EDUCETH
Das Bildungsportal der ETH Zürich

Publikation von www.educeth.ch

# Die Fallschirmspringerin

Lerntext mit 15 Aufgaben

Urs Kirchgraber, Giancarlo Copetti, Philipp Spindler

**Inhalt:**
Die wahre Bedeutung des Ableitungsbegriffs zeigt sich erst im Zusammenhang mit Differentialgleichungen. Dies wird in diesem Lerntext anhand des Fallschirmspringerproblems aufgezeigt.

**Unterrichtsmethode: Lerntext mit 15 Aufgaben**

**Fachliches Review:**
Prof. Dr. Franz Spirig, Kantonsschule Heerbrugg

**Fachdidaktisches Review:**
Prof. Dr. Franz Spirig, Kantonsschule Heerbrugg

**Publiziert auf EducETH:**
22. September 2008

**Rechtliches:**
Die vorliegende Unterrichtseinheit darf ohne Einschränkung heruntergeladen und für Unterrichtszwecke kostenlos verwendet werden. Dabei sind auch Änderungen und Anpassungen erlaubt. Der Hinweis auf die Herkunft der Materialien (ETH Zürich, EducETH) sowie die Angabe der Autorinnen und Autoren darf aber nicht entfernt werden.

**Publizieren auf EducETH?**
Möchten Sie eine eigene Unterrichtseinheit auf EducETH publizieren? Auf folgender Seite finden Sie alle wichtigen Informationen: http://www.educeth.ch/autoren

**Weitere Informationen:**
Weitere Informationen zu dieser Unterrichtseinheit und zu EducETH finden Sie im Internet unter http://www.educ.ethz.ch oder unter http://www.educeth.ch.

SCIENCE MEETS SCHOOL
EDUCETH.CH

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Die Fallschirmspringerin*

U. Kirchgraber
ETH Zürich

G. Copetti
Kantonsschule Schaffhausen

P. Spindler
Kantonsschule Luzern

## Inhaltsverzeichnis

**1 Das Fallschirmspringerproblem** **1**
1.1 Ein Fall für Newton . . . 1
1.2 Intermezzo: Das mathematische Rüstzeug zur Lösung der Fallschirmspringergleichung . . 8
1.3 Die Lösung des Fallschirmspringerproblems . . . 10
1.4 DIFF EQUATIONS, dsolve, NDSolve & Co . . . 14
1.5 Der Sprung im Überblick . . . 17
1.6 Den Vorhang eine Handbreit aufgemacht - Oder wie mit dem Computer Differentialgleichungen gelöst werden . . . 19

**2 Lösungen der Aufgaben** **22**

## 1 Das Fallschirmspringerproblem

Bungee Jumping, Delta-Segeln, Hängegleiten, Ballonfahren, Fallschirmspringen - wer denkt da schon an Mathematik? Ja, an Physik - vielleicht. Aber Sie wissen ja: Hinter der Physik lauert die Mathematik!

In diesem Material geht es ums Fallschirmspringen. Und mehr.

Das Fallschirmspringen hat eine erstaunlich lange Tradition: Es wurde schon im Altertum betrieben. Mutige Akrobaten sprangen in China im 14. Jahrhundert mit Fallschirmen von Türmen. Wie Abbildung 1 belegt, hat kein geringerer als Leonardo da Vinci Fallschirme entworfen.
Einer der ersten, der sich in jüngerer Zeit mit der Konstruktion von Fallschirmen beschäftigte, war der ungarische Mathematiker Fausto Veranzio[1]. 1617 machte er dann die Probe aufs Exempel und sprang mit einem selbst gebauten Fallschirm ab: Sein Fallschirm bestand einfach aus einem viereckigen Holzrahmen, über den Stoff gespannt war. Erst als im 18. Jahrhundert Ballone aufkamen, setzte die Entwicklung von immer leistungsfähigeren und sichereren Fallschirmen ein, vorerst von sogenannten *Rundkappenfallschirmen*. Durch die Flächengleiter erhielt das Fallschirmspringen in jüngster Zeit eine neue Dimension und gewann stark an Popularität.

### 1.1 Ein Fall für Newton

**1**
Als Galileo Galilei um 1600 den sogenannten freien Fall[2] (und den schiefen Wurf) untersuchte (und damit eine wissenschaftliche Revolution auslöste, denn bis dahin hatte man über die Bahn eines geworfenen

*Der Lehrtext "Die Fallschirmspringerin" ist der erste aus einer Reihe von mehreren Beiträgen unter dem Gesamttitel "Bewegungen enträtseln". Das Ziel der Reihe ist, verschiedene Aspekte des Bewegungsproblems Schülerinnen und Schülern der Gymnasialstufe zugänglich zu machen. Die nächsten Beiträge haben die Arbeitstitel "Das Erbe Galilei's", "Newton's Himmelsuhrwerk", "Was ist Chaos?".

[1] Quelle: F. Bigler *Das Fallschirmspringen*, Aero-Club der Schweiz, Luzern 1987.

[2] Das ist der Vorgang, der darin besteht, dass jemand einen Körper, zum Beispiel einen Ball, sagen wir von einem Balkon in den Garten oder Hof hinunter fallen lässt.

Abbildung 1: Entwurf eines Fallschirms von Leonardo da Vinci (1452-1519). Die Originalzeichnung wird in der Biblioteca Ambrosiana, Milano, aufbewahrt. Quelle: http://www.museoscienza.org/leonardo/default.htm

Steins und - wichtiger! - über die Bahnen von Kanonenkugeln nur sehr rudimentäre Vorstellungen), ging er davon aus, dass der Luftwiderstand (zunächst einmal) vernachlässigbar sei.

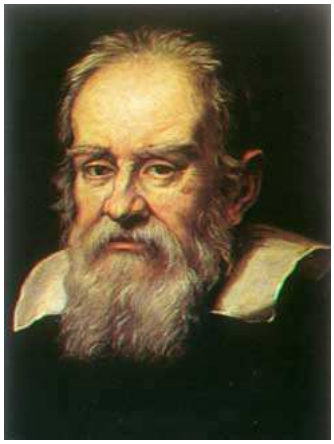


Abbildung 2: Galileo Galilei, 1564 - 1642. Quelle: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Galileo.html

Anders gesagt: Galilei versuchte zu ergründen, wie die Bewegung verläuft, wenn sie im Vakuum erfolgt. Das war klug, denn die Annahme vereinfachte sein Problem, ohne es total zu verfälschen. Allerdings: Beim Fallschirmspringen spielt der von der Luft herrührende Widerstand, besonders bei offenem Fallschirm, eine wichtige, eine lebenswichtige Rolle. Es ist gerade der Fallschirm, der dafür sorgt, dass der Springer nicht wie ein Stein herunterfällt, sondern hinunter schwebt und die Landung glücklich übersteht.

Damit ist klar, was beim Fallschirmspringen aus theoretischer Sicht hauptsächlich interessiert: *Man möchte wissen, wie sich die Geschwindigkeit des Springers, der Springerin im Verlauf der Bewegung verändert. Anders gesagt: Es interessiert der Verlauf der Geschwindigkeit.*

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, um diese Frage zu klären. Die eine ist zu *experimentieren* und zu *messen*, die andere, eine *Theorie* zu entwickeln und zu *rechnen*. Wir verfolgen den zweiten Weg, wobei das Verhältnis von Theorie und Experiment verwickelt ist.

Galileis Resultate reichen für eine theoretische Untersuchung des Fallschirmspringerproblems nicht aus. Man braucht eine Theorie, die den Einbezug des Luftwiderstandes erlaubt. Im Jahr 1642, nach Galileis Tod, wurde im südlichen England ein Junge geboren: Isaac Newton. Nichts deutete zunächst auf etwas Besonderes hin. Aber als Newton, nun ein junger Mann, 1665 vom Studium in Cambridge ins heimatliche Woolthorpe zurückkehrte, um sich vor der Pest zu schützen, die, wieder einmal!, im Land wütete, zeigte sich, dass Newton hoch talentiert, ja, in Sachen Mathematik und Physik ein Genie war. Seine Erkenntnis: Bewegungen können ausserordentlich verwickelt sein - aber die *Kräfte*, durch die sie verursacht werden, sind verhältnismässig leicht zu bestimmen. Und Newton entdeckte den *quantitativen* Zusammenhang zwischen Kräften und Bewegungen, sodass man seither *Bewegungen* aus der Kenntnis der sie bewirkenden Kräfte *berechnen* kann. Damit machte er die Untersuchung von Bewegungen ein für allemal zu einer mathematischen Aufgabe.

Albert Einstein, wahrscheinlich der berühmteste Physiker des 20. Jahrhunderts, hat über Newtons Entdeckung einmal gesagt: *"Perhaps the greatest intellectual stride that it has ever been granted to any man to make."*

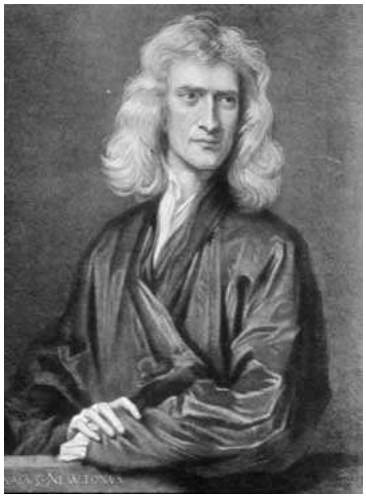
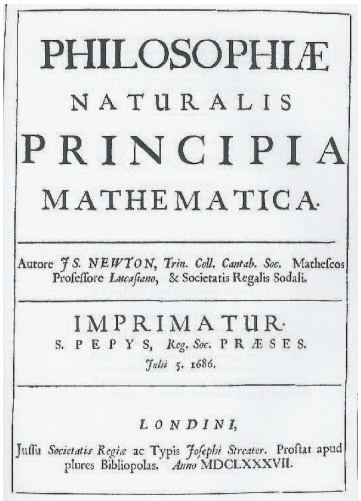


Abbildung 3: Isaac Newton, 1643 - 1727 Quelle: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Newton.html



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Abbildung 4: Titelblatt von Newtons Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Dieses Buch, 1687 veröffentlicht, enthält Newton's wegweisende Entdeckungen. Quelle: http://www.hao.ucar.edu/public/education/sp/images/principia.gif

**2**

In der Tat: Die Kräfte, die beim Fallschirmspringen wirken, sind leicht auszumachen - einerseits ist es die *Schwer-* oder *Gewichtskraft* $F_G$ und andererseits die *Luftwiderstandskraft* $F_L$ (siehe Abbildung 5).

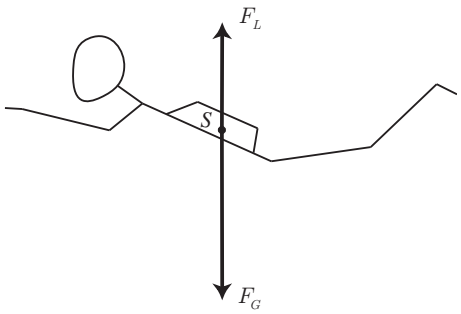



Abbildung 5: Die an der Fallschirmspringerin angreifenden Kräfte

Die Gesamtkraft $F$ ist die Summe von $F_G$ und $F_L$:

$$F = F_G + F_L. \tag{1}$$

Zuerst zur Schwerkraft. Gehen wir davon aus, die Masse einer Fallschirmspringerin (inklusive Fallschirm und Ausrüstung) sei $m = 80\ kg$. Dann darf bei einem Sprung aus - sagen wir - 2000 $m$ Höhe angenommen werden, dass $F_G$ konstant und gleich

$$F_G = mg \tag{2}$$

ist. $g \approx 10\frac{m}{s^2}$ bezeichnet die Erdbeschleunigung. Dabei wird angenommen, dass die Bewegung der Fallschirmspringerin vertikal abwärts verläuft. Das ist - jedenfalls näherungsweise - erfüllt, wenn Windstille herrscht und die Fallschirmspringerin sich zum Beispiel aus einem Helikopter fallen lässt, der in der Luft in 2000 $m$ Höhe "steht".

Das Erfassen des Luftwiderstands ist heikler. Schon Newton hat sich damit befasst. Hält man zum Beispiel in einem fahrenden Zug die Hand aus dem Fenster, so ist deutlich eine Widerstandskraft zu spüren, und diese Kraft wächst mit zunehmender Geschwindigkeit. Diese Tatsache gehört zu jedermanns Erfahrungsschatz. Wir können also davon ausgehen, dass die Luftwiderstandskraft $F_L$ eine Funktion der Geschwindigkeit $v$ ist:

$$F_L = F_L(v).$$

Damit ist aber noch nichts über die Art der funktionalen Abhängigkeit gesagt. Die *mathematisch einfachste* Annahme ist, dass $F_L$ *proportional* zu $v$ ist:

$$F_L = -kv. \tag{3}$$

Dabei bezeichnet $k$ eine positive Konstante. Wieso ein negatives Vorzeichen? Kraft, Geschwindigkeit etc. sind im Prinzip Vektoren. Indem die Schwerkraft $F_G = mg$, die vertikal nach unten wirkt, positiv angesetzt ist, ist die Orientierung festgelegt: Was vertikal nach unten gerichtet ist, ist positiv. Zum Beispiel ist die Geschwindigkeit $v$ der Fallschirmspringerin positiv, weil sie nach unten fällt. $F_L$ ist gemäss Formel (3) negativ. Das bedeutet, dass die Luftwiderstandskraft nach oben zeigt, was richtig ist, denn sie hemmt ja die Bewegung.

Wie wir von Galilei wissen, ist es gut, einfache Annahmen zu machen, weil sie die (mathematischen) Probleme vereinfachen. Aber einfache Annahmen brauchen nicht richtig zu sein! Tatsächlich weiss man vom Autofahren, dass der Luftwiderstand "überproportional" mit der Geschwindigkeit wächst. Das heisst: Wenn man die Geschwindigkeit von zum Beispiel 30 $\frac{km}{h}$ auf 60 $\frac{km}{h}$ verdoppelt, dann verdoppelt sich die Bremswirkung der Luft nicht etwa auch, sondern sie *vervierfacht* sich sogar. Mathematisch wird dieses Verhalten durch eine *quadratische Funktion* erfasst, d.h. durch den Ansatz

$$F_L = -kv^2, \tag{4}$$

wobei $k$ wieder eine positive Konstante ist, auf die wir sogleich zu sprechen kommen. Ob das lineare Luftwiderstandsgesetz (3) oder aber das quadratische Luftwiderstandsgesetz (4) gilt, hängt von den Umständen ab. Es gilt grob gesagt folgendes: Das lineare Gesetz erfasst die bremsende Wirkung des Luftwiderstandes richtig, wenn der sich bewegende Körper kleine Ausmasse und geringe Geschwindigkeit hat. Bei grösseren Körpern und grösseren Geschwindigkeiten muss man (4) verwenden.

Für die Bewegung unserer Fallschirmspringerin ist das quadratische Gesetz das angemessene. Wenden wir uns der Konstanten $k$ in (4) zu. Sie heisst *Widerstandskoeffizient*.

**Aufgabe 1** *Wovon hängt Ihrer Meinung nach die Luftwiderstandskraft, ausser von der Geschwindigkeit, noch ab? Zählen sie einige Einflüsse auf, die den Luftwiderstand vergrössern beziehungsweise verkleinern.*

Die Luftwiderstandskraft hängt i) von der Grösse des Fallschirms ab: Ein grosser Fallschirm bremst stärker als ein kleiner. ii) Die Form des Fallschirms wirkt sich auf den Luftwiderstand aus. Diese beiden Faktoren beinflussen $k$. Aber noch eine weitere Grösse spielt eine Rolle: iii) Die Dichte der Luft. Man wird erwarten, dass $k$ umso kleiner ist, je dünner die Luft ist: In grosser Höhe bremst ein Fallschirm weniger als weiter unten, wo die Luft dichter ist. Alle diese Aspekte werden mit folgender Formel erfasst

$$k = \frac{1}{2} c_w A \rho. \tag{5}$$

Dabei ist

$\rho$ die Dichte der Luft,
$A$ die Querschnittfläche,
$c_w$ der Widerstandsbeiwert.

Auf Meereshöhe ist, bei sogenannten Standardbedingungen, $\rho = 1.225\ \frac{kg}{m^3}$. Die Querschnittfläche ist die Fläche des grössten Querschnitts senkrecht zur Bewegungsrichtung. Wenn Sie sich vorstellen, dass der Fallschirm die Form einer nach unten geöffneten Halbkugel vom Radius $r$ hat, gilt $A = \pi r^2$ (Und nicht etwa $2\pi r^2$. Zur Erinnerung: $2\pi r^2$ ist die Oberfläche einer Halbkugel vom Radius $r$.). Mit $c_w$ schliesslich wird die *Gestalt* des sich bewegenden Körpers berücksichtigt. Denn natürlich ist der Luftwiderstand sehr verschieden, je nachdem, ob sich ein "stromlinienförmiger" Körper durch die Luft bewegt, eine Kugel oder eine zur Bewegungsrichtung hin geöffnete Halbkugel, selbst wenn die Querschnittfläche immer gleich gross ist. Tabelle 1 gibt Auskunft über verschiedene Widerstandsbeiwerte. Hier ist von Interesse, dass bei geschlossenem Fallschirm $c_w \approx 0.3$ und bei offenem Fallschirm $c_w \approx 0.9$ gilt. Natürlich verändert sich auch die Querschnittfläche. Bei geschlossenem Fallschirm in Position X (d.h. die Körperachse ist horizontal, Arme und Beine sind ebenfalls horizontal und ausgestreckt, die Fallschirmspringerin sieht von oben wie ein X aus) setzt man $A = \ell^2$, wo $\ell$ die Grösse der Springerin ist. Wenn man von, sagen wir, $\ell = 1.6\ m$ ausgeht, ist die Wahl $A = 2.6\ m^2$ angemessen. Das gibt den folgenden $k$-Wert, den wir mit $k_g$ bezeichnen[3]:

$$k_g = \frac{1}{2} \cdot 0.3 \cdot 2.6 \cdot 1.225\ \frac{kg}{m} \approx 0.48\ \frac{kg}{m}. \tag{6}$$

Um den Wert $k_o$ von $k$ bei offenem Fallschirm bestimmen zu können, muss man wissen, wie gross die Querschittfläche eines offenen Fallschirms ist. Wenn man von der Halbkugelform ausgeht, ist ein Radius von 4 bis 5 Metern realistisch. Deshalb rechnen wir mit $A = 60\ m^2$. Dann folgt

$$k_o = \frac{1}{2} \cdot 0.9 \cdot 60 \cdot 1.225\ \frac{kg}{m} \approx 33\ \frac{kg}{m}. \tag{7}$$

Der Wert von $k$ steigt also auf mehr als das Sechzigfache an.

Nachdem die beiden Kräfte erfasst sind, welche die Bewegung der Fallschirmspringerin bestimmen, erhält man die Gesamtkraft $F$ durch Addition, siehe Gleichung (1):

$$F = mg - kv^2. \tag{8}$$

[3] Der Index $g$ steht für "geschlossen".

| Objekt | $c_w$ |
|---|---|
| Halbkugel, hohl | 1.33 |
| Scheibe | 1.1 |
| Kegel, Grundfläche gegen Strömung | 0.5 |
| Kugel | 0.45 |
| Kegel, Spitze gegen Strömung | 0.2 |
| Stromlinienförmiger Körper | 0.04-0.08 |
| Fallschirmspringerin in Position X | 0.28 |
| Fallschirmspringerin, Fallschirm offen | 0.9 |

Tabelle 1: Verschiedene Widerstandsbeiwerte, nach F. Bigler: "Das Fallschirmspringen", herausgegeben vom Aero-Club der Schweiz, Luzern 1987.

Mit Formel (8) ist ein wichtiges Etappenziel erreicht: Unter der Annahme einer vertikal nach unten verlaufenden Bewegung ist die Kraft bestimmt, die auf die Fallschirmspringerin wirkt. Nun ist das nächste Ziel, daraus den Bewegungsablauf zu berechnen.

**3**

**Aufgabe 2** *Vergleichen Sie $F_L$ und $F_G$ für a) eine Kugel zum Kugelstossen, b) einen Golfball. Beschaffen Sie sich die hierfür notwendigen Daten aus Büchern oder dem Internet.*

Die Geschwindigkeit $v$, mit der die Fallschirmspringerin vom Himmel fällt, ist nicht konstant, sondern sie verändert sich im Laufe des Fluges. Am Anfang ist $v$ gleich 0. Man erwartet, dass $v$ zuerst zu-, später, wenn der Fallschirm geöffnet wird, abnimmt.

Man könnte versuchen, $v$ als Funktion der Höhe $h$ (über dem Boden) zu bestimmen. Die Aufgabe würde darin bestehen, die Funktion $v(h)$ zu finden. Statt als Funktion der Höhe werden Geschwindigkeit *und* Höhe als Funktionen der *Zeit* $t$ betrachtet, und das Ziel ist, beide zu bestimmen. Gesucht sind also die Funktionen

$$v(t) \quad \text{und} \quad h(t),$$

wobei $h(t)$ die Höhe ist, welche die Fallschirmspringerin zum Zeitpunkt $t$ hat, und $v(t)$ ist ihre Geschwindigkeit in diesem Augenblick.

**Aufgabe 3** *Versuchen Sie die Graphen von $v$ und $h$ nach Ihrem Gefühl in einem $t$-$v$-Diagramm beziehungsweise einem $t$-$h$-Diagramm zu skizzieren.*

Es ist sehr nützlich, die Funktionen $v(t)$ und $h(t)$ zu kennen. Beispielsweise kann aus der Kenntnis von $h(t)$ durch Lösen der Gleichung

$$h(t) = 0$$

die gesamte Flugzeit $T$ bestimmt und dann mit $v(t)$ die "Landegeschwindigkeit" $v(T)$ ausgerechnet werden.

Die *grosse Frage* ist, wie aus der Kenntnis der wirkenden Kraft (8) die Funktionen $h(t)$, $v(t)$ gewonnen werden können. Zur Beantwortung dieser wichtigen Frage stützen wir uns auf den von Newton entdeckten Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung.

Wenn die Fallschirmspringerin zur Zeit $t$ auf der Höhe $h(t)$ ist und die Geschwindigkeit $v(t)$ hat, dann ist die Kraft, die zu diesem Zeitpunkt wirkt, gemäss (8) gleich

$$F(t) = mg - k[v(t)]^2. \tag{9}$$

Nun kommt Newtons fundamentale Entdeckung ins Spiel. Sie lautet: Die Kraft $F(t)$, die zu einem Zeitpunkt $t$ auf einen sich bewegenden Körper wirkt, hat zur Folge, dass der Körper in diesem Augenblick eine ganz bestimmte *Beschleunigung* hat.

Was verstehen wir unter Beschleunigung? Die Beschleunigung (üblicherweise mit $a$ - für Akzeleration - abgekürzt) misst die *Veränderung der Geschwindigkeit*. Grosse Beschleunigung bedeutet, dass sich die Geschwindigkeit schnell ändert, kleine Beschleunigung heisst nur geringfügige Geschwindigkeitsänderung.

Aus der Differentialrechnung wissen Sie: Es ist die *Ableitung* einer Funktion, die Auskunft über die Art und Weise gibt, wie sich die Funktion verändert. Die Beschleunigung $a(t)$ eines Körpers ist daher gleich der Ableitung[4] der Geschwindigkeit $v(t)$:

$$a(t) = \dot{v}(t). \tag{10}$$

Nun ist man in der Lage, den von Newton behaupteten Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung zu präzisieren. *Die Beschleunigung $a(t)$ eines sich bewegenden Körpers zur Zeit $t$ ist proportional zur Kraft $F(t)$, die zu diesem Zeitpunkt auf ihn wirkt, und umgekehrt proportional zu seiner Masse $m$.* Das heisst, es gilt folgende Formel:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}. \tag{11}$$

Etwas gebräuchlicher ist folgende Schreibweise:

$$ma(t) = F(t). \tag{12}$$

Die Beziehung (11) respektive (12) heisst *Grundgesetz der Mechanik*. Wir meinen: Die Formel verdient ihren Namen. Sie ist das gesuchte Bindeglied zwischen Kraft und Bewegung. Ihr verdankt man es, dass man *Bewegungen berechnen* kann.

Das Grundgesetz der Mechanik ist eine Behauptung. Aber nicht etwa eine mathematische Behauptung, sondern eine Behauptung über die Natur - über die Natur von Bewegungen, die durch die Wirkung von Kräften hervorgerufen werden. Das Grundgesetz der Mechanik kann man nicht beweisen. Es kann sich nur *bewähren*. Damit ist folgendes gemeint: Man wendet es an (so wie Sie es weiter unten im Fallschirmspringerproblem sehen werden) und erhält dadurch Prognosen über reale Bewegungen. Wenn nun Vorhersage und reale Bewegung bei allen diesen Anwendungen immer wieder gut übereinstimmen, dann ist das jedesmal quasi ein "Punkt" für das Grundgesetz der Mechanik. Obwohl das Grundgesetz der Mechanik nicht uneingeschränkt gültig ist, wie man seit etwa 100 Jahren weiss[5], hat es sich derart gut bewährt, dass es sich eingebürgert hat, von einem *Naturgesetz* zu sprechen. Sie werden das Grundgesetz der Mechanik nun in Aktion sehen.

**4**

Wenden wir Newtons Grundgesetz der Mechanik auf das Fallschirmspringen an. Wenn Sie den Ausdruck (9) für $F(t)$ in Gleichung (11) einsetzen und Gleichung (10) benützen, erhalten Sie

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k}{m}[v(t)]^2. \tag{13}$$

Nimmt man an, dass die Fallschirmspringerin sich - ohne abzustossen - aus dem in 2000 $m$ Höhe "stehenden" Helikopter herausfallen lässt, ist ihre Geschwindigkeit am Anfang, also zur Zeit $t = 0$, gleich 0. Daher gilt

$$v(0) = 0. \tag{14}$$

Zur Erinnerung: In der ersten Flugphase, solange der Fallschirm geschlossen ist, gilt $k = k_g = 0.48\,\frac{kg}{m}$ in Gleichung (13), bei offenem Fallschirm dagegen ist $k = k_o = 33\,\frac{kg}{m}$ zu setzen. Für die Masse $m$ der Fallschirmspringerin und ihrer Ausrüstung soll, wie gesagt, der Wert $m = 80\,kg$ benutzt werden.

Damit ist schliesslich eine mathematische Frage übrig geblieben. Sie lautet: Wie heisst die Lösung des Gleichungspaares (13), (14)? Genauer: Für welche Funktion $v(t)$ gilt gleichzeitig

[4] Wenn die Zeit $t$ die unabhängige Variable ist, bezeichnet man die Ableitung gerne mit $\dot{}$, statt mit $'$.

[5] Wenn die Geschwindigkeit einer Bewegung zum Beispiel nicht mehr klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300'000\,\frac{km}{s}$, muss die sogenannte *relativistische* Variante des Grundgesetzes herangezogen werden.

1. ihre Ableitung ist gleich dem $-\frac{k}{m}$-fachen ihres Quadrates plus $g$,
2. für $t = 0$ hat sie den Wert 0?

(13) stellt eine Beziehung zwischen der unbekannten "Geschwindigkeitsfunktion" $v$ und ihrer Ableitung $\dot{v}$ her. Eine solche Gleichung heisst *Differentialgleichung.* Weil (14) angibt, welchen Wert die Geschwindigkeit $v$ zur Zeit $t = 0$, also am Anfang der Bewegung hat, nennt man (14) eine *Anfangsbedingung.* Eine Differentialgleichung, zusammen mit einer Anfangsbedingung, nennt man ein *Anfangswertproblem.*

Und das ist das *Fazit dieses Abschnitts.* Er zeigt Ihnen, wie die Bestimmung einer Bewegung aufgrund der Kenntnis der wirkenden Kräfte und mit Hilfe von Newtons Grundgesetz der Mechanik in eine mathematische Aufgabe übersetzt werden kann. Schlagwortartig gesagt: Bewegungen kann man berechnen. Man muss dazu Differentialgleichungen lösen.

Mit Gleichungen befassen Sie sich seit Beginn Ihrer Schulzeit. In der ersten Klasse der Primarschule fragte die Lehrerin vielleicht: Fünf und wieviel ist acht? Später kamen kompliziertere Gleichungen hinzu, zum Beispiel quadratische und noch viele weitere. Immer war die gesuchte Grösse eine unbekannte Zahl. Aber Sie kennen auch Gleichungssysteme. Bei einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zum Beispiel sind zwei Zahlen gesucht. Sie sollen so gewählt werden, dass beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind, wenn man die beiden Unbekannten durch die beiden Zahlen ersetzt.

Differentialgleichungen stellen insofern eine neue Kategorie von Gleichungen dar, als die unbekannte Grösse nicht eine einzelne Zahl, oder ein Paar von Zahlen ist. Vielmehr ist die gesuchte Grösse nun eine unbekannte *Funktion.* Und das zweite Charakteristikum ist, dass neben der unbekannten Funktion ihre Ableitung eine zentral wichtige Rolle spielt.

## 1.2 Intermezzo: Das mathematische Rüstzeug zur Lösung der Fallschirmspringergleichung

**1**

Damit man beim Fallschirmspringerproblem weiter kommt, muss man sich mit der Differentialgleichung

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k}{m}[v(t)]^2 \tag{15}$$

befassen.

Differentialgleichungen zu lösen ist meistens nicht leicht. Die Differentialgleichung (15) gehört noch zu den relativ einfachen. Oft ist es nicht schwierig, wenigstens die sogenannten *Gleichgewichte* (oder *Gleichgewichtslösungen*) zu finden. Auch (15) besitzt eine Gleichgewichtslösung. Es geht darum herauszufinden, ob man eine Zahl $c$ so finden kann, dass $v(t) = c$ (für alle $t$) Lösung von (15) ist.

**Aufgabe 4** *(a) Bestimmen Sie die (positive) Gleichgewichtslösung der Differentialgleichung (15). (b) Interpretieren Sie die in (a) gefundene spezielle Lösung physikalisch.*

Die Herleitung von weiteren Lösungen der Differentialgleichung (15) ist etwas komplizierter. Wir formulieren daher das Resultat als Satz und bieten Ihnen dann mehrere Möglichkeiten an, sich damit auseinanderzusetzen.

**Satz 1** *Die Lösung der Differentialgleichung*

$$\dot{x}(t) = a - b[x(t)]^2, \tag{16}$$

*welche zusätzlich die Bedingung*

$$x(0) = x_0 \tag{17}$$

*erfüllt, lautet*

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}x_0)e^{\sqrt{ab}t} - (\sqrt{a}-\sqrt{b}x_0)e^{-\sqrt{ab}t}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}x_0)e^{\sqrt{ab}t} + (\sqrt{a}-\sqrt{b}x_0)e^{-\sqrt{ab}t}}. \tag{18}$$

*$a$ und $b$ sind vorgegebene positive Zahlen, $x_0$ ist eine beliebige Zahl.*

**2**

Wie sollen Sie mit diesem Resultat umgehen? Sie haben vier Möglichkeiten. Die für Sie bequemste ist folgende. Sie sagen sich: "Ich könnte durch Einsetzen nachrechnen, dass die Funktion (18) tatsächlich die Differentialgleichung (16) und die Anfangsbedingung (17) erfüllt. Weil die Funktion (18) etwas kompliziert ist, will ich mir das nicht antun. Ich bin zufrieden zu wissen, was ich tun müsste." Das ist ein akzeptabler Standpunkt. Wir benutzen ja auch permanent Geräte, von denen wir (höchstens!) im Prinzip wissen, wie sie funktionieren.

Wenn Sie der Meinung sind, Mathematik sei *das* Fach, in dem man nichts glauben müsse, in dem man *alles* selber überprüfen könne, dann haben Sie etwas Wichtiges erkannt: Mathematik ist die Disziplin für autonome Denkerinnen und Denker. Es gibt folgende drei Möglichkeiten, die Richtigkeit der Formel (18) einzusehen.

Betrachten Sie zuerst den Spezialfall

$$\dot{x}(t) = 1 - [x(t)]^2, \tag{19}$$

d.h. untersuchen Sie die Gleichung (16) für $a = b = 1$. Aufgabe 5 hilft Ihnen, die Lösung durch *Einsetzen* zu verifizieren. In Aufgabe 6 lernen Sie die *Lösungstechnik des Separierens* kennen. In Aufgabe 7 schliesslich können Sie sich davon überzeugen, dass man aus den Lösungen der Differentialgleichung (19) auch die Lösungen der Differentialgleichung (16) gewinnen kann.

**Aufgabe 5** *In dieser Aufgabe sollen Sie durch Einsetzen überprüfen, dass Satz 1 im Spezialfall $a = b = 1$ in der Tat das Problem löst. Gehen Sie in folgenden Schritten vor.*
*(a) Wie lautet die Funktion $x(t)$ aus Satz 1 im Spezialfall $a = b = 1$?*
*(b) Bitte überprüfen Sie, dass die Funktion $x(t)$ aus (a) die Bedingung $x(0) = x_0$ erfüllt, also Gleichung (17).*
*(c) Berechnen Sie nun die Ableitung $\dot{x}(t)$ der Funktion $x(t)$ aus (a). Dazu werden Sie die Quotientenregel verwenden und benutzen, dass $(e^t)^{\cdot} = e^t$ und $(e^{-t})^{\cdot} = -e^{-t}$ gilt. Wenn Sie zu einem Computer-Algebra-System Zugang haben, so wollen Sie Ihr Ergebnis vielleicht damit überprüfen.*
*(d) Rechnen Sie nun nach, dass die Funktion $x(t)$ aus (a) die Differentialgleichung (19) erfüllt.*

**3**

Der Zugang von Aufgabe 5 vermittelt keine Einsicht darüber, wie die Lösungsformel (18) *gefunden* wird. Das zu verstehen ist anspruchsvoller.

Die Differentialgleichungen (16) oder (19) gehören zu einer Klasse von Differentialgleichungen, die systematisch mit der Technik des sogenannten *Separierens* gelöst werden können. Diese Technik stellen wir Ihnen anhand eines einfachen Beispiels, der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = 1 + x(t), \tag{20}$$

vor. Dividieren Sie diese Gleichung "durch die rechte Seite". Sie erhalten

$$\frac{\dot{x}(t)}{1 + x(t)} = 1. \tag{21}$$

Das ist die separierte Form der Gleichung. Die Pointe ist nun, dass man sowohl die linke wie auch die rechte Seite als *Ableitung* schreiben kann. Rechts ist das keine Kunst: 1 ist die Ableitung von $t$, d.h. $1 = (t)^{\cdot}$. Aber wovon ist $\frac{\dot{x}(t)}{1+x(t)}$ die Ableitung? Zur Beantwortung dieser Frage sollten Sie sich an die

Logarithmusfunktion $\ln(t)$, ihre Ableitung $[\ln(t)]^{\cdot} = \frac{1}{t}$ und an die Kettenregel erinnern, die man zur Ableitung einer Funktion des Typs $\ln(u(t))$, $u(t)$ die "innere" Funktion, braucht. Da gilt doch

$$[\ln(u(t))]^{\cdot} = \frac{\dot{u}(t)}{u(t)}. \tag{22}$$

Wenn Sie die rechte Seite von (22) mit der linken Seite von (21) vergleichen, dann sehen Sie, dass $\frac{\dot{x}(t)}{1+x(t)}$ die Ableitung von $\ln[1+x(t)]$ ist. Nach dieser Vorbereitung kommen Sie zum Schluss, dass Sie Gleichung (21) in folgender (zugegeben kunstvollen!) Form schreiben können

$$[\ln(1+x(t))]^{\cdot} = \frac{d}{dt}t. \tag{23}$$

Wo ist der Mehrwert? Nun, wenn zwei Funktionen (überall) die gleiche Ableitung haben, dann können sie sich nur um eine Konstante unterscheiden. Bezogen auf Gleichung (23) bedeutet das, dass

$$\ln[1+x(t)] = t + c \tag{24}$$

gilt, wo $c$ eben eine Konstante ist. Aus Gleichung (24) lässt sich aber $x(t)$ durch Auflösen gewinnen. Man erhält $x(t) = e^{t+c} - 1$. Wenn es zu einem "Trick" mindestens zwei Beispiele gäbe, spotten manche Leute, handle es sich um eine Methode. Die Technik des Separierens qualifiziert sich in diesem Sinn als Methode. Wenden Sie sie nun auf die Differentialgleichung (19) an, indem Sie folgende Aufgabe lösen.

**Aufgabe 6** *(a) Schreiben Sie (19) in separierter Form.*
*(b) Rechnen Sie nach, dass folgende Zerlegung gilt*

$$\frac{1}{1-x(t)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x(t)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x(t)}. \tag{25}$$

*(c) Schreiben Sie die separierte Differentialgleichung aus (a) mit Hilfe der Zerlegung aus (b). Schreiben Sie dann sowohl die linke als auch die rechte Seite als Ableitung von gewissen Funktionen.*
*(d) Gewinnen Sie die Lösungen von (19) analog wie beim Demonstrationsbeispiel.*

Die folgende Aufgabe hilft Ihnen nun noch einzusehen, dass Sie nicht nur die spezielle Differentialgleichung (19) gelöst haben, sondern im Grunde genommen auch die allgemeine Differentialgleichung (16).

**Aufgabe 7** *(a) Verifizieren Sie durch Einsetzen folgende Behauptung. Wenn $y(\tau)$ Lösung der Differentialgleichung $\dot{y}(\tau) = 1 - [y(\tau)]^2$ ist, dann ist $x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}}y(\sqrt{ab}t)$ Lösung von $\dot{x}(t) = a - b[x(t)]^2$.*
*(b) Beweisen Sie nun den Satz 1.*

Nach diesen Überlegungen wenden wir uns wieder der Fallschirmspringerin aus Abschnitt 1.1 zu.

## 1.3 Die Lösung des Fallschirmspringerproblems

**1**
In Abschnitt 1.1 ist es gelungen, die Aufgabe, die Bewegung einer Fallschirmspringerin quantitativ zu erfassen, auf das Lösen der Differentialgleichung (13) unter Berücksichtigung der Bedingung (14) zurückzuführen[6]. Für Ihre Bequemlichkeit wiederholen wir die Differentialgleichung hier:

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k}{m}[v(t)]^2. \tag{26}$$

Wenn wir für $m$ und $g$ die Werte

$$m = 80\ kg \qquad g = 10\ \frac{m}{s^2}$$

[6]Sie erinnern sich: Eine Differentialgleichung und eine Anfangsbedingung heisst ein *Anfangswertproblem.*

und für $k$ den Wert $k_g = 0.48\,\frac{kg}{m}$ verwenden, siehe Gleichung (6), erhalten wir für die *erste Flugphase*, d.h. solange der Fallschirm geschlossen ist, folgendes Anfangswertproblem:

$$\dot{v}(t) = 10 - 0.006[v(t)]^2, \tag{27}$$

$$v(0) = 0. \tag{28}$$

In Abschnitt 1.2 haben Sie sich mit Differentialgleichungen dieses Typs befasst. Es wird Ihnen nun nicht schwer fallen, das Anfangswertproblem (27), (28) zu lösen.

**Aufgabe 8** *(a) Vergleichen Sie die Differentialgleichung (27) mit der Differentialgleichung (16) aus Satz 1. Passen Sie die Lösung (18) des Anfangswertproblems (16), (17) an das Anfangswertproblem (27), (28) an. Wie lautet die Lösung $v(t)$ von (27), (28)?*
*(b) Stellen Sie $v(t)$ mit Hilfe Ihres Rechners grafisch dar. Beschreiben Sie den Geschwindigkeitsverlauf in dieser Flugphase in Worten.*
*(c) Gegen welchen Wert strebt $v(t)$, wenn $t$ immer grösser wird?*

Auf Grund der Ergebnisse von Aufgabe 8 haben Sie nun eine genaue Vorstellung, wie sich die Geschwindigkeit während der Flugphase mit geschlossenem Fallschirm verhält: Sie strebt ziemlich schnell gegen eine *Grenzgeschwindigkeit*[7] von

$$v_\infty^{(1)} \approx 41\,\frac{m}{s}. \tag{29}$$

Das bedeutet insbesondere, dass die Geschwindigkeit nicht beliebig gross wird. Dass sich die Geschwindigkeit rasch der Grenzgeschwindigkeit nähert - sich "stabilisiert", wie man sagt - können Sie auch ohne grafische Darstellung auf rein rechnerischem Weg sehen.

**Aufgabe 9** *Wie lange dauert es, bis die Fallschirmspringerin 95 % der Grenzgeschwindigkeit erreicht hat?*

Wir haben verabredet, dass die Fallschirmspringerin sich aus einer Höhe von 2000 $m$ in die Tiefe fallen lässt. Nehmen wir an, sie öffne den Fallschirm in einer Höhe von 500 $m$. Wie lange ist sie bis zu diesem Zeitpunkt unterwegs? Die folgende Aufgabe dient zur Klärung dieser Frage.

**Aufgabe 10** *(a) Die Wegachse ist vertikal und in Fallrichtung orientiert. Ihr Nullpunkt falle mit dem Absprungpunkt zusammen, siehe Abbildung 6.*

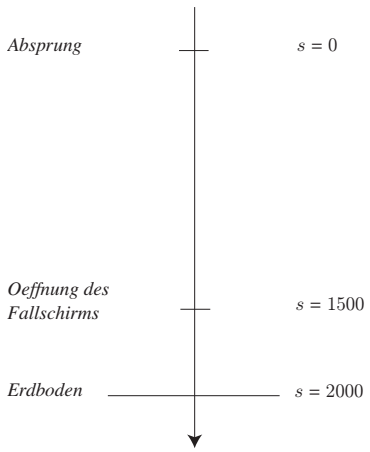



Abbildung 6: Wegdiagramm der Fallschirmspringerin

[7] Beachten Sie, dass die Grenzgeschwindigkeit gerade gleich der in Aufgabe 4 gefundenen, dort als Gleichgewichtslösung bezeichneten, Geschwindigkeit ist.

*$s(t)$ sei der nach der Zeit $t$ durchfallene Weg*[8]*. Es gilt $s(0) = 0$. Bestimmen Sie das Weg-Zeit-Gesetz, d.h. die Funktion $s(t)$. Bedenken Sie, dass die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ ein Mass dafür ist, wie schnell sich $s(t)$ ändert. Anders ausgedrückt: $v(t)$ ist die Ableitung von $s(t)$. Somit müssen Sie die Funktion $s(t)$ so bestimmen, dass für sie*[9]

$$\dot{s}(t) = v(t) = 40.825\frac{e^{0.245t} - e^{-0.245t}}{e^{0.245t} + e^{-0.245t}}$$

*und*

$$s(0) = 0$$

*gilt. Beachten Sie dabei Folgendes. Die Ableitung der Logarithmusfunktion $\ln(t)$ ist, wie Sie wissen, die Funktion $\frac{1}{t}$. Für die Ableitung einer Funktion vom Typ $\ln[u(t)]$ gilt deshalb und auf Grund der Kettenregel:*

$$\frac{d}{dt}\ln[u(t)] = \frac{\dot{u}(t)}{u(t)}.$$

*Benutzen Sie die Tatsache, dass $v(t)$ (fast) von der Form $\frac{\dot{u}(t)}{u(t)}$ ist, um $s(t)$ zu bestimmen.*
*(b) Die Frage, in welcher Zeit die Fallschirmspringerin die ersten $1500\,m$ zurücklegt, können Sie jetzt durch Lösen der Gleichung*

$$s(t) = 1500$$

*nach $t$ beantworten. Wie lange dauert also der Flug bei geschlossenem Fallschirm?*

**2**

Nun wissen Sie: Die Fallschirmspringerin hat zum Zeitpunkt, in dem sie die Reissleine zieht, seit längerem praktisch die Geschwindigkeit $v_\infty^{(1)} \approx 41\ \frac{m}{s}$. Wie geht der Flug weiter, was passiert nun? Der Fallschirm öffnet sich. Sobald der Fallschirm offen ist, hat $k$ den Wert $k_o$. Da es ja schnell geht, bis der Fallschirm offen ist, nehmen wir einstweilen an, dass diese Zeitdauer vernachlässigbar sei und stellen uns vor, der Fallschirm öffne sich schlagartig. In der Gleichung (26) bedeutet das, dass der Widerstandskoeffizient vom Wert $k = k_g$ zum Wert $k = k_o$ springt. D.h., ab diesem Zeitpunkt gilt die Differentialgleichung (26), aber mit $k = k_o$, siehe Gleichung (7). Wegen $\frac{k_o}{m} = \frac{33}{80} \approx 0.413$ also:

$$\dot{v}(t) = 10 - 0.413[v(t)]^2. \tag{30}$$

Um wieder Satz 1 aus dem letzten Abschnitt anwenden zu können, wird eine "neue Uhr" benutzt, die in dem Moment den Zeitpunkt $t = 0$ anzeigt, da der Fallschirm offen ist. Unmittelbar bevor sich der Fallschirm öffnet, hat die Springerin ungefähr die Geschwindigkeit $v_\infty^{(1)} \approx 41\ \frac{m}{s}$. Die Differentialgleichung (30) wird daher durch die Anfangsbedingung

$$v(0) = v_\infty^{(1)} \approx 41 \tag{31}$$

zu einem neuen Anfangswertproblem ergänzt.

**Aufgabe 11** *(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (30), (31).*
*(b) Stellen Sie $v(t)$ grafisch dar und beschreiben Sie den Graphen in Worten.*
*(c) Begründen Sie, dass auch die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ in dieser Flugphase mit wachsendem $t$ gegen einen Grenzwert strebt, und zwar gegen $v_\infty^{(2)} \approx 5\ \frac{m}{s}$.*
*(d) Würden Sie sich in der Haut der Fallschirmspringerin wohl fühlen beim Gedanken, mit etwa $5\ \frac{m}{s}$ landen zu müssen? Überlegen Sie sich zum Vergleich, aus welcher Höhe Sie ohne Fallschirm hinunter springen müssten, um mit der gleichen Geschwindigkeit auf dem Boden zu landen.*
*(e) Wie lange dauert die Flugphase mit offenem Fallschirm?*

[8] Wenn $h(t)$ die Höhe der Fallschirmspringerin zur Zeit $t$ (über dem Boden) bezeichnet, gilt $h(t) = 2000 - s(t)$. Wir nennen $s$ gelegentlich die "Ortsfunktion" der Bewegung, und $v$ "Geschwindigkeitsfunktion".

[9] In der angegebenen Formel für $v(t)$ sind die Zahlwerte gerundet.

Es sieht gemäss dem Resultat von Aufgabe 11 (d) also nach einer einigermassen sanften Landung aus. Wir brauchen uns nicht um die Fallschirmspringerin zu sorgen - oder doch? Was hat der rasante Abfall der Geschwindigkeit von 41 $\frac{m}{s}$ auf 5 $\frac{m}{s}$ innert etwa einer halben Sekunde zu bedeuten? Doch wohl, dass die Geschwindigkeits*änderung* und damit die *Beschleunigung* zu Beginn der zweiten Flugphase gross ist. Wie gross?

**Aufgabe 12** *Um die Beschleunigung anfangs der zweiten Flugphase zu ermitteln, müssen Sie $a(0)$ und infolge der Beziehung $a(t) = \dot{v}(t)$ somit $\dot{v}(0)$ berechnen. Das ist einfach, wenn Sie die Differentialgleichung (30) und die Anfangsbedingung (31) benützen. Welchen Wert erhalten Sie für $a(0)$?*

Verliefe der Flug so, wäre das Ergebnis desaströs. Die Fallschirmspringerin landete zwar relativ sanft - aber leider wäre sie bereits tot! Bei der Öffnung des Fallschirms würde sie eine Bremsbeschleunigung erfahren, die etwa dem Siebzigfachen (!) der Erdbeschleunigung entspricht.

**3**

Die obige Annahme, die Phase, während der sich der Fallschirm öffnet könne vernachlässigt werden, weil sie vergleichsweise kurz ist, ist offenbar unhaltbar. Obwohl kurz, ist sie die heikelste des ganzen Flugs – sie entscheidet über Leben und Tod der Fallschirmspringerin. In der Terminologie der Fallschirmspringerei ist das Problem unter der Bezeichnung *Öffnungsschock* bekannt.

Um auch diesen Teil des Flugs präzise prognostizieren zu können, müsste man für ein gegebenes Fallschirmsystem detaillierte Kenntnisse davon haben, wie der Öffnungsvorgang funktioniert. Da sie hier nicht zu Verfügung stehen, schlagen wir vor, eine andere Fragestellung zu verfolgen. Betrachten Sie das Problem aus der Sicht eines *Konstrukteurs* von Fallschirmsystemen. Er fragt: *Wie soll der Öffnungsvorgang des Fallschirms verlaufen, damit auch diese Flugphase für die Fallschirmspringerin ungefährlich und möglichst erträglich ist?* Das ist eine *Design-* oder *Entwurfsaufgabe* für ein zu entwickelndes Gerät.

Dazu nehmen wir an, es sei technisch möglich, einen Öffnungsmechanismus so zu konstruieren, dass der Wert von $k$ in Gleichung (26) während der Öffnungsphase kontinuierlich von seinem niedrigsten Wert $k_g$ zunehme, bis er den Wert $k_o$ erreicht habe – den Wert also, den $k$ hat, wenn der Fallschirm geöffnet ist. Anders ausgedrückt: Wir ersetzen in Gleichung (26) die Konstante $k$ für die Öffnungsphase durch eine Funktion $k(t)$, sodass das Anfangswertproblem wie folgt lautet:

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k(t)}{m}[v(t)]^2, \quad v(0) = v_\infty^{(1)}, \quad t \in [0, T]. \tag{32}$$

Dabei wird angenommen, dass für die Öffnungsphase wieder eine "neue" Uhr verwendet wird, die beim Beginn des Öffnungsvorgangs zu laufen anfängt und nach der Zeit $T$, wenn der Fallschirm offen ist, stoppt. $v(t)$ bezeichnet die Geschwindigkeit der Fallschirmspringerin zur Zeit $t$ für $t \in [0, T]$. Jede Funktion $k(t)$, die für $t = 0$ den Wert $k_g$ und für $t = T$ den Wert $k_o$ hat, für die also

$$k(0) = k_g, \quad k(T) = k_o \tag{33}$$

gilt, stellt einen Entwurf für einen möglichen Öffnungsmechanismus des Fallschirms dar. Man wird zusätzlich annehmen, dass $k(t)$ monoton wächst.

Ziel ist, die Stärke des Öffnungsschocks für verschiedene Wahlen der Funktion $k(t)$ zu untersuchen.

Zu gegebenem $T$ gibt es natürlich viele Möglichkeiten eine monoton wachsende Funktion $k(t)$ zu wählen, für die (33) gilt. Ein mathematisch naheliegendes Design ist, $k(t)$ in der Zeitspanne $T$ *linear* von $k_g \approx 0.48\ \frac{kg}{m}$ auf $k_o \approx 33\ \frac{kg}{m}$ anwachsen zu lassen.

**Aufgabe 13** *Bestimmen Sie die Funktion $k$: $k(t)$ soll eine lineare Funktion in $t$ sein, die für $t = 0$ den Wert $k_g$ und für $t = T$ den Wert $k_o$ annimmt. Wählen Sie für $T$ speziell 3 $s$.*

Das Anfangswertproblem (32) lautet, wenn Sie $k(t)$ durch die in Aufgabe 13 gefundene lineare Funktion $k(t)$ und $g = 10$, $v_\infty^{(1)} = 41$ ersetzen:

$$\dot{v}(t) = 10 - (0.1355t + 0.006)[v(t)]^2, \quad v(0) = 41. \tag{34}$$

Jetzt ist die Lösung dieses Anfangswertproblems gesucht, d.h. diejenige Funktion, welche die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung (34) erfüllt.

**4**

Die Differentialgleichung in (34) ist *nicht* mit den aus der Schule bekannten Funktionen lösbar! Das sollte Sie nicht so sehr erstaunen, wenn Sie sich erinnern, wieviel Mühe schon das Lösen der einfacheren Differentialgleichung (26) gemacht hat. Wir stossen hier an eine mathematische Grenze: Leider ist es so, dass man es sehr oft mit Differentialgleichungen zu tun hat, die man nicht in dem Sinn lösen kann, dass es Lösungsformeln gibt, die aus vertrauten Funktionen wie sin(.), cos(.), $e^{(.)}$, usw. aufgebaut sind.

Erinnern Sie sich an die Bemerkung über Newton in Abschnitt 1.1? Wir sagten, Newton habe erkannt, dass es einfacher ist, die *Kŕafte* zu bestimmen, die eine Bewegung verursachen, als die *Bewegung* selbst. Das lässt sich nun so ausdrücken: Es ist leichter, die Differentialgleichung aufzustellen, die eine Bewegung beschreibt, als sie zu lösen[10].

Erfreulicherweise gibt es einen Ausweg. Er beruht auf der Kombination von Mathematik und Computerpower. Diese Kombination hat zwar auch ihre Grenzen. Aber vor allem ermöglicht sie vieles. Wir werden Ihnen das Prinzip, weil es eine so grosse praktische Bedeutung hat, in Abschnitt 1.6 darlegen. Im nächsten Abschnitt erklären wir Ihnen das "Produkt" und seine Anwendung auf das Fallschirmspringerproblem.

## 1.4 DIFF EQUATIONS, dsolve, NDSolve & Co

**1**

Sie haben sicher den "Solver" auf Ihrem Grafiktaschenrechner kennen gelernt. Er ist ein sehr effektives Hilfsmittel, wenn es darum geht, *konkret* vorgegebene Gleichungen zu lösen. Zur Erinnerung: Lineare Gleichungen lassen sich leicht lösen. Für quadratische Gleichungen gibt es die berühmte, schon von den Babyloniern entdeckte Lösungsformel. Aber bereits mit kubischen Gleichungen fangen die Kalamitäten an. Die folgende Gleichung dritten Grades bestimmt die Eintauchtiefe $x$ einer Kugel vom Radius 1 in eine Flüssigkeit:

$$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = \frac{\delta_K}{\delta_F}. \tag{35}$$

Dabei bezeichnet $\delta_K$ die Dichte des Materials, aus dem die Kugel ist, $\delta_F$ diejenige der Flüssigkeit, und es wird angenommen, dass $\delta_K < \delta_F$ gilt, sodass die Kugel schwimmt. Zwar gelang es *Scipione dal Ferro* (1465-1526) und *Niccolò Tartaglia* (ca. 1500-1557) - unabhängig voneinander - eine Lösungsformel zu finden[11]. Aber sie ist recht unhandlich, wie der folgende Zeichenhaufen zeigt, den man mit dem

[10] Abgesehen von einer Handvoll glücklicher Fälle.

[11] Die Geschichte dieser Erfindung ist spannend wie ein Krimi. Deshalb hat D. Jörgensen einen Roman daraus gemacht. Sein Titel: *Der Rechenmeister, Rütten & Loening, 1999.* Eine mathematik-historische Aufarbeitung finden Sie bei *R. Acampora: Die "Cartelli di Matematica disfida" - Der Streit zwischen Niccolò Tartaglia und Ludovico Ferrari. Münchner Universitätsschriften 35, 2000.* Die Entdeckung der Lösungsformen für Gleichungen 3. und 4. Grades war der erste grosse eigenständige Beitrag der europäischen Mathematik seit der Antike. In der Zeit dazwischen war die Mathematik vor allem von arabischen Mathematikern gepflegt und weiterentwickelt worden. Sie, sowie dal Ferro (1465-1526), Tartaglia (1500-1557), Geronimo Cardano (1501-1576) und Luigi Ferrari (1522-1565) sind die Wegbereiter für die sogenannte höhere Algebra, als deren Väter Niels Henrik Abel (1802-1829) und Evariste Galois (1811-1832) gelten.

Computer-Algebra-System Mathematica erzeugen kann[12]:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 + \left(1 + 2\sqrt{-1+q}\,\sqrt{q} - 2\,q\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)} + \left(1 + 2\sqrt{-1+q}\,\sqrt{q} - 2\,q\right)^{\frac{1}{3}} \\
x_2 &= 1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2\left(1+2\sqrt{-1+q}\,\sqrt{q}-2\,q\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 + 2\sqrt{-1+q}\,\sqrt{q} - 2\,q\right)^{\frac{1}{3}} \\
x_3 &= 1 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2\left(1+2\sqrt{-1+q}\,\sqrt{q}-2\,q\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 + 2\sqrt{-1+q}\,\sqrt{q} - 2\,q\right)^{\frac{1}{3}},
\end{aligned} \tag{36}$$

wobei zur Abkürzung $q = \frac{\delta_K}{\delta_F}$ gesetzt ist. Sie können sich sicher vorstellen, wie kompliziert die Lösungsformeln für die allgemeine Gleichung 3. oder 4. Grades sind. Ja, und damit ist dann sowieso das Ende der Fahnenstange erreicht! Nach langer vergeblicher Suche konnten Abel und Galois nämlich zeigen, dass es für Gleichungen ab dem 5. Grad keine vergleichbaren Lösungsformeln mehr gibt[13]. Und bei nicht-polynomialen Gleichungen hat man erst recht kaum Chancen, Lösungsformeln zu finden[14].

An Anwendungen Interessierte haben seit der Antike versucht, sich Verfahren auszudenken, um konkrete Gleichungen wenigstens näherungsweise zu lösen. Mit "konkret" sind Gleichungen gemeint, die nicht von *Parametern* abhängen, bzw. den Parametern sind bestimmte Werte zugewiesen. In Gleichung (35) sind $\delta_K$ und $\delta_F$ Parameter. Wenn es sich um eine Buchenholzkugel mit Dichte 0.75 $\frac{gr}{cm^3}$ handelt, die in Wasser der Dichte 1 $\frac{gr}{cm^3}$ schwimmt, dann geht Gleichung (35) über in

$$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = 0.75. \tag{38}$$

Analog ist das Anfangswertproblem (34) im gleichen Sinne konkret: Es enthält keine Parameter (im Gegensatz etwa zur Differentialgleichung (26), die die drei Parameter $g$, $k$, $m$ enthält), die einzige "Variable" ist die gesuchte Funktion $v(t)$.

Das einfachste Verfahren zur approximativen Lösung einer Gleichung wie (38) besteht in *systematischem Probieren*. Das geht so: Da es sich um eine Kugel vom Radius 1 handelt, die in Wasser schwimmt, ist die Eintauchtiefe $x$ zwischen 0 und 2. Wenn Sie 0, 1, 2 in die linke Seite der Gleichung (38) einsetzen, erhalten Sie 0, 0.5, 1. Sie würden gern 0.75 bekommen. Aufgrund des ersten Versuchs erwarten Sie, dass $x$ einen Wert zwischen 1 und 2 hat (und nicht zwischen 0 und 1). Also werten Sie die linke Seite von (38) für $x = 1.5$ aus. Das Resultat ist 0.84375. Nun schliessen Sie, dass $x$ zwischen 1 und 1.5 liegt und probieren mit $x = 1.25$. Die linke Seite ausgewertet ergibt 0.683594. Mit $x = \frac{1}{2}(1.25 + 1.5) = 1.375$ erhalten Sie 0.768066, was nun schon recht nahe bei dem gewünschten Wert von 0.75 liegt. Das ist das Prinzip. Wenn man noch etwas mehr nachdenkt, kann man bessere Verfahren entwickeln. Das sind Algorithmen[15], die mit wenig Rechenaufwand eine sehr gute Approximation an die gesuchte Lösung liefern. Solche Algorithmen zu erfinden und zu untersuchen ist die Aufgabe eines besonderen Zweiges der Mathematik, den man *Numerische Mathematik* nennt.

[12] Falls Sie mit *komplexen Zahlen* nicht vertraut sind, wird Sie das Zeichen $i$ überraschen. Man braucht es, um die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ zu lösen. Es heisst *imaginäre Einheit* und ist der Keim für neue Zahlen, eben der komplexen Zahlen. Mit ihnen rechnet man so, dass $i^2 + 1 = 0$ gilt.

[13] Schliessen Sie daraus bitte *nicht*, dass solche Gleichungen keine Lösungen haben. Man kann im Gegenteil *beweisen*, dass jede Gleichung höheren Grades (komplexe) Lösungen hat. Es heisst nur, dass es nicht möglich ist, Lösungsformeln eines bestimmten, relativ allgemeinen Typs zu finden.

[14] Ein berühmtes Beispiel einer nicht-polynomialen Gleichung ist die sogenannte Kepler-Gleichung

$$E - e\sin E = t. \tag{37}$$

Sie spielt in der Himmelsmechanik und Astronautik eine wichtige Rolle. $e$ ist dabei die Exzentrizität der Ellipse, auf der sich der Planet, Komet, Mond oder Satellit bewegt, $t$ die Zeit (so normiert, dass ein Umlauf $2\pi$ Zeiteinheiten braucht), und $E$ ist die sogenannte exzentrische Anomalie. Wenn man $E$ kennt, kennt man die Position des sich bewegenden Körpers auf der Ellipse. Wenn man daher wissen will, *wo* sich der Körper zu einer *bestimmten Zeit* befindet, muss man die Kepler-Gleichung nach $E$ auflösen. Es gibt aber keine Lösungsformel für (37).

[15] Unter einem *Algorithmus* versteht man einen (Rechen-)Vorgang, der nach einem ganz bestimmten Schema abläuft. Das Wort ist arabischen Ursprungs und entstand durch Verballhornung des Namens Al-Khariwsmi (780?-850?). Al-Khariwsmi war ein bedeutender Mathematiker im 9. Jahrhundert.

| t | $v(t)$ | $a(t)$ |
|---|---|---|
| 0.0 | | |
| 0.1 | | |
| 0.2 | | |
| 0.3 | | |
| 0.4 | | |
| 0.5 | | |
| 0.6 | | |
| 0.7 | | |

Tabelle 2: Die ersten 0.7 Sekunden während der Fallschirmöffnungsphase

**2**

Numerische Verfahren beruhen immer auf vielen ganz konkreten Rechnungen, d.h. Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen. Die Numerische Mathematik kann also ihre Wirksamkeit nur richtig entfalten, wenn sie leistungsfähige Rechengeräte hat. Das war lange nicht der Fall, und so fristete sie bis etwa zur Mitte des 20. Jahrhunderts eher ein Mauerblümchendasein. Das hat sich seither gründlich geändert. Selbst relativ bescheidene Taschenrechner verfügen über zum Teil hervorragende *Programmpakete* zum Lösen von Gleichungen, von Differentialgleichungen und für viele andere Aufgaben. Ein solches Programmpaket besteht meistens aus einem ganzen Bündel von Algorithmen zum Lösen eines bestimmten Problems, und entweder kann der User entscheiden, welchen Algorithmus er in einer bestimmten Situation verwenden will, oder das Programm ist sogar "intelligent" und trifft selber eine Wahl, wenn der Anwender nicht explizit eingreift.

Der Taschenrechner TI-89 von Texas Instruments zum Beispiel liefert, wenn man seinen **Numeric Solver** zum Lösen der Gleichung (38) verwendet, recht schnell die Zahl $-.87938524\ldots$, und er teilt mit, dass die Differenz zwischen linker und rechter Seite bei dieser Wahl von $x$ gleich $-1.10^{-14}$ sei. Interessant, aber nicht, was man erwartet und brauchen kann! Das Problem ist: Kubische Gleichungen haben drei Lösungen (das sehen Sie auch an den Formeln (36)), und der Solver hat jetzt eine davon (approximativ) bestimmt. Wenn man ihm den Tipp gibt, in der Nähe von 1.5 zu suchen, dann findet er 1.3472963553339, und das ist die gesuchte (Näherungs-)Lösung, denn für die dritte findet er $2.532088886\ldots$, die, wie die erste, aus physikalischen Gründen nicht in Betracht kommt.

**3**

Was jetzt kommt liegt auf der Hand: Wir empfehlen Ihnen, das Programmpaket ihres Rechners zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen zu benutzen, um das Anfangswertproblem (34) zu lösen. Sie müssen dem Rechner die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung und das Zeitintervall mitteilen, während dem Sie die Lösung $v(t)$ zu kennen wünschen. In unserem Fall ist das $[0, 3]$, s. Aufgabe 13. Der Rechner zeichnet Ihnen dann gleich den Graphen von $v(t)$.

**Aufgabe 14** *(a) Bestimmen Sie die (approximative) Lösung zum Anfangswertproblem (34) für das Zeitintervall* $[0, 3]$ *unter Benutzung des Lösers für Differentialgleichungen auf Ihrem Rechner. Auf dem TI-89 heisst das Paket* **DIFF EQUATIONS**. *Wenn Sie Zugang zum Computer-Algebra-System Maple haben, heisst das Programm* **dsolve**, *und in Mathematica hat es die Bezeichnung* **NDSolve**. *Ihre Lehrerin, Ihr Lehrer gibt Ihnen dazu eine Anleitung.*
*(b) Erstellen Sie eine Tabelle mit drei Kolonnen nach dem Vorbild von Tabelle 2, und diskutieren Sie das Resultat. Wie beurteilen Sie die Chancen der Fallschirmspringerin, das Öffnen des Fallschirms ohne Gefährdung zu überstehen?*

## 1.5 Der Sprung im Überblick

Das Szenarium ist, dass sich eine Fallschirmspringerin aus 2000 m Höhe aus einem "stehenden" Helikopter herausfallen lässt, bis auf 500 m Höhe frei fällt, dann den Öffnungsvorgang des Fallschirms einleitet und schliesslich bei offenem Fallschirm zur Erde schwebt.

Der Wunsch ist, diese Bewegung zu verstehen und auf sie Einfluss nehmen zu können.

Dazu wurde, wie man sagt, ein *mathematisches Modell*[16] entwickelt. Im Modell wird angenommen, die Fallschirmspringerin könne als sich bewegender Punkt gedacht werden und die Bewegung verlaufe geradlinig, entlang einer vertikal nach unten gerichteten Achse. Das Modell beruht sodann auf Newtons Theorie der Bewegung, insbesondere auf dem Grundgesetz der Mechanik und Annahmen über zwei wirkende Kräfte, die Schwerkraft und die Luftwiderstandskraft.

Im Blickpunkt stehen die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und die Ortsfunktion $s(t)$, bzw. die Höhenfunktion $h(t) = 2000 - s(t)$. Dabei bezeichnet $v(t)$ die Geschwindigkeit der Fallschirmspringerin zur Zeit $t$. $s(t)$ ist die Länge des bis zur Zeit $t$ durchflogenen Wegs, $h(t)$ ihre Höhe über Boden zur Zeit $t$.

Die Bewegung gliedert sich in drei Phasen. Entsprechend dieser Phasen benutzt das Modell drei Differentialgleichungen für die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$.

i) In der ersten Flugphase, das heisst solange die Fallschirmspringerin bei geschlossenem Fallschirm frei fällt, genügt $v(t)$ dem Anfangswertproblem

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k_g}{m}[v(t)]^2, \qquad v(0) = 0, \tag{39}$$

mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$, $k_g = 0.48\,\frac{kg}{m}$, $m = 80\ kg$ und $\frac{k_g}{m} = 0.006\,\frac{1}{m}$.

Die Lösung des Anfangswertproblems (39) zeigt, dass die Geschwindigkeit rasant zunimmt. Innerhalb von etwa 4 Sekunden erreicht sie den Wert von knapp $110\,\frac{km}{h}$. Die Geschwindigkeit wächst weiter und nähert sich immer mehr dem Wert $v_\infty^{(1)} \approx 41\,\frac{m}{s} \approx 148\,\frac{km}{h}$, den sie nach 12 Sekunden praktisch erreicht.

Den bis zur Zeit $t$ im Freiflug zurückgelegten Weg $s(t)$ erhält man als Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{s}(t) = v(t), \qquad s(0) = 0.$$

Da die Fallschirmspringerin auf 500 m über Boden die Reissleine zieht, erhält man die Dauer $t_1$ der ersten Flugphase als Lösung der Gleichung

$$s(t_1) = 1500.$$

Die Rechnung ergibt

$$t_1 \approx 40,$$

das heisst die erste Flugphase dauert ungefähr 40 Sekunden.

ii) In der dritten Flugphase ist der Fallschirm offen. Dann genügt $v(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k_o}{m}[v(t)]^2, \tag{40}$$

mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$, $k_o = 33\,\frac{kg}{m}$, $m = 80\ kg$ und $\frac{k_o}{m} = 0.413\,\frac{1}{m}$.

[16] Modelle sind vereinfachte Abbilder von komplizierten Sachverhalten, die Menschen ersinnen um Einsicht und Verständnis zu gewinnen.

Aus (40) ergibt sich, dass die Geschwindigkeit bei geöffnetem Fallschirm sich rasch dem Wert

$$v_\infty^{(2)} \approx 5\,\frac{m}{sec} \approx 18\,\frac{km}{h}$$

nähert, womit eine problemlose Landung gewährleistet sein sollte.

iii) Die Prognose über den Verlauf der Flugphase, in der sich der Fallschirm öffnet, hängt in starkem Mass davon ab, wie der Öffnungsschock abgemildert wird, d.h. von den technischen Details des Öffnungsmechanismus des Fallschirms. In diesem Material machen wir die Annahme, dass es technisch möglich ist, den Öffnungsmechanismus so zu konstruieren, dass diese Flugphase durch das Anfangswertproblem:

$$\dot{v}(t) = g - \frac{k(t)}{m}[v(t)]^2, \qquad v(0) = v_\infty^{(1)}, \qquad t \in [0, T]$$

modelliert werden kann. Dabei ist $k(t)$ eine für $t \in [0, T]$ definierte, monoton wachsende Funktion, für die $k(0) = k_g$ und $k(T) = k_o$ gilt. Durch $T$ wird die Dauer der Öffnungsphase des Fallschirms bestimmt. Die interessierende Frage lautet: *Wie wirken sich unterschiedliche Designs der Funktion $k(t)$ im Hinblick auf die Abmilderung des Öffnungsschocks aus?*

Ein aus mathematischer Sicht naheliegendes Design für $k(t)$ ist eine lineare Funktion, d.h.:

$$k(t) = \frac{k_o - k_g}{T}\,t + k_g. \tag{41}$$

Für die Wahl $T = 3$ ergibt die Rechnung, dass die Geschwindigkeit rasch abnimmt und nach 3 Sekunden praktisch den Wert $v_\infty^{(2)} \approx 5\,\frac{m}{sec}$ erreicht. Die Bremsbeschleunigung erreicht dabei maximal den Wert $4g$, das heisst das Vierfache der Erdbeschleunigung. Für $T = 5$ beträgt die maximale Bremsbeschleunigung noch etwa $3g$ und bei $T = 10$ noch circa $2g$. Abbildung 7 zeigt in Form dreier Diagramme den Geschwindigkeitsverlauf, den Verlauf der Beschleunigung und die Abnahme der Höhe, jeweils im Verlaufe der Zeit.

Das durch (41) bestimmte Design für den Öffnungsvorgang des Fallschirms ist natürlich keineswegs das einzig mögliche. Man kann sich durchaus vorstellen, dass ein ungleichmässiges Anwachsen des $k$-Wertes von $k_g$ auf $k_o$ vorteilhaft sein könnte. Dabei wird man dafür sorgen, dass der $k$-Wert zu Beginn des Öffnungsvorgangs langsamer zunimmt als später. Die folgende Wahl der Funktion $k(t)$ ist eine mögliche Realisierung dieser Idee, indem $\dot{k}(0) = 0$ gilt:

$$k(t) = \frac{k_o - k_g}{T^2}\,t^2 + k_g. \tag{42}$$

Bestimmt man für den gemäss (42) definierten Öffnungsvorgang die maximal auftretende Beschleunigung $a_{\max}$ für verschiedene Längen $T$ des Öffnungsvorgangs, erhält man die in Tabelle 3 angegebenen Resultate. Wie man sieht reduziert das Design (42) den Öffnungsschock noch einmal merklich.

| T (in $s$) | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{\max}$ (in $\frac{m}{s^2}$) | -26.4 | -21.3 | -18.1 | -15.7 | -14.0 | -12.6 | -11.5 | -10.6 |

Tabelle 3: Maximal auf die Fallschirmspringerin wirkende Beschleunigung, falls der Öffnungsvorgang gemäss (42) erfolgt.

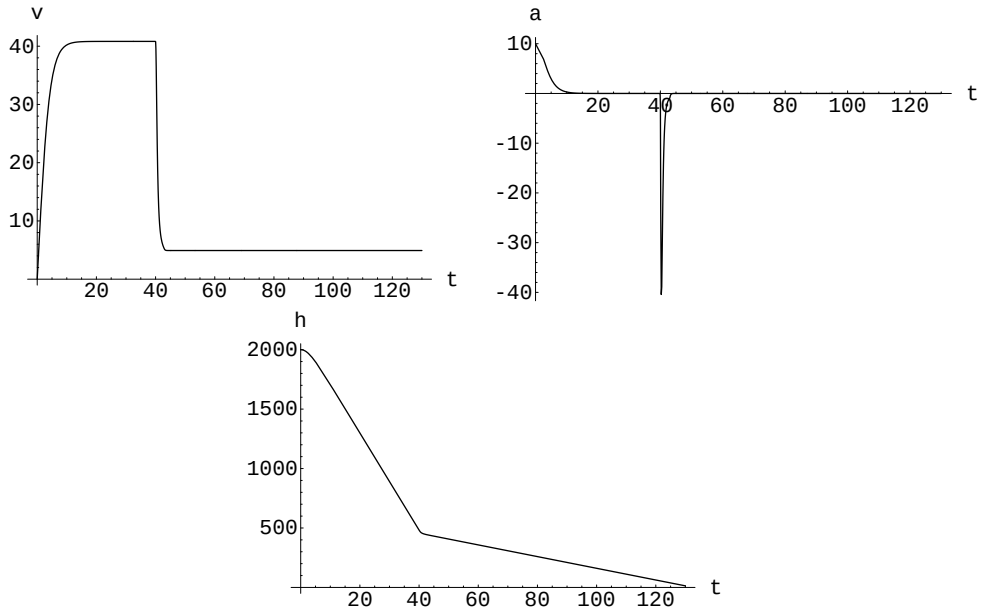



Abbildung 7: Das erste Diagramm zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit $v$ beim Sprung der Fallschirmspringerin, das zweite den Verlauf der Beschleunigung $a$ und das dritte wie die Höhe $h$ abnimmt, jeweils in Abhängigkeit der "verflogenen" Zeit $t$. Dabei ist das Design (41) für die Funktion $k(t)$ zu Grunde gelegt.

## 1.6 Den Vorhang eine Handbreit aufgemacht - Oder wie mit dem Computer Differentialgleichungen gelöst werden

**1**

Wir halten es für unverzichtbar, dass Sie im *Prinzip* wissen, wie ein Programmpaket zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen, wie Sie es in Aufgabe 14 kennengelernt haben, funktioniert, so wie Sie im Prinzip wissen sollen, wie ein Solver für nichtlineare Gleichungen arbeitet. So wie wir Ihnen in Abschnitt 1.4 ein einfaches Verfahren für das Gleichungslösen in Erinnerung gerufen haben, werden wir Ihnen auch nur ein einfaches Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen vorstellen. Das genügt, um das Prinzip zu verstehen.

Nehmen wir die Differentialgleichung (34)

$$\dot{v}(t) = 10 - (0.1355t + 0.006)[v(t)]^2 \tag{43}$$

und ihre Anfangsbedingung

$$v(0) = v_0 := 41 \tag{44}$$

noch einmal vor, und stellen wir uns die Aufgabe, den Wert der Lösung $v(t)$ - sagen wir - für $t = 0.1$, also

$$v(0.1),$$

approximativ zu berechnen. Das heisst es geht darum, den ersten interessanten Eintrag in Tabelle 2 zu bestimmen. Bei der Berechnung von Tabelle 2 wurde ein Programmpaket zur Lösung von Differentialgleichungen quasi als "Blackbox" eingesetzt - etwa so, wie wir ein Handy zum Telefonieren verwenden: Ohne zu verstehen, was wirklich vor sich geht. Jetzt ist die Spielregel folgende: Die Rechnung soll nur die Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division benutzen und vor allem vollkommen offen gelegt werden[17].

[17] Mathematik ist das Fach, Sie erinnern sich, für autonome Denkerinnen und Denker: Man muss nichts glauben, jede/jeder kann jeden Schritt selbst überprüfen!

**2**

Das Prinzip ist einfach. Hier ist die Idee. Betrachten Sie bitte den Graphen der Lösung $v$ des Anfangswertproblems (43), (44). Er geht infolge der Anfangsbedingung (44) durch den Punkt $(0, 41)$. Nun denken Sie sich die Tangente $g_0$ an den Graphen von $v$ in diesem Punkt gezeichnet, siehe Abbildung 8. Die Pointe ist, dass man die Gleichung von $g_0$ bestimmen kann. Dass sie durch den Punkt $(0, 41)$ geht, ist die eine Information. Man kann aber auch ihre *Steigung* berechnen: Mit Hilfe der Differentialgleichung (43). Setzt man in dieser Gleichung nämlich $t = 0$ ein, folgt

$$\dot{v}(0) = 10 - (0.1355 \cdot 0 + 0.006)[v(0)]^2 = 10 - 0.006 \cdot 41^2 = -.086.$$

Somit zeigt sich, dass die Tangente $g_0$ die Gleichung

$$v = -.086 \cdot t + 41$$

hat. Jetzt kommt der erste Approximationsschritt: Man approximiert den Graphen von $v$ in der Nähe des Punktes $(0, 41)$ durch die Tangente $g_0$. Oder anders ausgedrückt: Man approximiert die (unbekannte) Funktion $v(t)$ für *kleine (positive) Werte von* $t$ durch die lineare Funktion $l_0(t) = -.086 \cdot t + 41$. Wie klein

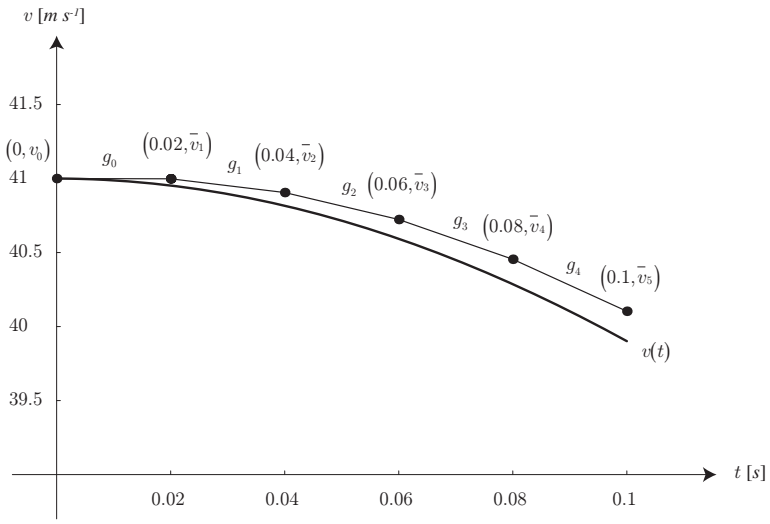



Abbildung 8: Graph von $v$, Tangente $g_0$ im Punkt $(0, 41)$ sowie weitere lineare Approximationen.

ist klein? Nun, das ist ein Problem - es wird dazu weiter unten noch mehr zu sagen sein. Im Augenblick schlagen wir vor, dass zum Beispiel $t = 0.02$ gewählt und also $v(0.02)$ durch $l_0(0.02) = -.086 \cdot 0.02 + 41 = 40.99828$ approximiert wird. Mit anderen Worten, wir setzen

$$v_1 := v(0.02) \approx 40.99828 =: \overline{v}_1. \tag{45}$$

Sie sehen: Die Geschwindigkeit hat sich nur ganz geringfügig verringert.

Wie weiter?

Das nächste Ziel ist eine Näherung für $v(0.04)$ zu finden, danach eine für $v(0.06)$, dann für $v(0.08)$ und schliesslich für $v(0.1)$.

**3**

Der Schritt von $v(0)$ zu $v(0.02)$ ist insofern speziell, als man $v(0)$ aufgrund der Anfangsbedingung (44) kennt. Der Schritt von $v(0.02)$ zu $v(0.04)$ wäre analog, wenn man auch $v(0.02)$ kennen würde. Leider kennen wir $v(0.02)$ nicht, aber aufgrund von (45) haben wir wenigstens eine Approximation für $v(0.02)$ zur Verfügung, und wenn wir den Mut haben, im nächsten Schritt gleich zwei (kleine) Fehler zu machen, dann erhalten wir ganz ähnlich wie vorher eine Approximation für $v(0.04)$.

Et voilà, les détails: Der Graph von $v$ geht durch den Punkt $(0.02, v_1)$. Die Tangente durch diesen Punkt an den Graphen von $v$ hat gemäss der Differentialgleichung (43) die Steigung

$$\dot{v}(0.02) = 10 - (0.1355 \cdot 0.02 + 0.006)[v(0.02)]^2 = 10 - 0.00871 \cdot v_1^2.$$

An dieser Stelle sollte man nun den Wert $v_1$ für $v(0.02)$ kennen. Er ist aber unbekannt, weil man ja die Lösung $v(t)$ der Differentialgleichung (43) nicht kennt. Aber es wurde oben immerhin die Approximation $\overline{v}_1$ für $v_1 = v(0.02)$ bestimmt, siehe (45). Wenn man sie anstelle von $v_1$ verwendet, erhält man wenigstens eine Approximation für $\dot{v}(0.02)$, nämlich

$$\dot{v}(0.02) = 10 - 0.00871 \cdot v_1^2 \approx 10 - 0.00871 \cdot \overline{v}_1^2 = 10 - 0.00871 \cdot 40.99828^2 \approx -4.64028. \tag{46}$$

Statt der Tangente betrachtet man (nolens volens) die Gerade $g_1$ mit der Steigung $-4.64028$ durch den Punkt $(0.02, \overline{v}_1) = (0.02, 40.99828)$, siehe Abbildung 8. Ihre Gleichung lautet

$$v = l_1(t),$$

dabei bezeichnet $l_1$ die folgende lineare Funktion:

$$l_1(t) = -4.64028 \cdot (t - 0.02) + 40.99828.$$

Jetzt benutzt man diese lineare Funktion[18], um die gesuchte Funktion $v(t)$ zu approximieren, diesmal für $t$ zwischen 0.02 und 0.04. Insbesondere setzt man

$$v_2 := v(0.04) \approx l_1(0.04) = -4.64028 \cdot (0.04 - 0.02) + 40.99828 = 40.905474 =: \overline{v}_2. \tag{47}$$

Diese Rechnungen sind zwar arbeitsintensiv, aber im Prinzip banal. So banal, dass man sie am besten einem Computer überträgt. Bitte lösen Sie folgende Aufgabe.

**Aufgabe 15** *(a) Berechnen Sie auf die oben beschriebene Art und Weise von Hand eine Approximation $\overline{v}_3$ für $v_3 = v(0.06)$.*
*(b) Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm, das der Reihe nach $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, $\overline{v}_3$, $\overline{v}_4$, $\overline{v}_5$ bestimmt. Vergleichen Sie den gefundenen Wert für $\overline{v}_5$ mit dem entsprechenden Wert aus Tabelle 2.*

Die Berechnung von $\overline{v}_5$ ergibt

$$\overline{v}_5 \approx 40.1034.$$

Der entsprechende Wert in Tabelle 2 ist

$$v(0.1) = 39.9.$$

Der errechnete Wert von circa 40.1 ist eine leidlich akzeptable Approximation für den mit dem Computerpaket zur Lösung von Differentialgleichungen gefundenen Wert von 39.9. Aber allzu gut ist er nicht!

Es ist nicht schwierig, mit der vorgestellten Methode auch bessere Approximationen zu gewinnen. Man muss nur *mehr und daher kleinere Schritte* machen. Wenn man statt 5 zum Beispiel 10 Schritte ausführt, erhält man statt 40.1 den Wert 40.0. Mit 100 Schritten findet man 39.9113, und mit 1000 Schritten 39.9024.

Warum erhält man sukzessive bessere Ergebnisse? Der Grund ist folgender: In jedem Schritt wird eine Kurve in der Nähe eines ihrer Punkte durch die Tangente in diesem Punkt approximiert. Das Resultat ist selbstverständlich umso besser, je kleiner das Tangentenstück gewählt wird, das jeweils das entsprechende Kurvenstück ersetzen muss.

Trotzdem: Wie klein die Schritte auch gewählt werden, kleine Fehler bleiben immer übrig, sind *unvermeidlich*, liegen in der Natur der Sache. Diese Fehler haben einen Namen: sie heissen *Diskretisationsfehler*.

[18] Der Graph von $l_1$ ist Tangente an eine andere Lösung der Differentialgleichung (43), nämlich derjenigen zur Anfangsbedingung $v(0.02) = \overline{v}_1 = 40.99828$.

Warum? Eigentlich gesucht ist in unserem Beispiel eine Kurve – der Graph der Funktion $v$, siehe Abbildung 8. Als Approximation berechnet man jedoch nur gewisse Punkte, die man vielleicht noch miteinander verbindet. Dieses Ersetzen einer Kurve (die "aus unendlich vielen Punkten besteht") durch nur endlich viele Punkte nennt man *Diskretisieren*.

Das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Differentialgleichungen wird *Euler-Verfahren* genannt, nach Leonhard Euler[19] (1707-1783). Das Euler-Verfahren ist quasi der Prototyp aller Verfahren zur approximativen Lösung von Differentialgleichungen. Es ist nicht besonders *effizient*, das heisst, um vernünftig genaue Ergebnisse zu erzielen (das heisst um den Diskretisationsfehler klein zu halten), muss man meist mit sehr vielen, sehr kleinen Schritten rechnen. Das erfordert selbst auf grossen und schnellen Rechnern bei schwierigeren Problemen im Allgemeinen viel Rechenzeit. Und die Sache hat auch noch einen anderen Nachteil: Computerrechnungen werden ja immer nur mit einer gewissen Genauigkeit durchgeführt, zum Beispiel 20-stellig. Da die Multiplikation von zwei 20-stelligen Zahlen im allgemeinen eine 40-stellige Zahl ist, wird das Resultat der Multiplikation am Schluss auf 20 Stellen gerundet. Mit anderen Worten: In jedem Rechenschritt, den der Computer durchführt, wird ein kleiner Fehler gemacht. Man nennt diese Art von Fehler *Rundungsfehler*. Es kann nun passieren, dass sich diese Fehler *kumulieren*, das heisst "aufsummieren" (statt sich gegenseitig "aufzuheben"). So kann ein Endresultat sehr fehlerhaft sein, wenn es auf Grund sehr vieler Rechenschritte entstanden ist. Es ist unter Umständen sogar möglich, dass ein berechnetes Resultat total falsch und damit unbrauchbar ist. Eine solche Akkumulation von Rundungsfehlern kann, wie man sich leicht ausmalen kann, unter Umständen *fatale* Folgen haben. Also ist man auch aus diesem Grund (und nicht nur wegen langer Rechenzeiten) sehr an effizienten Algorithmen interessiert, d.h. an solchen, die ein gewünschtes Resultat mit verhältnismässig wenigen Rechenschritten ermitteln können, weil die Diskretisationsfehler selbst bei nicht so kleinen Schritten sehr klein sind. Die Konstruktion derartiger Verfahren ist ebenfalls eine Aufgabe der sogenannten *Numerischen Mathematik*. Die auf Computern implementierten Pakete zur "numerischen" Lösung von Differentialgleichungen umfassen meistens ein ganzes Bündel verschiedener Verfahren, um die unterschiedlichen Bedürfnisse von möglichst vielen verschiedenen Benutzern abdecken zu können.

## 2 Lösungen der Aufgaben

### Lösung von Aufgabe 1

Die Lösung steht im Anschluss an die Aufgabe im Text.

### Lösung von Aufgabe 2

(a) Die Kugel beim Kugelstossen der Männer besteht aus Metall, wiegt 7.257 kg und hat einen Durchmesser von 11 bis 13 cm. Die Frauen stossen eine 4 kg schwere Kugel mit 9.5 bis 11 cm Durchmesser. Benutzen Sie die Massenangabe für die schwerere Kugel, so können Sie die Kraft $F_G$ berechnen, wobei $g = 10\frac{m}{s^2}$ gesetzt wird:

$$F_G = mg \approx 7.3 \cdot 10\ \frac{kg \cdot m}{s^2} = 73\ \frac{kg \cdot m}{s^2}.$$

Der Tabelle 1 können Sie entnehmen, dass für die Kugel $c_w = 0.45$ ist. Rechnen Sie mit einem Durchmesser von 0.13 m, so erhalten Sie für die Querschnittsfläche der Kugel den Wert $A = 0.013273$ m$^2$. Daraus folgt:

$$|F_L| = kv^2 = \frac{1}{2}c_w A\rho v^2 \approx 0.5 \cdot 0.45 \cdot 0.013 \cdot 1.225 \cdot v^2 \approx 0.004 \cdot v^2.$$

[19] Der Schweizer L. Euler (1707 - 1783) und der Franzose J. L. Lagrange (1736-1813) gelten als die beiden bedeutendsten Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Vermutlich hat die Schweiz seither keinen Mathematiker vergleichbaren Formats mehr hervorgebracht. Allerdings ist es nicht besonders gerechtfertigt, Euler für das Schweizer Guinnessbuch der Rekorde zu reklamieren, denn Euler hat den grössten Teil seines Lebens in Russland und einen weiteren Teil in Deutschland verbracht.

Die Luftwiderstandskraft $F_L$ ist im Vergleich zur Gewichtskraft $F_G$ verschwindend klein, wenn die Geschwindigkeit $v$ der Kugel klein ist. Damit $F_L$ (dem Betrag nach) auch nur zirka ein Zehntel von $F_G$ ausmacht, müsste die Kugel eine Geschwindigkeit von rund 160 km/h haben, doch solche Geschwindigkeiten werden beim Kugelstossen bei weitem nicht erreicht. Bei einer (realistischen) Geschwindigkeit von 50 km/h macht $F_L$ sogar nur ungefähr ein Hundertstel von $F_G$ aus. Folglich können Sie beim Kugelstossen den Luftwiderstand vernachlässigen, ohne einen grossen Fehler zu machen.

(b) Ist die Schlussfolgerung beim Golfball die gleiche? Ein Golfball darf nicht kleiner als 42.67 mm im Durchmesser sein und nicht mehr als 45.39 g wiegen.
Die Querschnittsfläche des Golfballs ist damit mindestens $A = 0.00143$ m$^2$, wieder können Sie $c_w = 0.45$ verwenden. Sie erhalten:

$$F_G = mg \approx 0.045 \cdot 10 \ \frac{kg \cdot m}{s^2} = 0.45 \ \frac{kg \cdot m}{s^2},$$

$$|F_L| = kv^2 = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2 \approx 0.5 \cdot 0.45 \cdot 0.0014 \cdot 1.225 \cdot v^2 \approx 0.00039 \cdot v^2.$$

Bei einer Geschwindigkeit von etwa 86 km/h beträgt $F_L$ (dem Betrage nach) bereits rund die Hälfte von $F_G$, und solche Geschwindigkeiten erreichen die Bälle, die von Golfprofis geschlagen werden, ohne weiteres. Beim Berechnen der Flugbahn eines Golfballes darf der Luftwiderstand also nicht vernachlässigt werden!

**Lösung von Aufgabe 3**

Der Verlauf der Geschwindigkeit $v$ und der Höhe $h$ könnte so aussehen wie in Abbildung 9 wiedergegeben.

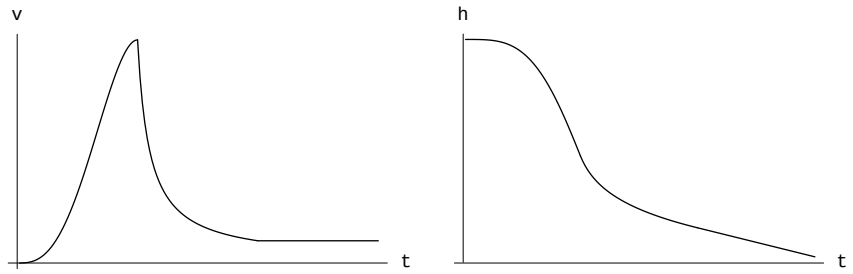



Abbildung 9: Links: Graph von $v(t)$, rechts: Graph von $h(t)$, vermuteter Verlauf

**Lösung von Aufgabe 4**

(a) Die Antwort erhalten Sie, indem Sie den Ansatz $v(t) = c$ in die Differentialgleichung (15) einsetzen. Weil die Ableitung einer Konstanten verschwindet, also $\dot{v}(t) = \dot{c} = 0$ gilt, folgt:

$$0 = g - \frac{k}{m}c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k}{m}c^2 = g \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = \frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Die negative Lösung $c = -\sqrt{mg/k}$ ist in unserem Zusammenhang nicht von Interesse, da eine negative Geschwindigkeit bedeuten würde, dass die Fallschirmspringerin gen Himmel steigt, was aller Erfahrung nach nicht passiert.

(b) Fällt die Fallschirmspringerin zu irgendeinem Zeitpunkt mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{mg/k}$, so behält sie diese Geschwindigkeit während des gesamten Weiterfluges bei, fällt also fortan mit konstanter Geschwindigkeit.
Was steckt physikalisch dahinter? Die Gleichung $mg - kc^2 = 0$ besagt, dass bei der Geschwindigkeit $c$ die Luftwiderstandskraft $F_L$ und die Schwerkraft $F_G$ (betragsmässig) gleich gross sind, das heisst sie halten einander die Waage.

**Lösung von Aufgabe 5**

(a) Im Spezialfall $a = b = 1$ lautet die Funktion $x(t)$ aus Satz 1

$$x(t) = \frac{(1+x_0)e^t - (1-x_0)e^{-t}}{(1+x_0)e^t + (1-x_0)e^{-t}}.$$

(b)

$$x(0) = \frac{(1+x_0) - (1-x_0)}{(1+x_0) + (1-x_0)} = \frac{2x_0}{2} = x_0$$

Das heisst die Bedingung $x(0) = x_0$ ist erfüllt!

(c) Mit der Quotientenregel gilt für $\dot{x}(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{\left[(1+x_0)e^t + (1-x_0)e^{-t}\right]\left[(1+x_0)e^t + (1-x_0)e^{-t}\right]}{\left[(1+x_0)e^t + (1-x_0)e^{-t}\right]^2} \\
&\quad - \frac{\left[(1+x_0)e^t - (1-x_0)e^{-t}\right]\left[(1+x_0)e^t - (1-x_0)e^{-t}\right]}{\left[(1+x_0)e^t + (1-x_0)e^{-t}\right]^2} \\
&= 1 - \frac{\left[(1+x_0)e^t - (1-x_0)e^{-t}\right]^2}{\left[(1+x_0)e^t + (1-x_0)e^{-t}\right]^2} = 1 - \left[\frac{(1+x_0)e^t - (1-x_0)e^{-t}}{(1+x_0)e^t + (1-x_0)e^{-t}}\right]^2 = 1 - [x(t)]^2
\end{aligned}$$

(d) Das Resultat in (c) führt direkt zur Einsicht, dass die Funktion $x(t)$ aus (a) tatsächlich die Differentialgleichung (19) erfüllt.

**Lösung von Aufgabe 6**

(a) Die separierte Form lautet: $\dfrac{\dot{x}(t)}{1-[x(t)]^2} = 1.$

(b) Der Kürze halber wird $x$ statt $x(t)$ geschrieben. Es gilt:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)+(1-x)}{2(1-x)(1+x)} = \frac{2}{2(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

(c) Mit der Zerlegung aus (b) schreibt sich die separierte Differentialgleichung aus (a) folgendermassen:

$$\frac{\dot{x}(t)}{2(1-x(t))} + \frac{\dot{x}(t)}{2(1+x(t))} = 1.$$

Beide Seiten diese Differentialgleichung lassen sich als Ableitung von gewissen Funktionen schreiben:

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{2}\ln[1-x(t)]\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\ln[1+x(t)]\right] = \frac{d}{dt}t,$$

beziehungsweise

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{2}\ln[1-x(t)] + \frac{1}{2}\ln[1+x(t)]\right] = \frac{d}{dt}t.$$

(d) Zwei Funktionen, die überall die gleiche Ableitung haben, können sich nur um eine Konstante unterscheiden. Das bedeutet, dass

$$\frac{1}{2}\ln[1+x(t)] - \frac{1}{2}\ln[1-x(t)] = t + k$$

gilt, wobei $k$ die Konstante bezeichnet. Multiplizieren Sie mit 2 und wenden Sie anschliessend ein Logarithmusgesetz an, so erhalten Sie:

$$\ln \frac{1+x(t)}{1-x(t)} = 2t + 2k.$$

Diese Gleichung lösen Sie nach $x(t)$ auf:

$$x(t) = \frac{e^{2t+2k}-1}{e^{2t+2k}+1}.$$

Bezeichnen Sie zur Vereinfachung die Konstante $e^{2k}$mit $c$. Erweitern Sie die rechte Seite der letzten Gleichung mit $e^{-t}$, so erhalten Sie:

$$x(t) = \frac{ce^{2t}-1}{ce^{2t}+1} = \frac{ce^{2t}-1}{ce^{2t}+1} \cdot \frac{e^{-t}}{e^{-t}} = \frac{ce^{t}-e^{-t}}{ce^{t}+e^{-t}}.$$

Lautet die Anfangsbedingung für die Lösung der Differentialgleichung (19) $x(0) = x_0$, so wird dadurch die Konstante $c$ festgelegt:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{ce^0 - e^{-0}}{ce^0 + e^{-0}} &= x_0 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{c-1}{c+1} &= x_0 \\ \Leftrightarrow \quad c &= \frac{1+x_0}{1-x_0}. \end{aligned}$$

Setzen Sie den für $c$ gefundenen Ausdruck in die obige Lösung ein:

$$x(t) = \frac{\frac{1+x_0}{1-x_0} \cdot e^t - e^{-t}}{\frac{1+x_0}{1-x_0} \cdot e^t + e^{-t}},$$

erweitern Sie den Bruch mit $(1-x_0)$ und Sie finden:

$$x(t) = \frac{(1+x_0)e^t - (1-x_0)e^{-t}}{(1+x_0)e^t + (1-x_0)e^{-t}}.$$

**Lösung von Aufgabe 7**

(a) Zuerst bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}}\, y(\sqrt{ab}\, t)$ mit Hilfe der Kettenregel:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{ab}\, y'(\sqrt{ab}\, t) = a\, y'(\sqrt{ab}\, t).$$

Nun überprüfen Sie, ob tatsächlich $\dot{x}(t) = a - b[x(t)]^2$ gilt, indem Sie die Ausdrücke für $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\stackrel{?}{=} a - b[x(t)]^2 \\ \Leftrightarrow \quad ay'(\sqrt{ab}\, t) &\stackrel{?}{=} a - b\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\, y(\sqrt{ab}\, t)\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad ay'(\sqrt{ab}\, t) &\stackrel{?}{=} a - a\,[y(\sqrt{ab}\, t)]^2 \\ \Leftrightarrow \quad y'(\sqrt{ab}\, t) &\stackrel{?}{=} 1 - [y(\sqrt{ab}\, t)]^2. \end{aligned}$$

Setzen Sie $\tau := \sqrt{ab}\, t$, so lautet die letzte Gleichung:

$$y'(\tau) = 1 - [y(\tau)]^2,$$

und diese Gleichung ist gemäss Voraussetzung erfüllt.

(b) In **Aufgabe 6** haben Sie nachgewiesen, dass

$$y(\tau) = \frac{(1+y_0)e^{\tau} - (1-y_0)e^{-\tau}}{(1+y_0)e^{\tau} + (1-y_0)e^{-\tau}} \qquad (*)$$

die Differentialgleichung

$$y'(\tau) = 1 - [y(\tau)]^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ löst. Aus der Teilaufgabe (a) können Sie nun folgern, dass $x(t) := \sqrt{\frac{a}{b}}y(\sqrt{ab}t)$ eine Lösung von $\dot{x}(t) = a - b[x(t)]^2$ ist.
Welche Anfangsbedingung erfüllt sie? Die Antwort lautet:

$$x(0) = \sqrt{\frac{a}{b}}y(0) = \sqrt{\frac{a}{b}}y_0.$$

Damit $x(0) = x_0$ gilt, muss $y_0$ wie folgt gewählt werden:

$$y_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}x_0. \qquad (**)$$

Die Formel für $x(t)$ folgt unter Verwendung von $(*)$ und $(**)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{\frac{a}{b}}y(\sqrt{ab}\,t) \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{a}{b}}\frac{(1+y_0)e^{\sqrt{ab}\,t} - (1-y_0)e^{-\sqrt{ab}\,t}}{(1+y_0)e^{\sqrt{ab}t} + (1-y_0)e^{-\sqrt{ab}\,t}} \\ &\overset{(**)}{=} \sqrt{\frac{a}{b}}\frac{(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0)e^{\sqrt{ab}\,t} - (1-\sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0)e^{-\sqrt{ab}\,t}}{(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0)e^{\sqrt{ab}\,t} + (1-\sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0)e^{-\sqrt{ab}\,t}}. \end{aligned}$$

Wenn Sie den zweiten Bruch mit $\sqrt{a}$ erweitern, so erhalten Sie:

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}}\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x_0)e^{\sqrt{ab}\,t} - (\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x_0)e^{-\sqrt{ab}\,t}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}\,x_0)e^{\sqrt{ab}\,t} + (\sqrt{a}-\sqrt{b}\,x_0)e^{-\sqrt{ab}\,t}}.$$

Et voilà, dies ist genau Formel (18).

**Lösung von Aufgabe 8**

(a) Die Differentialgleichung (27) ist vom Typ der Differentialgleichung (16): Es ist $x(t) = v(t), a = 10, b = 0.006$. Die Bedingung (17) geht mit $v(0) = v_0 = 0$ in Bedingung (28) über. Hieraus erhalten Sie mit Hilfe von (18) die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{\frac{10}{0.006}} \cdot \frac{(\sqrt{10}+0)e^{\sqrt{10\cdot 0.006}\,t} - (\sqrt{10}-0)e^{-\sqrt{10\cdot 0.006}\,t}}{(\sqrt{10}+0)e^{\sqrt{10\cdot 0.006}\,t} + (\sqrt{10}-0)e^{-\sqrt{10\cdot 0.006}\,t}} \\ &= \sqrt{\frac{10}{0.006}} \cdot \frac{e^{\sqrt{10\cdot 0.006}\,t} - e^{-\sqrt{10\cdot 0.006}\,t}}{e^{\sqrt{10\cdot 0.006}\,t} + e^{-\sqrt{10\cdot 0.006}\,t}} \quad \approx \quad 40.825 \cdot \frac{e^{0.245\,t} - e^{-0.245\,t}}{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}}. \end{aligned}$$

(b) Betrachten Sie Abbildung 10. Die Geschwindigkeit $v$ wächst monoton und strebt im Laufe der Zeit gegen die Grenzgeschwindigkeit $v_\infty^{(1)} \approx 40.825\frac{m}{s}$. Schon nach rund 10 Sekunden hat die Fallschirmspringerin die Geschwindigkeit $v_\infty^{(1)}$ praktisch erreicht.

(c) Dass $v(t)$ im Laufe der Zeit gegen 40.825 strebt, kann man auch mit folgender Überlegung einsehen. Erweitern Sie die Formel für $v(t)$ mit $e^{-0.245\,t}$:

$$v(t) \approx 40.825 \cdot \frac{e^{0.245\,t} - e^{-0.245\,t}}{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}} \cdot \frac{e^{-0.245\,t}}{e^{-0.245\,t}} = 40.825 \cdot \frac{1 - e^{-0.49\,t}}{1 + e^{-0.49\,t}}.$$

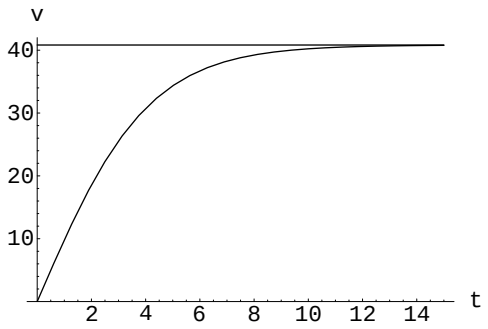



Abbildung 10: Verlauf der Geschwindigkeit $v(t)$ in der ersten Flugphase, zu Aufgabe 8.

Entscheidend ist nun, dass $e^{-0.49\,t}$ für wachsendes $t$ immer kleiner wird und gegen 0 strebt. Damit lässt sich das Grenzverhalten der Geschwindigkeit $v$ bestimmen. Die Geschwindigkeit $v$ strebt, für wachsendes $t$ monoton zunehmend gegen die Grenzgeschwindigkeit

$$v_\infty^{(1)} \approx 40.825 \cdot \frac{1-0}{1+0} = 40.825\ \frac{m}{s}.$$

**Lösung von Aufgabe 9**

Verwenden Sie das erste Zwischenresultat aus der **Aufgabe 8 (c)**, so müssen Sie die Gleichung

$$40.825 \cdot \frac{1-e^{-0.49\,t}}{1+e^{-0.49\,t}} = 0.95 \cdot 40.825$$

lösen. Zuerst dividieren Sie die Gleichung durch 40.825:

$$\frac{1-e^{-0.49\,t}}{1+e^{-0.49\,t}} = 0.95.$$

Diese Gleichung lösen Sie nach $e^{-0.49\,t}$ auf:

$$e^{-0.49\,t} = \frac{1-0.95}{1+0.95} = \frac{0.05}{1.95} \approx 0.02564.$$

Logarithmieren Sie beide Seiten der Gleichung, so erhalten Sie: $-0.49\,t \approx \ln(0.02564) \approx -3.6636$ und somit $t \approx 7.5$. Nach rund 7.5 $s$ erreicht die Fallschirmspringerin also bereits 95 % der Grenzgeschwindigkeit.

**Lösung von Aufgabe 10**

(a) Versuchen Sie es mit der Funktion $u(t) = \ln[e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}] + c$ und leiten Sie diese Funktion probehalber nach $t$ ab, indem Sie die Kettenregel benutzen:

$$\frac{d}{dt}\left(\ln[e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}] + c\right) = \frac{0.245e^{0.245\,t} - 0.245e^{-0.245\,t}}{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}} = 0.245\,\frac{e^{0.245\,t} - e^{-0.245\,t}}{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}}.$$

Das ist schon fast der geforderte Ausdruck! Das einzige, was noch nicht stimmt, ist der Faktor vor dem Bruch (0.245 statt 40.825). Das ist jedoch nur ein kleines Problem – ein Korrekturfaktor hilft:

$$s(t) = \frac{40.825}{0.245}\ln[e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}] + c = 166.6\ \ln[e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}] + c.$$

In der Formel für $s(t)$ ist der Wert für den Quotienten gerundet.
Für diese Funktion gilt tatsächlich: $\dot{s}(t) = v(t)$. Nun müssen Sie noch für die Einhaltung der Bedingung $s(0) = 0$ sorgen:

$$s(0) = 166.6\ \ln[1+1] + c = 166.6\ \ln 2 + c \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad c = -166.6\ \ln 2.$$

Die gesuchte Ortsfunktion lautet also:

$$s(t) = 166.6\,\left(\ln[e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}] - \ln 2\right) = 166.6\,\ln\left(\frac{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}}{2}\right).$$

(b) Aus der Bedingung $s(t) = 1500$ erhalten Sie die Gleichung

$$166.6\,\ln\left(\frac{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}}{2}\right) = 1500.$$

Diese Gleichung kann in eine quadratische Gleichung umgeformt werden durch die folgenden Schritte: $(*)$ Division durch 166.6. $(**)$ Potenzieren von $e$ mit beiden Seiten der Gleichung. $(***)$ Multiplikation mit $2\,e^{0.245\,t}$:

$$\begin{aligned}
& 166.6\,\ln\left(\frac{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}}{2}\right) = 1500 \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \ln\left(\frac{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}}{2}\right) \approx 9.0036 \\
\overset{(**)}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{e^{0.245\,t} + e^{-0.245\,t}}{2} \approx e^{9.0036} \quad \overset{(***)}{\Leftrightarrow} \quad \left(e^{0.245\,t}\right)^2 + 1 \approx 2\,e^{9.0036} \cdot e^{0.245\,t} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(e^{0.245\,t}\right)^2 - 2\,e^{9.0036} \cdot e^{0.245\,t} + 1 \approx 0.
\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung für $e^{0.245\,t}$ hat zwei Lösungen: $e^{0.245\,t} \approx 16264.6$ und $e^{0.245\,t} \approx 0.000062$. Nur die erste liefert einen positiven Wert für $t$, nämlich $t \approx 39.6s \approx 40s$. Die erste Flugphase, mit geschlossenem Fallschirm, dauert zirka 40 Sekunden.

*Anmerkung:* In Aufgabe 9 haben Sie festgestellt, dass die Fallschirmspringerin schon nach wenigen Sekunden praktisch die Grenzgeschwindigkeit von zirka $41\frac{m}{s}$ erreicht. Rechnet man von Anfang an mit dieser Geschwindigkeit, erhält man die Näherung $\frac{1500}{41} \approx 36.6s$ für die Dauer der ersten Flugphase. Man unterschätzt ihre Dauer also lediglich um zirka 10 %.

**Lösung von Aufgabe 11**

(a) Die Lösung folgt unmittelbar aus (18) mit $a = 10$, $b = 0.413$ und $x_0 = 41$:

$$v(t) \approx 4.921 \cdot \frac{29.511\,e^{2.032\,t} + 23.186\,e^{-2.032\,t}}{29.511\,e^{2.032\,t} - 23.186\,e^{-2.032\,t}}.$$

(b) Betrachten Sie Abbildung 11. Die Geschwindigkeit $v(t)$ nimmt unmittelbar nach der Fallschirmöffnung rasch ab (in nur 0.2 Sekunden von 41 m/s auf rund 10.2 m/s), und strebt dann gegen den Wert $v_\infty^{(2)}$ von ungefähr 5 m/s.

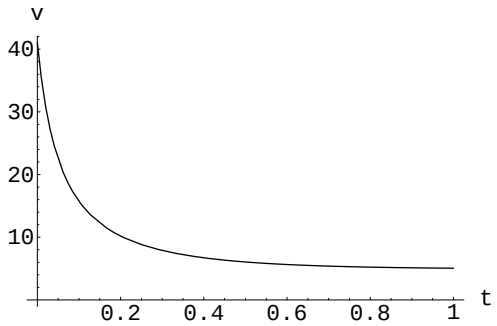



Abbildung 11: Verlauf der Geschwindigkeit $v(t)$ unter der Annahme eines schlagartig geöffneten Fallschirms.

(c) Sie brauchen bloss eine analoge Rechnung wie in **Aufgabe 8 (c)** durchzuführen, um zu zeigen, dass der Bruch im Ausdruck für $v(t)$ mit wachsendem $t$ gegen den Wert 1 strebt. Somit strebt $v(t)$ für wachsendes $t$ gegen gegen $v_\infty^{(2)} \approx 4.921\frac{m}{s} \approx 5\frac{m}{s}s$, also gegen den Faktor vor dem Bruch. Der Graph in Abbildung 11 bestätigt diese Rechnung.

(d) Für den sogenannten freien Fall gelten die Formeln

$$\begin{aligned} v(t) &= gt \quad \text{(Fallgeschwindigkeit)} \qquad \text{und} \\ s(t) &= \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(Fallweg)} \end{aligned}$$

falls $v(0) = 0$ und $s(0) = 0$ ist. Durch Elimination der Variablen $t$ erhalten Sie aus diesen zwei Beziehungen eine neue: $v(s) = \sqrt{2gs}$, beziehungsweise – wenn Sie nach $s$ auflösen –

$$s(v) = \frac{v^2}{2g}.$$

Für $v = 5\frac{m}{s}$ ergibt sich somit eine Fallhöhe von

$$s(5) = \frac{25}{20}m = 1.25m.$$

Die Fallschirmspringerin landet also mit der gleichen Geschwindigkeit, die sie hätte, wenn sie von einer Mauer mit einer Höhe von 1.25 m springen würde. Das ist fürwahr keine beängstigende Höhe.

(e) Der Graph in Abbildung 11 zeigt, dass die Grenzgeschwindigkeit $v_\infty^2 = 5\frac{m}{s}$ schon nach kurzer Zeit (fast) erreicht wird. Sie können deshalb näherungsweise annehmen, dass die Fallschirmspringerin die letzten 500 m ihres Fluges mit der konstanten Geschwindigkeit $5\frac{m}{s}$ durchfliegt. Die Zeit, die sie dafür benötigt, ist (ungefähr) $t = \frac{500}{5}s = 100s$.

**Lösung von Aufgabe 12**

Aus (30) und aus $v(0) = 41\frac{m}{s}$ folgt:

$$a(0) = \dot{v}(0) = 10 - 0.413[v(0)]^2 = 10 - 0.413 \cdot 41^2 = -684.25.$$

Mit $684\frac{m}{s^2}$ entspricht diese Beschleunigung fast dem *70-fachen* der Erdbeschleunigung!

**Lösung von Aufgabe 13**

$k(t)$ soll eine lineare Funktion sein, d.h. $k(t) = mt + q$. Sie müssen die beiden Parameter $m$ und $q$ so bestimmen, dass der Graph von $k(t)$ durch die beiden Punkte $P_1(0, k_g)$ und $P_2(T, k_o)$ geht. Das ist eine Standardaufgabe:

$$\begin{aligned} q &= k(0) &= k_g, \\ m &= \frac{\Delta k}{\Delta t} &= \frac{k_o - k_g}{T}. \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung von $k(t)$ lautet daher:

$$k(t) = \frac{k_o - k_g}{T}t + k_g.$$

Mit den Zahlenwerten $k_g = 0.48, k_o = 33$ und $T = 3$ erhalten Sie:

$$k(t) = 10.84\,t + 0.48.$$

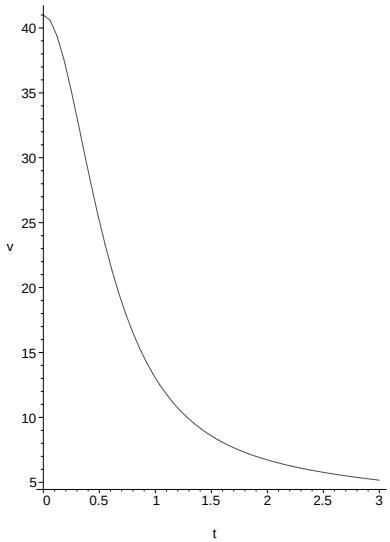



Abbildung 12: Verlauf der Geschwindigkeit $v(t)$ während der Öffnungsphase des Fallschirms, zu Aufgabe 14.

| $t$ | $v(t)$ | $a(t)$ |
|---|---|---|
| 0 | 41.0 | 0 |
| 0.1 | 39.9 | -21,1 |
| 0.2 | 37.0 | -35.3 |
| 0.3 | 33.1 | -41.2 |
| 0.4 | 29.0 | -40.6 |
| 0.5 | 25.1 | -36.5 |
| 0.6 | 21.7 | -31.2 |
| 0.7 | 18.9 | -25.9 |

Tabelle 4: Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Öffnen des Fallschirms aufgrund des Modells (34).

**Lösung von Aufgabe 14**

(a) Siehe Abbildung 12.

(b) Die Chancen der Fallschirmspringerin, das Öffnen des Fallschirms ohne Gefährdung zu überstehen, sind besser. Die maximale Beschleunigung während des Öffnungsvorgangs beträgt ungefähr das 4-fache der Erdbeschleunigung, siehe Tabelle 4.

**Lösung von Aufgabe 15**

(a) Aus den vorangehenden Berechnungen ist $\bar{v}_2 = 40.905474$ bekannt.

$$\begin{aligned}
\dot{v}(0.04) &= 10 - (0.1355 \cdot 0.04 + 0.006) \cdot v_2^2 = 10 - 0.01142 \cdot v_2^2 \approx 10 - 0.01142 \cdot \bar{v}_2^2 \\
&\approx 10 - 0.01142 \cdot 40.905474^2 \approx -9.108604. \\
v_3 &:= v(0.06) \approx l_2(0.06) \approx -9.108604 \cdot (0.06 - 0.04) + 40.905474 \approx 40.723302 =: \bar{v}_3.
\end{aligned}$$

(b) Hier ein Programm, das für Mathematica geschrieben ist:

```
n=5;
```

```
v[0]=41;
Do[dv[i]= 10-(0.1355*(0.02*i)+0.006)*v[i]^2;
   v[i+1]=0.02*dv[i]+v[i];
   Print[v[i]],{i,0,n,1}];
```

Im Anschluss an den Aufgabentext finden Sie den Wert für $\overline{v}_5$.

Version 080916