1, 2, 3, 4 finito - warum?
Wie Paolo Ruffini das Rätsel der Gleichung 5. Grades löste
(Ein Zugang für die Sekundarstufe II)*†

von U. Kirchgraber‡

Zusammenfassung

Im täglichen Leben halten wir manche Probleme für *lösbar*, bei anderen sind wir der Meinung sie seien *unlösbar*. In der Mathematik ist es nicht anders. Jedoch ist die Frage, ob eine mathematische Aufgabe lösbar oder unlösbar ist, nicht immer nur eine Frage der *Einschätzung*: Manchmal lässt sich *beweisen*, dass eine bestimmte Aufgabe lösbar bzw. unlösbar ist. Im ersten Fall reden wir von einem *Existenzsatz*, im zweiten von einem *Nicht-Existenzsatz* oder einem *Unmöglichkeitsbeweis*.

Beispielsweise ist die Frage, ob es nur endlich viele oder aber unendlich viele Primzahlen gibt, seit Euklids Zeiten, also seit über 2000 Jahren, beantwortet: *Es gibt unendlich viele Primzahlen*. Das ist eine Existenzsatz.

Umgekehrt weiss man etwa eben so lang, dass es *unmöglich* ist eine rationale Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt. Bewiesen wird diese Aussage *indirekt*. Das heisst, man führt die Annahme, die Gleichung $x^2 = 2$ habe einen Bruch als Lösung, auf einen Widerspruch.

Ich führe dieses gerade beschriebene "Wurzel-zwei-Problem" nicht zufällig an. Es ist so etwas wie die kleine Schwester des Problems, das in diesem Aufsatz besprochen wird: Hier geht es um die Frage nach *Lösungsformeln* für *Gleichungen höheren Grades* nach Art der Lösungsformel für die quadratische Gleichung (die alle aus dem Effeff kennen). Dabei handelt es sich um ein *berühmtes Problem* der Mathematik: Es hat lange gedauert bis es gelöst werden konnte, und die Lösung hat auf die weitere Entwicklung der Mathematik grossen Einfluss gehabt.

Nichtdestotrotz wird das Thema im gymnasialen Mathematikunterricht höchstens am Rand berührt. Die meisten meinen, dass es ausserhalb der Reichweite der Schulmathematik sei. In diesem Aufsatz zeige ich, dass eine Variante sehr wohl im Rahmen der Schulmathematik unterrichtet werden kann.

*Schriftliche Ausarbeitung des Vortrags vom 1. Dezember 2016 im Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht an der ETH-Zürich, das sich an Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer richtet. Die Ausführungen (vor allem im Hauptteil) sind als Vorschlag für eine mögliche Nutzung im gymnasialen Unterricht gedacht. Je länger ich an dem Aufsatz geschrieben habe, desto mehr habe ich allerdings auch direkt an Schülerinnen und Schüler als Adressat/-innen gedacht, sodass er für Lehrpersonen wohl zu ausführlich ist ... – es ist mir immer ein Anliegen, auch die etwas weniger geübte Leserin, den etwas weniger geübten Leser zu erreichen. Für eine konkrete Implementierung im Unterricht spielen selbstverständlich verschiedene Parameter eine Rolle: Die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler, die zur Verfügung stehende Zeit, usw. Diese Seiten bieten daher nur so etwas wie einen "blueprint", sollten aber massgeschneiderte Umsetzungen ermöglichen.

†Eine frühe Version dieses Vortrags habe ich im Rahmen der Ringvorlesung "Mathematik geniessen!" am 26. November 2015 an der Volkshochschule Zürich gehalten.

‡Professor emeritus Departement Mathematik, ETH Zürich

> "Die Kunst ist bestimmt, zu beunruhigen,
> die Wissenschaft macht sicher."
>
> G. Braques

1 Einleitung

In der Mathematik gab es in den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts (mindestens) zwei, man darf schon sagen, epochale Durchbrüche[1]:

- Der eine ereignete sich in der *Geometrie*: Er betrifft die Klärung des Jahrtausende alten Rätsels um das Parallelenpostulat von Euklid und die damit verbundene Einsicht, dass es nicht *die* Geometrie – die von Euklid in seinen *Elementen* dargestellte – gibt, sondern weitere, ebenbürtige. Damit verbunden ist eine ganz neue Sichtweise auf die Geometrie, die auch die Sicht auf die Mathematik insgesamt veränderte.

- Der andere Durchbruch geschah in der *Gleichungslehre*, genauer in der Theorie *polynomialer* Gleichungen. Nachdem es während Jahrhunderten nicht gelungen war Lösungsformeln für die Gleichung 5. Grades zu finden, gab es zwei Fortschritte, die die Entwicklung der Mathematik ebenfalls nachhaltig beeinflussen sollten. Zum einen *löste C. F. Gauss* (1777–1855) die Frage nach der *Existenz* von Lösungen polynomialer Gleichungen (wie wir heute sagen) von der Frage, wie man die Lösungen bestimmen kann. Insbesondere löste er sie von der Frage nach Lösungsformeln. Gleich mehrmals bewies er im Laufe seines Lebens, dass *es Lösungen gibt* [2,3,4] – ohne anzugeben, wie man sie berechnet. Einmal führte er die Annahme, es gäbe keine Lösung, auf einen Widerspruch.

  Der zweite Fortschritt in der Gleichungslehre bestand darin zu *verstehen*, warum die Suche nach Lösungsformeln für die Gleichung 5. Grades nach dem Muster derjenigen für die Grade 1-4 nicht nur einfach *noch* nicht erfolgreich, sondern

---

[1] Das war auch sonst eine Zeit grosser Veränderungen: politisch, sozial, wirtschaftlich - es ist das Zeitalter der sogenannten "Industriellen Revolution".

[2] Wenn man als *Rahmen* die *komplexen Zahlen* zu Grunde legt, das heisst, wenn als Lösungen komplexe Zahlen zugelassen sind.

[3] Dieses als *Fundamentalsatz der Algebra* (FdA) bezeichnete Resultat kann auf unterschiedliche Art und Weise bewiesen werden. Intuitiv gut verständlich, und damit für den gymnasialen Unterricht prinzipiell geeignet, ist ein topologischer Zugang: Man bildet eine Familie von konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt in der komplexen Zahlenebene mit Hilfe des Polynoms, das die Gleichung definiert, ab und beobachtet die Metamorphose der Bildkurven, wenn der Kreisradius in kleinen Schritten von kleinen zu grossen Werten zunimmt. Weil, wie man beobachtet, mindestens einmal eine der Bildkurven durch den Nullpunkt läuft, begreift man, warum der FDA gilt. Die Ausgestaltung dieser Überlegung zu einem, nach heutigen Massstäben, stichhaltigen Beweis mit elementaren Mitteln – mit Hilfe des Begriffs der Windungszahl einer geschlossenen Kurve bezüglich eines Punktes, der nicht auf ihr liegt – erfordert allerdings einigen Aufwand, siehe [6].

[4] Der Fundamentalsatz der Algebra hat keineswegs "nur" philosophisch-erkenntnistheoretische und ästhetische, sondern durchaus auch praktische Bedeutung. Das zeigt sich zum Beispiel anhand der sogenannten *Hurwitz-Polynome*: Dank des FdA kann man (lediglich durch Anwenden von Grundrechenoperationen auf die Koeffizienten) feststellen, ob alle Nullstellen eines vorgegebenen Polynoms links von der imaginären Achse liegen oder nicht – also *ohne* die Nullstellen zu kennen. Diese Aufgabenstellung ist im Zusammenhang mit sogenannten *Stabilitätsfragen* bei *Differenzialgleichungen* von grosser (auch praktischer) Bedeutung.

vielmehr *aussichtslos* war. Der Durchbruch in dieser Frage wurde zum Ausgangspunkt eines eigenen mathematischen Gebiets, der *Algebra*, oder *höheren Algebra*, wie man eine Weile sagte (um sie von der *elementaren Algebra*, also dem "Buchstabenrechnen", abzugrenzen).

Diesem zweiten Fortschritt in der Gleichungslehre ist dieser Aufsatz gewidmet. Ich folge dabei den Spuren von *Paolo Ruffini* (1765–1822). Ruffini ist der erste gewesen, dem im Zusammenhang mit dem Rätsel um die Quintic ein Unmöglichkeitsbeweis gelang. Nichtsdestotrotz ist er von seinen (mathematischen) Zeitgenossen faktisch ignoriert worden (ausser von *A.-L. Cauchy* (1789–1857)) und die nachgeborenen Mathematik-Titanen *N. H. Abel* (1802–1829) und *E. Galois* (1811–1832) überstrahlten ihn so, dass er eine ganze Weile fast vergessen war. Inzwischen widerfährt ihm mehr Gerechtigkeit.

Der (gymnasiale) Mathematikunterricht muss, wie jeder andere Unterricht, weiter entwickelt werden. Dazu gehört, neben anderem, auch die *Stoffentwicklung*. Im Physikunterricht wagt man sich auch einmal an Relativitätstheorie und Atomphysik. Im Biologieunterricht, vernimmt man, sind, auf Grund von fulminanten Entwicklungen in der Disziplin, umwälzende Änderungen im Gange. J. Hromkovic entwickelt auf der Basis langlebiger Prinzipien der Informatik von Grund auf einen nachhaltigen Informatikunterricht.

So schlage ich vor, über die Möglichkeit nachzudenken, einen der *Meilensteine der Mathematik* des frühen 19. Jahrhunderts den Schülerinnen und Schülern zugänglich zu machen[5]. Dazu scheint mir Ruffini einen *niederschwelligen Zugang* zu ermöglichen. Das möchte ich im folgenden ausführen.

2 Polynomiale Gleichungen

Gegenstand dieses Aufsatzes sind *polynomiale Gleichungen*, also Gleichungen des Typs[6]

$$x^n - a \cdot x^{n-1} + b \cdot x^{n-2} - .... = 0 \tag{1}$$

Die Grösse x ist die *Unbekannte*, die natürliche Zahl n heisst *Grad* der Gleichung, die Grössen $a, b, c, ...$ nennt man (bekanntlich) *Koeffizienten* der Gleichung.

Für die Gleichungen 2., 3. und 4. Grades wurden im Laufe der Mathematikgeschichte Verfahren zu ihrer Lösung, sogenannte

Lösungsformeln, Lösungsverfahren, Lösungsalgorithmen[7]

entdeckt:

- für die *quadratische* Gleichung, kurz *Quadratic* genannt, von den Alten Babyloniern vor annähernd 4000 Jahren

[5]Man beachte auch die Ausführungen in Abschnitt 10: "Die Quintic im Mathematikunterricht?".

[6]Die Vorzeichen alternierend zu wählen (also abwechselnd negativ und positiv) hat den Vorteil, dass die Formeln von Vieta, siehe Abschnitt 4, eine etwas praktischere Form haben.

[7]Ich benutze die drei Begriffe synonymisch.

- für die *kubische* Gleichung, kurz als *Cubic* bezeichnet, von *S. del Ferro* (1465?–1526), *N. Tartaglia* (1500?–1557) und *G. Cardano* (1501–1576)

- für die Gleichung 4. Grades, kurz *Quartic*, von *L. Ferrari* (1522–1565).

Die Lösungsformeln für die Gleichungen der Grade 1-4 gehören zu den *Meilensteinen* in der Entwicklung der Mathematik[8]. Die Entdeckung von Lösungsformeln für die Cubic und die Quartic in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts durch Italiener signalisiert die Rückkehr von europäischen Mathematikern auf die mathematische Bühne nach langer Abstinenz.

3 Lösungsalgorithmen

Dieser Abschnitt beginnt damit, dass er an die bekannte Lösungsformel für die quadratische Gleichung, die auf die Alten Babylonier zurück geht, erinnert. Dann wird die Lösungsformel von del Ferro, Tartaglia und Cardano für die kubische Gleichung vorgestellt und begründet. Präsentation und Herleitung von Ferraris Lösungsformel für die Gleichung vierten Grades finden sich zur Entlasung des Haupttexts in Anhang A [9].

Ziel dieses Aufsatzes ist, wie in der Einleitung angekündigt, zu verstehen, warum es nicht gelang für die Gleichung 5. Grades eine Lösungsformel “nach dem Muster der Lösungsformeln für die Gleichungen der Grade 1-4” zu finden. Ausgangspunkt ist natürlicherweise eine *Analyse* der Lösungsformeln für die Gleichungen bis und mit Grad vier. Dieser Abschnitt, zusammen mit Anhang A, bildet dazu die Grundlage. Die Analyse selbst erfolgt dann in den Abschnitten 5 und 7 auf der Grundlage von Vorbereitungen in den Abschnitten 4 und 6. Der Kern des Aufsatzes ist Ruffinis Unmöglichkeitsbeweis in Abschnitt 8 (und Anhang C).

Alle Lösungsformeln werden in Form von *Algorithmen* dargestellt. Das hat den Vorteil, dass sie in einer für das Folgende geeigneten Weise strukturiert werden.

3.1 Quadratische Gleichung

Die Lösungsformel für die quadratische Gleichung

$$x^2 - a \cdot x + b = 0 \tag{2}$$

[8]Zur (berührenden) Geschichte hinsichtlich der Lösung der Cubic und der Quartic empfehle ich die Bücher von *R. Acampora* [1] und *G. Cardano* [5], sowie das entsprechende Kapitel im Buch von *S. G. Gindikin* [8].

[9]Es ist nicht unmöglich, sich ganz auf den (den Schülerinnen und Schülern wohlbekannten) Lösungsalgorithmus für die quadratische Gleichung zu stützen und lediglich anzumerken, dass “analoge” Lösungsalgorithmen auch für die Gleichungen dritten und vierten Grades bekannt sind, und dass die Eigenschaften, die man bei der quadratischen Gleichung beobachtet, sich “analog” auch bei der kubischen und die quartischen Gleichung wieder finden. Das ist allerdings eine etwas schmale Basis. Daher ist ein Kompromissvorschlag die Cubic, zumindest referierenderweise, hinzuzunehmen. So habe ich es in einem zweimal 90 Minuten dauernden Unterrichtsversuch mit Maturand/-innen am 29. und 31. Mai 2017 in einer Klasse von W. Durandi an der Kantonsschule Nidwalden in Stans gemacht.

lautet bekanntlich

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot a \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot a^2 - b}$$

und als Algorithmus formuliert:

Der babylonische Lösungsalgorithmus
1) $R := \frac{1}{4} \cdot a^2 - b$
2) Bestimme r sodass $r^2 = R$ gilt
3) $X := \frac{1}{2} \cdot a + r$

Input-Grössen für den babylonischen Lösungsalgorithmus sind die Koeffizienten a, b der quadratischen Gleichung (2). Der Algorithmus verlangt sodann die Berechnung der *Zwischenresultate* R und r und des *Endresultats* X. X ist Lösung der gegebenen Gleichung (2).

Man sieht: Die Durchführung des babylonischen Lösungsalgorithmus erfordert an *Hilfsmitteln* die *Grundrechenoperationen*, sowie das *Ziehen* einer *Quadratwurzel* im zweiten Schritt.

3.2 Kubische Gleichung

Die Gleichung lautet:

$$x^3 - a \cdot x^2 + b \cdot x - c = 0 \tag{3}$$

Ich formuliere die Lösungsformel, die auf del Ferro, Tartaglia und Cardano in der ersten Hälfte des 16. Jahrhundert zurück geht, sogleich in algorithmischer Form und nenne das Verfahren *dFTC-Lösungsalgorithums*:

Der dFTC-Lösungsalgorithmus
0) $p := b - \frac{1}{3} \cdot a^2, \qquad q := -c + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b - \frac{2}{27} \cdot a^3$
1) $R := \frac{1}{4} \cdot q^2 + \frac{1}{27} \cdot p^3$
2) Bestimme r sodass $r^2 = R$ gilt
3) $S := -\frac{1}{2} \cdot q + r$
4) Bestimme s sodass $s^3 = S$ gilt
5) $t := -\dfrac{p}{3 \cdot s}$ [10]
6) $X := \frac{1}{3} \cdot a + s + t$

[10] Solange die Diskriminante R der biquadratischen Gleichung (7), siehe unten, ungleich 0 ist, kann man r in Schritt 2) so bestimmen, dass die Grösse S in Schritt 3) und folglich auch die Grösse s in Schritt 4) ungleich 0 ist. Damit R und S (und somit s) gleich 0 sind, muss $p = q = 0$ gelten. Dann ist t in Schritt 5) nicht definiert. In diesem Fall kann man $t := 0$ setzen. Die Gleichung (5), siehe unten, reduziert sich in diesem Fall auf $y^3 = 0$ und man erhält mit der getroffenen Wahl von t die einzige dann vorhandene Lösung von (3).

Input-Grössen für den dFTC-Lösungsalgorithmus sind die Koeffizienten a, b, c der kubischen Gleichung (3). Das *Endresultat* X ist Lösung von (3).

Ganz analog wie bei der Quadratic beobachtet man: Die Durchführung des dFTC-Lösungsalgorithmus erfordert als *Hilfsmittel* die *Grundrechenoperationen*, sowie das *Ziehen* von *Wurzeln* – nämlich einer Quadrat- und einer Kubikwurzel in Schritt 2) bzw. in Schritt 4).

3.2.1 Begründung des dFTC-Lösungsalgorithmus

Mit modernen Bezeichnungen und einigermassen geübt im algebraischen Rechnen ist die Herleitung des Lösungsverfahrens von del Ferro, Tartaglia und Cardano nicht schwer. Ausgehend von Gleichung (3) führt man als erstes die simple Transformation

$$x = y + \frac{1}{3} \cdot a \tag{4}$$

durch. Anstelle der ursprünglichen Gleichung (3) tritt für die neue Unbekannte y die (sogenannte *reduzierte*) Gleichung

$$y^3 + p \cdot y + q = 0 \tag{5}$$

mit p, q gemäss dem dFTC-Lösungsalgorithmus. Die folgende, zweite Transformation ist pfiffig[11] und geht offenbar auf *J. Hudde* (1628–1704) zurück: In diesem Schritt wird die Unbekannte y durch eine Unbekannte z ersetzt, wobei Hudde für die Beziehung zwischen y und z folgenden Zusammenhang vorschlägt:

$$y = -\frac{p}{3 \cdot z} + z \tag{6}$$

Die Rechnung zeigt: Anstelle von Gleichung (5) tritt nun die Gleichung

$$z^6 + q \cdot z^3 - \frac{1}{27} \cdot p^3 = 0 \tag{7}$$

Mit Vergnügen und erleichtert stellt man fest: (7) ist eine quadratische Gleichung für z^3. Aus (7), (6) und (4) ergeben sich die Schritte 0) - 6) im dFTC-Lösungsalgorithmus unschwer. Das Lösen der kubischen Gleichung (3) wird also im Wesentlichen auf das Lösen einer *quadratischen Hilfsgleichung* zurückgeführt.

3.3 Quartische Gleichung

Die Gleichung lautet:

$$x^4 - a \cdot x^3 + b \cdot x^2 - c \cdot x + d = 0 \tag{8}$$

Ferrari hat gezeigt, dass man das Lösen der Gleichung (8) auf das Lösen einer *kubischen Hilfsgleichung* zurückführen kann. Daraus resultiert der *F-Lösungsalgorithmus* für die Gleichung 4. Grades, der, um den Haupttext zu entlasten, in Anhang A.1 wiedergegeben ist.

Auch der F-Lösungsalgorithmus erfordert als Hilfsmittel, siehe Anhang A.1, lediglich die *Grundrechenoperationen* sowie das *Ziehen* von *Wurzeln*.

[11] Wenngleich auch nicht allzu überraschend, wenn man den Lösungsansatz von del Ferro, Tartaglia, Cardano kennt ...

3.4 Was ist mit der Quintic los?

Dank den Babyloniern, Dank del Ferro, Tartaglia, Cardano und Dank Ferrari kannte man also ab Mitte des 16. Jahrhunderts Lösungsformeln/Lösungsalgorithmen für die polynomialen Gleichungen bis und mit Grad vier.

Es ist daher nicht verwunderlich, dass – nach dem Durchbruch bei der kubischen und der quartischen Gleichung in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts – zuversichtlich und hartnäckig versucht wurde, die Gleichung 5. Grades, also die Quintic, "nach dem Muster der Lösungsformeln für die Gleichungen der Grade 1-4" zu lösen.

Allein – die Zeit verging: Jahre, Jahrzehnte, ja Jahrhunderte zogen ins Land. Den Versuchen war *kein* wirklicher *Erfolg* beschieden. Dass alle Bemühungen seit den Entdeckungen von del Ferro et al erfolglos waren, muss ein grosses Rätsel und eine bittere Enttäuschung gewesen sein.

Um aus der Stagnation heraus zu kommen, bedurfte es neuer *Ideen*.

4 Die "allgemeinen" polynomialen Gleichungen

1770/71 publizierte der grosse italienisch-französische Mathematiker *J.-L. Lagrange* (1736–1815) eine 200 Druckseiten lange Arbeit unter dem Titel

"Réflexions sur la résolution algébrique des équations".

In dieser Arbeit studiert Lagrange die bekannten Lösungsalgorithmen für die polynomialen Gleichungen bis und mit Grad vier von verschiedenen Seiten. Die Arbeit klärt zwar das Rätsel um die Quintic nicht. Sie war aber voll neuer Ideen. Unter anderem führt Lagrange das ein, was ich im folgenden als "*allgemeine*" polynomiale Gleichungen bezeichnen werde.

Üblicherweise schreibt man zum Beispiel die kubische Gleichung in der Form

$$x^3 - a \cdot x^2 + b \cdot x - c = 0, \tag{9}$$

(Man vergleiche mit Gleichung (3).) Dabei bezeichnen a, b, c *Zahlen*, wobei man nicht festlegt, welche Zahlen genau gemeint sind[12]. In der Fachsprache nennt man a, b, c *Parameter*[13].

Unter der *allgemeinen* kubischen Gleichung (nach Lagrange) soll folgende Gleichung verstanden werden:

$$\boxed{x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) \cdot x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0} \tag{10}$$

[12]Manchmal sagt man wenigstens, aus welchem "Zahlenpool" a, b, c sein sollen. Zum Beispiel könnte man verlangen, dass a, b, c rationale Zahlen, also Brüche sind.

[13]Nach Duden [7], das Fremdwörterbuch, wird unter einem "Parameter" eine Hilfsgrösse verstanden, die entweder "unbestimmt gelassen" oder "konstant gehalten" wird und die in Gleichungen (oder Funktionen) neben einer oder mehreren "eigentlichen Variablen" auftritt.

Wenn Sie (10) mit (9) vergleichen, stellen Sie fest, dass die ursprünglichen drei Parameter a, b, c durch drei *neue Parameter* x_1, x_2, x_3 ersetzt werden. Der Zusammenhang zwischen a, b, c und x_1, x_2, x_3 ist leicht abzulesen[14]

$$\begin{aligned} a &= x_1 + x_2 + x_3 \\ b &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \\ c &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned} \tag{11}$$

Mit x_1, x_2, x_3 hat es folgende *Bewandtnis.* Es ist nicht schwer einzusehen, dass x_1 und x_2 und x_3 *Lösungen* der Gleichung (10) sind. Hier ist die Rechnung für x_1. Wenn man in (10) x durch x_1 ersetzt, folgt:

$$\begin{aligned} x_1^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x_1^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) \cdot x_1 - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= \\ x_1^3 - (x_1 \cdot x_1^2 + x_2 \cdot x_1^2 + x_3 \cdot x_1^2) + \\ +(x_1 \cdot x_2 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_1) - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= \\ x_1^3 - (x_1^3 + x_1^2 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_3) + (x_1^2 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= \\ x_1^3 - x_1^3 - x_1^2 \cdot x_2 - x_1^2 \cdot x_3 + x_1^2 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Und analog für x_2 und x_3.

Die Beziehungen zwischen den Lösungen $x_1, x_2, ...$ von polynomialen Gleichungen und ihren Koeffizienten $a, b, ...$ waren übrigens nicht neu: Sie wurden bereits vor Lagrange von *F. Vieta* (1540–1603) entdeckt und heissen darum *Formeln von Vieta.*

Üblicherweise begründet man Vietas Formeln wie folgt. Betrachten Sie wieder das Beispiel der Cubic. Multipliziert man das Produkt von $x - x_1$ und $x - x_2$ und $x - x_3$ aus, erhält man die Identität[15]

$$\begin{aligned} &(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) \cdot x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Das erklärt, wie man zur Definition (10) gelangt und man sieht sofort, dass x_1 und x_2 und x_3 Lösungen der Gleichung (10) sind, und, darüber hinaus noch, dass x_1, x_2, x_3 die *einzigen* Lösungen dieser Gleichung sind[16].

Es wird der Leserin, dem Leser keine Schwierigkeiten bereiten die *allgemeinen* Gleichungen zum Beispiel der Grade 2, 4 und 5 zu notieren – hinsichtlich des vierten Grades kann man Anhang A.2 konsultieren.

Der Schritt von Lagrange, also die Einführung der allgemeinen Cubic (10) (und mutatis mutandis[17] der allgemeinen polynomialen Gleichungen zu anderen Graden) ist überraschend: Stellt Lagrange die Welt nicht einfach auf den Kopf, wenn er anstelle

[14]Hinsichtlich der "Gleichwertigkeit" der alten und neuen Parameter siehe Appendix B.

[15] Das Gleichheitszeichen in (12) bedeutet "Gleichheit der Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens". Und das meint: Wie man auch x, x_1, x_2, x_3 mit Zahlen belegt, wenn man die linke Seite "ausrechnet" und die rechte Seite "ausrechnet", erhält man jeweils die gleiche Zahl.

[16]Ein Produkt von drei Zahlen ist dann und nur dann gleich 0, wenn (mindestens) eine der drei Zahlen gleich 0 ist.

[17]D. h. mit den (allenfalls) nötigen Anpassungen.

der Koeffizienten die Lösungen als bekannt annimmt!? Tatsache ist, Lagrange's Idee erweist sich als raffiniert: *Die Anwendung der Verfahren aus Abschnitt* 3 *auf die allgemeinen polynomialen Gleichungen wirft ein höchst interessants neues Licht auf die Lösungsalgorithmen.*

Ausgehend von den Formeln von Vieta werden im Folgenden die Koeffizienten a, b, c, ... also als *Funktionen* von x_1, x_2, x_2, ... aufgefasst. Ich werde diese Funktionen naheliegenderweise *Koeffizienten*funktionen nennen und mit $a(x_1, x_2, x_3, ...)$, $b(x_1, x_2, x_3, ...)$, $c(x_1, x_2, x_3, ...)$, ... bezeichnen. Im Fall der kubischen Gleichung zum Beispiel, lauten die Koeffizientenfunktionen, siehe (11):

$$\begin{array}{rcl} a(x_1, x_2, x_3) & = & x_1 + x_2 + x_3 \\ b(x_1, x_2, x_3) & = & x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \\ c(x_1, x_2, x_3) & = & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{array} \tag{13}$$

Ersetzt man in den Verfahren aus Abschnitt 3 die Koeffizienten a, b, c, ... durch die entsprechenden Koeffizientenfunktionen

$$a(x_1, x_2, ...),\ b(x_1, x_2, ...),\ c(x_1, x_2, ...),\ ...$$

sind sämtliche Grössen, die in der Folge sukzessive gebildet werden von x_1, x_2, $x_3, ...$ abhängig, also *Funktionen* von x_1, x_2, ... Das Studium dieser Funktionen ist *aufschlussreich*: Um was für Funktionen handelt es sich? Was für Eigenschaften haben sie?

Man kann sagen: Mit den allgemeinen polynomialen Gleichungen von Lagrange wird das Thema "Lösungsformeln für polynomiale Gleichungen" aus der "Welt der Zahlen" in die "Welt der Funktionen" gehievt.

5 Lösungsalgorithmen und allgemeine Gleichungen

Bevor nachfolgend die Lösungsalgorithmen für die polynomialen Gleichungen vom Grad niedriger als fünf aus Abschnitt 3 auf die entsprechenden allgemeinen Gleichungen[18] angewandt werden, wird als Vorbereitung in einem kurzen Abschnitt die Klasse der sogenannten *Polynome* (oder *Polynomfunktionen*) in *mehreren Variablen* eingeführt, weil sie das Rückgrat unserer Überlegungen bildet.

5.1 Polynome in mehreren Variablen

Betrachten wir stellvertetend Polynome in drei Variablen. Polynome in x_1, x_2, x_3 sind Funktionen von folgender Bauart: Ihre "Bauteile" sind *Monome*. Ein Monom in x_1, x_2, x_3 ist ein *Produkt* von *Potenzen*[19] von x_1, x_2, x_3 (beispielsweise ist $x_1^3 \cdot x_2^2 \cdot x_3$ ein Monom).

[18] Siehe Abschnitt 4.

[19] Wobei die Exponenten *nicht-negative ganze* Zahlen sind. Unter den nicht-negativen ganzen Zahlen versteht man die Zahlen 0, 1, 2, 3, ..., also die Zahl Null, sowie die natürlichen Zahlen. Somit ist zum Beispiel $x_1^3 \cdot x_2^{-2} \cdot x_3$, oder $x_1^{\frac{2}{3}} \cdot x_2^2 \cdot x_3$ in unserem Zusammenhang *nicht* zulässig, hingegen etwa $x_1^2 \cdot x_3^5 = x_1^2 \cdot x_2^0 \cdot x_3^5$ schon.

Ein *Polynom* in x_1, x_2, x_3 (in *Normalform*) ist eine *Summe* von mit *Zahlen multiplizierten* (*voneinander verschiedenen*) *Monomen*, wobei wir unter Zahlen *komplexe Zahlen*[20] verstehen wollen. Offensichtlich sind die Koeffizientenfunktionen a, b, c der allgemeinen Gleichung vom Grad 3, siehe (13), Polynome in Normalform. Hier ist ein weiteres Beispiel eines Polynoms in Normalform:

$$5.2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^4 + 3 \cdot i \cdot x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_3^3 + (-3 + 7.8 \cdot i) \cdot x_3$$

Es versteht sich wohl von selbst, wie der Begriff *Polynom* in *mehreren Variablen*, also in zwei, vier, fünf, ... Variablen, definiert ist.

Zu *Operationen* mit Polynomen:
Bemerkung 1 a) Addiert *man zwei Polynome oder* multipliziert *man zwei Polynome miteinander, ist das Resultat jeweils wieder ein Polynom. Die Operationen Addition und Multiplikation führen also, wie man sagt, nicht aus der Klasse der Polynome heraus.* b) Zwei Polynome *in* Normalform *sind* (*dann und nur dann*) gleich (*im Sinne der Gleichheit von Funktionen*)*, wenn die Koeffizienten entsprechender Monome gleich sind.*

Es folgt die Anwendung des jeweiligen Lösungsalgorithmus auf die allgemeine Gleichung vom Grad 2, bzw. 3, bzw. 4.

5.2 Der Fall der allgemeinen quadratischen Gleichung

Der babylonische Lösungsalgorithmus für die quadratische Gleichung

$$x^2 - a \cdot x + b = 0 \tag{14}$$

besteht, siehe Abschnitt 3.1, aus den Schritten:

1) $R := \frac{1}{4} \cdot a^2 - b$
2) Bestimme r sodass $r^2 = R$ gilt
3) $X := \frac{1}{2} \cdot a + r$

Untersuchen wir die Grössen R, r, X für die *allgemeine* quadratische Gleichung (im Sinne von Abschnitt 4), also wenn in Analogie zu (10), (11), (13)

$$a = x_1 + x_2, \quad b = x_1 \cdot x_2$$

gesetzt ist[21]. Sowohl a wie b sind offensichtlich Polynome in x_1 und x_2. Es folgt:

ad 1): R ist als Polynom in a, b auch ein Polynom in x_1, x_2, nämlich:

$$R = \frac{1}{4} \cdot a^2 - b = \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4} \cdot x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{1}{4} \cdot x_2^2$$

[20] Warum als Polynom-Koeffizienten komplexe Zahlen zugelassen werden müssen, wird sich in Abschnitt 5.3 zeigen.

[21] Der grösseren Übersichtlichkeit halber schreibe ich zur Vereinfachung der Notation a, b statt $a(x_1, x_2)$, $b(x_1, x_2)$, und nachher analog R, r, X, statt $R(x_1, x_2)$, etc.. Man muss sich aber immer bewusst bleiben, dass es Funktionen von x_1 und x_2 sind.

ad 2): Gesucht ist eine Lösung r der Gleichung $r^2 = R$, also ein *Quadratwurzel* von R. Die *Pointe*: R lässt sich *als Quadrat schreiben*:

$$R = \frac{1}{4} \cdot x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{1}{4} \cdot x_2^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2)\right)^2$$

Folglich ist zum Beispiel

$$r = \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2)$$

eine Lösung[22] der Gleichung $r^2 = R$. Man bemerkt: *Auch r ist ein Polynom in x_1, x_2.*

ad 3): Schliesslich folgt:

$$X = \frac{1}{2} \cdot a + r = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) + \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2) = x_1$$

Sie beobachten:
– Da das Endresultat/Output-Datum $X = x_1$ lautet, und weil x_1 Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x - x_1 \cdot x_2 = 0$$

ist, ist – notabene ohne Rückgriff auf die Herleitung des babylonischen Lösungsalgorithmus – nachgewiesen, dass der babylonischen Lösungsalgorithmus eine Lösung[23] der allgemeinen quadratischen Gleichung liefert.
– Bemerkenswert, und für Ruffinis Behandlung des Rätsels der Quintic wichtig, ist die *Feststellung*: Nicht nur die *Input-Daten* a, b, auch die beiden *Zwischenergebnisse* R und r (und das *Endresultat* x_1 sowieso) sind *Polynome* in x_1, x_2. Das ist hinsichtlich der Grösse r *nicht selbstverständlich.*

Bemerkung 2 *Während die Addition und die Multiplikation nicht aus der Klasse der Polynome herausführen (wie in* Bemerkung 1 *festgehalten wurde), können die* Division *und das* Ziehen von Wurzeln *sehr wohl aus der Klasse der Polynome hinausführen*[24]*. Wenn eine* Division *bzw. eine* Wurzel *innerhalb der Klasse der Polynome durchgeführt, bzw. gezogen werden kann, so ist das* nicht selbstverständlich, *sondern* bemerkenswert*.*

[22]Die andere ist offenbar $r = -\frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2) = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)$.

[23]Die andere erhält man natürlich, wenn man $r = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)$ wählt.

[24]Beispielsweise ist $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^3}$ kein Polynom, sondern eine sogenannte *rationale Funktion in x_1, x_2.* Und auch zum Beispiel $\sqrt{x_1}$ ist kein Polynom in x_1, da es kein Polynom in x_1 gibt, dessen Quadrat (das heisst: dessen Produkt mit sich selbst) gleich dem Polynom x_1 ist.

Selbst in der "Welt der Zahlen" sind die Division und das Wurzelziehen bekanntlich nicht immer durchführbar. In der *Klasse der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ etwa, ist die Division nur möglich, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist, und eine Quadratwurzel lässt sich nur ziehen, wenn der Radikand eine Quadratzahl ist – beides ist nur "selten" der Fall: Beispielsweise wird der Abstand zwischen aufeinander folgenden Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... immer grösser.

5.3 Der Fall der allgemeinen kubischen Gleichung

Der dFTC-Lösungsalgorithmus für die kubische Gleichung

$$x^3 - a \cdot x^2 + b \cdot x - c = 0 \tag{15}$$

besteht, siehe Abschnitt 3.2, aus den Schritten:

0) $p := b - \frac{1}{3} \cdot a^2, \qquad q := -c + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b - \frac{2}{27} \cdot a^3$

1) $R := \frac{1}{4} \cdot q^2 + \frac{1}{27} \cdot p^3$

2) Bestimme r sodass $r^2 = R$ gilt

3) $S := -\frac{1}{2} \cdot q + r$

4) Bestimme s sodass $s^3 = S$ gilt

5) $t := -\dfrac{p}{3 \cdot s}$

6) $X := \frac{1}{3} \cdot a + s + t$

Untersuchen wir, analog zum Fall der quadratischen Gleichung in Abschnitt 5.2 die Grössen p, q, R, r, S, s, t, X wenn wir die Koeffizienten a, b und c der Gleichung (15), durch die entsprechenden Koeffizientenfunktionen[25], also gemäss :

$$a = x_1 + x_2 + x_3, \qquad b = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3, \qquad c = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

ersetzen[26]. Es folgt:

ad 0): $p = b - \frac{1}{3} \cdot a^2, \quad q = -c + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b - \frac{2}{27} \cdot a^3$ sind Polynome in x_1, x_2, x_3.

ad 1): $R = \frac{1}{4} \cdot q^2 + \frac{1}{27} \cdot p^3$ ist ein Polynom in x_1, x_2, x_3.

ad 2): Gesucht ist eine Lösung r der reinen[27] quadratischen Gleichung $r^2 = R$ – anders ausgedrückt: Gesucht ist eine Quadratwurzel von R. Ich behaupte: Man kann (beispielsweise) folgende Wahl treffen[28]:

$$r = i \cdot \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_3 - x_1)$$

Man rechnet (von Hand oder bequemer mit Hilfe eines CAS) nach, dass tatsächlich

$$r^2 = R$$

gilt. Offensichtlich ist r ein Polynom in x_1, x_2, x_3.

[25] Siehe (13).

[26] Der besseren Übersichtlichkeit halber schreibe ich zur Vereinfachung der Notation (wieder) a statt $a(x_1, x_2, x_3)$, usw. und im Folgenden auch p statt $p(x_1, x_2, x_3)$, usw.

[27] Unter "reinen" (polynomialen) Gleichungen versteht man polynomiale Gleichungen, bei denen die Unbekannte nur in der höchsten Potenz vorkommt, also etwa $x^2 = B$, $x^3 = C$, $x^4 = D$, ... mit B, C, D, ... gegeben.

[28] An dieser Stelle wird (erstmals) benutzt, dass als Koeffizienten von Polynomen in $x_1, x_2, ...$ *komplexe* Zahlen erlaubt sind.

ad 3): $S = -\frac{1}{2} \cdot q + r$ ist ein Polynom in x_1, x_2, x_3.

ad 4): Gesucht ist eine Lösung s der reinen kubischen Gleichung $s^3 = S$ – anders gesagt: Gesucht ist eine 3. Wurzel[29] von S. Ich behaupte: Man kann (beispielsweise) folgende Wahl treffen:

$$s = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot x_1 - x_2 - x_3) + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (x_3 - x_2)$$

Man rechnet (von Hand oder mit Hilfe eines CAS) nach, dass in der Tat

$$s^3 = S$$

gilt. Offensichtlich ist s ein Polynom in x_1, x_2, x_3.

ad 5): Weiter findet man

$$t = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot x_1 - x_2 - x_3) + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (x_2 - x_3)$$

Denn man rechnet (wieder am bequemsten mit Hilfe eines CAS) nach, dass $3 \cdot s \cdot t = -p$ und somit $t := -\dfrac{p}{3 \cdot s}$ gilt. Auch t ist offensichtlich ein Polynom in x_1, x_2, x_3.

ad 6): Eine simple Rechnung zeigt schliesslich, dass $X = x_1$ ist.

Man beobachtet:
– Analog zum Fall der quadratischen Gleichung gilt: Da das Endresultat/ Output-Datum $X = x_1$ lautet, und weil x_1 Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung (10) ist, liefert der dFTC-Lösungsalgorithmus also offenbar eine Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung – das folgt notabene (wieder) ohne Rückgriff auf die Herleitung des dFCT-Lösungsalgorithmus (zum Beispiel gemäss Abschnitt 3.2.1).
– Wieder bemerkenswert, und wie gesagt im Hinblick auf Ruffinis Behandlung des Rätsels der Quintic wichtig, ist die *Beobachtung*: Nicht nur die *Input-Daten* a, b, c, auch alle *Zwischenergebnisse* (und das *Endresultat* x_1 sowieso) sind *Polynome* in x_1, x_2, x_3. Das ist hinsichtlich der Grössen r, s und t *nicht selbstverständlich*.

5.4 Die allgemeine quartische Gleichung

Analysiert man in analoger Weise den Lösungsalgorithmus für die quartische Gleichung an Hand der entsprechenden allgemeinen Gleichung, siehe Anhang A.2, stellt man Entsprechendes fest, insbesondere: *Das Endresultat/Output-Datum lautet $X = x_1$ und alle Zwischenresultate (und natürlich das Endresultat x_1) sind, ebenso wie die Input-Daten, Polynome in x_1, x_2, x_3, x_4.*

5.5 Ruffini-Lösungsalgorithmen

Die Anwendung der Verfahren zur Lösung der Gleichungen der Grade 1-4 aus Abschnitt 3 auf die entsprechenden allgemeinen Gleichungen und die dabei bisher gemachten Beobachtungen geben Anlass zur folgenden Definition.

[29] Oder: Kubikwurzel.

Ruffini-Lösungsalgorithmen[30]

Ein Ruffini-Lösungsalgorithmus für eine polynomiale Gleichung besteht aus einer Reihe von (endlich vielen) Schritten, in denen die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ verarbeitet werden: Es werden sukzessive *Zwischenresultate* und schliesslich ein *Endresultat* definiert.

Zwischenresultate und *Endresultat* entstehen durch:

- Anwenden der *Grundrechenoperationen* $+, -, \cdot, \div$

und

- *Ziehen* von *Wurzeln*[31] (i.e. Lösen von reinen polynominalen Gleichungen)

ausgeübt auf *Koeffizienten* und/oder schon vorhandene *Zwischenresultate.*

Dabei sollen folgende *Bedingungen* erfüllt sein: Drückt man die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ gemäss den Formeln von Vieta, und in der Folge alle *Zwischenresultate* sowie das *Endresultat*, durch $x_1, x_2, x_3, \ldots$ aus, gilt:

(A) das *Endresultat* lautet: x_1

(B) alle *Zwischenresultate* sind *Polynome*[32] in $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Wie schon in der Einleitung angekündigt, ist es das Ziel dieses Aufsatzes zu verstehen, warum es nicht gelang für die Gleichung 5. Grades einen Lösungsalgorithmus "nach dem Muster der Lösungsalgorithmen für die Gleichungen der Grade 1-4" zu finden. Nur: Was heisst "nach dem Muster der Lösungsalgorithmen für die Gleichungen der Grade 1-4"?

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt: Die Lösungsverfahren für die quadratische, kubische und die quartische Gleichung in Abschnitt 3 sind allesamt Ruffini-Lösungsalgorithmen.

Vor diesem Hintergrund ist es natürlich, die Formulierung "nach dem Muster der Lösungsformeln für die Gleichungen der Grade 1-4" dahingehend zu interpretieren, dass ein Ruffini-Lösungsalgorithmus gemeint sein soll.

Damit kristallisiert sich folgende Frage heraus:

Fragestellung

Gibt es einen Ruffini-Lösungsalgorithmus für die Gleichung 5. Grades?

[30]Natürlich ist die Bezeichnung "Ruffini-Lösungsalgorithmen" nicht von Ruffini, sondern von mir, und ich wiederum folge *I. Stewart*, der in entsprechendem Zusammenhang von *Ruffini-Radikalen* spricht, siehe [11], p. 96ff.

[31]Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass die Wurzelgrade Primzahlen sind.

[32]Man könnte ohne weiteres auch *rationale Funktionen* in $x_1, x_2, x_3, \ldots$ als Zwischenresultate zulassen: Die nachfolgenden Überlegungen blieben mutatis mutandis gültig. Ich mache diese Bemerkung im Hinblick auf Abschnitt 9.2.

6 Symmetrie von Formeln

Es lohnt sich, die Möglichkeiten, die die Einführung der *allgemeinen* polynomialen Gleichungen in Abschnitt 4 eröffnet, noch weiter auszuloten und die Funktionen von x_1, x_2, ... , die bei der Anwendung der Verfahren aus Abschnitt 3 auf die entsprechenden allgemeinen polynomialen Gleichungen sukzessive entstehen, weiter zu untersuchen. Man entdeckt dabei, dass sie *Symmetrie-Eigenschaften* haben.

Ein Blick auf die (durch die Formeln von Vieta definierten) Koeffizientenfunktionen $a(x_1, x_2, x_3, ...)$, $b(x_1, x_2, x_3, ...)$, ... offenbart, dass sie ganz *regelmässig* aus den Variablen x_1, x_2, $x_3, ...$ aufgebaut sind. Nehmen Sie als Beispiel die Koeffizientenfunktionen (13) der allgemeinen kubischen Gleichung:

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ b(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \\ c(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned} \tag{16}$$

Keine der drei Grössen x_1, x_2, x_3 nimmt bei diesen Ausdrücken in irgend einer Weise eine Sonderstellung ein, ist irgendwie gegenüber den anderen ausgezeichnet. Die Koeffizientenfunktionen sind offenbar (völlig) *symmetrisch* aufgebaut.

Wie *entwickelt* sich diese Symmetrie-Eigenschaft, wenn man den dFTC-Lösungsalgorithmus auf die Input-Grössen (16) anwendet[33]?

Es wird sich zeigen, siehe Abschnitt 8, dass Symmetrie-Betrachtungen es ermöglichen zu verstehen, dass die Quintic sich hinsichtlich eines Lösungsalgorithmus so anders verhält als die Gleichungen der niedrigeren Grade.

In diesem vorbereitenden Abschnitt geht es zunächst aber einmal um den Begriff Symmetrie im Allgemeinen und um Symmetrie von Formeln und Funktionen im Speziellen.

Was *ist* Symmetrie?

Die meisten Menschen verbinden das Wort *Symmetrie* mit *Kunst* und dort mit *Objekten*, im einfachsten Fall mit *geometrischen Figuren*. Ein *gleichseitiges Dreieck* zum Beispiel empfinden wir als sehr symmetrisch. Und zwar als "symmetrisch*er*" als ein (nur) gleich*schenkliges* Dreieck. Ein *ungleichseitiges*[34] *Dreieck* schliesslich empfinden wir als ganz *unsymmetrisch*.

Wie lässt sich Symmetrie *erfassen*?

Die drei Sorten von Dreiecken zeigen auch: Objekte können in *unterschiedlichem Ausmass symmetrisch* sein: Es gibt *Grade* von *Symmetrie*. Deshalb lautet eine weitere Frage:

Lässt sich ein *Mass*[35] für den *Symmetriegehalt* eines *Objekts* angeben?

[33] Und mutatis mutandis bei der Quadratic und der Quartic

[34] Genauer: Ein Dreieck mit drei verschieden langen Seiten.

[35] Mit *Zahlen* kann man vielerlei *Grössen* messen, etwa Längen, Gewichte, Zeiten. Wie aber "vermisst" man ein so komplexes Phänomen wie "Symmetrie"?

Das Wort "symmetrisch" wird im Duden [7] mit den Adjektiven "gleichmässig, ebenmässig" umschrieben. Lässt sich diese qualitative Beschreibung durch *Operationalisieren objektivieren*[36] und in eine mathematisch verwertbare Form bringen? Nach Duden, [7], versteht man unter "Operationalisieren": "Das Präzisieren oder Standardisieren von Begriffen *durch Angabe von Operationen, mit denen der durch den Begriff bezeichnete Sachverhalt erfasst werden kann*[37], oder durch Angabe der Indikatoren, die den betreffenden Sachverhalt anzeigen". Das ist ein guter Fingerzeig.

Die Symmetrie eines gleich*schenkligen* Dreiecks zeigt sich in der Tat so: *Spiegelt* man das Dreieck an der Höhe (die auf der Grundseite senkrecht steht), geht es "in sich über", es ist/bleibt bei dieser Operation *invariant*[38], wie man in der Mathematik sagt.

Betrachtet man ein gleich*seitiges* Dreieck, sieht man noch *mehr Operationen*, die das Dreieck *invariant* lassen: Man kann es an *allen drei* Höhen *spiegeln*. Überdies kann man es in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt um 120° oder um 240° *drehen*. Bei allen diesen Operationen geht es "in sich über", ist also invariant im Sinn der Mathematik[39].

Spiegelt man, hingegen, ein *ungleichseitiges* Dreieck an einer seiner Höhen oder dreht es um irgend einen Punkt in seiner Ebene[40], liegt das gespiegelte oder gedrehte Dreieck *nicht* auf dem Ausgangsdreieck: Das Ausgangsdreieck ist bei *keiner* dieser Operationen *invariant*. Ein ungleichseitiges Dreieck ist einzig bezüglich der Identität[41] invariant.

Offenbar kann die *Anzahl* der Operationen, die ein Dreieck invariant lassen, als *Mass* für seinen Gehalt an *Symmetrie* angesehen werden.

Geometrische Objekte sind nicht die einzigen mathematischen Objekte, die symmetrisch sein können. Im Hinblick auf Lösungsalgorithmen für polynomiale Gleichungen von Bedeutung ist, dass auch *Formeln symmetrisch* (auf-)gebaut sein können – siehe den Anfang dieses Abschnitts – und zwar ebenfalls, je nach Formel, in unterschiedlichem Ausmass.

[36] Nach Duden [7] bedeutet "objektivieren" u.a.: "etwas von subjektiven, emotionalen Einflüssen befreien".

[37] Hervorhebung durch UK.

[38] Nach Duden [7] bedeutet invariant: *unverändert*.

[39] Vielleicht fragen Sie: Und was ist mit der Drehung um 360° – die "führt" das Dreieck doch ebenfalls "in sich über"? Das stimmt! Eine Drehung in einer Ebene um einen Punkt (in dieser Ebene) um 360° hat jedoch einen *speziellen Status*: Sie "führt" *jede beliebige* Figur, die in dieser Ebene liegt, "in sich über" – ihre "Wirkung" ist "gleich Null": denn sie führt jeden Punkt der Ebene wieder in den Ausgangspunkt zurück.
Das legt nahe als weitere "Operation" die sogenannte *Identität* einzuführen. Das ist die *Operation*, die *jeden Punkt der Ebene dort lässt, wo er (ohnehin) ist.*
Bei Anwendung der Identität "geht" (trivialerweise) jede beliebige Figur "in sich über", ist also invariant. Die Operation der Identität zeichnet daher keine Figur gegenüber einer anderen aus – ist also wenig nützlich, wenn es darum geht, den "Grad an Symmetrie" einer Figur zu erfassen. Nichtsdestotrotz gehört die Identität dazu, wenn man nach den Operationen fragt, die eine Figur invariant lassen. Die Identität spielt bei Symmetrien eine ähnliche Rolle wie die Zahl 1 bei der Mutiplikation oder die Zahl 0 bei der Addition, die ebenfalls jeweils "nichts bewirken".

[40] Um einen von 0°, 360°, ... verschiedenen Winkel.

[41] Siehe Fussnote 39.

Beispiel 1 Der halbe Umfang S eines Dreiecks mit den Ecken U, V, W und Seiten[42] der Längen u, v, w lässt sich mit Hilfe der folgenden Formel ausrechnen:

$$S = \frac{u + v + w}{2} \tag{17}$$

Etwas komplizierter ist die *Heron-Formel* für den Flächeninhalt F eines Dreiecks, wie man sich (vielleicht) erinnert:

$$F = \sqrt{S \cdot (S - u) \cdot (S - v) \cdot (S - w)} \tag{18}$$

Dabei muss man sich in (18) für S den Ausdruck aus (17) eingesetzt denken. S und F sind offenbar *Funktionen* der Variablen u, v, w. Sie dünken uns völlig *symmetrisch* aus u, v, w aufgebaut zu sein.

Lässt sich dieser Eindruck mathematisch verwertbar fassen? Tatsächlich lässt sich die Symmetrie der Formeln (17) und (18) ganz ähnlich operationalisieren, wie die Symmetrie von geometrischen Figuren: Auch die Formeln (17), (18) für S und F *bleiben* bei *gewissen Operationen unverändert*. Man kann u, v, w *beliebig* untereinander *vertauschen* und erhält immer wieder S bzw. F. Man *sagt*: Die Funktionen S und F sind *invariant* bezüglich beliebiger *Vertauschungen* der Variablen u, v, w.

Ersetzen wir zum Beispiel u durch v, v durch w und w durch u, symbolisch geschrieben:

$$u \to v, \quad v \to w, \quad w \to u, \tag{19}$$

geht der Ausdruck $\frac{u+v+w}{2}$ über in den Ausdruck $\frac{v+w+u}{2}$. Der Ausdruck, von dem man ausgeht, und der bei Anwendung der Vertauschung (19) gewonnene Ausdruck sind zwar *syntaktisch*, das heisst der Form nach, verschieden. Die beiden Ausdrücke sind jedoch *semantisch* gleich, das heisst inhaltlich, weil ja für die Addition (wie natürlich auch für die Multiplikation) das kommutative und das assoziative Gesetz gilt. Das ist es, *was gemeint ist* wenn man sagt, der Ausdruck (17) sei *invariant* bezüglich der Vertauschung (19).

Ganz analog ist die Situation für die Heron-Formel (18). Bei Anwendung der Vertauschung (19) auf den Ausdruck $\sqrt{S \cdot (S - u) \cdot (S - v) \cdot (S - w)}$ erhält man

$$\sqrt{S \cdot (S - v) \cdot (S - w) \cdot (S - u)} \tag{20}$$

(dabei wurde schon berücksichtigt, dass S bezüglich der Vertauschung (19) invariant ist.) Der Ausdruck rechts in (18), von dem man ausgeht, verändert sich bei Anwendung der Vertauschung (19) zwar *syntaktisch*. Die beiden Ausdrücke sind aber, Dank den schon genannten Rechengesetzen, *semantisch* gleich[43].

[42] Die Seite der Länge u liege der Ecke U gegenüber, usw.

[43] Die Symmetrie-Eigenschaft der Heron-Formel ist notabene nicht wirklich überraschend: Sie drückt aus, dass sich der Flächeninhalt eines Dreiecks nicht ändert, wenn man seine Seitenlängen *umbezeichnet*.

Beispiel 2 So wie ein gleich*schenkliges* Dreieck "weniger symmetrisch" ist als ein gleich*seitiges*, sind auch Formeln in "unterschiedlichem Ausmass symmetrisch": Die Formel für die Länge m_w der *Mittellinie*[44] des Dreiecks U, V, W durch den Punkt W lautet:

$$m_w = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (u^2 + v^2) - w^2}$$

Die Funktion m_w ist offenbar *symmetrisch* bezüglich[45] u und v – nicht aber bezüglich w: Der Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (u^2 + v^2) - w^2}$ geht bei der Vertauschung (19) über in

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (v^2 + w^2) - u^2}$$

Die Ausdücke $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (u^2 + v^2) - w^2}$ und $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (v^2 + w^2) - u^2}$ sind nicht nur syntaktisch, sondern auch *semantisch verschieden*[46], wie man zum Beispiel sieht, wenn man u mit der Zahl 2, v mit der Zahl 3 und w mit der Zahl 4 belegt: Dann folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (u^2 + v^2) - w^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}, \quad \text{aber:} \quad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (v^2 + w^2) - u^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{46}$$

Die bei dieser Auswertung erhaltenen beiden Zahlen sind offensichtlich verschieden, woraus folgt, dass die beiden Funktionen

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (u^2 + v^2) - w^2} \qquad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (v^2 + w^2) - u^2}$$

der drei Variablen u, v, w *nicht gleich* sind.

Allgemein nennt man ein *Objekt symmetrisch*, wenn es bei gewissen *Operationen* "in sich übergeht", *invariant* ist, wie man sagt. Damit diese Erklärung Sinn ergibt, muss definiert sein, um welche Operationen es sich jeweils handelt, und was "in sich übergehen" heisst.

– Bei geometrischen Objekten sind die Operationen *Kongruenzabbildungen* (Drehungen, Spiegelungen); "in sich übergehen" meint, dass die Figur, um die es geht, nach Anwendung einer zugelassenen Kongruenzabbildung mit der ursprünglichen zur Deckung gebracht ist.

– Bei Formeln und Funktionen in mehreren Variablen sind die Operationen *Vertauschungen*[47] der Variablen; "in sich übergehen" meint, dass die Funktion, um die es geht, nach Anwendung einer zugelassenen Vertauschung gleich der ursprünglichen Funktion (im Sinne der Gleichheit von Funktionen[48]) ist.

– Die *Anzahl* Operationen, die ein Objekt invariant lassen, kann als *Mass* für den "Symmetrie-Gehalt" des betreffenden Objekts betrachtet werden.

[44] Die *Mittellinie* oder *Seitenhalbierende* oder *Schwerelinie* durch den Punkt W im Dreieck U, V, W ist die Gerade durch den Punkt W und den Mittelpunkt M_w der dem Punkt W gegenüber liegenden Seite des Dreiecks U, V, W. Unter der Länge m_w dieser Mittellinie versteht man den Abstand der Punkte W und M_w.

[45] Was, geometrisch überlegt, wieder nicht überrascht.

[46] Der geometrische Grund ist: Die zweite Formel bestimmt die Länge m_u der Mittellinie durch den Punkt U, und verschiedene Mittellinien im Dreieck sind im Allgemeinen unterschiedlich lang.

7 Symmetrie und Lösungsalgorithmen

Ausgerüstet mit einer "Brille", die erlaubt Symmetrie von Funktionen (in mehreren Variablen x_1, x_2, ...) wahr zu nehmen und sogar zu vermessen, ist es instruktiv die Symmetrie-Eigenschaften der Funktionen zu untersuchen, die bei der Anwendung der Verfahren aus Abschnitt 3 auf die entsprechenden allgemeinen polynomialen Gleichungen sukzessive entstehen. Es wird sich zeigen, dass dabei ein *charakteristischer Abbau* von *Symmetrie* stattfindet.

7.1 Symmetrie und babylonischer Lösungsalgorithmus

Als erstes Beispiel soll die *Symmetrie-Entwicklung* bei Anwendung des babylonischen Lösungsalgorithmus auf die allgemeine quadratische Gleichung

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \tag{21}$$

untersucht werden.

Betrachten Sie dazu den folgenden Ausschnitt aus den Formeln, die bei der Anwendung des babylonischen Lösungsalgorithmus auf die allgemeine quadratische Gleichung in Abschnitt 5.2 gefunden wurden:

$$\begin{array}{rcll} \mathit{Input}: & a & = & x_1 + x_2 \quad b = x_1 \cdot x_2 \\ & R & = & \frac{1}{4} \cdot a^2 - b = \left(\frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2)\right)^2 \\ & r & = & \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2) \\ \mathit{Output}: & X & = & x_1 \end{array}$$

*) Die *Input-Daten*, also die Koeffizientenfunktionen a, b (ausführlicher: $a(x_1, x_2)$ und $b(x_1, x_2)$) der allgemeinen quadratischen Gleichung (21), sind bezüglich x_1, x_2 *symmetrisch*: Beide Koeffizientenfunktionen ergeben bei *Vertauschung* von x_1 und x_2, also bei Anwendung der Ersetzungsvorschrift

$$x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_1, \tag{22}$$

wieder die Koeffizientenfunktion a bzw. b:

$$\begin{array}{lcl} a = x_1 + x_2 & \xrightarrow{(22)} & x_2 + x_1 = x_1 + x_2 = a \\ b = x_1 \cdot x_2 & \xrightarrow{(22)} & x_2 \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2 = b \end{array}$$

Der Grund: x_1, x_2 stehen für (wenn auch nicht näher festgelegte) Zahlen und fürs Addieren und Multiplizieren gilt je das kommutative Gesetz. Mit anderen Worten: Die Funktionen a, b sind *invariant* bezüglich der *Vertauschung* ihrer Variablen x_1 und x_2.

[47]Statt von Vertauschungen spricht man auch von *Permutationen*, von lateinisch *permutare*: vertauschen.

[48]Vergleiche mit Fussnote 15.

Überdies sind a und b natürlich auch bezüglich der trivialen "Vertauschung"

$$x_1 \to x_1, \quad x_2 \to x_2 \tag{23}$$

invariant, also bezüglich der "Vertauschung", die *nichts bewirkt*, wenn man sie anwendet, sondern *jedes* Polynom in x_1, x_2 *unverändert*[49] lässt und deshalb *Identität* heisst[50].

*) Das *Output-Datum*:

$$X = x_1$$

ist (trivialerweise) bezüglich der Identität (23) invariant:

$$X = x_1 \quad \stackrel{(23)}{\longrightarrow} \quad x_1 = X$$

aber, im Gegensatz zu den Funktionen a und b, *nicht* bezüglich der Vertauschung (22). Denn es gilt

$$X = x_1 \quad \stackrel{(22)}{\longrightarrow} \quad x_2 \neq x_1 = X,$$

und die Polynome $x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2$ und $x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$ sind *verschieden*.

Sie sehen:

> Auf dem Weg von den *Input-Daten* a, b zum *Output-Datum* X findet ein *Abbau* von *Symmetrie* statt.

und erkennen:

> Der Symmetrie-Abbau ist eine unvermeidliche Konsequenz der Definition des Begriffs Lösungsalgorithmus: Ein Lösungsalgorithmus liefert (definitionsgemäss) als Endresultat/Output-Datum x_1. Das Polynom x_1 ist[51] jedoch *weniger symmetrisch* als die *Koeffizientenfunktionen*, die den Ausgangspunkt für die Anwendung des Lösungsalgorithmus bilden. Die Funktion x_1 ist offenbar bezüglich keiner Vertauschung invariant, die x_1 verändert.

*) Fragen wir weiter: *Wo* findet bei der Anwendung des babylonischen Lösungsalgorithmus auf die allgemeine quadratische Gleichung (21) der *Symmetrie-Abbau* statt?

— a und b sind invariant bezüglich der Vertauschungen (23) und (22).

[49]Und zwar nicht nur *semantisch*, sondern sogar *syntaktisch*, siehe dazu Abschnitt 6.
[50]Man vergleiche mit Fussnote 39.
[51]Sofern zwei oder mehr Variablen x_1, x_2, ... im Spiel sind.

— Auch das Zwischenergebnis R ist invariant bezüglich der Vertauschung (22). Um das einzusehen kann man auf zwei Arten argumentieren: i) R ist ein Polynom in a und b und weil a und b invariant sind bezüglich der Vertauschung (22), gilt das auch für R. ii) Man kann die Vertauschung (22) direkt auf die oben gegebene Darstellung von R anwenden:

$$R = (\frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2))^2 \quad \xrightarrow{(22)} \quad (\frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1))^2 = (\frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2))^2 = R,$$

weil $(x_2 - x_1)^2 = x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x_1 + x_1^2 = (x_1 - x_2)^2$ gilt.

Trivialerweise ist R auch bezüglich der Identität (23) invariant. Somit ist R "ebenso symmetrisch" wie a und b.

— Für eine (Quadrat-)Wurzel r von R (das heisst für eine Lösung der reinen quadratischen Gleichung $r^2 = R$) wurde oben die Wahl

$$r = \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2)$$

vorgeschlagen. *Hier* passiert der *Symmetrie-Abbau*: Das Polynom r ist trivialerweise invariant bezüglich der identischen Vertauschung (23), aber *nicht* bezüglich der Vertauschung (22):

$$r = \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2) \quad \xrightarrow{(22)} \quad \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1) = -\frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2) = -r$$

— Im letzten Schritt, bei der Berechnung von $X = \frac{1}{2} \cdot a + r$, "erbt" X die Symmetrie von r.

Man beobachtet:

Der *Symmetrie-Abbau* erfolgt beim *Ziehen* der (*Quadrat-*) *Wurzel.* Dabei wird die *Symmetrie halbiert*: Der Radikand R ist bezüglich *zweier Vertauschungen* ((23) und (22)) invariant, die Quadratwurzel r nur noch bezüglich der Identität (23).

7.2 Symmetrie und dFTC-Lösungsalgorithmus

Untersuchen wir zweitens in analoger Weise den dFTC-Lösungsalgorithmus, angewandt auf die allgemeine kubische Gleichung unter *Symmetriegesichtspunkten.*

Betrachten Sie dazu den folgenden Auszug aus den Formeln zum dFTC-Lösungsalgorithmus aus Abschnitt 5.3:

$$\begin{aligned}
Input: \quad a &= x_1 + x_2 + x_3 \quad b = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \quad c = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\
r &= i \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{18} \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_3 - x_1) \\
s &= \tfrac{1}{6} \cdot (2\,x_1 - x_2 - x_3) + i \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot (x_3 - x_2) = \\
&\quad \tfrac{1}{3} \cdot x_1 - \tfrac{1}{6} \cdot (1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot x_2 - \tfrac{1}{6} \cdot (1 - i \cdot \sqrt{3}) \cdot x_3 \\
t &= \tfrac{1}{6} \cdot (2\,x_1 - x_2 - x_3) + i \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot (x_2 - x_3) = \\
&\quad \tfrac{1}{3} \cdot x_1 - \tfrac{1}{6} \cdot (1 - i \cdot \sqrt{3}) \cdot x_2 - \tfrac{1}{6} \cdot (1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot x_3 \\
Output: \quad X &= x_1
\end{aligned}$$

*) Die *Input-Daten*, also die Koeffizientenfunktionen a, b, c der allgemeinen kubischen Gleichung sind bezüglich x_1, x_2, x_3 so *symmetrisch wie möglich*: Jede der drei Koeffizientenfunktionen ergibt bei *beliebiger Vertauschung* von x_1, x_2, x_3 wieder diese Koeffizientenfunktion. Mit anderen Worten: a, b, c (ausführlicher: $a(x_1, x_2, x_3)$, $b(x_1, x_2, x_3)$ und $c(x_1, x_2, x_3)$) sind *invariant* bezüglich *beliebiger Vertauschungen* von x_1, x_2, x_3. Diese $3! = 6$ Vertauschungen sind:

$$\begin{array}{llll}
x_1 \to x_1, & x_2 \to x_2, & x_3 \to x_3 & \text{(Identität)} \\
x_1 \to x_2, & x_2 \to x_3, & x_3 \to x_1 & \\
x_1 \to x_3, & x_2 \to x_1, & x_3 \to x_2 & \\
x_1 \to x_1, & x_2 \to x_3, & x_3 \to x_2 & \\
x_1 \to x_3, & x_2 \to x_2, & x_3 \to x_1 & \\
x_1 \to x_2, & x_2 \to x_1, & x_3 \to x_3 &
\end{array} \tag{24}$$

*) Das *Output-Datum*, also das Polynom x_1, hingegen, ist *nur* noch *invariant*
- bezüglich der Vertauschung von x_2 und x_3, also der Anwendung von

$$x_1 \to x_1, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_2$$

und (trivialerweise):
- bezüglich der *Identität*.

$$x_1 \to x_1, \quad x_2 \to x_2, \quad x_3 \to x_3$$

Die Quintessenz:

Auf dem Weg von den *Input-Daten* zum *Output-Datum* findet der zu erwartende[52] *Abbau* von *Symmetrie* statt.

Schauen wir auch hier, *wo* im dFTC-Prozess der Symmetrie-Abbau erfolgt:

[52] Beachten Sie den Kommentar im Anschluss an die analoge Beobachtung im Fall des babylonischen Lösungsalgorithmus in Abschnitt 7.1.

— a, b, c sind invariant bezüglich beliebiger Vertauschungen von x_1, x_2, x_3.

— p, q, R sind als Polynome in a, b, c ebenfalls bezüglich beliebiger Vertauschungen von x_1, x_2, x_3 invariant.

— r (eine Quadratwurzel aus R) ist *nur* mehr invariant bezüglich *zyklischer Vertauschungen* von x_1, x_2, x_3, das heisst bezüglich der folgenden drei Vertauschungen:

$$\begin{array}{llll} x_1 \to x_1, & x_2 \to x_2, & x_3 \to x_3 & \text{(Identität)} \\ x_1 \to x_2, & x_2 \to x_3, & x_3 \to x_1 & \\ x_1 \to x_3, & x_2 \to x_1, & x_3 \to x_2, & \end{array}$$

nicht jedoch bezüglich der drei weiteren möglichen Vertauschungen von x_1, x_2, x_3, siehe (24). Diese Behauptung überprüft man ohne viel Mühe direkt anhand der Formel für r.

Das Ziehen der *Quadrat*wurzel *reduziert* den "Symmetriegehalt" somit von 6 auf 3 Vertauschungen, also auf die *Hälfte*.

— S ist als Polynom in q und r bezüglich der gleichen Vertauschungen invariant wie r.

— s (eine Kubikwurzel aus S) ist invariant nur bezüglich der Identität: Das überprüft man wieder direkt an der Formel für s.

Das Ziehen der *Kubik*wurzel *reduziert* den "Symmetriegehalt" somit von 3 Vertauschungen auf 1 Vertauschung, also auf einen *Drittel*.

— t ist, wie s, invariant nur bezüglich der Identität.

Man beobachtet:

Der *Symmetrie-Abbau* erfolgt *stufenweise*, jeweils beim *Ziehen* einer *Wurzel*. Beim Ziehen der Quadratwurzel wird die Symmetrie auf die Hälfte reduziert (von 6 auf 3 Vertauschungen), beim Ziehen der Kubikwurzel noch einmal auf einen Drittel (von 3 auf noch eine Vertauschung: die Identität).

Im letzten Schritt bei der Anwendung des dFTC-Lösungsalgorithmus wird das Endresultat X als Summe von $\frac{1}{3} \cdot a$, s und t gebildet. Während a bezüglich beliebiger Vertauschungen von x_1, x_2, x_3 invariant ist, sind s und t nur bezüglich der Identität invariant. Hingegen ist $X = x_1$ offensichtlich auch noch bezüglich der Vertauschung von x_2 und x_3 invariant – weil x_2 und x_3 in der Formel für X gar nicht vorkommen. Durch die Bildung der Summe $s + t$ wird somit *Symmetrie zurück gewonnen.*

Bemerkung 3 *Die Anwendung von Grundrechenoperationen kann ein Ergebnis liefern, das "symmetrischer" ist als die involvierten Operanden*[53]*. Das Umgekehrte ist offenbar nicht möglich: Die Symmetrie, die allen Operanden gemeinsam ist, weist auch das Ergebnis auf, das bei Anwendung von Grundrechenoperationen entsteht – es kann "mehr Symmetrie" resultieren, aber nicht weniger.*

[53]Das heisst: Das Ergebnis ist bezüglich *mehr* Vertauschungen invariant als einzelne Operanden.

7.3 Symmetrie und F-Lösungsalgorithmus

Für die zu den Abschnitten 7.1, 7.2 analoge Symmetrie-Analyse bei der Anwendung des F-Lösungsalgorithmus von Ferrari auf die allgemeine quartische Gleichung verweise ich auf Anhang A.2. Die Beobachtungen sind ganz ähnlich zu denen im Zusammenhang mit der allgemeinen quadratischen und kubischen Gleichung in den Abschnitten 7.1, 7.2.

8 Ruffini und die Quintic

Dieser Abschnitt (zusammen mit Anhang C) bildet den eigentlichen *Kern* dieses *Aufsatzes*: *Ziel* ist die Erarbeitung von Ruffinis *Beweis*, dass im Fall der Quintic[54] *kein* Ruffini-Lösungsalgorithmus existieren *kann*.

Grob gesagt beweist Ruffini, dass Wurzeln gewisse Symmetrien ihrer Radikanden "erben", wenn diese und die Wurzeln Polynome in fünf Variablen sind. Das stellt, wie sich zeigt, eine *Obstruktion* für die Konstruktion eines Ruffini-Lösungsalgorithmus für die Quintic dar, das heisst ein unüberwindliches *Hindernis*, eine *Barriere*, die jede Hoffnung für die Quintic je einen Ruffini-Lösungsalgorithmus (er-)finden zu können, ein für allemal zunichte macht.

8.1 Ruffinis Satz übers Vererben von Symmetrien beim Ziehen von Wurzeln

Bei fünf Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 gibt es $5! = 120$ mögliche Vertauschungen von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Von diesen spielen zwei eine herausragende Rolle. Ich bezeichne sie mit s bzw. t. Es sind die folgenden beiden:

$$\begin{array}{rcl} s & : & x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_1, \quad x_4 \to x_4, \quad x_5 \to x_5 \\ t & : & x_1 \to x_1, \quad x_2 \to x_2, \quad x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to x_3 \end{array} \tag{25}$$

Und hier ist, was Ruffini beweisen konnte:

> **Satz** (P. Ruffini, 1813)
>
> *Voraussetzungen*: a) u, v sind Polynome in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 und ℓ ist eine Primzahl.
> b) Es gilt $u^\ell = v$.
> c) v ist *invariant* bezüglich den Vertauschungen s und t in Gleichung (25).
>
> *Behauptung*: u ist ebenfalls *invariant* bezüglich s und t.

Mit anderen Worten: Wenn ein Radikand die durch die beiden Vertauschungen s und t definierte Symmetrie hat, dann gilt das auch für jede ℓ-te Wurzel.

Die Voraussetzungen a), b) des Satzes verlangen, dass es zum Polynom v (in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) ein Polynom u (in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) gibt, dessen ℓ-te Potenz gleich dem

[54] Und mutatis mutandis bei den Gleichungen noch höheren Grades.

Polynom v ist. Das ist eine *starke*, das heisst *stark einschränkende Voraussetzung*: Im Allgemeinen, das heisst für ein beliebig vorgegebenes Polynom v (in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), sollte man nicht erwarten, dass es ein Polynom u (in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) mit der Eigenschaft $u^\ell = v$ gibt[55].

Trotzdem ist die Voraussetzung in Ruffinis Satz *nicht willkürlich*, ist sie doch, wie in Abschnitt 5 und Anhang A gezeigt wird, im Fall der Lösungsalgorithmen für die Gleichungen der Grade 1-4 erfüllt[56]. Und das ist, wie sich schliesslich heraus gestellt hat, kein Zufall, siehe Abschnitt 9.2.

Aus Ruffinis Satz folgt nun tatsächlich:

> **Korollar** (P. Ruffini)
>
> Es kann für die allgemeine quintische Gleichung *keinen* Ruffini-Lösungsalgorithmus geben.

8.2 Organisation

Wie ist die Fortsetzung dieses Abschnitts organisiert?
– Unter der Annahme, der Satz von Ruffini sei schon bewiesen, wird in Abschnitt 8.4 das Korollar bewiesen.
– Der Beweis des Satzes von Ruffini selbst wird dann in Anhang C durchgeführt.
– Zuvor, in Abschnitt 8.5, werden anhand einer vereinfachten Version des Satzes von Ruffini die Beweisideen vorgestellt: So lernen auch Leserinnen und Leser, die sich nicht in die Details des Beweises in Anhang C vertiefen mögen, die Ideen des Beweises von Ruffinis Satz kennen.
– Als Vorbereitung werden im ersten kurzen Abschnitt 8.3 die Grundbegriffe und Bezeichnungen für die Bequemlichkeit der Leserin, des Lesers wiederholt. Wer will kann auch gleich zu Abschnitt 8.4 gehen und Abschnitt 8.3 nur bei Bedarf konsultieren.

8.3 Repetition der Grundbegriffe/Bezeichnungen

Wie bisher, siehe Abschnitte 6, 7, benutzen wir *Vertauschungen* der *Variablen*, um die Symmetrie von Formeln, insbesondere von Polynomen zu erfassen. Zentral ist dabei der Begriff der *Invarianz* eines Polynoms bezüglich Vertauschungen.

Eine Vertauschung, zum Beispiel s in (25), *wirkt* wie folgt auf ein Polynom w (in den fünf Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): Man ersetzt im Polynom $w(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ die Variable x_1 gemäss der Defnition von s in (25) durch die Variable x_2, die Variable x_2 durch die Variable x_3, x_3 durch x_1 und belässt x_4 und x_5 (man könnte auch sagen: man ersetzt x_4 durch x_4 und x_5 durch x_5). Das so neu gebildete Polynom bezeichne ich mit

$$s(w) \quad \text{oder (ausführlicher) mit:} \quad s(w)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \tag{26}$$

[55]Man beachte auch Bemerkung 2 und Fussnote 24 in Abschnitt 5.2.

[56]Es ist ja diese Eigenschaft, die die drei Lösungsalgorithmen als *Ruffini*-Lösungsalgorithmen (im Sinne der Definition in Abschnitt 5.5) qualifizieren.

Es gilt also

$$s(w)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := w(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) \tag{27}$$

In Übereinstimmung mit dem bisherigen Gebrauch des Begriffs *invariant*, sagt man: Das Polynom w ist *invariant* bezüglich der Vertauschung s, wenn

$$s(w) = w \tag{28}$$

gilt. Anstelle von (28) kann man ausführlicher

$$s(w)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = w(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \tag{29}$$

schreiben und mit Hilfe von (27) auch

$$w(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) = w(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \tag{30}$$

(dabei steht das Gleichheitszeichen in (28), (29), (30) für die *Gleichheit* von *Polynomen/Funktionen*, das heisst: bei beliebiger Belegung der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 mit Zahlen, erhält man links und rechts jeweils dieselbe Zahl, siehe auch Bemerkung 1, Teil b)).

Was für die Vertauschung s aus (25) gesagt wurde, kann analog für die Vertauschung t aus (25) (und allfällige weitere Vertauschungen von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) erklärt werden.

Wenden wir uns nun den Beweisen von Ruffinis Behauptungen zu.

8.4 Beweis des Korollars

Der Beweis des Korollars[57] erfolgt *indirekt*: *Nehmen* wir *an*, es *gäbe* einen *Ruffini-Lösungsalgorithmus* zur *allgemeinen quintischen* Gleichung. Es wird sich zeigen, dass diese Annahme auf einen *Widerspruch* führt, und somit fallen gelassen werden muss – womit die Richtigkeit des Korollars erwiesen sein wird.

Es folgt die Herleitung/Begründung eines Widerspruchs zur Annahme:

- Die Koeffizientenfunktionen a, b, c, d, e der allgemeinen Quintic sind bezüglich *beliebiger* Vertauschungen der fünf Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 invariant (analog wie die Koeffizientenfunktionen a, b, c der allgemeinen Cubic bezüglich beliebiger Vertauschungen von x_1, x_2, x_3 invariant sind, wie ein Blick auf die Vieta-Formeln (11) oder (13) in Abschnitt 4 zeigt). Also sind a, b, c, d, e *insbesondere* bezüglich der beiden Vertauschungen s und t, siehe (25), invariant.

  Es folgt, dass alle bei der Anwendung (des nach Annahme existierenden) Ruffini-Lösungsalgorithmus auf die allgemeine Quintic auftretenden Zwischenresultate und das Endresultat X invariant sind bezüglich s und t. *Denn*:

  a) Ein Zwischenresultat, bzw. das Endresultat entsteht entweder durch Anwendung einer Grundrechenoperation oder durch das Ziehen einer Wurzel (siehe die Definition des Ruffini-Lösungsalgorithmus in Abschnitt 5.5).

[57] Unter der Anahme, der Satz von Ruffini sei schon bewiesen.

b) Wie in Bemerkung 3 am Schluss von Abschnitt 7.2 festgehalten wurde, können Grundrechenoperationen die vorhandene Symmetrie nicht reduzieren. Folglich: Wird ein Zwischenresultat aus Bestandteilen (Operanden), die bezüglich s und t invariant sind durch Anwendung einer Grundrechenoperation erhalten, so ist das Zwischenresultat selbst auch invariant bezüglich s und t.

c) Das gilt auch beim Ziehen von Wurzeln: Wird ein Zwischenresultat dadurch erhalten, dass aus einem Radikanden der bezüglich s und t invariant ist, eine Wurzel gezogen, so ist diese, Dank des Satzes von Ruffini, ebenfalls bezüglich s und t invariant.

Damit ist bewiesen, dass alle bei der Anwendung des (nach Annahme existierenden) Ruffini-Lösungsalgorithmus auf die allgemeine Quintic auftretenden Zwischenresultate und das Endresultat invariant sind bezüglich s und t.

Ich nenne das Endresultat/Output-Datum, siehe oben, X oder ausführlicher $X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Weil X durch einen (nach Annahme existierenden) Ruffini-Lösungsalgorithmus entsteht, ist X ein Polynom in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, das, nach dem gerade Bewiesenen, insbesondere bezüglich s invariant ist, das heisst es gilt:

$$s(X) = X \text{ oder } s(X)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \tag{31}$$

- Das Endresultat/Output-Datum eines Ruffini-Lösungsalgorithmus ist nach Definition, siehe Abschnitt 5.5, das Polynom x_1. Mit anderen Worten, es gilt:

$$X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 \tag{32}$$

Anwenden der Vertauschung s auf (32) liefert

$$s(X)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2 \tag{33}$$

Mit (32), (31) und (33) folgt:

$$x_1 = X(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = s(X)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2 \tag{34}$$

Da die beiden Polynome x_1 und x_2 verschieden sind[58], liegt ein *Widerspuch* vor.

Folgerung: Unser Ausgangspunkt war die *Annahme*: *Es gibt für die Quintic einen Ruffini-Lösungsalgorithmus.* Daraus haben wir eine Reihe von (korrekten!) Schlüssen gezogen und sind auf einen Widerspruch gestossen. Dies kann nur bedeuten, dass die Annahme *nicht stimmt.* Somit ist das *Korollar* (unter der Voraussetzung, dass der Satz von Ruffini bewiesen werden kann) *bewiesen*:

Es gibt keinen *Ruffini-Lösungsalgorithmus für die Quintic.*

Hängig ist der Beweis des Satzes von Ruffini.

[58]Siehe Bemerkung 1, Teil b).

8.5 Beweis einer "Kleinen Version" des Satzes von Ruffini

In diesem Abschnitt begnüge ich mich damit, eine "Kleine Version" des Satzes von Ruffini zu beweisen. Diese Kostprobe ist repräsentativ für den gesamten Beweis. Der vollständig ausgeführte Beweis von Ruffinis Version seines Satzes findet sich in Anhang C.

> **"Kleine Version"** des Satzes von Ruffini
> *Voraussetzungen*: a) u und v sind Polynome in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.
> b) Es gilt $u^2 = v$.
> c) v ist *invariant* bezüglich der Vertauschung s (siehe (25), (28)-(30)).
>
> *Behauptung*: u ist (auch) *invariant* bezüglich der Vertauschung s.

Es wird also, siehe den Satz von Ruffini in Abschnitt 8.1, der Fall $\ell = 2$ untersucht und lediglich die Invarianz bezüglich s.

Beweis:

- Die Behauptung ist trivial falls $u = 0$ (und demzufolge $v = 0$) gilt. Also sei $u \neq 0$.
- Aus der Voraussetzung b): $u^2 = v$ folgt

$$s(u^2) = s(v) \tag{35}$$

(Für die Definition von $s(u^2)$ und $s(v)$, vergleiche (27).)

Da nach Voraussetzung v invariant ist bezüglich der Vertauschung s, gilt, vergleiche (28),

$$s(v) = v = u^2, \tag{36}$$

wobei im zweiten Schritt wieder die Voraussetzung b) verwendet wurde.

Gibt es einen Zusammenhang zwischen $s(u^2)$ und $s(u)$? Denken wir uns einen Moment, dass $u \cdot u$ die Aufgabe bezeichnet, das Polynom u mit sich selber zu multiplizieren und u^2 die Lösung dieser Aufgabe, also das Produktpolynom. Da die Polynommultiplikation so "eingerichtet" ist, dass die beiden Polynome als Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 gleich sind, spielt es keine Rolle, ob wir die Vertauschung s in den beiden Faktoren u vornehmen, oder im Resultat[59]. Das heisst es gilt:

$$s(u^2) = s(u) \cdot s(u) = (s(u))^2 \tag{37}$$

Kombiniert man (35), (36), (37) folgt

$$(s(u))^2 = u^2 \tag{38}$$

[59] Vielleicht ist es hilfreich ein Beispiel, etwa

$$(2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1^2 \cdot x_2) \cdot (x_2 \cdot x_3)$$

durch zu denken/rechnen.

Aus (38) folgt, dass es für $s(u)$ nur zwei Möglichkeiten gibt. Entweder gilt[60]:

$$s(u) = u \tag{39}$$

oder aber:

$$s(u) = -u \tag{40}$$

Wenn (39) gilt, sind wir fertig, denn $s(u) = u$ bedeutet gerade, dass u bezüglich s invariant ist, wie behauptet.

- Es ist zu zeigen, dass die Alternative (40) nicht möglich ist. Nehmen wir versuchsweise an, (40) würde gelten. Mit der Definition der Vertauschung s, siehe (25), folgt, vergleiche (27), einerseits[61]

$$\begin{array}{lcl} s(u)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & u(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) \\ s(s(u))(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & s(u)(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) \\ & = & u(x_3, x_1, x_2, x_4, x_5) \\ s(s(s(u)))(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & s(s(u))(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) \\ & = & u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \end{array} \tag{41}$$

und somit

$$s(s(s(u))) = u \tag{42}$$

Aus (40) folgt andererseits

$$s(s(u)) = s(-u) = -s(u) = -(-u) = u, \quad s(s(s(u))) = s(u) = -u \tag{43}$$

Aus der Gleichung (42) und der letzten Gleichung (43) erhält man

$$u = -u$$

woraus $2 \cdot u = 0$ und somit $u = 0$ folgt. Es wurde indessen vorausgesetzt, dass $u \neq 0$ gilt. Folglich kann die Alternative (40) tatsächlich nicht eintreten.

Damit ist die oben formulierte "Kleine Version" des Satzes von Ruffini bewiesen. Wie gesagt: Die Schritte sind repräsentativ für die Betrachtungen beim Beweis des Satzes von Ruffini, der im Anhang C ausgeführt ist.

[60]Man betrachte zum Vergleich die vertrautere "numerische" Gleichung $z^2 = 5^2$. Offenbar gilt entweder $z = 5$ oder $z = -5$. Dass der analoge Schluss auch in der (komplizierteren) Situation von Gleichung (38) gilt, ist plausibel, aber nicht ganz offensichtlich.

[61] Wenn Sie sich's lieber "inhaltlich" überlegen: i) Zur Erinnerung: Die Vertauschung s ersetzt x_1 durch x_2, x_2 durch x_3, x_3 durch x_1, x_4 durch x_4, x_5 durch x_5. ii) Denken Sie sich jetzt bitte irgend ein Polynom u in den fünf Variablen x_1, ..., x_5. Es soll nacheinander dreimal die Vertauschung s angewandt werden. Was resultiert? Verfolgen wir die Entwicklung z.B. der Variablen x_1: Wo immer im Polynom u der Buchstabe x_1 steht, wird er im ersten Schritt durch den Buchstaben x_2 ersetzt. Im zweiten Schritt wird dieser Buchstabe überall durch den Buchstaben x_3 ersetzt. Schliesslich wird der Buchstabe x_3 im dritten Schritt überall durch den Buchstaben x_1 ersetzt. Das Resultat: Überall wo im Polynom, mit dem der dreischrittige Prozess gestartet wurde, also in u, der Buchstabe x_1 stand, steht am Schluss wieder der Buchstabe x_1. Und Analoges widerfährt den übrigen Buchstaben in diesem Prozess. Daher ist das Polynom, das am Schluss da steht das exakt gleiche, wie das Polynom von dem ausgegangen wurde. Also gilt $s(s(s(u))) = u$. Das heisst Gleichung (42) ist richtig.

9 Und das zum Schluss ...

9.1 Wer war Paolo Ruffini?

[62] Paolo Ruffini wurde 1765 geboren. Als Paolo etwa 10 Jahre alt war zog die Familie nach Modena. Ab 1783 studierte er an der Universität von Modena Medizin, Mathematik, Philosophie und Literatur und schloss 1788 ab. Kurz darauf begann er an der Universität Modena Mathematik zu lehren.

Wir sind zur Zeit der französischen Revolution. Ruffini scheint weder ein glühender Anhänger der Revolution noch des alten Regimes gewesen zu sein. Eine Weile lebte er, entgegen seinem Wunsch, als gewählter Repräsentant seiner Region in Napoleons Republik Cisalpina in Milano. Dann nahm er seine Lehrtätigkeit an der Universität Modena wieder auf. Da er sich aus religiösen Gründen weigerte einen Eid auf die Republik zu schwören, verlor er jedoch bald seine Stelle.

Ruffini praktizierte (zeitlebens und hingebungsvoll, wie man liest) als hoch geschätzter Arzt. Und er verfolgte seine mathematische Forschung. 1799 publizierte er unter dem Titel:

> "*Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generale di grado superiore al quarto*"

zwei dicke Bände – zusammen beinhalten sie über 500 Seiten. Hier findet sich Ruffinis Behauptung, Gleichungen 5. Grades liessen sich allgemein nicht in der herkömmlichen Weise lösen und auch sein erster Beweis.

Ruffinis Werk war nicht nur enorm umfangreich, sondern zudem schwierig zu lesen. Überdies war es, trotz der Vorarbeit durch die lange und wegweisende Arbeit von *Lagrange* aus dem Jahr 1770/71, siehe Abschnitt 4, revolutionär neu. Wussing, [13], p. 189, schreibt: "Die Theorie der Permutationen ist bei Ruffini nicht mehr blosses rechnerisches Hilfsmittel, sondern bereits tragender Bestandteil der Auflösungstheorie. Damit ging Ruffini weit über Lagrange hinaus, ... "

So erfuhr Ruffini nicht die Anererkennung, die er verständlicherweise erhofft hatte. Ein Grund mag gewesen sein, dass sich noch nicht einmal die *Vermutung* durchgesetzt hatte, die Quintic würde sich wohl nicht analog zu den bekannten Fällen lösen lassen – und dies, obschon alle diesbezüglichen Lösungsversuche während zweieinhalb Jahrhunderten erfolglos geblieben waren.

Ruffini hat nicht aufgegeben: In der Hoffnung doch noch verstanden und anerkannt zu werden, hat er in den Jahren bis 1813 weitere Beweise erdacht und veröffentlicht. Darunter, in einer Arbeit von 1813 mit dem Titel:

> "*Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*"

als letzten den Beweis, der diesem Aufsatz zu Grunde liegt (siehe Abschnitt 8.5 und Anhang C). Allein, seine Hoffnung auf Anerkennung erfüllte sich zu seinen Lebzeiten nicht.

[62] Nach [2] und [4].

Ein Grosser allerdings, zum Glück, hat die Bedeutung von Ruffinis Arbeit *er*kannt und ihm gegenüber in einem Brief im Jahr 1820 auch *be*kannt: *A.-L. Cauchy* (1789–1857). Cauchy schrieb, in englischer Übersetzung[63]

> *"Your memoir on the general resolution of equations is a work that has always seemed to me worthy of the attention of mathematicians and one that, in my opinion, demonstrates completely the impossibility of solving algebraically equations of higher than the fourth degree.*

Die Anerkennung durch Cauchy könnte der Grund gewesen sein, dass Ruffini nicht völlig vergessen wurde.

Tatsächlich bildete Ruffinis Werk den Ausgangspunkt für eigene Untersuchungen von Cauchy über Permutationsgruppen, die dann wiederum *N. H. Abel* benutzte.

9.2 Abel und die Quintic

Im Jahr 1826 erschien im allerersten Heft des *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, nach dem Gründer der Zeitschrift auch *Crelles Journal* genannt, von

N. H. Abel (1802–1829)

die Arbeit mit dem Titel:

"Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré"

In dieser Arbeit beweist Abel, dass es keine nur die Grundrechenoperationen und das Ziehen von Wurzeln benutzende Lösungsalgorithmen für die allgemeinen polynomialen Gleichungen vom Grad 5 und höher gibt.

Die *Pointe*: Im Unterschied zu Ruffini setzt Abel *nicht* voraus, dass die Wurzeln rationale Funktionen (oder sogar Polynome) in den Variablen $x_1, x_2, x_3, ...$ sind. Viel mehr beweist er den folgenden berühmten

Satz über die natürlichen Irrationalitäten (N. H. Abel 1824/1826)

Wenn es überhaupt einen auf den Grundrechenoperationen und dem Ziehen von Wurzeln beruhenden Lösungsalgorithmus gibt, dann gibt es auch einen, bei dem alle Zwischenresultate rationale Funktionen von $x_1, x_2, x_3, ...$ sind.

Abel erhält das im Titel seiner Arbeit behauptete Resultat über die Gleichungen vom Grad 5 und höher sodann, indem er sich, wie schon gesagt, auf einen Satz von Cauchy stützt, der ein Resultat von Ruffini verallgemeinert.

Wie sind die Beiträge von Ruffini und Abel in Bezug aufeinander zu bewerten?

[63] Zitiert nach [4].

Ruffinis Beitrag
Man kann Ruffinis Satz als nützlichen, ja zentralen Baustein betrachten: Der im Titel von Abels Arbeit genannte Satz folgt aus Abels Satz über die natürlichen Irrationalitäten und aus Ruffinis Satz[64].

Ich meine: *Ruffinis Satz ist auch für sich genommen ausserordentlich wertvoll.*

Wenn man einen Unmöglichkeitsbeweis führen will, muss man zu allererst klären, *was* denn mutmasslich *nicht möglich* ist. Ein Unmöglichkeitsbeweis ist immer eine Reaktion auf eine *Enttäuschung*: Aus *Erfahrungen* gewonnene *Erwartungen* werden *nicht erfüllt.*

Ruffini geht von den von Lagrange eingeführten *allgemeinen* polynomialen Gleichungen aus. Das ist, wenn man sie einmal kennen gelernt hat, ein sehr natürlicher Ausgangspunkt.

Auf Grund der Beobachtungen bei der Anwendung des babylonischen Lösungsalgorithmus auf die allgemeine Quadratic, des dFTC-Lösungsalgorithmus auf die allgemeine Cubic und des F-Lösungsalgorithmus auf die allgemeine Quartic hat man allen Grund zur Erwartung, dass es auch für die allgemeine Quintic einen *Ruffini*-Lösungsalgorithmus gibt.

Doch aus Ruffinis Satz folgt: Einen Ruffini-Lösungsalgorithmus für die allgemeine Quintic (oder für allgemeine polynomiale Gleichungen höheren Grades) *gibt* es *nicht*, weil es ihn, wie das Korollar zu Ruffinis Satz zeigt, nicht geben *kann.*

Die *Quintessenz*: Wenn man von *allgemeinen* polynomialen Gleichungen (im Sinne von Lagrange) ausgeht, ergibt Ruffinis Theorie eine *in sich geschlossene Auflösung des Rätsels der Quintic.*

Vielleicht darf man annehmen, dass Cauchy eben diesen Standpunkt einnahm, als er schrieb[65]: "Your memoir ... on the general resolution ... demonstrates completely the impossibility ... "

Und (nicht zu verachten ...): Der Beweis von Ruffinis Satz ist vergleichsweise einfach.

Abels Beitrag
Denkt man allerdings an polynomiale Gleichungen, deren *Koeffizienten* a, b, *... beliebige*, wenn gleich nicht näher bestimmte *Zahlen* sind, und an die Lösungsalgorithmen in der Form, wie sie in Abschnitt 3.1 für die quadratische Gleichung, in Abschnitt 3.2 für die Cubic, und in Abschnitt A.1 für die Quartic dargestellt sind, dann ist nicht von vornherein klar, ob Ruffini ein zwar interessantes und sicher auch verwandtes, aber vielleicht doch nicht genau das letztendlich interessierende Problem gelöst hat ...

Denn aus dieser (mehr "numerischen", statt "funktionalen") Perspektive betrachtet, könnte man den Verdacht schöpfen, dass es zu einschränkend ist die "Konkurrenz" auf *Ruffini*-Lösungsalgorithmen zu beschränken, und dass es ja sein könnte, dass es eine

[64]Das hat zuerst *P.-L. Wantzel* (1814–1848) bemerkt: Abels Satz über die natürlichen Irrationalitäten zeigt ja, dass man sich *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* auf *Ruffini*-Lösungsalgorithmen einschränken kann.

[65]Siehe Abschnitt 9.1.

Lösungsformel für die Quintic geben würde, wenn man nur diese Beschränkung fallen lassen würde.

Nicht gar so überraschend, ist es *nicht* so. Abels Satz über die natürlichen Irrationalitäten schliesst die mutmassliche Lücke: Es ist völlig *ausreichend Ruffini*-Lösungsalgorithmen zu betrachten.

Der Beweis von Abels Satz ist nicht einfach! Er beruht auf einigem an Vorarbeit. Er ist verwickelt. Er ist raffiniert. Er erforderte die grosse Intuition und die tiefe Einsicht eines grossen Mathematikers. Er wird daher von der Community der Mathematiker und Mathematikerinnen als das eigentliche *Kernstück* des Beweises für die Unmöglichkeit der Lösung der Quintic mittels Radikalen (d.h. Wurzeln) betrachtet.

Was folgt daraus?
Abels Beweis seines Satzes über die natürlichen Irrationalitäten bleibt, wegen der mathematischen Anspüche die er an den Leser, die Leserin stellt, den Spezialisten, also den Mathematikern und Mathematikerinnen, vorbehalten.

Ist das "*Rätsel der Quintic*" als Thema für ein breiteres Publikum, insbesondere für Gymnasiastinnen und Gymnasiasten, deshalb *ungeeignet*?

Ich glaube nicht. Denn das meiner Meinung nach *Faszinierendste* am Thema, die *Querverbindung* zwischen *Symmetrie* und der *Nichtexistenz* von *Lösungsformeln*, steckt schon voll und ganz in Ruffinis Untersuchung[66] der allgemeinen Quintic und ist Dank seines Satzes mit Mitteln zugänglich, die zugleich interessant und im Grunde nicht schwierig sind: Es wird nichts benötigt was ausserhalb der Reichweite der Mathematikkenntnisse liegt, wie sie das Gymnasium vermittelt.

Übrigens ...
Auch unter Mathematikern wird Ruffinis Beitrag inzwischen mehr gewürdigt: Es ist jetzt üblich geworden, im Zusammenhang mit dem Beweis der Nicht-Existenz einer Lösungsformel für die Quintic auf der Grundlage von Radikalen vom

Satz von *Abel-Ruffini*

zu sprechen. So erfährt Ruffinis (Pionier-)Arbeit, wenn auch spät, doch noch die verdiente und von ihm so erhoffte Anerkennung.

9.3 Und Galois?

Unter einer *Lösungsformel* für die Gleichung n-ten Grades versteht man ein Prozedere, das eine oder mehrere ihrer Lösungen für *beliebige* Wahlen der Koeffizienten liefert, mit anderen Worten: einen Lösungsalgorithmus, der auf jede beliebige Gleichung n-ten Grades anwendbar ist.

Wenn nun *keine* solch *allgemeine* Lösung für alle Gleichungen eines bestimmten Grades existiert, heisst das nicht, dass es nicht *einzelne Gleichungen* gibt, deren Lösungen eine

[66] Abels Satz über die natürlichen Irrationalitäten und sein Beweis leisten *dazu* keinen weiteren Beitrag.

bestimmte Struktur haben, also etwa mit Hilfe der Grundrechenoperationen und Wurzeln ausdrückbar sind. Immerhin können sämtliche reinen polynomialen Gleichungen[67] (trivialerweise) mittels Wurzeln gelöst werden. Aber es gibt auch weniger offensichtliche Beispiele.

In der Tat hat etwa die quintische Gleichung

$$x^5 - 5\,x + 12 = 0 \tag{44}$$

eine einzige reelle Lösung und sie ist durch Radikale darstellbar[68]:

$$\begin{aligned} &\sqrt[5]{-1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{\tfrac{1}{5} - \tfrac{11}{125}\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-1 - \tfrac{2}{5}\sqrt{5} + 3\sqrt{\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{125}\sqrt{5}}} \;+ \\ +\; &\sqrt[5]{-1 - \tfrac{2}{5}\sqrt{5} - 3\sqrt{\tfrac{1}{5} + \tfrac{11}{125}\sqrt{5}}} + \sqrt[5]{-1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5} + 3\sqrt{\tfrac{1}{5} - \tfrac{11}{125}\sqrt{5}}} \end{aligned}$$

Andererseits hat die quintische Gleichung

$$x^5 - 4\,x + 2 = 0 \tag{45}$$

keine nur mit den Grundrechenoperationen und Wurzeln darstellbare Lösung.

Das Ziel der Galois-Theorie ist, bei *jeder* polynomialen Gleichung mit *konkret* durch Zahlen festgelegten Koeffizienten jedenfalls im Prinzip *entscheiden* zu können, ob ihre Lösungen mitttels der Grundrechenoperationen und mit Hilfe von Radikalen darstellbar sind.

Galois hat "in a stroke of genius" jeder polynomialen Gleichung eine gewisse Gruppe von Vertauschungen, ihre *Galoisgruppe* wie man sagt, zugeordent, und gezeigt, dass allein anhand der Eigenschaften dieser Gruppe entschieden werden kann, ob die betreffende Gleichung durch Radikale lösbar ist oder nicht.

Der Satz von Abel-Ruffini ergibt sich in der Galois-Theorie als Spezialfall. Die Galois-Theorie geht also noch einen (substanziellen) Schritt über den Satz von Abel-Ruffini hinaus.

9.4 Und jenseits der Wurzeln?

Man kann natürlich weitere Fragen stellen. Zum Beispiel: Kann das *Wurzelziehen* durch *andere Operationen* ersetzt (oder ergänzt) werden, sodass mit ihrer Hilfe eine Lösungsformel zum Beispiel für die Quintic aufgestellt werden kann?

Um 1858 haben *F. Brioschi* (1824-1897), *C. Hermite* (1822-1901) und *L. Kronecker* (1823-1891) unabhängig voneinander entdeckt, dass für die Quintic unter Verwendung einer zusätzlichen Rechenart tatsächlich eine Lösungsformel entwickelt werden kann.

[67] Siehe Fussnote 27.

[68] Das folgt aus Überlegungen, die auf *G. F. Malfatti* (1731–1807) zurück gehen, siehe *J. Bewersdorff* [3], p. 90ff und p. 124.

Etwas später, um 1880, hat *F. Klein* (1849-1925) den *geometrischen Grund* dafür erkannt: Er liegt im Zusammenhang zwischen den Symmetrien der allgemeinen Quintic und des *Ikosaeders*, also des *regulären Körpers* mit 12 Ecken, 30 Kanten und 20 gleichseitigen Dreiecken. In ihrer Publikation [9] versuchen *J.-H. Eschenburg* und *L. Hefendehl-Hebeker* die nicht einfache und lange Arbeit von Klein einer weiteren Leserschaft zugänglich zu machen.

10 Die Quintic im Mathematikunterricht?

"Der Erwerb ... von Bildung ist nicht allein daran zu messen, ob er materiell relevant ist."[69]

Nein – praktische Bedeutung haben die Lösungsformeln für die Cubic und die Quartic nicht, und hatten sie nie. Und man "kommt gut durchs Leben", auch wenn man nicht weiss, dass es keine analogen Lösungsformeln für Gleichungen vom Grad fünf und höher gibt. Und zu verstehen, warum das so ist, ist erst recht nicht lebensnotwendig.

Nur – drängt es sich nicht ganz einfach auf, im Anschluss an die babylonische Lösungsformel für die Quadratic (die ja gewiss nicht zur Disposition steht?), nach einer analogen Lösungsformel für die Cubic zu fragen? Und als Antwort die del *Ferro-Tartaglia-Cardano-Formel* herzuleiten, was ja, siehe Abschnitt 3.2.1, weder besonders schwierig noch ein gar grosser Aufwand ist? Auch ihre Entstehungeschichte anzusprechen lohnt sich: Sie illustriert, dass Mathematik von Menschen gemacht wird – dass auch Formeln eine Geschichte haben können.

Ja – die dFTC-Formel und Ruffinis Zugang zur Unlösbarkeit der allgemeinen Quintic verlangen nach den *komplexen Zahlen*. Ist das ein Argument gegen diese Themen im gymnasialen Mathematikunterricht? Es gibt (mindestens) drei Gründe, die komplexen Zahlen zum Thema des gymnasialen Mathematikunterrichts zu machen.

a) Gewiss hatten die komplexen Zahlen historisch betrachtet eine "schwere Geburt". Aber nicht weil sie besonders schwierig zu handhaben sind. Das Problem war, dass sie eine *Veränderung des Standpunkts den Zahlen gegenüber* erforderten: Zahlen müssen nicht unbedingt "etwas Natürliches" sein. Man kann sie auch einfach durch die Funktion, die sie haben sollen, begreifen. Die Vermittlung dieses Standpunks, und das meint: zu einem "abstrakteren" Verständnis des Zahlbegriffs hin, hat Bildungswert.

b) Alle, die an der Universität dem theoretisch wie praktisch so wichtigen Eigenwertproblem begegnen werden, werden dankbar sein, wenn sie schon etwas Erfahrung mit komplexen Zahlen haben.

c) Aus mathematischer Sicht ist die sogenannte *algebraische Abgeschlossenheit* der komplexen Zahlen mehr als bemerkenswert: Wie man die Einführung der komplexen Zahlen auch immer begründet[70]: Eine grosse Überraschnug und Genugtuung ist der Funda-

[69] *Raphael Berthele*, Professor für Mehrsprachigkeit, Universität Fribourg im Interview zum Thema "Die Schule ist für Fremdsprachen im besten Fall eine Türöffnerin" mit der NZZ am 2. August 2016.

[70] Häufig wird als Motivation für die Einführung der komplexen Zahlen gesagt, man möchte *quadratische Gleichungen* mit *negativer Diskriminante* lösbar machen – ganz analog wie ja auch andere

mensatz der Algebra (FDA)[71], der garantiert, dass in den komplexen Zahlen nicht nur quadratische, kubische und quartische Gleichungen lösbar sind, sondern *alle* polynomialen Gleichungen. Mit anderen Worten, aus dem FDA folgt: Die komplexen Zahlen sind der perfekte Rahmen nicht nur für die Gleichungen bis und mit Grad vier, sondern für polynomiale Gleichungen beliebigen Grades.

Dass es darüber hinaus aus mathematischer Sicht noch viele, viele weitere gute Gründe gibt das Lob der komplexen Zahlen zu singen, ist leider auf Schulniveau nicht so ohne weiteres vermittelbar ...

Die *Vieta-Formeln* sind nicht neu im gymnasialen Mathematikunterricht und nichts Schwieriges. Dass sie mehr als "nice to have" sind, wird allerdings erst im Kontext der *allgemeinen* polynomialen Gleichungen sichtbar: Zum einen ermöglichen sie einen neuen Blick auf die Idee der Lösungsformeln/Lösungsalgorithmen, siehe Abschnitt 5 und Anhang A. Zum andern machen sie einen Aspekt sichtbar, der sonst im Dunkeln liegt: *Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Frage nach Lösungsformeln für polynomiale Gleichungen und dem Thema Symmetrie*. Der symmetrische Aufbau der Koeffizienten aus den Variablen $x_1, x_2, ...$ bei den allgemeinen polynomialen Gleichungen macht das augenfällig. Indem man diesen Zusammenhang nutzt, gelangt man – wie die Abschnitte 7 und 8 zeigen – zu unverhofften Einsichten. Es ist just die Entdeckung von solchen, zunächst tief verborgenen Zusammenhängen, die für die meisten Mathematikerinnen und Mathemtiker das Wesen und die Bedeutung der Mathematik aus- und das Fach so unwiderstehlich machen.

Eine Auseinandersetzung mit einem so interessanten und (weit über die Mathematik hinaus) bedeutsamen Phänomen wie *Symmetrie* sollte eigentlich eine conditio sine qua non des Unterrichts (nicht nur des Mathematikunterrichts) sein. Viele Gegenstände des Alltags sind mehr oder weniger symmetrisch, wir begegnen ständig Mustern, die Symmetrien aufweisen, ... Mit Zahlen lassen sich Grössen messen. Was aber ist Symmetrie und wie bemisst man Symmetrie? Natürlich nehmen Schülerinnen und Schüler intuitiv wahr, dass nicht nur geometrische Objekte symmetrisch sein können, sondern dass zum Beispiel auch Formeln symmetrisch aufgebaut sein können. Wie üblich aber kann man ein Phänomen nur dann richtig begreifen, wenn für seine Beschreibung adäquate Begriffsbildungen zur Verfügung stehen. Insbesondere hinsichtlich der Symmetrie von geometrischen Objekten, sind entsprechende Werkzeuge aus dem üblichen Mathematikunterricht durchaus vorhanden. Und was speziell Symmetrien von Formeln und Funktionen anbelangt, sind sie, wie Abschnitt 6 zeigt, unschwer zu finden.

Dass man mit dem Symmetriebegriff bei Formeln und Funktionen und dem eigentlich

Zahlbereichserweiterungen begründet werden. Wie zugkräftig dieses Argument hier ist, sei dahin gestellt. Auf alle Fälle ist es *ahistorisch*. Recht eigentlich aufgedrängt haben sich die komplexen Zahlen nämlich – genau! – wegen der dFTC-Formel. Ausgerechnet im Fall *dreier reeller* Nullstellen der kubischen Gleichung ist die Diskriminante R im Schritt 1), siehe Abschnitt 3.2, *negativ*. So steht man vor der *Alternative*: Entweder sagt man, der dFTC-Lösungsalgorithmus sei (ausgerechnet!) in dieser Situation nicht anwendbar, oder man stürzt sich ins (eigentlich gar nicht so abenteuerliche) Abenteuer mit den "eingebildeten Zahlen". Notabene vielleicht ein Grund mehr die dFTC-Lösungsformel ins gymnasiale Mathematik-Curriculum aufzunehmen ...

[71]Siehe auch die Bemerkungen in Abschnitt 1, insbesondere auch in Fussnote 3.

nicht schwierigen, jedoch faszinierenden Satz von Ruffini mit insgesamt eher bescheidenen, aber den (mathematischen) Horizont erweiternden, Mitteln zu einem *Meilenstein* der, nein – gewiss nicht brandneuen, aber – gemessen an der Schulmathematik – immerhin *neueren Mathematik* vorstossen kann, ist mehr als erfreulich.

Fazit: Aus Sicht der *Schulmathematik* ist der *Satz* von *Ruffini* ein *Glücksfall*.

11 Dank

Ich danke *M. Adelmeyer*, *C. Blatter*, *W. Durandi*, *N. Hungerbühler*, *J. Kramer*, *U. Manz*, *D. Stoffer*, *H. R. Schneebeli*, *H.-O. Walther* und *E. C. Wittmann* für Gespräche und Kommentare zu diesem Projekt und *N. Hungerbühler*, *J. Hromkovic* und den anderen Verantwortlichen für das *Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht* der ETH-Zürich dafür, dass ich die Arbeit am 1. Dezember 2016 im Kolloquium vorstellen konnte. Ein besonderes Dankeschön gebührt den *Maturandinnen* und *Maturanden* einer Klasse von *Werner Durandi* am Gymnasium St. Fidelis (Kantonsschule Nidwalden) in Stans und ihm persönlich: Sie gaben mir die Gelegenheit das Thema in zwei 90-minütigen Sitzungen am 29. und 31. Mai 2017 zu unterrichten.

A Die Quartische Gleichung

Zwischen der Entdeckung des babylonischen Lösungsalgorithmus für quadratische Gleichungen und desjenigen für kubische Gleichungen durch del Ferro, Tartaglia und Cardano lagen, wie früher schon bemerkt, viele Jahrhunderte. Die Entdeckung eines zum dFTC-Lösungsalgorithmus analogen Lösungsalgorithmus für die Gleichung vierten Grades folgte hingegen auf dem Fuss. Der Entdecker war ein Schüler und Mitarbeiter Cardanos: *L. Ferrari* (1522–1565). Die Pointe: Ferrari benutzt eine *kubische Hilfsgleichung*. Sie wird als *Resolventengleichung* bezeichnet.

A.1 Der F-Lösungsalgorithmus

Die Quartic, also die Gleichung 4. Grades, lautet:

$$x^4 - a \cdot x^3 + b \cdot x^2 - c \cdot x + d = 0 \tag{46}$$

Und hier ist Ferraris Lösungsalgorithmus für Gleichung (46):

Der F-Lösungsalgorithmus

1) Bestimme y_1, sodass folgende Hilfsgleichung 3. Grades (sog. *kubische Resolvente*) erfüllt ist:

$$y^3 - b \cdot y^2 + (a \cdot c - 4 \cdot d)\, y - (c^2 + d \cdot (a^2 - 4 \cdot b)) = 0$$

(Man beachte: Der früher vorgestellte dFTC-Lösungsalgorithmus zur Lösung kubischer Gleichungen stellt sicher, dass die Hilfsgleichung mittels der Grundrechenoperationen und dem Ziehen einer Quadrat- und einer Kubikwurzel möglich ist.)

2) Bestimme t_1 sodass folgende rein quadratische Hilfsgleichung erfüllt ist:

$$t^2 = a^2 - 4 \cdot b + 4 \cdot y_1$$

(Diese Aufgabe kann mittels der Grundrechenoperationen und dem Ziehen einer Quadratwurzel gelöst werden.)

3) Bestimme die vier Lösungen der beiden quadratischen Hilfsgleichungen

$$x^2 - \tfrac{1}{2} \cdot [a + t_1] \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot [y_1 + \{a \cdot y_1 - 2 \cdot c\}/t_1] = 0$$

$$x^2 - \tfrac{1}{2} \cdot [a - t_1] \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot [y_1 - \{a \cdot y_1 - 2 \cdot c\}/t_1] = 0$$

(Der babylonische Lösungsalgorithmus für quadratische Gleichungen stellt sicher, dass diese Gleichungen mittels der Grundrechenoperationen und dem Ziehen von jeweils einer Quadratwurzel gelöst werden kann.)

Sie sind Lösungen der Quartic (46).

A.1.1 Begründung des F-Lösungsalgorithmus

Hier der Vollständigkeit halber (und zu Ehren des Entdeckers) die Herleitung des F-Lösungsalgorithmus nach Ferrari. Die Quartic

$$x^4 - a \cdot x^3 + b \cdot x^2 - c \cdot x + d = 0 \tag{47}$$

kann alternativ wie folgt geschrieben werden

$$(x^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot x)^2 = (\frac{1}{4} \cdot a^2 - b) \cdot x^2 + c \cdot x - d \tag{48}$$

Im Sinne Ferraris wird nun auf beiden Seiten von (48) der Term $(x^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot x) \cdot y + \frac{1}{4} \cdot y^2$ addiert, wobei y erst später festgelegt wird. Unter Benutzung der Hilfsgrösse

$$t^2 = a^2 - 4 \cdot b + 4 \cdot y \tag{49}$$

erhält man anstelle von (48)

$$\begin{aligned} (x^2 - \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot y)^2 &= \tfrac{1}{4} \cdot t^2 \cdot x^2 - (\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot y - c) \cdot x + \tfrac{1}{4} \cdot y^2 - d \\ &= (\tfrac{1}{2} \cdot t \cdot x - \tfrac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot y - c}{t})^2 - (\tfrac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot y - c}{t})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot y^2 - d \end{aligned} \tag{50}$$

Dabei wurde die rechte Seite im zweiten Schritt noch umgeformt.

Jetzt wird die Freiheit, y wählen zu können, ausgenützt. Damit nicht nur links in (50) ein Quadrat steht, sondern auch rechts, verlangt Ferrari, dass y so gewählt wird, dass

$$(\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot y - c}{t})^2 - \frac{1}{4} \cdot y^2 + d = 0 \tag{51}$$

gilt. Umgeformt lautet Gleichung (51), wenn man die Definition (49) für t benutzt:

$$y^3 - b \cdot y^2 + (a \cdot c - 4 \cdot d) \cdot y - a^2 \cdot d + 4 \cdot b \cdot d - c^2 = 0 \tag{52}$$

Das ist die berühmte *kubische Resolvente* von Ferrari, man vergleiche mit Schritt 1) im F-Lösungsalgorithmus oben. Nachdem nun sowohl links wie rechts in (50) ein Quadrat steht, folgen aus dieser Gleichung zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot y &= \tfrac{1}{2} \cdot t \cdot x - \tfrac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot y - c}{t} \\ x^2 - \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot y &= -\tfrac{1}{2} \cdot t \cdot x + \tfrac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot y - c}{t} \end{aligned} \tag{53}$$

Das sind die beiden quadratischen Gleichungen für x aus Schritt 3) im F-Lösungsalgorithmus oben. Damit ist der F-Lösungsalgorithmus erklärt.

Mit der heute gebräuchlichen effizienten Notation ist es recht einfach diese Rechnungen nachzuvollziehen. Man muss sich aber bewusst machen, dass diese zu Ferraris Zeit nicht zur Verfügung stand, dass sie sich vielmehr erst später im Laufe der Zeit allmählich entwickelt hat. Daher stellt Ferraris Entdeckung eine umso bewundernswürdigere Leistung dar.

A.2 Symmetrie und F-Lösungsalgorithmus

Die *allgemeine* Gleichung 4. Grades lautet:

$$x^4 - a\,x^3 + b\,x^2 - c\,x + d = 0 \tag{54}$$

wobei

$$\begin{array}{rcrcc} a & = & a(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ b & = & c(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_1\cdot x_2 + x_1\cdot x_3 + x_1\cdot x_4 + x_2\cdot x_3 + x_2\cdot x_4 + x_3\cdot x_4 \\ c & = & c(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_1\cdot x_2\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot x_4 + x_1\cdot x_3\cdot x_4 + x_2\cdot x_3\cdot x_4 \\ d & = & d(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 \end{array} \tag{55}$$

zu setzen ist.

Wenden wir nun den F-Lösungsalgorithmus aus Abschnitt A.1 auf die allgemeine Quartic an und analysieren wir zugleich die Symmetrieeigenschaften der entstehenden Zwischenresultate.

ad 1): Die Input-Daten a, b, c, d sind Polynome in x_1, x_2, x_3, x_4 und alle vier Funktionen sind bezüglich allen $4! = 24$ möglichen Vertauschungen der vier Variablen invariant.

Von Hand (oder bequemer mit Hilfe eines CAS) findet man, dass

$$y_1 = x_1\,x_2 + x_3\,x_4, \qquad y_2 = x_1\,x_3 + x_2\,x_4, \qquad y_3 = x_1\,x_4 + x_2\,x_3$$

Lösungen der (kubischen) Resolvente in 1) sind, siehe auch (52). Offensichtlich sind y_1, y_2, y_3 Polynome in x_1, x_2, x_3, x_4.

Welche *Symmetrien* hat $y_1 = y_1(x) = y_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$?

Die Überprüfung zeigt: $y_1(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ist invariant genau bezüglich folgender 8 Vertauschungen

$$\begin{array}{llll} x_1 \to x_1, & x_2 \to x_2, & x_3 \to x_3, & x_4 \to x_4 \\ x_1 \to x_2, & x_2 \to x_1, & x_3 \to x_3, & x_4 \to x_4 \\ x_1 \to x_1, & x_2 \to x_2, & x_3 \to x_4, & x_4 \to x_3 \\ x_1 \to x_2, & x_2 \to x_1, & x_3 \to x_4, & x_4 \to x_3 \\ x_1 \to x_3, & x_2 \to x_4, & x_3 \to x_1, & x_4 \to x_2 \\ x_1 \to x_4, & x_2 \to x_3, & x_3 \to x_2, & x_4 \to x_1 \\ x_1 \to x_3, & x_2 \to x_4, & x_3 \to x_2, & x_4 \to x_1 \\ x_1 \to x_4, & x_2 \to x_3, & x_3 \to x_1, & x_4 \to x_2 \end{array} \tag{56}$$

Dabei ist die erste Vertauschung, wie üblich, die Identität.

Mit der Lösung y_1 der kubischen Hilfsgleichung wird die Symmetrie auf "einen Drittel" reduziert (von ursprünglich 24 auf 8 Vertauschungen).

ad 2): Die rechte Seite der rein quadratischen Hilfsgleichung für t in 2) ist, infolge des Terms y_1, genau bezüglich der Vertauschungen (56) invariant. Die Rechnung (am bequemsten mit Hilfe eines CAS) zeigt, dass

$$t_1 = (x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$$

Lösung der rein quadratischen Hilfsgleichung ist. Auch t_1 ist ein Polynom in x_1, x_2, x_3, x_4.

Welche *Symmetrien* hat $t_1 = t_1(x) = t_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$?

Man zeigt: $t_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ist invariant genau bezüglich folgender 4 Vertauschungen:

$$\begin{array}{llll} x_1 \to x_1, & x_2 \to x_2, & x_3 \to x_3, & x_4 \to x_4 \\ x_1 \to x_2, & x_2 \to x_1, & x_3 \to x_3, & x_4 \to x_4 \\ x_1 \to x_1, & x_2 \to x_2, & x_3 \to x_4, & x_4 \to x_3 \\ x_1 \to x_2, & x_2 \to x_1, & x_3 \to x_4, & x_4 \to x_3 \end{array} \tag{57}$$

Mit der Lösung der quadratischen Hilfsgleichung für t wird die Symmetrie zusätzlich "halbiert".

ad 3): Die Koeffizienten der beiden quadratischen Gleichungen in 3) sind invariant bezüglich der Vertauschungen (57). Von Hand oder mit Hilfe eines CAS weist man nach dass

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{2} \cdot [a + t_1] = x_1 + x_2 & \text{und} & \frac{1}{2} \cdot [y_1 + \{a \cdot y_1 - 2 \cdot c\}/t_1] = x_1 \cdot x_2 \\ \frac{1}{2} \cdot [a - t_1] = x_3 + x_4 & \text{und} & \frac{1}{2} \cdot [y_1 - \{a \cdot y_1 - 2 \cdot c\}/t_1] = x_3 \cdot x_4 \end{array}$$

gilt. Die Lösungen der ersten quadratischen Gleichung (bei der Wahl von $y = y_1 = y_1(x)$ für die Lösung der kubischen Hilfsgleichung gemäss ad 1) und $t = t_1 = t_1(x)$ für die Quadratwurzel gemäss ad 2)) sind offenbar x_1 und x_2, diejenigen der zweiten quadratischen Gleichung x_3 und x_4. Daraus folgt: Der F-Lösungsalgorithmus leistet was er soll. Ferner sind alle Zwischenresultate Polynome in x_1, x_2, x_3, x_4. Und wieder sieht man, wie die Symmetrie beim Ziehen von Wurzeln sukzessive abgebaut wird.

B Wie allgemein sind die allgemeinen .... ?

Wie allgemein sind die allgemeinen polynomialen Gleichungen in Abschnitt 4? Ist es möglich, durch geeignete Wahl von $x_1, x_2, x_3, ...$ beliebige Zahlen $a, b, c, ...$ zu "erreichen"? Vorsichtiger gefragt: Für welche Zahlen $a, b, c, ...$ gibt es Zahlen $x_1, x_2, x_3, ...$ sodass die entsprechenden Formeln von Vieta erfüllt sind?

Wenn man für $x_1, x_2, x_3, ...$ *komplexe Zahlen* als Kandidatinnen zulässt, liefert der *Fundamentalsatz der Algebra*, siehe Abschnitt 1, eine sehr zufriedenstellende Antwort: *Für* beliebige *komplexe Zahlen $a, b, c, ...$ gibt es* (*bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmte*) *komplexe Zahlen $x_1, x_2, x_3, ...$, sodass die entsprechenden Vieta-Formeln gelten.*

Denn: Der Fundamentalsatz garantiert ja gerade, dass (wenn komplexe Zahlen zugelassen sind) jedes Polynom in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegt werden kann.

C Beweis des Satzes von Ruffini

Zur Erinnerung: Es geht um folgenden Satz, siehe Abschnitt 8, speziell Abschnitt 8.1:

Satz (P. Ruffini, 1813)

Voraussetzungen: a) u, v sind Polynome in x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 und ℓ ist eine Primzahl.
b) Es gilt $u^\ell = v$.
c) v ist *invariant* bezüglich s und t.

Behauptung: u ist ebenfalls *invariant* bezüglich s und t.

Es bezeichnen s und t, wie bisher, die folgenden beiden Vertauschungen von x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{array}{lccccc} s & : \; x_1 \to x_2, & x_2 \to x_3, & x_3 \to x_1, & x_4 \to x_4, & x_5 \to x_5 \\ t & : \; x_1 \to x_1, & x_2 \to x_2, & x_3 \to x_4, & x_4 \to x_5, & x_5 \to x_3 \end{array} \tag{58}$$

Hier folgen nun die einzelnen Beweisschritte für den Satz von Ruffini[72,73]:

- Die Behauptung ist trivialerweise richtig, falls u die Nullfunktion 0 ist. Daher sei ab jetzt $u \neq 0$.

- Aus $u^\ell = v$ folgt $s(u^\ell) = s(v)$. Analog wie in Abschnitt 8.5 begründet wurde, dass $s(u^2) = (s(u))^2$ gilt, siehe (37), überzeugt man sich, dass $s(u^\ell) = (s(u))^\ell$ gilt. Mit $s(v) = v = u^\ell$ (siehe Voraussetzung c), (28), Voraussetzung b)) erhält man:
$$(s(u))^\ell = u^\ell$$
Daraus folgt: Es *gibt* eine *ℓ-te Einheitswurzel*[74] ω_s, sodass
$$s(u) = \omega_s \cdot u \tag{59}$$
gilt.

- Aus (59) folgt
$$s(s(s(u))) = s(s(\omega_s \cdot u)) = s(\omega_s \cdot s(u)) = s(\omega_s^2 \cdot u) = \omega_s^2 \cdot s(u) = \omega_s^3 \cdot u \tag{60}$$
Gemäss (42) gilt $s(s(s(u))) = u$, also folgt: $\omega_s^3 \cdot u = u$ und wegen $u \neq 0$ schliesslich
$$\boxed{\omega_s^3 = 1} \tag{61}$$

[72] Siehe [2], [12].
[73] Der Beweis benutzt das Konzept der *Einheitswurzeln*, das zum Beispiel im Rahmen des Unterrichts über komplexe Zahlen vorbereitet werden könnte.
[74] Der Index s zeigt an, dass die Einheitswurzel von der Vertauschung s abhängt; natürlich hängt sie auch vom Polynom u ab – das zeige ich aber nicht an, weil es in diesem Beweis nur um das eine Polynom u aus der Voraussetzung des Satzes von Ruffini geht; hingegen wird unten eine analoge Überlegung für die Vertauschung t gemacht, siehe (62), und deshalb ist die Unterscheidung nötig. Im Übrigen sei auf Fussnote 60 verwiesen.

- Analog wie im letzten Punkt zeigt man, dass $(t(u))^\ell = u^\ell$ gilt und folgert: Es *gibt* eine *ℓ-te Einheitswurzel*[75] ω_t, sodass

$$t(u) = \omega_t \cdot u \tag{62}$$

gilt. Und weil auch $t(t(t(u))) = u$ gilt, wie man analog zu (41), (42) überlegt, folgt, analog zu (61)

$$\boxed{\omega_t^3 = 1} \tag{63}$$

Das Ziel muss jetzt sein einzusehen, dass

$$\omega_s = \omega_t = 1 \tag{64}$$

gilt. Denn dann folgt aus (59), bzw. (62)

$$s(u) = u \quad \text{und} \quad t(u) = u \tag{65}$$

Und das heisst ja gerade, dass u sowohl bezüglich s, wie auch bezüglich t invariant ist.

Mit (61) und (63) haben wir bereits einige Information über ω_s und ω_t: Es sind dritte Einheitswurzeln. Das bestimmt die beiden Zahlen schon ziemlich – aber nicht ausreichend, weil es ja davon deren 3 gibt.

Die *Idee* ist, die "Wirkung" von s und t auf u zu *kombinieren*. Wie, wird jetzt vorgestellt.

- Einerseits folgt mit (62) und (59)

$$s(t(u)) = s(\omega_t \cdot u) = \omega_t \cdot s(u) = \omega_t \cdot \omega_s \cdot u = (\omega_s \cdot \omega_t) \cdot u \tag{66}$$

Ganz analog zur Überlegung in (41)[76] findet man

$$\begin{array}{lcll} t(u)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & u(x_1, x_2, x_4, x_5, x_3) & \\ s(t(u))(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & = & t(u)(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) & = u(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1) \end{array} \tag{67}$$

Ich führe an dieser Stelle zu Vereinfachung der Notation eine weitere Vertauschung ein:

$$p \ : \ x_1 \to x_2, \quad x_2 \to x_3, \quad x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to x_1 \tag{68}$$

Mit Hilfe der Vertauschung p lässt sich die letzte Beziehung in (67) in der Form $s(t(u)) = p(u)$ schreiben, und mit (66) folgt

$$p(u) = (\omega_s \cdot \omega_t) \cdot u \tag{69}$$

[75] Die vielleicht verschieden von ω_s ist und daher mit ω_t bezeichnet wird, siehe Fussnote 74.
[76] Vielleicht bequemer "inhaltlich", nach Art der Fussnote 61.

Unter Verwendung von (69) findet man ganz analog zu (60)

$$\begin{aligned}
p(p(u)) &= p((\omega_s \cdot \omega_t) \cdot u) = (\omega_s \cdot \omega_t) \cdot p(u) \\
&= (\omega_s \cdot \omega_t) \cdot (\omega_s \cdot \omega_t) \cdot u = (\omega_s \cdot \omega_t)^2 \cdot u \\
p(p(p(u))) &= p((\omega_s \cdot \omega_t)^2 \cdot u) = (\omega_s \cdot \omega_t)^2 \cdot p(u) \\
&= (\omega_s \cdot \omega_t)^2 \cdot (\omega_s \cdot \omega_t) \cdot u = (\omega_s \cdot \omega_t)^3 \cdot u \\
p(p(p(p(u)))) &= (\omega_s \cdot \omega_t)^4 \cdot u \\
p(p(p(p(p(u))))) &= (\omega_s \cdot \omega_t)^5 \cdot u
\end{aligned} \tag{70}$$

Die wiederholte Anwendung der Vertauschung p auf $u = u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ liefert, ganz ähnlich wie die Anwendung der Vertauschung s auf u in (41)[77]:

$$\begin{aligned}
p(u)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= u(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1) \\
p(p(u))(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= p(u)(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1) \\
&= u(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2) \\
... &= ... \\
... &= ... \\
p(p(p(p(p(u)))))(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= ... \\
&= u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)
\end{aligned} \tag{71}$$

und somit

$$p(p(p(p(p(u))))) = u \tag{72}$$

Durch Vergleich der letzten Beziehung in (70) und (72) folgt $(\omega_s \cdot \omega_t)^5 \cdot u = u$ und daraus, wegen $u \neq 0$

$$\boxed{(\omega_s \cdot \omega_t)^5 = 1} \tag{73}$$

Die Erkenntnisse (61), (63) und (73) reichen noch nicht aus, um das gewünschte Ziel, nämlich die Richtigkeit der Behauptungen (64) zu beweisen - leider! Die Vertauschungen s und t müssen noch mehr ausgenutzt werden. Analog wie (73) beweist man

$$\boxed{(\omega_s^2 \cdot \omega_t)^5 = 1} \tag{74}$$

Das geschieht im nächsten Punkt. Wer mag, kann die Herleitung von (74) einfach akzeptieren und zum übernächsten Punkt weiter gehen.

- Statt $s(t(u))$, wie im vorangegangenen Punkt, steht nun der Ausdruck $s(s(t(u)))$ im Zentrum des Interesses (vielleicht keine allzu grosse Überraschung?). Zunächst folgt, man vergleiche (66), (59):

$$\begin{aligned}
s(s(t(u))) &= s((\omega_t \cdot \omega_s) \cdot u) = (\omega_t \cdot \omega_s) \cdot s(u) \\
&= (\omega_t \cdot \omega_s) \cdot \omega_s \cdot u = (\omega_s^2 \cdot \omega_t) \cdot u
\end{aligned} \tag{75}$$

[77] Oder “inhaltlich”, nach Art der Fussnote 61.

Unter Verwendung von (67) folgt mit der Definition der Vertauschung s, siehe (25):

$$\begin{aligned} s(t(u))(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= u(x_2,x_3,x_4,x_5,x_1) \\ s(s(t(u)))(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= s(t(u))(x_2,x_3,x_1,x_4,x_5) \\ &= u(x_3,x_1,x_4,x_5,x_2) \end{aligned} \tag{76}$$

Mit der weiteren Vertauschung

$$q \ : \ x_1 \to x_3, \quad x_2 \to x_1, \quad x_3 \to x_4, \quad x_4 \to x_5, \quad x_5 \to x_2 \tag{77}$$

lässt sich die letzte Beziehung in (76) wie folgt darstellen

$$s(s(t(u))) = q(u) \tag{78}$$

und mit (75) folgt

$$q(u) = (\omega_s^2 \cdot \omega_t) \cdot u$$

Nun laufen die weiteren Schritte wie im letzten Punkt ab. Man findet

$$q(q(q(q(q(u))))) = (\omega_s^2 \cdot \omega_t)^5 \cdot u \tag{79}$$

und

$$q(q(q(q(q(u))))) = u \tag{80}$$

Daraus ergibt sich, wie behauptet, siehe (74):

$$(\omega_s^2 \cdot \omega_t)^5 = 1 \tag{81}$$

Um schliesslich die Richtigkeit der Behauptung (64) zu beweisen, werden die Informationen in (61), (63) und (73), (74) über ω_s, ω_t in geeigneter Weise kombiniert. Das geschieht im letzten Punkt.

- Im ersten Schritt wird die Kombination $(\omega_s^3)^2 \cdot (\omega_s \cdot \omega_t)^5 \cdot (\omega_s^2 \cdot \omega_t)^{-5}$ untersucht. Wegen $(\omega_s^2 \cdot \omega_t)^{-5} = 1/(\omega_s^2 \cdot \omega_t)^5$ folgt mit (61), (73), (74)

  $$(\omega_s^3)^2 \cdot (\omega_s \cdot \omega_t)^5 \cdot (\omega_s^2 \cdot \omega_t)^{-5} = 1^2 \cdot 1 \cdot 1^{-1} = 1$$

  Unter Verwendung der üblichen Potenzgesetze[78] findet man

  $$(\omega_s^3)^2 \cdot (\omega_s \cdot \omega_t)^5 \cdot (\omega_s^2 \cdot \omega_t)^{-5} = \frac{\omega_s^6 \cdot \omega_s^5 \cdot \omega_t^5}{\omega_s^{10} \cdot \omega_t^5} = \omega_s$$

  Damit ist gezeigt, dass $\omega_s = 1$ gilt, und der erste Teil der Behauptung (64) ist bewiesen.

[78] ω_s, ω_t sind komplexe Zahlen!

Nun geht es noch darum zu beweisen, dass auch $\omega_t = 1$ gilt. Wie man mit (63), (73) leicht nachprüft gilt

$$(\omega_t^3)^2 \ \cdot \ (\omega_t \cdot \omega_s)^{-5} = 1^2 \cdot 1^{-1} = 1$$

Weiter folgt

$$(\omega_t^3)^2 \cdot (\omega_t \cdot \omega_s)^{-5} = (\omega_t^3)^2 \cdot (\omega_t \cdot 1)^{-5} = (\omega_t^3)^2 \cdot (\omega_t)^{-5} = \omega_t$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt benutzt, dass bereits bewiesen ist, dass $\omega_s = 1$ gilt. Damit ist auch der zweite Teil der Behauptung (64) bewiesen.

Somit gilt, siehe (59), (62), in der Tat:

$$s(u) = u, \quad t(u) = u$$

was genau die Behauptung des Satzes von Ruffini ist.

Literatur

[1] R. Acampora: *Die "Cartelli di Matematica Disfida" - Der Streit zwischen N. Tartaglia und L. Ferrari*, 2000.

[2] R. G. Ayoub: *Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic*, Archive for History of Exact Sciences 23, 1980, p. 253-277.

[3] J. Bewersdorff: *Algebra für Einsteiger*, 2009^4.

[4] *Biographical Dictionary of Mathematicians*, 1991.

[5] G. Cardano: *Artis magnae, sive de regulis algebraicis*, engl. Übersetzung unter dem Titel "The Great Art of The Rules or Algebra" durch T. Richard Witmer, MIT 1968, Dover 1993.

[6] W. G. Chinn, N. E. Steenrod: *First Concepts of Topology*, 1966.

[7] *Duden, Das Fremdwörterbuch*, 2005^8.

[8] S. G. Gindikin: *Tales of Physicists and Mathematicians*, 1988.

[9] J.-H. Eschenburg, L. Hefendehl-Hebeker: *Die Gleichung 5. Grades: Ist Mathematik erzählbar?*, Math. Semesterberichte 47 (2000) 193-220.

[10] G. Malle: *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*, 1993.

[11] I. Stewart: *Galois Theory*, 2004^3.

[12] J.-P. Tignol: *Galois' Theory of Algebraic Equations*, 2001.

[13] H. Wussing: 6000 *Jahre Mathematik*, Band 2, 2009.

UK/20170718+20180127