EDUCETH
Das Bildungsportal der ETH Zürich

Publikation von www.educeth.ch

Bubblesort

Leitprogrammartige Unterrichtsunterlagen
von Lucia Keller

Inhalt:
„Bubblesort“ ist eine einfache Sortiermethode, die auf verschiedene Arten visualisiert werden kann. Diese Unterlagen beschränken sich der Einfachheit halber auf Zahlenfolgen.

Unterrichtsmethode: Leitprogrammartige Unterrichtsunterlagen
Das Leitprogramm ist ein Selbststudienmaterial. Es enthält alle notwendigen Unterrichtsinhalte, Übungen, Arbeitsanleitungen und Tests, welche die Schüler/innen brauchen, um ohne Lehrperson lernen zu können. Die folgenden Unterlagen nehmen Elemente des Leitprogramms auf.

Fachliches Review:
Juraj Hromkovic, Informationstechnologie und Ausbildung, ETH Zürich

Fachdidaktisches Review:
Juraj Hromkovic, Informationstechnologie und Ausbildung, ETH Zürich

Publiziert auf EducETH:
19. Juni 2008

Rechtliches:
Die vorliegende Unterrichtseinheit darf ohne Einschränkung heruntergeladen und für Unterrichtszwecke kostenlos verwendet werden. Dabei sind auch Änderungen und Anpassungen erlaubt. Der Hinweis auf die Herkunft der Materialien (ETH Zürich, EducETH) sowie die Angabe der Autorinnen und Autoren darf aber nicht entfernt werden.

Publizieren auf EducETH?
Möchten Sie eine eigene Unterrichtseinheit auf EducETH publizieren? Auf folgender Seite finden Sie alle wichtigen Informationen: http://www.educeth.ch/autoren

Weitere Informationen:
Weitere Informationen zu dieser Unterrichtseinheit und zu EducETH finden Sie im Internet unter http://www.educ.ethz.ch oder unter http://www.educeth.ch.

SCIENCE MEETS SCHOOL
EDUCETH.CH

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Bubblesort

Lucia Keller

11. Juni 2008

Zusammenfassung

Diese Sortiermethode ist eine der einfachsten und sie kann auf verschiedene Arten visualisiert werden. Das vereinfacht das Verständnis sehr.

Die Unterrichtseinheit ist für GymnasialschülerInnen kurz vor der Matura gedacht und wird zwei Lektionen beanspruchen.

Vorausgesetzte Grundkenntnisse:

- Die SchülerInnen wissen, was eine Methode (bzw. ein Verfahren) ist.
- Sie kennen den Begriff der Laufzeit.
- Eventuell können Sie sogar schon programmieren. Sollte das der Fall sein, dann könnte man nach diesen beiden Lektionen den Pseudocode für Bubblesort anschauen und diese Methode auch programmieren.

1 Lernziele nach dem Zielebenenmodell

1.1 Leitidee

Sortieraufgaben stellen sich häufig im Alltag. In einer sortierten Menge von Objekten findet man sich viel schneller zurecht als in einem Chaos. Wenige Objekte kann man gut von Hand sortieren, aber bei grösseren Mengen kann der Computer eine gute Hilfe sein. Deshalb möchten wir für den Computer eine Methode finden, mit der er unser „Durcheinander“ sortieren kann. Wir werden uns in diesem Leitprogramm der Einfachheit halber auf Zahlenfolgen beschränken.

1.2 Dispositionsziel

Nach dem Unterricht sind die Schüler in der Lage, einen Pseudocode für Bubblesort zu erstellen. Sie möchten Bubblesort auch programmieren und an grösseren Zahlenfolgen testen. Wenn sie schon geübte Programmierer sind, möchten sie vielleicht sogar die Methode visualisieren. Sie sind an anderen Methoden interessiert und möchten wissen, wie die Methoden, die eine besser Laufzeit haben, aussehen.

1.3 Operationalisiertes Lernziel

Die Schüler können nach diesen beiden Lektionen eine Folge von Zahlen der Grösse nach mit Bubblesort sortieren. Sie wissen, wie man die Laufzeit berechnen kann, und sie können nachvollziehen, durch welche Anpassungen die Laufzeit verbessert werden kann. Sie sehen ein, dass der Computer nur jeweils zwei Zahlen vergleichen kann und nicht direkt den Überblick über die ganze Folge hat.

2 Plastische Lernziele

Sortieren ist sehr wichtig im Alltag. Nehmen wir als Beispiel das Telefonbuch. Es wäre sehr mühsam, wenn die Telefonnummern nicht sortiert wären. Wir müssten jeden einzelnen Namen anschauen, um die richtige Telefonnummer zu finden. Deshalb sind wir froh, dass die Telefonnummern nach Kanton, Ortschaft und Namen sortiert sind.
Aber wer hat die Nummern sortiert? Und wie? Ein Mensch hätte viel zu lange, wenn er von Hand sortieren würde. Deshalb überlässt man das gerne dem Computer.
Wir werden uns in diesen beiden Lektionen auf Zahlenfolgen beschränken. Wir werden eine Methode kennenlernen, mit der wir Zahlen der Grösse nach sortieren können. Sie werden sehen, dass die Methode je nachdem, wie gross das „Durcheinander“ ist, länger oder weniger lang braucht. Sie werden auch sehen, was der Computer mit einer Folge von Zahlen macht. Wir werden die Methode heute nicht programmieren, aber wenn Sie Lust haben, dann können Sie das zu Hause selber probieren.

3 Bubblesort

3.1 Einleitung

Sortieren muss man überall im Alltag.
Vielleicht haben Sie eine Briefmarkensammlung, die in vielen mühsamen Stunden sortiert werden musste? Oder legen Sie Wert auf Ordnung und sortieren Sie die Kleider im Kleiderschrank? Wenn Sie keine Alltagssituation finden, in der sie schon sortieren mussten, dann haben Sie sicher schon einmal das Telefonbuch benutzt und waren sehr froh, dass die Nummern nach Namen sortiert sind.
Wenn man nur wenige Objekte zum Sortieren hat, dann kann man es mit einem gewissen Zeitaufwand von Hand erledigen. Aber stellen Sie sich vor, Sie müssten ein Telefonbuch für Ihren Heimatort erstellen! Wären Sie da nicht auch froh, wenn Ihnen jemand helfen würde?
In diesen Unterlagen werden Sie sehen, dass der Computer ein sehr gutes Hilfsmittel zum Sortieren ist. Wir werden nur einfache Zahlenfolgen sortieren, aber ähnlich würde es auch für andere Objekte funktionieren.

Es gibt viele Sortiermethoden. Die einen sind einfach, dauern aber lange; andere wiederum können in sehr kurzer Zeit eine Folge sortieren, sind aber sehr kompliziert zu verstehen. Sie werden mit Bubblesort eine der einfachsten Methoden kennenlernen.
Für die Bearbeitung dieses Leitprogramms brauchen Sie nur ein paar Blätter Papier, einen Bleistift und einen Radiergummi. Halten Sie alle Ihre Überlegungen schriftlich fest. Wenn im Text eine Aufgabe vorkommt, dann lösen Sie sie, bevor sie weiterlesen. Im Anhang finden Sie die Lösungen zu den Aufgaben.

3.2 Wie bringt man eine Zahl an den richtigen Ort?

Betrachten Sie die folgende Zahlenfolge:

1 2 3 6 4 5 7

Sie möchten diese Zahlenfolge der Grösse nach sortieren. Wie würden Sie vorgehen? Beschreiben Sie Ihre Idee in ein paar Sätzen!

Wir schlagen folgendes Vorgehen vor: Wir nehmen als Hilfsmittel eine Box, in diese Box dürfen wir zwei Zahlen schreiben:

3	6

Die Box hat nun zwei Aufgaben:

1. **Vergleichen:** Sie vergleicht die beiden Zahlen und stellt fest, welche der beiden Zahlen grösser ist.

2. **Vertauschen:** Wenn die grössere Zahl links steht, dann vertauscht die Box die beiden Zahlen. Falls die grössere Zahl rechts steht, verändert die Box nichts[1].

Im oberen Fall würde die Box feststellen, dass die grössere Zahl 6 ist und diese Zahl rechts liegt. Also würde nichts verändert werden. Im nächsten Beispiel ist die grössere Zahl links:

6	**4**

Also muss die Box die beiden Zahlen vertauschen:

4	6

Wir werden die Zahlen in der Box **fettgedruckt** schreiben, wenn sie in umgekehrter Reihenfolge da stehen. So wissen wir, dass dann die Zahlen in einem nächsten Schritt vertauscht werden müssen.

[1] Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Folgen aus lauter verschiedenen Zahlen bestehen

Jetzt können wir die Box auf unser Beispiel anwenden. Die Box soll zuerst ganz links platziert werden:

$$\boxed{1 \quad 2} \quad 3 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 7$$

Die Zahlen haben die richtige Reihenfolge, also wird nichts verändert. Nun verschieben wir die Box um eine Zahl nach rechts:

$$1 \quad \boxed{2 \quad 3} \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 7$$

Auch hier passiert noch nichts. Wir lassen die Box jetzt auf diese Weise Zahl für Zahl nach rechts wandern:

$$1 \quad 2 \quad \boxed{3 \quad 6} \quad 4 \quad 5 \quad 7$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \boxed{\mathbf{6} \quad \mathbf{4}} \quad 5 \quad 7$$

In diesem Schritt sehen wir, dass die grössere Zahl links liegt, also vertauschen wir die 6 und die 4:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \boxed{4 \quad 6} \quad 5 \quad 7$$

Dann gehen wir wieder eine Zahl weiter:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \boxed{\mathbf{6} \quad \mathbf{5}} \quad 7$$

Auch hier müssen wir vertauschen:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \boxed{5 \quad 6} \quad 7$$

Und im letzten Schritt passiert wieder nichts:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \boxed{6 \quad 7}$$

Mit dieser Methode haben wir die Folge also sortiert.

Aufgabe 1

Verwenden Sie die obige Methode, um die folgende Zahlenfolge der Grösse nach zu sortieren. Schreiben Sie jeden Schritt auf.

$$1 \quad 2 \quad 7 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 9$$

3.3 Was passiert bei einem grösseren „Durcheinander“?

Im vorangehenden Abschnitt hatten wir Zahlenfolgen, bei welchen nur eine Zahl nicht am richtigen Ort war. Die Folgen waren also schon fast sortiert. Das ist aber meistens nicht so und deshalb untersuchen wir jetzt Zahlenfolgen mit einem grösseren „Durcheinander“. Als Beispielwählen wir die folgende Folge:

$$2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 4$$

Wir wenden wieder unser Verfahren an und lassen die Box ein Mal von links nach rechts laufen:

$$\boxed{\mathbf{2}\quad\mathbf{1}}\ 3\ 5\ 6\ 4$$
$$\boxed{1\quad 2}\ 3\ 5\ 6\ 4$$
$$1\ \boxed{2\quad 3}\ 5\ 6\ 4$$
$$1\ 2\ \boxed{3\quad 5}\ 6\ 4$$
$$1\ 2\ 3\ \boxed{5\quad 6}\ 4$$
$$1\ 2\ 3\ 5\ \boxed{\mathbf{6}\quad\mathbf{4}}$$
$$1\ 2\ 3\ 5\ \boxed{4\quad 6}$$

Wir stellen fest, dass die Folge noch nicht vollständig sortiert ist. Also wiederholen wir das Verfahren und lassen die Box ein zweites Mal von links nach rechts durchlaufen:

$$\boxed{1\quad 2}\ 3\ 5\ 4\ 6$$
$$1\ \boxed{2\quad 3}\ 5\ 4\ 6$$
$$1\ 2\ \boxed{3\quad 5}\ 4\ 6$$
$$1\ 2\ 3\ \boxed{\mathbf{5}\quad\mathbf{4}}\ 6$$
$$1\ 2\ 3\ \boxed{4\quad 5}\ 6$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ \boxed{5\quad 6}$$

Nun ist die Folge vollständig sortiert. Sie sehen, dass wir zwei Durchläufe gebraucht haben, um die Zahlen vollständig zu sortieren.

Aufgabe 2

Sortieren Sie die folgende Zahlenfolge der Grösse nach:

$$4\quad 1\quad 5\quad 6\quad 2$$

Wieviele Durchläufe haben Sie gebraucht?

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe brauchen Sie noch einmal die Zahlenfolge aus Aufgabe 2.

a) Zählen Sie die Anzahl Vergleiche in jedem Durchlauf!

b) Wieviele Vergleiche sind es insgesamt?

c) Wie oft musste die Box zwei Zahlen vertauschen in jedem Durchlauf?

d) Wie viele Zahlen wurden insgesamt vertauscht?

Zusatzaufgabe

Unter *http://www.tcs.ifi.lmu.de/∼gruberh/lehre/sorting/Bubble/Bubble.html* können Sie weitere Zahlenfolgen ausprobieren. Das Verfahren wird hier mit einem Balkendiagramm visualisiert.

3.4 Wieviele Durchläufe sind maximal nötig?

Sie haben gesehen, dass bei der Folge

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 7$$

nur ein Durchlauf nötig war, um die Folge zu sortieren. Bei der Zahlenfolge

$$2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 4$$

hingegen waren zwei Durchläufe nötig. Worin besteht der Unterschied?

In der ersten Folge war nur eine Zahl am falschen Ort und in der zweiten Folge war das „Durcheinander“ grösser. Sie sehen also, dass fast sortierte Folgen weniger Durchläufe benötigen als andere.
Was passiert aber genau in jedem Durchlauf? Um diese Frage zu beantworten, wählen wir folgendes Beispiel:

$$1 \quad 9 \quad 5 \quad 7 \quad 3$$

Nach dem 1. Durchlauf sieht die Folge so aus[2]:

$$1 \quad 5 \quad 7 \quad 3 \quad \underline{9}$$

Man sieht, dass die grösste Zahl, die 9, nach rechts gewandert ist. Im zweiten Durchlauf wird die zweitgrösste Zahl, die 7, an dem richtigen Ort platziert:

$$1 \quad 5 \quad 3 \quad \underline{7} \quad \underline{9}$$

Und nach dem dritten Durchlauf ist die Folge sortiert:

$$1 \quad 3 \quad \underline{5} \quad \underline{7} \quad \underline{9}$$

In jedem Durchlauf wandert also die grösste Zahl, die noch nicht unterstrichen ist, nach rechts (bzw. nach oben). Dasselbe Phänomen können wir auch bei Wasserblasen (engl. Bubbles) beobachten: Die grösste Wasserblase steigt zuerst nach oben. Wir nennen diese Methode deshalb *Bubblesort*.
Eine schöne Animation finden Sie unter
http://olli.informatik.uni-oldenburg.de/fpsort/Animation.html.

[2] Die Zwischenschritte können Sie selber nachrechnen.

Wieviele Durchläufe sind maximal nötig? Wenn wir wie oben fünf Zahlen sortieren möchten, dann müssten wir schlimmstenfalls vier Durchläufe laufen lassen. Im ersten Durchlauf wandert ja die grösste Zahl ganz nach rechts, also steht sie schon am richtigen Ort. Nach dem nächsten Durchlauf wird die zweitgrösste Zahl am richtigen Ort stehen, nach dem dritten Durchlauf die drittgrösste Zahl und nach dem vierten Durchlauf ist auch die viertgrösste Zahl an der richtigen Stelle. Ein fünfter Durchlauf ist nicht nötig, denn die kleinste Zahl steht dann schon automatisch am richtigen Ort.
Wenn wir also allgemein eine Folge mit n Zahlen haben, dann brauchen wir höchstens $n - 1$ Durchläufe.

Aufgabe 4

Welche Folge mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 braucht die minimale Anzahl an Durchläufen? Schreiben Sie die Folge auf und geben Sie an, wieviele Durchläufe benötigt werden.

Aufgabe 5

Wieviele Durchläufe braucht eine Folge mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 maximal? Schreiben Sie eine solche Folge auf!

3.5 Wie weiss der Computer, wann er aufhören muss?

Bei allen Beispielen oben haben wir sofort gesehen, wann die Folge sortiert war und haben dann keinen weiteren Durchlauf mehr gestartet. Der Computer sieht aber die sortierte Folge nicht direkt. Er kann ja nur jeweils mit der Box zwei Zahlen vergleichen. Wie können wir also den Computer stoppen?
Wir wissen aus dem vorherigen Abschnitt, dass bei n Zahlen maximal $n - 1$ Durchläufe nötig sind. Wir könnten also dem Computer sagen, dass er immer $n - 1$ Durchgänge machen soll. So sind wir auf der sicheren Seite, denn nach $n - 1$ Durchgängen wird jede Folge mit n Zahlen sortiert sein. Aber bei fast sortierten Folgen werden wir so viele Durchläufe haben, bei denen keine Zahlen mehr vertauscht werden. Da wäre es besser, wenn man früher aufhören würde.
Die Lösung dazu beruht auf folgendem Gedanken: Der Computer kann sich merken, ob er in einem Durchlauf eine Zahlenvertauschung vorgenommen hat oder nicht. Deshalb können wir dem Computer sagen, dass er das Verfahren abbrechen soll, sobald in einem Durchlauf keine Vertauschung mehr stattgefunden hat. Der Computer wird zwar bei jeder Folge einen Durchlauf zu viel haben, aber das ist immer noch besser, als wenn er immer $n - 1$ Durchläufe machen müsste.
Wenn wir beide Ideen kombinieren, dann können wir noch eine bessere Laufzeit kriegen. Wir sagen dem Computer, dass nach einem Durchlauf ohne Vertauschungen gestoppt werden muss, aber allerspätestens nach $n - 1$ Durchläufen soll das Programm fertig sein.

Aufgabe 6

Betrachten Sie noch einmal das Beispiel aus Aufgabe 2:

4 1 5 6 2

Sie haben diese Folge in Aufgabe 2 sortiert. Was würde der Computer anders machen? Schreiben Sie auf, wie der Computer diese Folge sortieren würde!

Aufgabe 7

Wieviele Vergleiche wurden in der Folge von Aufgabe 6 in jedem Durchlauf durchgeführt? Wieviele Vergleiche sind es insgesamt? Vergleichen Sie mit der Aufgabe 3. Was fällt Ihnen auf? Wie kann man das erklären?

3.6 Wie können wir die Laufzeit weiter verbessern?

Wie Sie in Abschnitt 3.4 gesehen haben, ist nach dem ersten Durchlauf die grösste Zahl an der richtigen Stelle. Man könnte also beim zweiten Durchlauf die Box nicht mehr bis ans Ende der Folge schieben, sondern eine Zahl früher aufhören, da wir schon wissen, dass die letzte Zahl sortiert ist. Beim dritten Durchlauf würden wir die letzten beiden Zahlen weglassen, usw. Wir würden also in jedem Durchlauf einen Vergleich weniger durchführen als beim vorangehenden Durchlauf. Wir nehmen als Beispiel noch einmal die Folge aus Aufgabe 2:

4 1 5 6 2

Der 1. Durchlauf funktioniert noch gleich:

4 1 5 6 2

1 4 5 6 2

1 4 5 6 2

1 4 5 6 2

1 4 5 **6 2**

1 4 5 2 6

Im 2. Durchlauf haben wir aber einen Vergleich weniger:

1 4 5 2 6

1 4 5 2 6

1 4 **5 2** 6

1 4 2 5 6

Und im 3. Durchlauf haben wir zwei Vergleiche weniger:

$$\boxed{1 \quad 4} \quad 2 \quad 5 \quad 6$$

$$1 \quad \boxed{\mathbf{4} \quad \mathbf{2}} \quad 5 \quad 6$$

$$1 \quad \boxed{2 \quad 4} \quad 5 \quad 6$$

Im 4. Durchlauf sieht der Computer, dass die Folge sortiert ist. Wir brauchen nur noch einen Vergleich:

$$\boxed{1 \quad 2} \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

Insgesamt waren also nur noch $4+3+2+1=10$ Vergleiche nötig anstatt 16. Wir haben die Laufzeit deutlich verbessert.

Aufgabe 8

Simulieren Sie den Computer mit dem Verfahren von Abschnitt 3.6 an folgendem Beispiel:

$$4 \quad 8 \quad 5 \quad 2 \quad 6$$

Beantworten Sie auch folgende Fragen:

a) Wieviele Durchläufe sind nötig?

b) Wieviele Vergleiche werden pro Durchlauf durchgeführt?

c) Wieviele Vergleiche braucht er insgesamt?

Aufgabe 9

Wieviele Vergleiche macht das Programm maximal bei einer Folge mit 7 Zahlen?

Aufgabe 10

Wieviele Vergleiche sind allgemein bei einer Folge mit n Zahlen maximal nötig?

3.7 Zusammenfassung und Ausblick

Sie kennen jetzt eine einfache Methode, um eine ungeordnete Folge von Zahlen zu sortieren. Eine Box wird an den Anfang einer Folge gesetzt und durchläuft dann die Folge von links nach rechts. In der Box stehen zwei Zahlen und wenn die grössere Zahl links steht, dann vertauscht die Box die beiden Zahlen. Wenn der erste Durchlauf fertig ist, wird die Box wieder an den Anfang gestellt und das Ganze beginnt wieder von vorne. Sobald ein Durchlauf ohne Vertauschungen stattgefunden hat, weiss das Programm, dass die Folge sortiert ist. Sie wissen auch, wie der Computer die Laufzeit möglichst kurz halten kann. Dennoch hat Bubblesort eine sehr lange Laufzeit im Vergleich zu anderen Methoden. Diese sind aber leider etwas komplizierter.

4 Lösungen

Lösung 1

1	2	7	3	4	5	6	8	9
1	2	7	3	4	5	6	8	9
1	2	**7**	**3**	4	5	6	8	9
1	2	3	7	4	5	6	8	9
1	2	3	**7**	**4**	5	6	8	9
1	2	3	4	7	5	6	8	9
1	2	3	4	**7**	**5**	6	8	9
1	2	3	4	5	7	6	8	9
1	2	3	4	5	**7**	**6**	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Lösung 2

1. Durchlauf:

4	**1**	5	6	2
1	4	5	6	2
1	4	5	6	2
1	4	5	6	2
1	4	5	**6**	**2**
1	4	5	2	6

2. Durchlauf:

1	4	5	2	6
1	4	5	2	6
1	4	**5**	**2**	6
1	4	2	5	6
1	4	2	5	6

3. Durchlauf:

$$\boxed{1 \quad 4} \quad 2 \quad 5 \quad 6$$

$$1 \quad \boxed{\mathbf{4} \quad \mathbf{2}} \quad 5 \quad 6$$

$$1 \quad \boxed{2 \quad 4} \quad 5 \quad 6$$

$$1 \quad 2 \quad \boxed{4 \quad 5} \quad 6$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad \boxed{5 \quad 6}$$

Das Sortieren der vorgegebenen Zahlenfolge hat also drei Durchläufe benötigt.

Lösung 3

In jedem Durchlauf waren vier Vergleiche notwendig. Also haben wir insgesamt 12 Vergleiche. Im 1. Durchlauf wurden 2 Mal Zahlen vertauscht, und im 2. und 3. Durchlauf war je nur eine Vertauschung notwendig. Also wurden insgesamt vier Mal Zahlen vertauscht.

Lösung 4

Am wenigsten Durchläufe, nämlich keinen Durchlauf, benötigt natürlich die sortierte Folge

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

Lösung 5

Eine Folge mit vier Zahlen benötigt maximal drei Durchläufe. Beispiel:

$$4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

Lösung 6

Der Computer würde einen Durchlauf mehr benötigen, weil er erst im letzten Durchlauf feststellen kann, dass die Folge sortiert ist.
1. Durchlauf:

$$\boxed{\mathbf{4} \quad \mathbf{1}} \quad 5 \quad 6 \quad 2$$

$$\boxed{1 \quad 4} \quad 5 \quad 6 \quad 2$$

$$1 \quad \boxed{4 \quad 5} \quad 6 \quad 2$$

$$1 \quad 4 \quad \boxed{5 \quad 6} \quad 2$$

$$1 \quad 4 \quad 5 \quad \boxed{\mathbf{6} \quad \mathbf{2}}$$

$$1 \quad 4 \quad 5 \quad \boxed{2 \quad 6}$$

2. Durchlauf:

$$\boxed{1 \quad 4} \quad 5 \quad 2 \quad 6$$

$$1 \quad \boxed{4 \quad 5} \quad 2 \quad 6$$
$$1 \quad 4 \quad \boxed{\mathbf{5} \quad \mathbf{2}} \quad 6$$
$$1 \quad 4 \quad \boxed{2 \quad 5} \quad 6$$
$$1 \quad 4 \quad 2 \quad \boxed{5 \quad 6}$$

3. Durchlauf:

$$\boxed{1 \quad 4} \quad 2 \quad 5 \quad 6$$
$$1 \quad \boxed{\mathbf{4} \quad \mathbf{2}} \quad 5 \quad 6$$
$$1 \quad \boxed{2 \quad 4} \quad 5 \quad 6$$
$$1 \quad 2 \quad \boxed{4 \quad 5} \quad 6$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad \boxed{5 \quad 6}$$

4. Durchlauf:

$$\boxed{1 \quad 2} \quad 4 \quad 5 \quad 6$$
$$1 \quad \boxed{\mathbf{2} \quad \mathbf{4}} \quad 5 \quad 6$$
$$1 \quad 2 \quad \boxed{4 \quad 5} \quad 6$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad \boxed{5 \quad 6}$$

Der Computer hat im 4. Durchlauf keine Zahlenvertauschungen vorgenommen, also ist die Folge fertig sortiert.

Lösung 7

In jedem Durchlauf wurden vier Zahlenpaare verglichen, also haben wir insgesamt 16 Vergleiche. Wir haben mehr Vergleiche als in Aufgabe 3. Aber diese vier Vergleiche mehr sind notwendig, damit der Computer sieht, dass die Folge sortiert ist.

Lösung 8

Im ersten Durchlauf sind vier Vergleiche nötig:

$$\boxed{4 \quad 8} \quad 5 \quad 2 \quad 6$$
$$4 \quad \boxed{\mathbf{8} \quad \mathbf{5}} \quad 2 \quad 6$$
$$4 \quad \boxed{5 \quad 8} \quad 2 \quad 6$$
$$4 \quad 5 \quad \boxed{\mathbf{8} \quad \mathbf{2}} \quad 6$$
$$4 \quad 5 \quad \boxed{2 \quad 8} \quad 6$$
$$4 \quad 5 \quad 2 \quad \boxed{\mathbf{8} \quad \mathbf{6}}$$
$$4 \quad 5 \quad 2 \quad \boxed{6 \quad 8}$$

Im zweiten Durchlauf braucht man noch drei Vergleiche:

$$\boxed{4 \quad 5} \quad 2 \quad 6 \quad \underline{8}$$

$$4 \quad \boxed{\mathbf{5} \quad \mathbf{2}} \quad 6 \quad \underline{8}$$

$$4 \quad \boxed{2 \quad 5} \quad 6 \quad \underline{8}$$

$$4 \quad 2 \quad \boxed{\mathbf{5} \quad \mathbf{6}} \quad \underline{8}$$

Beim dritten Durchlauf muss man zwei Mal vergleichen:

$$\boxed{\mathbf{4} \quad \mathbf{2}} \quad 5 \quad \underline{6} \quad \underline{8}$$

$$\boxed{2 \quad 4} \quad 5 \quad \underline{6} \quad \underline{8}$$

$$2 \quad \boxed{4 \quad 5} \quad \underline{6} \quad \underline{8}$$

Und beim vierten Durchlauf ist nur noch ein Vergleich nötig:

$$\boxed{2 \quad 4} \quad \underline{5} \quad \underline{6} \quad \underline{8}$$

Es sind also vier Durchläufe nötig und insgesamt werden $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ Vergleiche durchgeführt.

Lösung 9

Das Programm wird maximal $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ Vergleiche durchführen.

Lösung 10

Das Programm wird maximal $(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ Vergleiche durchführen.