.2.9), (12.2.10), (12.2.11):

Nr.	1	2	3	4
$x_j$ [m]	-27.816	4.246	-2.315	30.415

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_{i\text{ TOT}}$ [mm]	-97.15	-5.48	-0.95	4.53	-6.72	-3.82	101.65	0.13	4.37
$w_{i\text{ TOT}}$	-51.53	-2.80	-0.33	2.04	-2.21	-1.72	38.68	0.07	1.69
$v_{i\text{ ROB}}$ [mm]	-6.61	-5.48	-0.95	4.53	-6.72	-3.82	9.20	0.13	4.37
$w_{i\text{ ROB}}$	-3.51	-2.80	-0.33	2.04	-2.21	-1.72	3.50	0.07	1.69

**Tab. 18.28: Resultate nach dem 4. Schritt**

**5. Schritt: Robuste Berechnung für Beobachtung Nr. 1**

- Im Differenzvektor (12.2.7) wird bei der entsprechenden Beobachtung  $d_1/z_1$  eingesetzt.

Als Ergebnis dieses Berechnungsschrittes erhält man mit (12.2.9), (12.2.10), (12.2.11) das gleiche Schlussresultat wie bei der ersten Berechnungsvariante (vgl. Tab. 18.26).

### 18.2.5 Robuste Schätzung, Reduktion der Gewichte (2 grobe Fehler)

1. Schritt: *Ausgleichung nach der MdkQ:*

- Die Beobachtung mit der grössten standardisierten Verbesserung wird ausgewählt:  $l_7$  (vgl. Tab. 18.24).

2.-6. Schritt: *Robuste Berechnung für Beobachtung Nr. 7:*

- Der entsprechende Grenzwert  $k_7$  wird berechnet (11.1.9):  $c = 3.5 \rightarrow k_7 = 9.20 \text{ mm}$ .
- Das reduzierte Gewicht für die entsprechende Beobachtung wird mit (12.3.2) berechnet:  $p_7^* = 0.0127$

Nach 5-maliger Wiederholung dieses Berechnungsschrittes erhält man mit (12.3.3), (12.3.9), (12.3.10) das von den vorherigen Berechnungen bekannte Resultat (vgl. Tab. 18.25). Die folgende Tabelle demonstriert den Iterationsverlauf.

Iterationsschritte	2	3	4	5	6	7
$p_7^*$	0.0127	0.0087	0.0085	0.0085	0.0085	0.0085
$w_7_{\text{ROB}}$	5.11160	3.58324	3.50420	3.50021	3.50001	3.50000

Tab. 18.29: *Iterationsverlauf*

- Die Beobachtung mit der grössten standardisierten Verbesserung wird ausgewählt:  $l_1$

7.-14. Schritt: *Robuste Berechnung für Beobachtung Nr. 1:*

- Der entsprechende Grenzwert  $k_1$  wird berechnet (11.1.9):  $c = 3.5 \rightarrow k_1 = 6.60 \text{ mm}$ .
- Das reduzierte Gewicht für die entsprechende Beobachtung wird mit (12.3.2) berechnet:  $p_1^* = 0.0177$ .

Diese Berechnung wird wiederholt, bis für die Beobachtung Nr. 1 ein  $w_1_{\text{ROB}}$  von 3.5 erreicht wird.

Iterationsschritte	8	9	10	11	12	13	14
$p_1^*$	0.0177	0.0093	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087
$w_1_{\text{ROB}}$	-6.61804	-3.75330	-3.51929	-3.50146	-3.50011	-3.50001	-3.50000

Tab. 18.30: *Iterationsverlauf*

Anschliessend wird die Beobachtung 7 verbessert:

Iterationsschritte	15	16	17	18
$p_7^*$	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
$w_{7 \text{ ROB}}$	3.50301	3.50015	3.50001	3.50000

*Tab. 18.31: Iterationsverlauf*

Nach einer weiteren Verbesserung des Gewichtes der Beobachtung 1 erhält man das gleiche Resultat (vgl. Tab. 18.26) wie bei den beiden anderen Berechnungsvarianten.

## 18.3 BIBER-Schätzer: Praxisbeispiel Mutation Tegerfelden - Döttingen

Anhand dieses Beispiels aus der geodätischen Praxis soll das Verhalten des BIBER-Schätzers in verschiedenen Situationen dargestellt und die Ergebnisse mit den Resultaten einer Berechnung nach der MdkQ ohne groben Fehler verglichen werden.

### 18.3.1 Definitive Berechnung

In diesem Netz der Triangulation 4. Ordnung des Kantons Aargau (Mutation Zu 93/01 Tegerfelden-Döttingen) werden die Koordinaten von zwei Lagefixpunkten 2 (LFP2) (Kirche 50.324.8, Bodenpunkt 50.324.2) neu bestimmt und ein LFP2 wird verlegt (50.327.1). Um die Kirche mit einer ausreichenden Qualität bestimmen zu können, wurde ein provisorisch versicherter Hilfspunkt (50.324.3) eingeführt.

Das Netz wurde mit GPS- und tachymetrischen Beobachtungen gemessen und kombiniert ausgeglichen. Die Höhen der LFP2 50.324.2 und 50.324.3 wurden vorgängig, ausgehend von kantonalen Nivellementsfixpunkten (HFP2), nivelliert. Da die nivellierten Höhen deutlich genauer sind als die im Triangulationsnetz bestimmten, wurden sie als Festpunkte in die Ausgleichung eingeführt.

Im Lagenetz werden mit insgesamt *47 Beobachtungen* (19 Richtungen, 4 Distanzen und 24 GPS-Koordinaten) *21 Unbekannte* (8 Lagekoordinaten der Neupunkte, 6 Orientierungen, 1 Masstab der Distanzen, 4 Translationen, 1 Drehung und 1 Masstab der GPS-Sessionen) berechnet; im Höhennetz mit *21 Beobachtungen* (9 Höhenwinkel, 12 GPS-Höhen) *4 Unbekannte* (2 Höhen der Neupunkte, 2 Translationen der GPS-Sessionen). Die Überbestimmung  $n-u$  im Lagenetz beträgt somit 26, im Höhennetz 17.

Die folgenden Abbildungen zeigen die tachymetrischen Messungen in der Lage (Richtungen und Distanzen) (Abb. 18.3), in der Höhe (Höhenwinkel) (Abb. 18.4) und die GPS-Messungen, Lage und Höhe (Abb. 18.5).

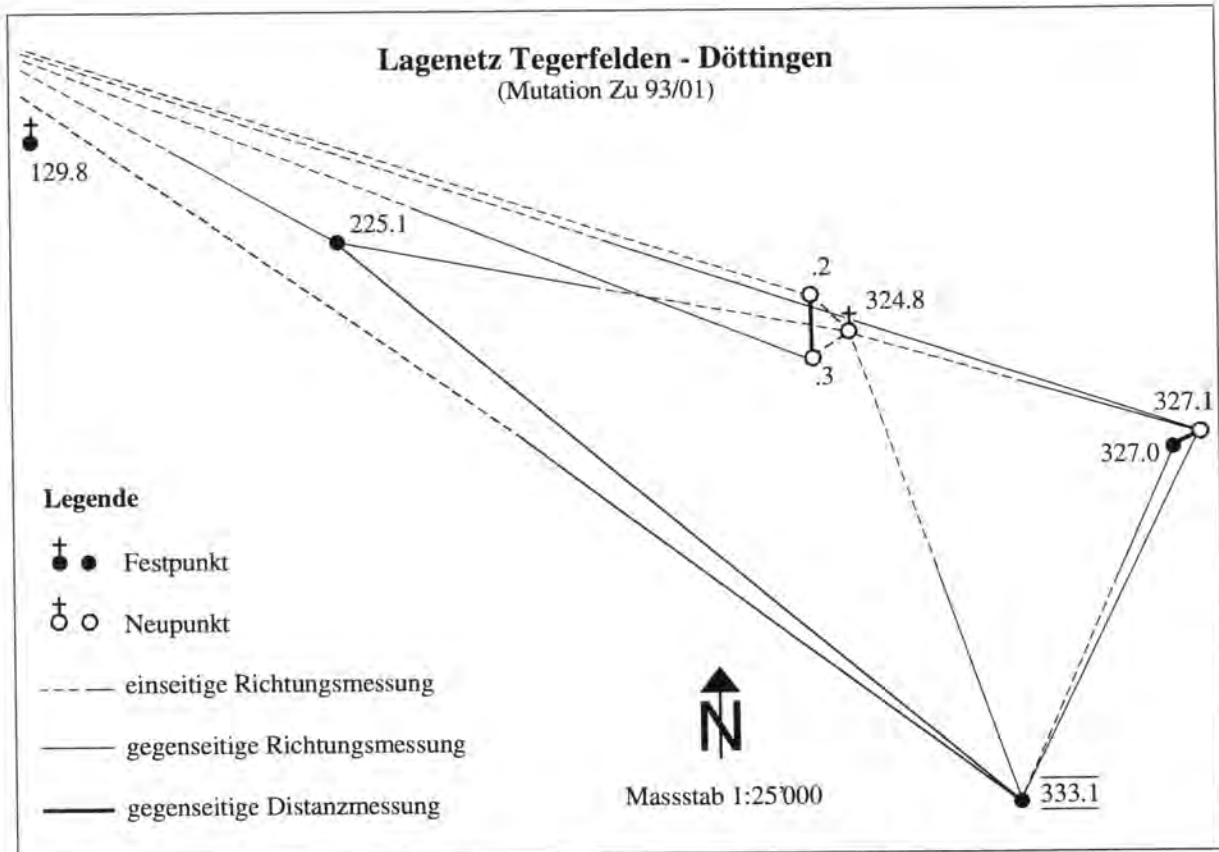


Abb. 18.3: Tachymetrisches Netz Lage (Zu 93/01)

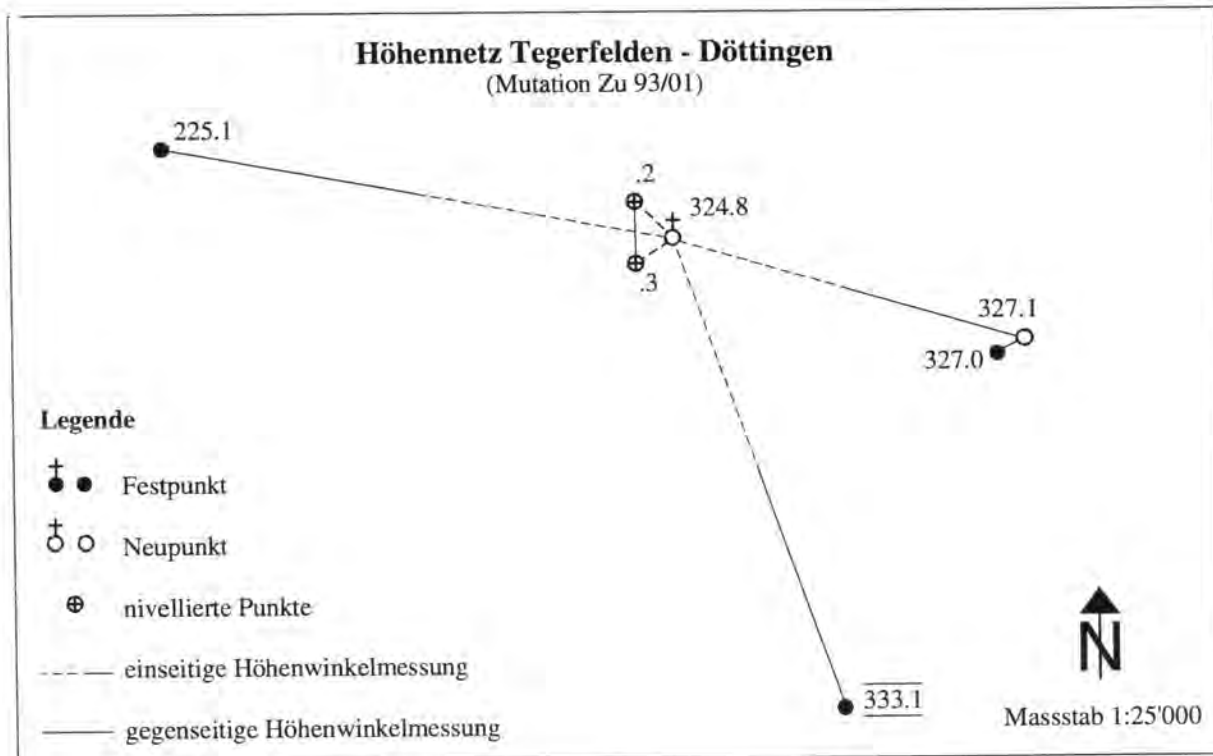


Abb. 18.4: Tachymetrisches Netz Höhe (Zu 93/01)

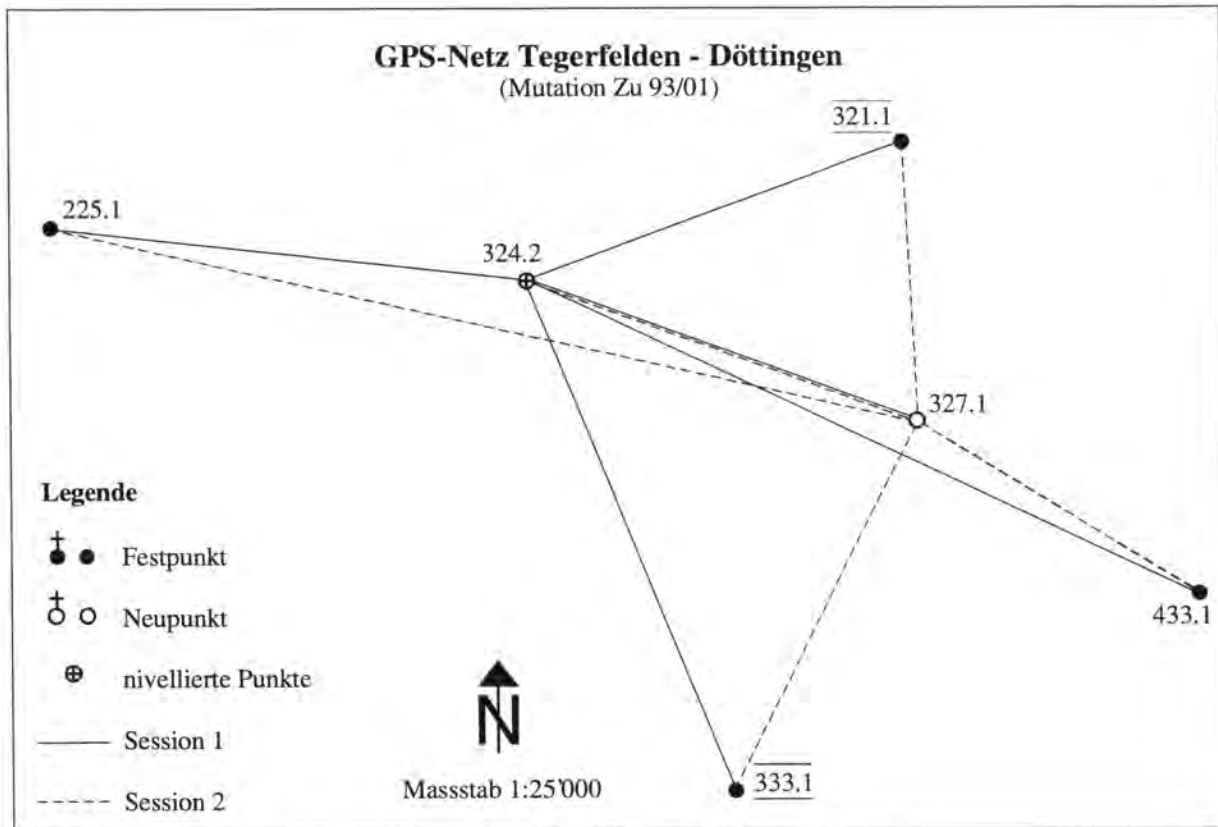


Abb. 18.5: GPS - Netz (Zu 93/01)

In einem ersten Schritt wurde eine Ausgleichung durchgeführt, bei der die Koordinaten der Anschlusspunkte als Beobachtungen eingeführt wurden. Für die Standardabweichung dieser Koordinaten und Höhen wurde 100 mm eingegeben, womit das Netz praktisch spannungsfrei ausgeglichen wurde. Die folgenden Tabellen zeigen die gewählten Standardabweichungen a priori:

Lagenetz:	Zentrierfehler:	2 mm
	Richtungen:	6 cc
	Distanzen:	2 mm +/- 2 mm/km
	GPS-Koordinaten:	5 mm
	Koordinaten als Beobachtungen:	100 mm

Tab. 18.32: Standardabweichungen a priori (Lage)

Höhennetz:	Höhenwinkel:	6 cc
	Distanz sign. Pkte.:	5 mm
	Distanz Hochzielpte.:	10 mm
	IH-SH:	3,2 mm
	GPS-Höhen:	8 mm
	Refraktionskoeffizient:	0.13 +/- 0.06
Höhen als Beobachtungen:	100 mm	

Tab. 18.33: Standardabweichungen a priori (Höhe)




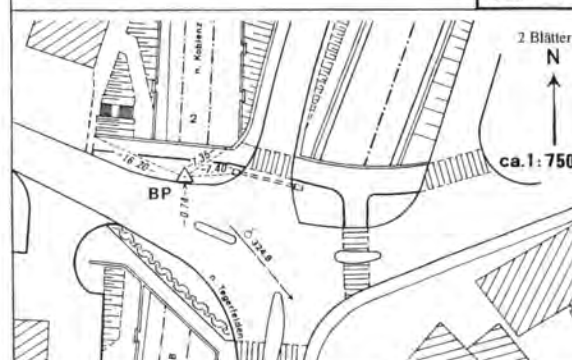
Diese Berechnung zeigte, dass die gewählten Standardabweichungen a priori vernünftig gewählt wurden, dass die Messungen mit grosser Wahrscheinlichkeit frei von groben Fehlern sind (Lage: grösstes  $w_i = 1.9$ , Höhe: grösstes  $w_i = 1.4$ ) und dass die Anschlusspunkte nur sehr geringe Zwänge (max. Verbesserung Lage:  $DX = 26$  mm, Höhe:  $DH = -13$  mm) auf das Netz ausüben.

Aus der anschliessenden definitiven, gezwängten Ausgleichung ergaben sich für die Neupunkte die folgenden Koordinaten:

PUNKT	TYP	Y M	X M	H M
50.324	.2	661631.750	269212.655	335.450
50.324	.8	661707.607	269143.313	384.798
50.327	.1	662881.875	268808.972	440.869

Tab. 18.34: Koordinaten der Neupunkte

HZP Y = 661 707.61 X = 269 143.31 H = 384.80 Turm Kirche Döttingen		1050
<b>324 8</b>		
2 Blätter		
		
		Nachführung
Kt Bezirk AG Zurzach	Gemeinde Döttingen	Plan Parz Anm. im GB
Erstellung 13.10.1993	Operat : 227 Sektion :	

BP Y = 661 631.75 X = 269 212.65 H = 335.45 Granstein 18/18/50, 3 cm unter Boden		1050
<b>324 2</b>		
2 Blätter		
N		
ca. 1:750		
		
		Steinsatz Dreieck nach Azimut 30 g. (oben) Unterirdisch Bodenplatte aus Ton -0.610m.
GPS Sichtbarkeit: geeignet		Nachführung 13.10.1993 Vncu,niv
Eig. SBR (Schweiz Bundesbahnen)		
Kt Bezirk AG Zurzach	Gemeinde Döttingen	Plan Parz Anm. im GB 2
Erstellung 19.7.1918 niv	Operat : 227 Sektion :	46

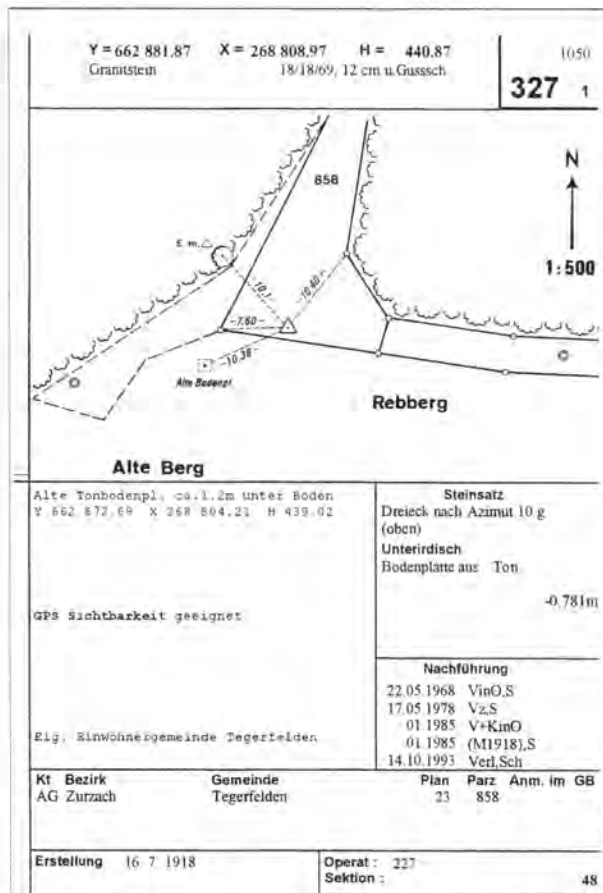


Abb. 18.6:

Protokolle der 3 neuen LFP2 (Zu 93/01)

### 18.3.2 Robuste Schätzung

Um die Lokalisierbarkeit von groben Fehlern in der Ausgleichung zu demonstrieren, wurden die folgenden groben Fehler in den Messungen eingeführt:

- Richtung	50.324.2	-	50.324.3	
				+ 1 <sup>g</sup>
- Distanz	50.327.0	-	50.327.1	+ 1 m
- GPS-Station	50.324.2			Y + 10 cm
				X + 10 cm
				H + 10 cm
- GPS-Station	50.327.1			Y + 100 cm
				X + 100 cm
				H - 100 cm

Somit sind im Lagenetz 6 der 47 Beobachtungen mit einem groben Fehler behaftet, im Höhenetz 2 der 21.

In den Abrissen werden die groben Fehler eindeutig lokalisiert, die wahrscheinlichen Grössen der groben Fehler (R-GI) weisen relativ genau auf die tatsächlichen Grössen der groben Fehler.

ROBUSTE AUSGLEICHUNG: LAGE - ABRISS												
*****												
NR	PUNKT	TYP	NP	OR/BOEB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	R-ZI %	WI	R-GI CC/MM
	50.324	.2	N	319.96218				12.9			WB 34/46	
6	50.324	.3	N	280.4416*	1		-9919.	22.4	46.	99 R*****		9980
	50.327	.0		DISTANZEN							WB 34/41	
14	50.327	.1	N	11.344*	3	2.8	-986.	2.8	57.	99 R*****		994
	Session 1			GPS-KOORD								
28	50.324	.2	N									
	LY			661631.847			-94.	5.0	43.	85 R-28.6		109
29	LX			269212.773			-75.	5.0	44.	78 R-22.6		95
	Session 2			GPS-KOORD								
42	50.327	.1	N									
	LY			662882.865			-982.	5.0	70.	99 R*****		990
43	LX			268809.986			-993.	5.0	75.	99 R*****		999

Tab. 18.35: Ausschnitt des Lageabrisses (nur Messungen mit grobem Fehler)

ROBUSTE AUSGLEICHUNG: HOEHEN - ABRISS												
*****												
NR	PUNKT	TYP	NP	H/DIFF M	GR	KTR MM	VERB. MM	M.F. MM	ZI %	R-ZI %	WI	R-GI MM
	Session 1			GPS-KOORD								
59	50.324	.2		334.195			-100.	8.0	83.	95 R-13.7		104
	Session 2			GPS-KOORD								
66	50.327	.1	N	438.518			1000.	8.0	75.	99 R144.9		-1008

Tab. 18.36: Ausschnitt des Höhenabrisses (nur Messungen mit grobem Fehler)

Insgesamt werden in der Lage 10 Beobachtungen mit einer standardisierten Verbesserung  $w_i > 3.5$  ausgewiesen. Die verfälschten Beobachtung haben ein  $w_i$  zwischen 649 und 23, die vier nicht verfälschten Beobachtungen zwischen 6 und 3.5. Die groben Fehler werden somit sehr deutlich lokalisiert und können korrigiert oder eliminiert werden.

Die ausgeglichenen Koordinaten weichen trotz der groben Fehler nur geringfügig von den definitiv ausgeglichenen Koordinaten ab.

PUNKT	TYP	Y M	X M	H M	Diff. zur def. Ausgleichung		
					DY MM	DX MM	DH MM
50.324	.2	661631.757	269212.676	335.450	7	21	
50.324	.8	661707.633	269143.317	384.807	26	4	9
50.327	.1	662881.889	268808.979	440.867	14	7	-2

Tab. 18.37: Resultat der Berechnung mit dem BIBER-Schätzer

Bei einer Ausgleichung mit denselben fehlerhaften Messungen nach der MdkQ haben in der Lage 41 der 47 Beobachtungen eine standardisierte Verbesserung  $w_i$  grösser als 3.5, in der Höhe 15 der 21 Beobachtungen. Eine Fehlersuche nach der Methode des „data snoopings“, d.h. des iterativen Suchens der groben Fehler anhand der standardisierten Verbesserungen (vgl. Kap. 3.1, Kap. 15.1.2), wird dementsprechend schwierig. Im weiteren weist die nicht verfälschte Richtung vom Punkt 50.225.1 zum Punkt 50.129.8 das grösste  $w_i$  (304) auf.

Die Koordinaten der Neupunkte sind sehr stark verfälscht.

PUNKT	TYP	Y M	X M	H M	Diff. zur def. Ausgleichung		
					DY MM	DX MM	DH MM
50.324	.2	661631.801	269212.695	335.450	51	-40	
50.324	.8	661707.834	269143.268	384.944	227	-45	146
50.327	.1	662882.323	268809.233	440.793	448	261	-76

Tab. 18.38: Resultat der Berechnung nach der MdkQ

### 18.3.3 Überschreiten des Bruchpunktes

Das folgende Beispiel zeigt das Verhalten des Schätzers bei der Überschreitung des Bruchpunktes (vgl. Kap. 8.3).

In einem ersten Schritt wurden die folgenden beiden Messungen mit groben Fehlern verfälscht:

- Richtung      50.225.1   -   50.324.8      + 10<sup>c</sup>
- Richtung      50.333.1   -   50.324.8      - 10<sup>c</sup>

Als Resultate der Berechnung mit dem BIBER-Schätzer ergibt sich:

ROBUSTE AUSGLEICHUNG: LAGE - ABRISS *****												
NR	PUNKT	TYP	NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	VERB. CC/MM	M.F. CC/MM	ZI %	R-ZI %	WI	R-GI CC/MM
	50.225	.1		330.15599				6.0			WB 34/44	
2	50.324	.8	N	181.4338	1		-981.	6.0	51.	98	R*****	997
	50.333	.1		339.04665				4.9			WB 34/43	
22	50.324	.8	N	38.4512	1		982.	6.0	53.	98	R223.4	-997

Tab. 18.39: Lageabriss (nur Messungen mit grobem Fehler)

PUNKT	TYP	Y M	X M	H M	Diff. zur def. Ausgleichung		
					DY MM	DX MM	DH MM
50.324	.2	661631.746	269212.651	335.450	-4	-4	
50.324	.8	661707.597	269143.311	384.796	-10	-2	-2
50.327	.1	662881.875	268808.971	440.869	0	-1	0

Tab. 18.40: Resultat der Berechnung mit dem BIBER-Schätzer

PUNKT	TYP	TK	def. Ausgleichung						
			MFA MM	MFB MM	MFAZ G	MFH MM			
50.324	.8		35.0	6.4	-56.9	10.2	20.0	4.7	10.1

Tab. 18.41: Standardabweichungen (mittlere Fehlerellipsen) der Kirche

PUNKT	TYP	TK	def. Ausgleichung						
			R-NA MM	R-NB MM	AZI (NA) G	R-NH MM	NA MM	NB MM	NH MM
50.324	.8		638.8	91.7	314.4	44.2	81.1	54.9	44.2

Tab. 18.42: äussere Zuverlässigkeit

Die beiden Fehler werden genau lokalisiert, die Koordinaten der Kirche weichen nur unwesentlich von den Koordinaten der definitiven Berechnung ab.

Die äussere Zuverlässigkeit ( $NA^*/NB^*$ ) (vgl. Kap. 15.3.2) ist erwartungsgemäss deutlich schlechter als jene der definitiven Berechnung, sie liegt auch deutlich ausserhalb der für die

Triangulation geforderten Toleranz [RICHTLINIEN 1996]. Dies ist anschaulich, da die Kirche nun praktisch nur noch mit 3 anstelle der ursprünglichen 5 Richtungen bestimmt wird. Die Genauigkeit (MFA/MFB) wird nur geringfügig verschlechtert.

Bei einer Ausgleichung nach der MdkQ sind im Lageausgleich 28 der 47  $w_i > 3.5$ , die Koordinaten sind stark verfälscht:

PUNKT	TYP	Y M	X M	H M	Diff. zur def. Ausgleichung		
					DY MM	DX MM	DH MM
50.324	.2	661631.628	269212.518	335.450	-122	-137	
50.324	.8	661707.294	269143.254	384.726	-313	-59	-72
50.327	.1	662881.868	268808.962	440.867	-7	-10	-2

Tab. 18.43: Resultat der Berechnung mit der MdkQ

In einem 2. Schritt wird zusätzlich die

$$- \text{Richtung} \quad 50.227.1 \quad - \quad 50.324.8 \quad + 10^6$$

grob verfälscht. Somit weisen 3 der 5 Richtungen auf die Kirche einen groben Fehler auf.

36 der 47 Lagebeobachtungen weisen nun ein  $w_i > 3.5$  auf. Die Koordinaten sind vollständig unbrauchbar, der Bruchpunkt des BIBER-Schätzers wurde überschritten. Das Programm meldet dieses Versagen des Schätzers mit der Fehlermeldung 1112 [vgl. Tab. 16.3].

PUNKT	TYP	Y M	X M	H M	Diff. zur def. Ausgleichung		
					DY MM	DX MM	DH MM
50.324	.2	661631.693	269212.602	335.450	-57	-53	
50.324	.8	661705.573	269144.272	384.346	-2043	959	-452
50.327	.1	662881.771	268808.913	440.861	-104	-59	-8

Tab. 18.44: Resultat der Berechnung mit dem BIBER-Schätzer

Da im Programm LTOP die zur Ausgleichung verwendeten Höhendifferenzen aus den Höhenwinkeln und der im Lageausgleich berechneten - in diesem Beispiel falschen - Koordinaten berechnet werden, sind auch die Höhen der Neupunkte mangelhaft.

### 18.3.4 Grobe Fehler in Hebelbeobachtungen

Hebelbeobachtung sind Beobachtungen, die durch die anderen Beobachtungen im Netz nicht oder nur ungenügend kontrolliert werden. Sie sind erkennbar durch ihren kleinen Redundanzanteil  $z_i$  und können bei einer guten geometrischen Anlage des Netzes vermieden werden (vgl. Kap. 8.2).

In der LTOP-Anleitung [GUBLER 1994] und den Richtlinien für den strengen Ausgleich des Kantons Aargau [WICKI 1996] wird vorgegeben, dass in einem guten Netz die  $z_i$  zwischen 25% und 60% liegen sollten. Kleinere  $z_i$  sind nur akzeptierbar, wenn die äusseren Zuverlässigkeiten (NA/NB bzw. NH) der Neupunkte innerhalb den vorgegebenen Toleranzwerten liegen.

Für die erste Berechnung wurde in der Richtung 50.324.2 - 50.129.8 ein grober Fehler von  $-10^\circ$  eingeführt. Für diese Beobachtung wird bei der Ausgleichung nach der MdkQ ein  $z_i$  von 4% ausgewiesen, es handelt sich also um eine Hebelbeobachtung.

Bei der Ausgleichung nach der MdkQ sind im Lageausgleich 12 der 47  $w_i > 3.5$ , die Koordinaten sind stark verfälscht:

PUNKT	TYP	Y M	X M	Diff. zur def. Ausgleichung	
				DY MM	DX MM
50.324	.2	661631.760	269212.668	10	13
50.324	.8	661707.441	269143.283	-166	-30
50.327	.1	662881.881	268808.975	6	3

Tab. 18.45: Resultat der Berechnung mit der MdkQ

Bei der Ausgleichung mit dem BIBER-Schätzer wird nur das zur verfälschten Beobachtung gehörende  $w_i > 3.5$  ausgewiesen, der grobe Fehler (R-GI) wird mit  $-1000''$  sehr genau geschätzt. Die Koordinaten werden relativ genau berechnet:

PUNKT	TYP	Y M	X M	Diff. zur def. Ausgleichung	
				DY MM	DX MM
50.324	.2	661631.761	269212.657	1	2
50.324	.8	661707.589	269143.310	-18	-3
50.327	.1	662881.876	268808.972	1	0

Tab. 18.46: Resultat der Berechnung mit dem BIBER-Schätzer

Der grobe Fehler konnte auch in einer Hebelbeobachtung sehr genau lokalisiert werden. Dabei ist zu beachten, dass bei einer unkontrollierten Beobachtung ( $z_i = 0$ ) eine Lokalisierung nicht möglich ist.

Zur Demonstration des Verhaltens des Schätzers bei groben Fehlern in unkontrollierten Beobachtungen und den möglichen Alternativen zur Lokalisierung der groben Fehler wurde das vorliegende Beispiel wie folgt modifiziert:

eliminierte Beobachtungen:	Distanz	50.324.2 - 50.324.3		
	GPS Session 1	Station 50.321.1		
	Höhenwinkel	50.327.1 - 50.327.0		
grobe Fehler:	Richtung	50.324.3 - 50.324.8	+ 10 <sup>c</sup>	
	Distanz	50.324.3 - 50.324.2	- 10 cm	
	GPS	50.327.1	LY:	+ 10 cm
			LX:	+ 10 cm
			LH:	+ 10 cm
Höhenwinkel:	50.327.0 - 50.327.1	+ 1 <sup>e</sup>		

Die Anschlusspunktkoordinaten wurden in dieser Berechnung als Beobachtungen (vgl. Kap. 18.3.1) eingeführt, es wurde also ein praktisch zwangsfreies Netz berechnet. Die  $z_i$ -Werte der verfälschten Beobachtungen sind alle zwischen 0 und 1 %. Demzufolge werden diese Beobachtungen durch das Netz nicht kontrolliert.

Die Ausgleichung nach der MdkQ wie auch die robuste Ausgleichung weist kein bestimmbares  $w_i > 3.5$  aus. Die groben Fehler bleiben also unentdeckt.

Berechnet man jedoch in einem ersten Schritt die Abrisse (Lage und Höhe) mit Hilfe der Näherungskordinaten, so können die groben Fehler bei nicht allzu schlechten Näherungskordinaten mehrheitlich lokalisiert werden.



```

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.
*****
NR   PUNKT   TYP NP   OR/BEÖB. GR   KORR.   VERB.   M.F.
      G/M      CC/MM   CC/MM   CC/MM
-----
50.324   .3 N   321.05639           0.0      WB 34/47
-----
50.129   .8 N   0.0000   1           0.       6.0
50.324   .2 N   78.3500* 1           -6.      22.4
50.324   .8 N   187.8060   1          -1003.   17.8
-----
50.324   .3 N   DISTANZEN           WB 34/47
-----
50.324   .2 N           58.812* 3   0.0   110.   2.9
-----
Session 2      GPS-KOORD
-----
50.225   .1 N
      LY      660044.678           -98.     5.0
      LX      269446.795           77.      5.0
50.321   .1 N
      LY      662841.459           -47.     5.0
      LX      269731.817           -49.     5.0
50.324   .2 N
      LY      661631.747           -14.     5.0
      LX      269212.669           44.      5.0
50.327   .1 N
      LY      662881.865           49.      5.0
      LX      268808.986           7.       5.0
50.333   .1 N
      LY      662278.021           12.     5.0
      LX      267589.889           -50.     5.0
50.433   .1 N
      LY      663948.942           99.      5.0
      LX      268169.080           -30.     5.0
    
```

Tab. 18.47: Lageabriss

```

HOEHEN - ABRISS MIT NAEHERUNGSHOEHEN
*****
NR   PUNKT   TYP NP   H/DIFF   GR   KTR   VERB.   M.F.
      M      MM   MM   MM
-----
50.327   .0 N   439.0190
-----
50.327   .1 N   2.016           -165.   5.6
-----
Session 2      GPS-KOORD
-----
50.225   .1 N   319.757           -11.     8.0
50.321   .1 N   512.933           -108.    8.0
50.324   .2 N   334.106           -11.     8.0
50.327   .1 N   439.518           -2.      8.0
50.333   .1 N   411.460           -14.     8.0
50.433   .1 N   414.147           -11.     8.0
    
```

Tab. 18.48: Höhenabriss

Als einziger grober Fehler nicht lokalisiert wurde der Fehler in den Lagekoordinaten der GPS-Station. Dieser Umstand liegt in der Berechnungsart der GPS-Sessionen begründet, indem die Lagekoordinaten einer GPS-Session mit einer Helmerttransformation eingepasst und die Parameter dieser Transformation mit der Lageausgleichung berechnet werden [vgl. GUBLER 1994]. Diese Transformation hatte zur Folge, dass der Fehler in der Station 50.321.1

„verschmiert“ wurde. Im Höhenabriss, bei dem eine reine Translation ausgeführt wird, trat dieser Effekt nicht auf und der grobe Fehler wurde lokalisiert.

Wenn bei der Berechnung der Lageabriss mit Näherungskoodinaten die GPS-Sessionen nicht mit einer ebenen Helmerttransformation sondern nur mit 2 Translationen in die Ausgleichung eingeführt werden, verschwindet dieser „Verschmierungseffekt“ und der grobe Fehler wird genau angezeigt (Tab. 18.49).

LAGE - ABRISS MIT NAEHERUNGSKOORD.							
*****							
NR	PUNKT	TYP	NP	OR/BEOB. G/M	GR	KORR. CC/MM	M.F. CC/MM
Session 2		GPS-KOORD					
50.225		.1	N				
	LY			660044.678		6.	5.0
	LX			269446.795		24.	5.0
50.321		.1	N				
	LY			<b>662841.459</b>		<b>-85.</b>	<b>5.0</b>
	LX			<b>269731.817</b>		<b>-88.</b>	<b>5.0</b>
50.324		.2	N				
	LY			661631.747		14.	5.0
	LX			269212.669		19.	5.0
50.327		.1	N				
	LY			662881.865		19.	5.0
	LX			268808.986		14.	5.0
50.333		.1	N				
	LY			662278.021		24.	5.0
	LX			267589.889		11.	5.0
50.433		.1	N				
	LY			663948.942		22.	5.0
	LX			268169.080		19.	5.0

Tab. 18.49: Lageabriss

Bei den Richtungsmessungen wurde ein analoger Einfluss vermieden, indem die Näherungsorientierung mit dem „gewichteten Median“ (vgl. Kap. 17.2) anstelle des arithmetischen Mittels berechnet wurde.

Die Lokalisierung grober Fehler mittels einer Berechnung der Abriss mit Näherungskoodinaten ist erfolgreich, falls die Näherungskoodinaten genügend genau sind.

## 19. Schlussfolgerungen

---

Dank seinem mehrjährigen Einsatz in einer Vielzahl von privaten Ingenieurbüros, kantonalen Vermessungsämtern und beim Bundesamt für Landestopographie wurde die Praxistauglichkeit des BIBER-Schätzers bestätigt. Dieser Schätzer ist heute im Bereich der Parameterschätzung in geodätischen Netzen ein Werkzeug des täglichen Gebrauches und sehr viele der in diesem Fachgebiet in der Schweiz tätigen Geodäten wissen seine Vorteile zu schätzen. Es ist anzunehmen, dass sein Einsatz noch vermehrt zunehmen wird.

In Analogie zum Biber, der den Menschen wegen seiner phantomhaften Lebensweise - man sieht ihn nicht, wohl aber sein Werk - zu faszinieren vermag, wirkt der BIBER-Schätzer ebenfalls im verborgenen. Seine Aufteilung der Beobachtungen in "gute" und "fehlerbehaftete" erfolgt für den Benutzer unsichtbar, sein Wirken zeigt sich in guten Schätzergebnissen und der zuverlässigen Kennzeichnung grober Fehler.

Selbstverständlich wird der BIBER-Schätzer die MdkQ jedoch nicht verdrängen, der Biber in Abb. 19.1 wird also den in den letzten 200 Jahren gewachsenen "MdkQ-Baum" nicht fällen, er nagt aber am Nimbus der MdkQ als Universalschätzmethode und bietet eine praxistaugliche, theoretisch fundierte und zweckmässige Ergänzung und Alternative.

Sein primäres Einsatzgebiet ist die sehr einfache und effiziente Lokalisierung grober Fehler in komplexen, aus verschiedenen Beobachtungstypen und sehr vielen Beobachtungen bestehenden Netzen. Häufig wird der BIBER-Schätzer der Schätzung nach der MdkQ vorgeschaltet, um grobe Fehler in den Beobachtungen einfach, effizient und automatisch aufdecken zu können.

Im weiteren bietet dieser Schätzer aber auch Gewähr für gute Schätzergebnisse bei nicht ausreichend normalverteilten Daten. In solchen Fällen kann der BIBER-Schätzer als Ersatz für eine Schätzung nach der MdkQ Verwendung finden.



*Abb. 19.1: Der BIBER-Schätzer und die MdkQ*

Der BIBER-Schätzer ist nur ein möglicher robuster Schätzer aus einer beinahe unendlich grossen Anzahl von robusten Schätzern. Er zeichnet sich aus durch:

- seine einfach und klare Struktur, die bedingt ist durch die besondere Zielfunktion,
- seine hohe Effizienz in der Parameterschätzung geodätischer Netze,
- seine Möglichkeit, grobe Fehler - auch in Hebelbeobachtungen - zuverlässig zu lokalisieren,
- seine mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit identischen Schätzresultate verglichen mit der MdkQ bei fehlerfreien Daten,
- seine sehr gute Integrationsfähigkeit in bestehenden Programmsystemen und
- seine einfache, zweckmässige und praxistaugliche Anwendbarkeit.

In 2 Bereichen versagt der BIBER-Schätzer seinen Dienst.

- Der Schätzer bricht zusammen und liefert falsche Resultate, wenn in einem Netz lokal sehr viele grobe Fehler auftreten. Dies ist jedoch unproblematisch, da dieser Umstand in geodätischen Netzen relativ selten vorkommt und ein allfälliges Versa-

gen des Schätzers dem Benutzer durch eine Meldung angezeigt wird. Zudem weisen alternative Schätzer mit besseren Eigenschaften in diesem Bereich andere Nachteile auf und sind sehr rechenintensiv.

- Der Schätzer kann grobe Fehler in vollständig unkontrollierten Beobachtungen nicht finden. Dieser Umstand liegt in der Geometrie des Netzes begründet, er sollte in vernünftig konzipierten geodätischen Netzen nicht auftreten.

Der Einsatz dieses Schätzers im Bereich der Parameterschätzung in geodätischen Netzen ist ein erstes Anwendungsgebiet. Es ist anzunehmen, dass dieser Schätzer dank seinen guten Eigenschaften auch bei anderen Schätzproblemen innerhalb und ausserhalb der geodätischen Wissenschaften zum Einsatz gelangen könnte.



---

## Literatur / Quellen

---

- BAARDA W. 1968 A testing procedure for use in geodetic networks  
*Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, Vol. 2, Nr. 5, Delft*
- BACHMANN W.K. 1973 Estimation stochastique de la precision des mesures  
*Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, S. 113-117*
- BELLONE Tamara 1996 Robust procedures for data preprocessing, testing and  
CRIPPA Bruno archiving  
MUSSIO Luigi *ISPRS-Kongress, Wien, Juli 1996*
- BENNING Wilhelm 1995 Vergleich dreier Lp-Schätzer zur Fehlersuche in  
hybriden Lagenetzen  
*Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 606-617*
- BENNING Wilhelm 1996 Alternative zur robusten Parameterschätzung nach  
Huber  
*Allgemeine Vermessungsnachrichten, S.339-340*
- BENNING Wilhelm 1997 Innere-Punkt-Methoden für die automatisierte  
ELKOUSHY Ashraf A. Fehlersuche in geodätischen Anwendungen  
MEER Klaus *Allgemeine Vermessungsnachrichten, S.319-324*
- BENNING Wilhelm 1997 Nochmals zur Beschleunigung der automatisierten  
Fehlersuche in geodätischen Beobachtungen  
*Allgemeine Vermessungsnachrichten, S.411*
- BIRKENBACH J. 1916 Ein Beitrag zur Beantwortung der Frage: „Ist die  
Fehlertheorie der kleinsten Quadrate die von der Natur  
geforderte?“  
*Zeitschrift für Mathematik und Physik, Heft 2,  
S. 168-195*

- 
- |                    |      |                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| BORUTTA Harald     | 1988 | Robuste Schätzverfahren für geodätische Anwendungen<br><i>Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen,<br/>Universität der Bundeswehr, München</i>                                                                                  |
| BRÖKER Georg       | 1996 | Robuste Ausgleichung - ein Beispiel „zu Fuss“<br><i>Der Vermessungsingenieur, S. 159-162</i>                                                                                                                                        |
| BURNAND Thierry    | 1990 | Das Zuverlässigkeitsmodell der schweizerischen<br>Landesvermessung.<br>Bericht zur Weiterbildungstagung „Zuverlässigkeit in<br>der Vermessung“<br><i>ETH Zürich, Institut für Geodäsie und<br/>Photogrammetrie, Bericht Nr. 169</i> |
| CAROSIO Alessandro | 1979 | Robuste Ausgleichung<br><i>Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik,<br/>S. 293-297</i>                                                                                                                                        |
| CAROSIO Alessandro | 1982 | Robuste Ähnlichkeitstransformation und Interpolation<br>nach dem arithmetischen Mittel<br><i>Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik,<br/>S. 196-200</i>                                                                      |
| CAROSIO Alessandro | 1983 | Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der<br>Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer<br>Messsysteme<br><i>ETH Zürich, Institut für Geodäsie und<br/>Photogrammetrie, Bericht Nr. 35</i>                      |
| CAROSIO Alessandro | 1990 | Einführung in die mathematische Statistik<br>Bericht zur Weiterbildungstagung „Zuverlässigkeit in<br>der Vermessung“<br><i>ETH Zürich, Institut für Geodäsie und<br/>Photogrammetrie, Bericht Nr. 169</i>                           |
| CAROSIO Alessandro | 1990 | Die Theorie der Zuverlässigkeit im Vermessungswesen<br>Bericht zur Weiterbildungstagung „Zuverlässigkeit in<br>der Vermessung“<br><i>ETH Zürich, Institut für Geodäsie und<br/>Photogrammetrie, Bericht Nr. 169</i>                 |



- 
- |                                   |      |                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| CAROSIO Alessandro                | 1992 | Die Zuverlässigkeit in der schweizerischen Landesvermessung<br><i>Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, S. 491-495</i>                                  |
| CAROSIO Alessandro                | 1995 | Ausgleichung geodätischer Netze mit Verfahren der robusten Statistik<br><i>Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, S. 188-191</i>                         |
| CAROSIO Alessandro                | 1996 | Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung, Band 1<br><i>Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Departement geodätische Wissenschaften</i>                       |
| CASPARY Wilhelm<br>BORUTTA Harald | 1986 | Geometrische Deformationsanalyse mit robusten Schätzverfahren<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S.315-326</i>                                             |
| CASPARY Wilhelm                   | 1988 | Fehlerverteilungen, Methode der kleinsten Quadrate und robuste Alternativen<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 123-133</i>                               |
| CASPARY Wilhelm<br>HAEN W.        | 1990 | Simultaneous estimation of location and scale parameters in the context of robust M-estimation<br><i>Manuscripta geodaetica 15, S. 273-282</i>                   |
| CASPARY Wilhelm                   | 1996 | Anmerkungen zum robusten Schätzen<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S.287-289</i>                                                                         |
| CASPARY Wilhelm                   | 1998 | Anmerkungen zur balancierten Ausgleichung<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 271-272</i>                                                                 |
| CHÉTELAT Véronique                | 1990 | Méthodes d'estimation robustes. Applications géodésiques<br><i>Semesterarbeit am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich (unveröffentlicht)</i> |
| DANUSER Gaudenz                   | 1992 | Robuste Schätzer mit hohem Bruchpunkt<br><i>ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht Nr. 207</i>                                           |

- 
- |                                                                                  |      |                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| EHLERT Dieter<br>SOLTAU Gerd                                                     | 1995 | 200 Jahre Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 618-620</i>                                            |
| FRÖHLICH Hans<br>BRÖKER Georg                                                    | 1997 | L1-Norm-Ausreissertest in leicht programmierbarer Darstellung<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 28-31</i>                                                     |
| GUBLER Erich                                                                     | 1994 | Beschreibung zum Programm LTOP<br><i>Bundesamt für Landestopographie, Bulletin 25d</i>                                                                                 |
| HAMPEL Frank R.                                                                  | 1980 | Robuste Schätzungen: Ein anwendungsorientierter Überblick<br><i>Biometrika J., Vol. 22, S. 3-21, ETH Zürich</i>                                                        |
| HAMPEL Frank R.<br>RONCHETTI Elvezio M.<br>ROUSSEUW Peter J.<br>STAHEL Werner A. | 1986 | Robust statistics, the approach based on influence functions<br><i>John Wiley and Sons, New York</i>                                                                   |
| HAMPEL Frank R.                                                                  | 1987 | Einige Aspekte der statistischen Datenanalyse, Teil II: Einige Aspekte der robusten Statistik<br><i>Lebensmitteltechnologie, Vol. 20, Nr. 6, S. 130-133</i>            |
| HEKIMOGLU Serif                                                                  | 1998 | Change of the diagonal elements of the hat matrix under changing weight and changing position of an observation<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 266-271</i> |
| HELMERT F. R.                                                                    | 1880 | Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie<br><i>Teubner, Leipzig</i><br>Nachdruck: <i>Minerva GmbH, Frankfurt a. M. (1962)</i>               |
| HUBER Peter J.                                                                   | 1964 | Robust Estimation of a location parameter<br><i>Annals of Mathematical Statistics, Vol. 35, S. 73-101</i>                                                              |
| HUBER Peter J.                                                                   | 1972 | Robust statistics: A review<br><i>Annals of Mathematical Statistics, Vol. 4, S. 1041-1067</i>                                                                          |

- 
- HUBER Peter J. 1977 Robust methods of estimation of regression coefficients  
*Mathematische Operationsforschung und Statistik, Serie Statistik, Vol. 8, S. 41-53*
- HUBER Peter J. 1981 Robust Statistics  
*John Wiley and Sons, New York*
- JURISCH Ronald 1997 Über eine Eigenschaft der Methode der kleinsten  
KAMPMANN Georg Quadrate unter Verwendung von balancierten  
KRAUSE B. Beobachtungen  
*Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 159-166*
- JURISCH Ronald 1997 Eine Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels für  
KAMPMANN Georg einen Freiheitsgrad bei der Ausgleichung nach  
vermittelnden Beobachtungen  
*Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 509-520*
- JURISCH Ronald 1998 Vermittelnde Ausgleichsrechnung mit balancierten  
KAMPMANN Georg Beobachtungen - erste Schritte zu einem neuen Ansatz  
*Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 87-92*
- JURISCH Ronald 1998 Erwiderung zu den "Anmerkungen zur balancierten  
KAMPMANN Georg Ausgleichung"  
KRAUSE Bernd  
*Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 272-273*
- JUST Christian 1979 Statistische Methoden zur Beurteilung der Qualität einer  
Vermessung  
*ETH Zürich, Institut für Geodäsie und  
Photogrammetrie, Mitteilung Nr. 27*
- KAMPMANN Georg 1986 Robuster Ausreissertest mit Hilfe der L1-Norm-Methode  
*Allgemeine Vermessungsnachrichten, S.139-147*
- KAMPMANN Georg 1989 L1-Norm-Schätzung mit korrelierten Beobachtungen  
*Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 493-497*
- KAMPMANN Georg 1990 Robuster Ausreissertest mit Hilfe der bedingten L1-  
Norm-Methode  
*Allgemeine Vermessungsnachrichten, S.27-32*

- 
- |                             |      |                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| KAMPMANN Georg              | 1991 | Ist die Methode der kleinsten Quadrate für die Fehlererkennung in der Praxis des Vermessungsingenieurs heute noch zeitgemäss?<br><i>Vermessungsingenieur, S. 140-143</i> |
| KAMPMANN Georg              | 1993 | Zur Ausgleichung freier Netze mit der L1-Norm-Methode<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 110-118</i>                                                            |
| KAMPMANN Georg              | 1993 | Einige Bemerkungen zur mathematischen Eindeutigkeit der Lösungsparameter einer Minimax-Methode<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 491-494</i>                    |
| KAMPMANN Georg              | 1994 | Robuste Deformationsanalyse mittels balancierter Ausgleichung<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 8-17</i>                                                       |
| KAMPMANN Georg              | 1994 | Robuste S-Transformation<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 305-311</i>                                                                                          |
| KAMPMANN Georg<br>KRAUSE B. | 1995 | Über die Äquivalenz von Lp-Norm-Minimierung und Maximum-Likelihood Methode<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 565-570</i>                                        |
| KAMPMANN Georg              | 1996 | Ein Beitrag zu „Robuste Parameterschätzung“ von Prof. Koch<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 167-174</i>                                                       |
| KAMPMANN Georg<br>KRAUSE B. | 1997 | Minimierung von Residuenfunktionen unter Ganzzahligkeitsrestriktionen<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 325-331</i>                                            |
| KEGEL Gabriele              | 1987 | Zur Lokalisierung grober Datenfehler mit Hilfe robuster Ausgleichungsverfahren<br><i>Vermessungstechnik, S. 348-350</i>                                                  |
| KOCH Karl-Rudolf            | 1996 | Robuste Parameterschätzung<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 1-18</i>                                                                                          |

- 
- |                                          |      |                                                                                                                                                                             |
|------------------------------------------|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| KOCH Karl-Rudolf                         | 1996 | Stellungnahme zum Beitrag von Prof. Kampmann zu „Robuste Parameterschätzung“<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 165-167</i>                                        |
| KOCH Karl-Rudolf<br>YANG Yuanxi          | 1998 | Konfidenzbereiche und Hypothesentests für robuste Parameterschätzungen<br><i>Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 20-26</i>                                                 |
| KRARUP Torben<br>JUHL Jens<br>KUBIK Kurt | 1980 | Götterdämmerung over least squares adjustement<br><i>14th Congress of the international society of photogrammetry, commission III, presented paper, S. 369-378, Hamburg</i> |
| MARAZZI Alfio                            | 1990 | ROBETH: a subroutine library for robust statistical procedures<br><i>Vorabdruck</i>                                                                                         |
| MARAZZI Alfio                            | 1993 | Algorithms, Routines and S Functions for Robust Statistics<br><i>Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, California</i>                                                   |
| MAURER W.                                | 1980 | Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung<br><i>Vorlesungsmanuskript 20-012, ETH Zürich</i>                                                                                 |
| MERRILL H. M.<br>SCHWEPPE F. C.          | 1971 | Bad data suppression in power system static state estimation<br><i>IEEE Trans. Power App. Syst., S. 2718-2725</i>                                                           |
| RICHTLINIEN                              | 1996 | Richtlinien für die Bestimmung von Fixpunkten<br><i>Bundesamt für Landestopographie, Eidgenössische Vermessungsdirektion</i>                                                |
| ROUSSEUW Peter J.<br>LEROY Annick M.     | 1987 | Robust regression & outlier detection<br><i>John Wiley and Sons, New York</i>                                                                                               |
| SOMOGYI J.<br>KALMAR J.                  | 1988 | Verschiedene robuste Schätzverfahren für die Helmerttransformation<br><i>Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 141-146</i>                                                  |

- 
- SOMOGYI J. 1988 Robust estimations and their use in Geodesy  
*Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungarica, Vol. 23, S. 45-53*
- SOMOGYI J. 1992 Zur Anwendung der Boscovich-Bedingung bei  
ZÁVOTTI J. Schätzungen mit der L1-Norm-Methode  
*Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 336-344*
- SOMOGYI J. 1993 Robust estimation with iteratively reweighted least-  
ZÁVOTTI J. squares method.  
*Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungarica, Vol. 28, S. 413-420*
- SOMOGYI J. 1996 A comparison of weight-functions in robust regression  
ZÁVOTTI J. using iteratively reweighted least-squares  
*Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungarica, Vol. 31, S. 11-24*
- STICHLER S. 1984 Zur Anwendung robuster statistischer Methoden in der  
Geodäsie  
*Vermessungstechnik, S. 379-381*
- TVAV 1994 Technische Verordnung über die amtliche Vermessung  
vom 10. Juni 1994 (SR 211.432.21)
- WALTER Michel 1980 Compensation d'observation mediatees par la methode  
„robuste“  
*ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht Nr. 37*
- WENDERLEIN Werner 1996 „Genauigkeit ist nicht Wirklichkeit“  
*Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 301-305*
- WICKI Fridolin 1991 Zuverlässigkeitstheorie, Beurteilungskriterien für die  
Zuverlässigkeit von geodätischen Netzen  
*ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht Nr. 176*
- WICKI Fridolin 1992 Robuste Ausgleichung geodätischer Netze  
*ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Bericht Nr. 189*

- WICKI Fridolin                    1992    Robuste M-Schätzer und Zuverlässigkeit  
*ETH Zürich, Institut für Geodäsie und  
Photogrammetrie, Bericht Nr. 190*
- WICKI Fridolin                    1996    Technische Richtlinien: Strenger Ausgleich LFP3  
VITTONÉ René                    *Kanton Aargau, Vermessungsamt, VNET-Handbuch*
- WOLF Helmut                    1977    C. F. Gauss und die Methode der kleinsten Quadrate  
*Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 125-133*
- WOLF Helmut                    1983    Neues Altes in der Ausgleichsrechnung  
*Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik,  
S. 233-240*
- XU Peiliang                    1989    On robust estimation with correlated observations  
*Bulletin géodésique, Vol. 63, S 237-252*
- YANG Yuanxi                    1997    Estimators of covariance matrix at robust estimation  
based on influence functions  
*Zeitschrift für Vermessungswesen, S. 166-174*
- ZHU Jianjun                    1996    Robustness and the robust estimate  
*Journal of Geodesy, Springer Verlag, S. 586-590*





---

## Verzeichnis der Abbildungen

---

- Abb. 5.1: empirische Verteilungsfunktion  $F_n(x)$   
Abb. 5.2: empirische Verteilungsfunktion  $\delta_x$   
Abb. 5.3: Verteilungsfunktion  $F(x)$   
Abb. 5.4: Dichtefunktion  $f(x)$   
Abb. 5.5: Haupttypen von Einflussfunktionen (IF)  
Abb. 6.1: Regressionsgerade  
Abb. 8.1: Einfluss einer Hebelbeobachtung am Beispiel der linearen Regression  
Abb. 8.2: Beispiel einer Hebelbeobachtung  
Abb. 9.1:  $\rho$ - und  $\Psi$ -Funktion der L2-Norm-Schätzung (MdkO)  
Abb. 9.2:  $\rho$ - und  $\Psi$ -Funktion des L1-Norm-Schätzers  
Abb. 9.3:  $\rho$ - und  $\Psi$ -Funktion des Huber-Schätzers  
Abb. 9.4:  $\rho$ - und  $\Psi$ -Funktion des Hampel-Schätzers  
Abb. 9.5: Huber-Typ  
Abb. 9.6: Mallows-Typ  
Abb. 9.7: Schweppe-Typ  
Abb. 9.8: Beispiel zur balancierten L2-Norm-Schätzung  
Abb. 10.1: Beispiel eines geodätischen Netzes  
Abb. 10.2: BIBER-Schätzer  
Abb. 11.1:  $\Psi$ -Funktion des BIBER-Schätzers  
Abb. 11.2: Verhalten des Grenzwertes  $k_i$  des BIBER-Schätzers bei kleinen  $z_i$   
Abb. 15.1: Test der standardisierten Verbesserungen  
Abb. 15.2: Globaler Modelltest  
Abb. 15.3: Vergleich der Zuverlässigkeitsmodelle bei der MdkQ und beim BIBER-Schätzer  
Abb. 15.4: Zuverlässigkeitsrechteck (NA, NB bzw. NA\*, NB\*)  
Abb. 15.5: Zuverlässigkeitsintervall (NH bzw. NH\*)  
Abb. 16.1: Ablauf der robusten Ausgleichung im LTOP  
Abb. 17.1: Orientierungsunbekannte  
Abb. 18.1: Netzplan Richtungssatz aus LFP3-Netz Aarau, Los 6  
Abb. 18.2: Netzplan Nivellementsnetz  
Abb. 18.3: Tachymetrisches Netz Lage (Zu 93/01)  
Abb. 18.4: Tachymetrisches Netz Höhe (Zu 93/01)  
Abb. 18.5: GPS - Netz (Zu 93/01)  
Abb. 18.6: Protokolle der 3 neuen LFP2 (Zu 93/01)  
Abb. 19.1: Der BIBER-Schätzer und die MdkQ

