ETH
Eidgenössisch Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology

Mentorierte Arbeit in Fachwissenschaftlicher Vertiefung mit pädagogischem Fokus in Mathematik

Die Mathematik des Jonglierens

Matthias Graf[1]

Inhalt

Das Ziel dieser Arbeit ist Einblicke zu geben, wie die Kunst des Jonglierens durch *Siteswaps* mathematisch beschrieben werden kann. Es werden ausgewählte Sätze über *Siteswaps* vorgestellt, welche unterstützt durch Beispiele und Visualisierungen verdeutlicht werden.

Zielpublikum

Lehrpersonen der Mathematik, Informatik und Physik

Voraussetzungen

Der Besuch einer Grundvorlesung über Algebra ist empfehlenswert. Vorausgesetzt werden Kenntnisse über Permutationen und den Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Form

Lesetext mit Beispielen und Visualisierungen

Betreuung

Dr. M. Akveld

Datum

8. Mai 2014

[1] matgraf[at]alumni.ethz.ch

Siteswaps

Die Mathematik des Jonglieren

Matthias Graf*

8. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Kunst des Jonglierens ist uralt, denn sie kann bis ins alte Ägypten zurückverfolgt werden. Das bedeutet, dass das Jonglieren die Menschheit bereits 4000 Jahre lang

*matgraf[at]alumni.ethz.ch

begleitet. Genauer wurde in Beni Hasan, eine Region in Ägypten mit vielen Gräbern aus dem mittleren Reich (etwa 2000 v. Chr.), eine Malereien entdeckt, welche als das älteste Zeugnis des Jonglierens gilt. Abbildung 1 zeigt eine Kopie dieser Malerei, welche [Pol03, Seite 2] entnommen wurde. Mehr Details dazu kann auch zum Beispiel [Gil86] entnommen werden.

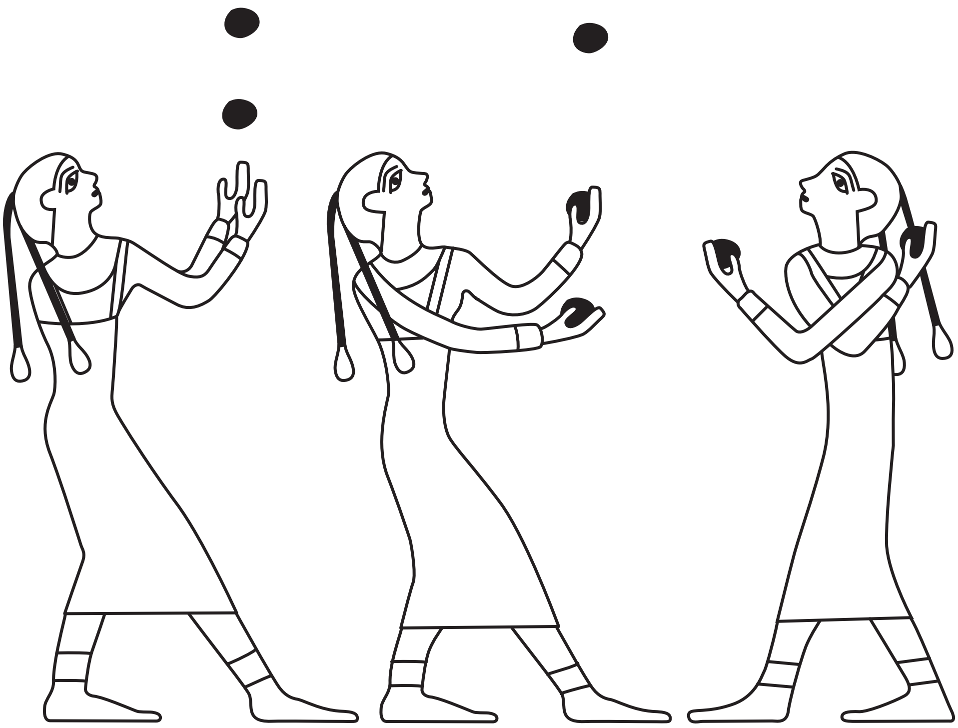


Abbildung 1: Etwa 4000 Jahre alte ägyptische Malerei [Pol03, Seite 2]

Wohl am bekanntesten ist die Wurfjonglage, die auch von der ägyptischen Malerei gezeigt wird. Dabei werden Gegenstände in die Luft geworfen und anschliessend wieder gefangen. Bei anderen populären Arten des Jonglierens balanciert der Jongleur die Gegenstände am Körper oder er lässt sie zum Beispiel am Boden abspringen.

Die Wurfjonglage alleine ist bereits sehr vielseitig, da die beschränkenden Faktoren klein sind. Darunter sind die Schwerkraft einerseits, die Geschwindigkeit und Präzision des Jongleurs andererseits. Auffallend sind die grossen Freiheiten, die dem Jongleur zur Verfügung stehen – bereits Variation der Wurfhöhe und Wurfart alleine produzieren eine grenzenlos anmutende Fülle an Möglichkeiten. Es ist kaum verwunderlich, dass die Wurfjonglage deshalb mathematisch besonders attraktiv ist, selbst wenn zur Vereinfachung noch rigorose Einschränkungen an die genaue Art der Wurfjonglage gemacht werden müssen.

Eine weitere Möglichkeit die Wurfjonglage zu variieren – sehr publikumswirksam – besteht darin, nicht immer dieselben Objekte zu jonglieren. Zu den bekanntesten Objekten, zweifelsohne zu denjenigen mit der grössten Tradition, gehören Bälle, Ringe und Keulen. Exotischere sind Fackeln, Schwerter, Motorsägen etc.

Wer Jongleure beobachtet, wird feststellen, dass sich unabhängig vom soeben Beschriebenen, gewisse Muster ungebrochener Beliebtheit erfreuen. Besonders bekannt sind die Kaskade, visualisiert in Abbildung 2, der Shower, visualisiert in Abbildung 9 und die Fontäne, visualisiert in Abbildung 4. Die Bilder stammen übrigens aus [GW97] und die Animationen wurden mit der freien Software Juggling Lab [al11] erzeugt. Was soll überhaupt unter einem Jongliermuster verstanden werden? Was sind Eigenheiten dieser Muster? Wie findet man neue Muster? Diese und viele andere Fragen werden im Folgenden mathematisch beleuchtet werden. Als primäre Inspirationsquellen für diese Darlegungen dienen vor allem [GW97; Pol03; Knu93] und die Videos [Knu10; Wri12]. Für die algebraischen Grundlagen wurde [Bos04] zu Rate gezogen.

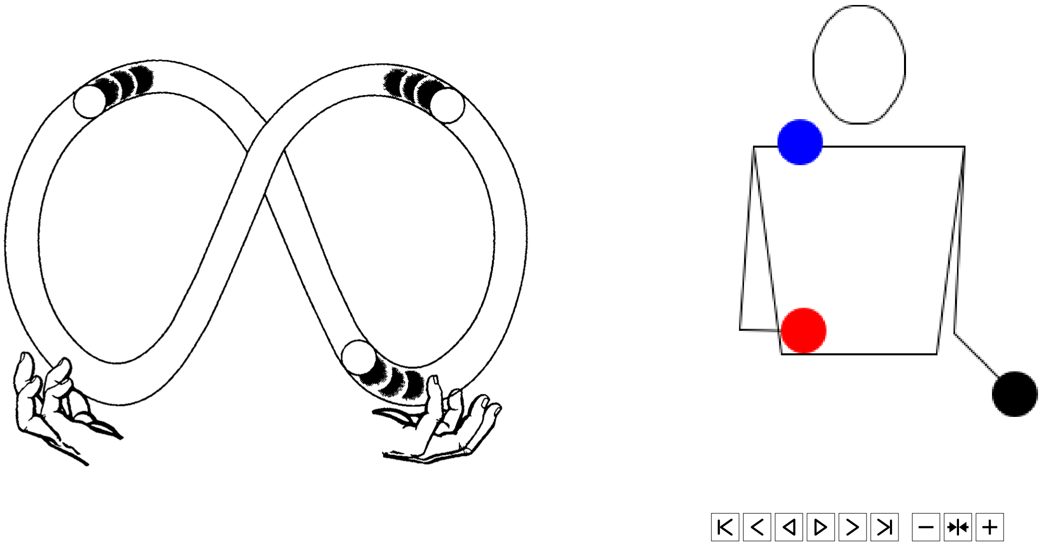


Abbildung 2: Kaskade mit 3 Bällen [GW97, Seite 508] [al11]

Um Jonglieren mathematisch beschreiben zu können, müssen als erstes gewisse Einschränkungen an die Art des Jonglierens und an das, was genau beschrieben, also festgehalten werden soll, gemacht werden. Kurz, das Jonglieren kann nur mathematisch gefasst werden, wenn klare Voraussetzungen getroffen werden und „irrelevante Details“ weggelassen werden. Etwa um 1985 wurde unabhängig voneinander von verschiedenen Personen und Personengruppen (Bengt Magnusson und Bruce Tiemann aus Los Angeles, Paul Kilmek aus Santa Cruz und Adam Chalcraft, Mike Day und Colin Wright aus Cambridge) ein System entwickelt, welches viele Aspekte des Jonglierens kompakt in einer Ziffernfolge beschreibt. Dieses System der mathematischen Notation des Jonglierens wurde unter dem Namen *Siteswaps* bekannt. Wir werden uns in den folgenden Kapiteln mit der Definition, Erklärungen, Beispielen und Anwendungen der Siteswaps befassen. Dazu ist jedoch unerlässlich als erstes etwas auszuholen, was den Begriff des Jonglierens betrifft.

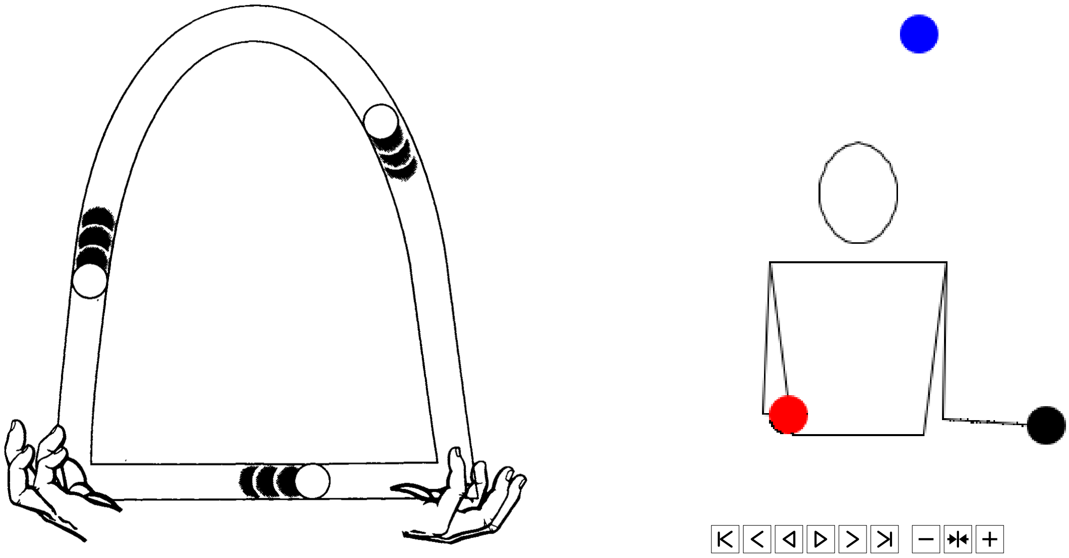


Abbildung 3: Shower mit 3 Bällen [GW97, Seite 510] [al11]

2. Einschränkungen

Obwohl es, wie in der Einleitung beschrieben, auch andere Arten des Jonglierens gibt, werden wir uns ab jetzt auf die Wurfjonglage beschränken. Das heisst, dass jeweils eine konstante Anzahl Objekte, durch abwechselndes Werfen und Fangen in der Luft gehalten werden. Der Einfachheit halber werden wir als Objekte immer Bälle nehmen. Die Eigenschaften dieser Art des Jonglierens präzisieren wir weiter wie folgt:

Definition 2.1 (Einfaches Jonglierens [Pol03, Seite 8])**.** Bälle werden *einfach jongliert*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(J1) Dem jonglieren wird ein konstanter Rhythmus zugrunde gelegt. In diesem Rhythmus (Zeitschritten) werden Bälle geworfen oder nichts getan.

(J2) Es wird immer davon ausgegangen, dass der Jongleur bereits immer jongliert hat und für immer weiter jonglieren wird. Das heisst, es gibt kein Beginn und kein Ende.

(J3) Pro Zeitschritt wird nie mehr als ein Ball gefangen und geworfen, wobei der gefangene Ball derselbe sein muss, wie der geworfene. Das heisst, dass sogenannte „Multiplex-Würfe“ – Würfe, bei denen mehrere Bälle gleichzeitig geworfen oder gefangen werden – verboten sind.

Bei der tatsächlichen Wurfjonglage ist (J3) häufig nicht erfüllt. Multiplex-Würfe kommen häufig vor und es gibt auch sehr einfache Multiplex-Muster: Man denke etwa an das gleichzeitige Hochwerfen und Fangen von zwei Bällen aus zwei Händen. Deshalb wird bei der Definition 2.1 der Zusatz „einfach“ gemacht. Ohne den Zusatz „einfach“, muss die Eigenschaft (J3) nicht erfüllt sein. Weil sich viele der folgenden

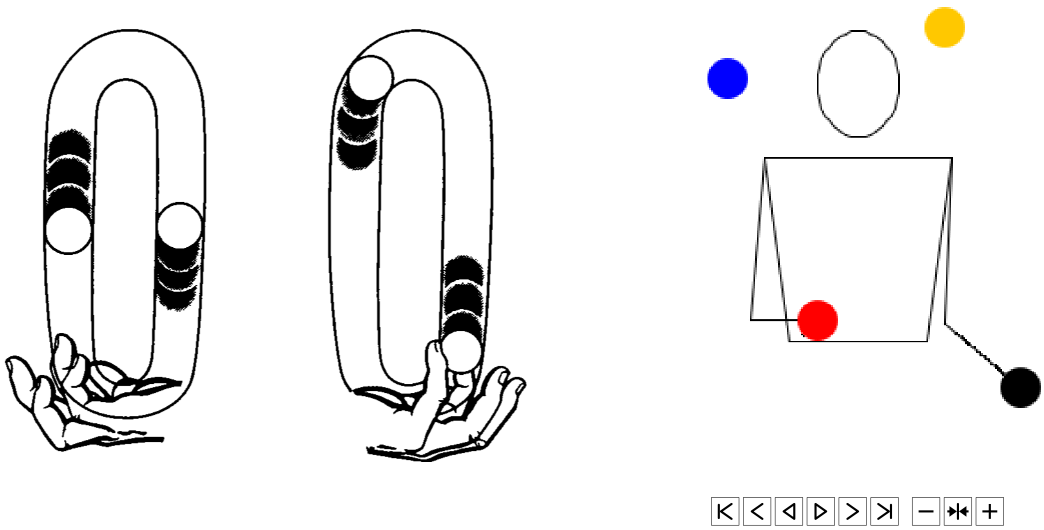


Abbildung 4: Fontäne mit 4 Bällen [GW97, Seite 509] [al11]

mathematischen Resultate nicht ohne weiteres auf Multiplex-Würfe verallgemeinern lassen – falls die Fragestellungen überhaupt sinnvoll formulierbar bleiben – ist die Eigenschaft (J3) wichtig. Auch aus praktischer Sicht lassen sich mit der Eigenschaft (J3) noch sehr viele interessante Muster erfassen.

(J2) vereinfacht die mathematische Beschreibung des Jonglierens dadurch, dass Randbedingungen nicht betrachtet zu werden brauchen. Die Eigenschaft (J1) erlaubt, die Zeit während welcher jongliert wird, zu diskretisieren.

Mit Hilfe der Definition 2.1 lässt sich eine Funktion f definieren, welche wir ihrerseits dazu benutzen können, um Jongliermuster zu definieren. Angenommen es werden $b \in \mathbb{N}$ Bälle einfach jongliert, wobei die Würfe jeweils zu den diskreten Zeitpunkten $t \in \mathbb{Z}$ stattfinden. Jetzt wird man sich fragen, was wohl von besonderem Interesse sein könnte, wenn wir das Jonglieren dieser Bälle besser verstehen möchten. Natürlich, wann welcher Ball geworfen wird. Also definieren wir auf der Menge $\mathbb{Z}$ der Wurfzeitpunkten die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ wie folgt [GW97, Seite 509]:

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{falls der zum Zeitpunkt } x \text{ geworfene Ball das nächste Mal} \\ & \text{zum Zeitpunkt } y \text{ geworfen wird.} \\ x & \text{falls kein Ball zum Zeitpunkt } x \text{ geworfen wird.} \end{cases}$$

Die Funktion f ist eine Permutation der ganzen Zahlen: f ist injektiv wegen (J3) und surjektiv wegen (J2). f besitzt zudem aus dem offensichtlichen Grund, dass ein geworfener Ball immer zu einem späteren als dem Wurfzeitpunkt landen muss, die Eigenschaft, dass $f(t) \geq t$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ ist.

Definition 2.2 (Jongliermuster, Höhenfunktion [GW97, Seite 510])**.** Ein *Jongliermuster* ist eine Permutation $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sodass $f(t) \geq t$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ ist. Die *Höhenfunktion* eines Jongliermusters wird definiert als $h(t) := f(t) - t$.

Die Funktion h misst in physikalisch präzisem Sinne nur die verstrichene Zeit zwischen zwei Würfen desselben Balles. Verschiedene Wurfzeiten können aber nur realisiert werden, indem ein Ball unterschiedlich hoch geworfen oder länger in einer Hand gehalten wird. Genauer ist die Wurfhöhe in etwa proportional zum Quadrat der verstrichenen Zeit, allerdings durch unterschiedlich langes Halten in der Hand und die Individualität des Jongleurs nicht exakt berechenbar. Jedoch ist es die Wurfhöhe, die die verschiedenen Würfe visuell am besten unterscheiden lässt, weshalb wir h als Höhenfunktion bezeichnen.

Gemäss Definition 2.2 lässt sich die Höhenfunktion h direkt aus f berechnen und auch umgekehrt ist $f(t) = h(t) + t$ direkt aus h berechenbar. Es folgt daraus:

Satz 2.3 (Höhenfunktion)**.** *Es genügt die Höhenfunktion h eines Jongliermuster zu kennen, um dieses vollständig beschreiben zu können.*

Wie wir sehen werden, ist es oft einfacher, Jongliermuster über die Höhenfunktion h zu beschreiben, als direkt mit der Funktion f. Aber Achtung: Eine Höhenfunktion h beschreibt nur ein gültiges Jongliermuster, falls h eine nicht negative Funktion und ihr zugrunde liegendes f eine Permutation ist.

Bis jetzt wurde nichts darüber gesagt, wie viele Hände zum Jonglieren verwendet werden. Das mit gutem Grund, denn es spielt für ein bestimmtes Jongliermuster keine Rolle, mit wie vielen Händen es jongliert wird. Die Definition 2.1 und Definition 2.2 stellen sicher, dass jedes Muster zuerst einmal mit nur einer Hand jongliert werden kann. Es muss nämlich in jedem Zeitschritt nur ein Ball gefangen und geworfen werden. Werden nun die zur Verfügung stehenden Hände abwechselnd für die verschiedenen Zeitschritte gebraucht – präziser wird jeder Hand zyklisch ein Zeitschritt zugeordnet – kann jedes Muster mit beliebig vielen Händen jongliert werden. Beim tatsächlichen einfachen Jonglieren mit zwei Händen kann beobachtet werden, dass häufig eine gewisse Überschneidung des Fangens und Werfens der linken mit dem Fangen und Werfen der rechten Hand stattfindet. Das heisst, dass während der Jonglage ein Ball zum Beispiel links gefangen wird, dann ein zweiter rechts gefangen wird noch bevor derjenige der linken wieder geworfen wird, um danach auch denjenigen der rechten wieder zu werfen. Hierbei handelt es sich streng betrachtet bereits nicht mehr um einfaches Jonglieren, könnte aber – ausser bei echten Multiplex-Würfen – durch leichtes ändern der Fang- und Wurfzeiten korrigiert werden. Diese Korrektur wird aber in der Praxis fast nie gemacht, da Bälle, die sich in den Händen befinden und nicht durch die Luft fliegen, einfacher zu kontrollieren sind. Trotzdem ist es einfacher in Gedanken das Fangen und Werfen eines Balles als eine Aktion zusammenzufassen und sich vorzustellen, dass diese Aktionen immer durch gleiche Zeitintervalle voneinander getrennt stattfinden. Natürlich verändert sich durch das verwenden mehrerer Hände und unterschiedlich starkes Überschneiden nur der Anblick des Jongliermusters und nicht das Jongliermuster selbst.

Der mathematischen Einfachheit halber wäre es wohl am sinnvollsten, sich bei den folgenden Visualisierungen immer nur auf eine Hand zu beschränken. Wegen der Anwendbarkeit und dem direkten Vergleich mit tatsächlicher Jonglage, werden jedoch, falls möglich, immer Visualisierungen mit zwei Händen Verwendung finden.

An dieser Stelle ist interessant zu bemerken, wie die verschiedenen Werte der Höhenfunktion beim Jonglieren mit zwei Händen tatsächlich aussehen. Bei der zyklischen Zuordnung der Zeitschritte auf die beiden Hände fallen nur jeder zweite Zeitschritt auf dieselbe Hand. Das hat zur Folge, dass nur ungerade Werte der Höhenfunktion einem Wurf von der einen in die andere Hand (kreuzend) entsprechen kann. Analog wird bei geraden Werten der Ball immer von derselben Hand gefangen, die ihn vorher auch geworfen hat. Die Tabelle 1 gibt einen Eindruck wie unterschiedliche Werte der Höhenfunktion beim Jonglieren mit zwei Händen ausgeführt werden. Diese Angaben können sich je nach Jongleur und jongliertem Muster stark voneinander unterscheiden, weshalb diese Werte nur als grobe Richtwerte zu verstehen sind. Die Ausführung der Werte 0 und 2 der Höhenfunktion bedürfen vielleicht einer zusätzlichen Erklärung: Der Wert 0 bedeutet gemäss Definition, dass in diesem Zeitschritt kein Ball gefangen und geworfen wird, entspricht also einer leeren Hand. Der Wert 2 entspricht eigentlich einem ganz flachen Wurf von und in dieselbe Hand. Da aber dazwischen nur ein Zeitschritt stattfindet, der auf die andere Hand fällt, kommt die Hand, welche den Wert 2 geworfen hat direkt wieder an die Reihe, weshalb es nie wirklich nötig ist diesen flachen Wurf auszuführen (es können keine anderen Bälle in die Quere kommen). Folglich wird aus Bequemlichkeit dieser flache Wurf nicht ausgeführt.

Wert von h	Beschreibung des Wurfes	ungefähre Höhe
0	leere Hand (Pause ohne Ball)	–
1	direkt (sehr flach) in die andere Hand	–
2	halten des Balles in der Hand (Pause mit Ball)	–
3	im Bogen in die andere Hand	Kinn
4	gerade nach oben in dieselbe Hand	Körpergrösse
5	in hohem Bogen in die andere Hand	gestreckter Arm

Tabelle 1: Jonglieren mit zwei Händen

3. Siteswaps

Angenommen jemand jongliert einfach mit beiden Händen und bewegt sich währenddessen gleichförmig entlang einer geraden Linie vorwärts. Gemäss Definition 2.1 wird der Jongleur abwechselnd rechts fangen und werfen, links fangen und werfen etc., falls allfällige Überschneidungen des Fangens und Werfens der beiden Hände – wie vorgängig erwähnt – nicht beachtet werden. Wird dieses jeweilige Fangen und Werfen einer Hand als einzige Aktion interpretiert und als Kreis am Boden aufgezeichnet, während sich der Jongleur wie beschrieben bewegt, dann ergibt sich in etwa Abbildung 5. Die obere Zeile zeigt die Aktionen der linken Hand und die untere Zeile diejenigen der rechten Hand. Ausserdem sind in dieser Abbildung die Zeitpunkte der markierten Aktionen numeriert worden. Diese Zahlen entsprechen natürlich den diskreten Zeitpunkten des Definitionsbereiches der Funktion f.

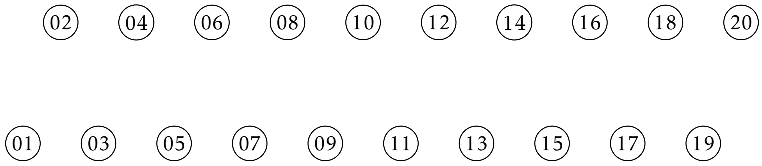


Abbildung 5: Markierungen

Eines der simpelsten Jongliermuster überhaupt (ohne Pausen) ist die sogenannte Kaskade mit drei Bällen. Hierbei werden drei Bälle so einfach jongliert, dass alle Bälle immer in etwa gleich hoch geworfen werden. Mit anderen Worten ist die Höhenfunktion h dieses Musters konstant. Unter diesen Voraussetzungen muss die Höhenfunktion $h(t) = 3$ sein. Genaueres dazu ist dem Satz 4.13 zu entnehmen. Mit einem Ball rot, einem schwarz und einem blau, ergibt sich Abbildung 6. Die farbigen Linien, welche die Würfe mit den entsprechend farbigen Bällen darstellen, verbinden jeweils t und $f(t)$. Die kleine Nummer in der jeweiligen Farbe des Balles gehalten und etwas rechts ober- bzw. unterhalb der Zeitschritt-Nummer t entspricht dem Wert $h(t)$ der Höhenfunktion h.

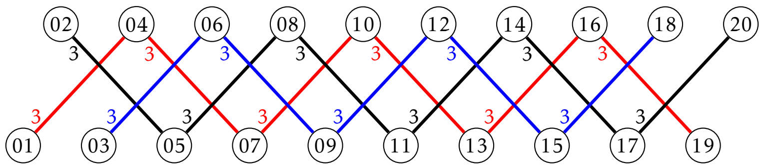


Abbildung 6: Kaskade mit 3 Bällen

Normalerweise wird die Kaskade so ausgeführt, dass die Bälle „von innen nach aussen“ geworfen werden. Man meint damit, dass ein Ball jeweils „unter“ demjenigen Ball hindurch geworfen wird, der als nächstes in der entsprechenden Hand landen wird. Betrachtet man frontal eine so ausgeführte Kaskade eines stehenden Jongleurs, so beschreiben die Bälle eine Figur, die einer liegenden Acht ähnelt. Visualisiert ist eine so ausgeführte Kaskade mit 3 Bällen in der Abbildung 2. Keine der Eigenschaften von Definition 2.1 sprechen dagegen, dass die Bälle nicht auf andere Art geworfen und oder gefangen werden dürfen. Beliebt bei Jongleuren ist, einige oder alle Bälle „von aussen nach innen“ zu werfen anstatt „von innen nach aussen“. Sehr interessant ist auch die Ausführung *Mills Mess*, bei welcher die Arme laufend überkreuzt werden. Spektakulär sind auch Würfe über die Schultern oder unter den Beinen hindurch. Drei ausgewählte Varianten sind in Abbildung 7 dargestellt. Obwohl diese Varianten unter Jongleuren als eigene Jongliertricks gelten, kann unsere Definition 2.1 sie nicht unterscheiden, weshalb für uns alle diese Variationen als äquivalent aufgefasst werden. Sehr viel über unterschiedliche Ausführungen ein und desselben Jongliermusters kann gelernt werden, wenn zum Beispiel mit einem Simulator wie *Juggling Lab* [al11] experimentiert wird.

Ein weiteres sehr bekanntes Muster mit drei Bällen ist der Shower. Frontal betrachtet bewegen sich hierbei die Bälle „im Kreis“. Im Unterschied zur Kaskade bzw. der

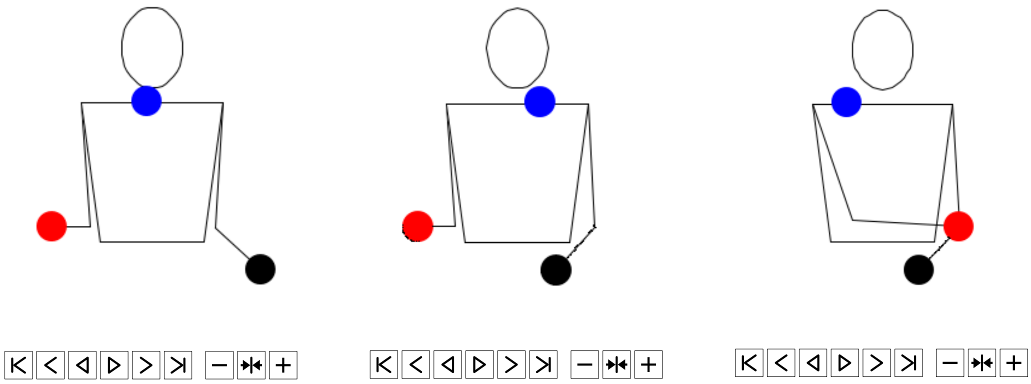


Abbildung 7: Half Shower, Aussenkaskade, Mills Mess [al11]

Variation Half Shower aus Abbildung 7, werden nicht alle Bälle gleich hoch geworfen. Sollen für den Beobachter die Bälle im Uhrzeigersinn verlaufen, dann muss der Jongleur immer jeweils flach von der linken in die rechte Hand und von der rechten Hand in hohem Bogen zurück in die linke Hand werfen (einfacher für Rechtshänder). Aus der linken Hand werden also ohne Pause flachere Würfe als jene der 3-Ball-Kaskade in die rechte Hand geworfen. Werden wieder drei Bälle verwendet, dann müssen diese flachen Würfe wie in Abbildung 8 aussehen.

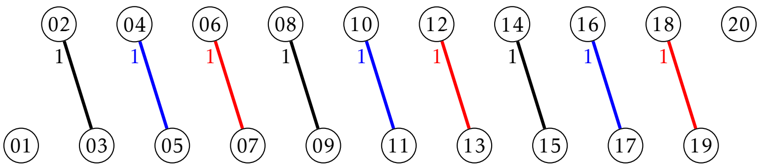


Abbildung 8: Flache Würfe der Shower mit drei Bällen

Für die höheren Würfe von der rechten Hand in die linke Hand bleibt nun keine andere Wahl als die in Abbildung 9.

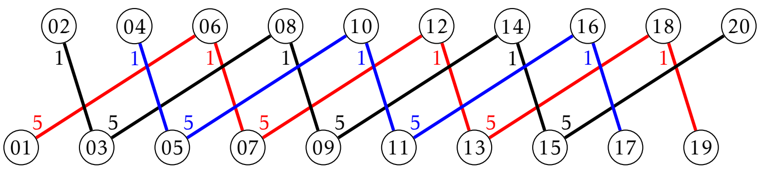


Abbildung 9: Shower mit drei Bällen

Für die Höhenfunktion h des 3-Ball-Showers ausgeführt wie in Abbildung 9 gilt also:

$$h(t) = \begin{cases} 5 & \text{falls } t \text{ ungerade.} \\ 1 & \text{falls } t \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die möglicherweise gegen die Intuition hohe Nummer 5 der hohen Würfe des 3-Ball-Showers kann man auch dadurch erklären, dass, nachdem ein hoher Wurf geschehen ist, die zwei verbliebenen Bälle durch beide Hände gehen müssen, was vier Würfe benötigt, bevor der ursprüngliche Ball wieder geworfen wird: im fünften Wurf – dieses Mal jedoch flach.

Wir bemerken, dass die Höhenfunktionen der 3-Ball-Kaskade bzw. des entsprechenden Showers besonders einfache (periodische) Funktionen sind. Wegen Satz 2.3 und der Periodizität genügt für die Beschreibung der 3-Ball-Kaskade die Ziffer 3 und für den 3-Ball-Shower die Ziffern 5 und 1. Das motiviert die folgende Definition und Notation.

Definition 3.1 (Siteswap, n-periodisch [GW97, Seite 512])**.** Ein Jongliermuster heisst *n-periodischer Siteswap* oder kurz *Siteswap*, falls seine zugrunde liegende Höhenfunktion h eine n-periodische Funktion ist. Das heisst, dass $h(t+n) = h(t)\ \forall t \in \mathbb{Z}$ ist.

Bemerkung 3.2. Ein n-periodischer Siteswap entspricht einer endlichen Folge natürlicher Zahlen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, den Werten einer Periode der Höhenfunktion. Da eine Periode an beliebiger Stelle begonnen werden kann, entspricht jede zyklische Vertauschung einer solchen Zahlenfolge demselben Siteswap.

Notation 3.3 (Siteswaps [Knu93])**.** Ein Siteswap wird traditionell so notiert, indem eine Periode der Werte seiner Höhenfunktion direkt aneinandergereiht werden. Übersteigt ein Wert 9, dann werden keine Trennzeichen verwendet, sondern die Buchstaben A für 10, B für 11 etc. Häufig wird mit einem der grössten Werte der Höhenfunktion begonnen.

Aus der Notation 3.3 spricht natürlich der Praktiker und nicht der Theoretiker, wenn man bedenkt, dass so keine Werte grösser als Z notiert werden können.

Beispiel 3.4 (Notation Siteswaps)**.**

Name	Siteswap	Periode
3-Ball-Kaskade	3	1
3-Ball-Shower	51 (oder 15)	2
4-Ball-Shower	71 (oder 17)	2
6-Ball-Shower	B1 (oder 1B)	2

Jonglieren wird übrigens auch vom Publikum nur dann als periodisch aufgefasst, wenn die Höhenfunktion periodisch ist (mit nicht allzu langer Periode), also ein Siteswap jongliert wird.

Um andere Jongliermuster zu finden, könnte man versuchen eine beliebige Ziffernfolge (zum Beispiel 432) als Siteswap zu interpretieren. Spätestens nachdem man 432 in ein leeres Diagramm (wie Abbildung 5) zu zeichnen versucht, merkt man, dass 432 kein gültiger Siteswap ist. Abbildung 10 zeigt das Problem: Drei Bälle landen zur gleichen Zeit ($t = 5$).

Bemerkung 3.5. In einem gültigen Siteswap darf auf eine Ziffer, die dem Wert k entspricht, nie direkt die Ziffer mit Wert $k-1$ folgen für $k \geq 2$.

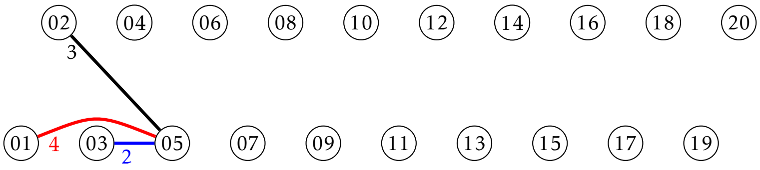


Abbildung 10: 432 ist kein gültiger Siteswap

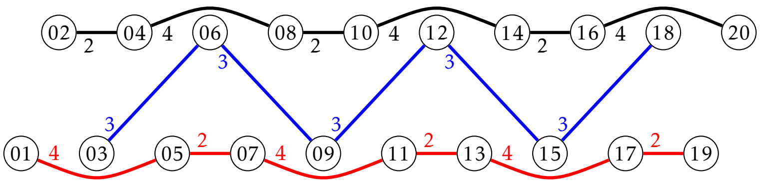


Abbildung 11: Siteswap 423

Durch Permutation von 432 kann aber ein gültiger Siteswap erzeugt werden, nämlich 423 – siehe dazu Abbildung 11.

Bedeutend einfacher, um neue Siteswaps zu finden, ist es, einen bekannten Siteswap als Grundlage zu nehmen und kontrolliert Änderungen vorzunehmen. Wir nehmen zum Beispiel den Siteswap 3, visualisiert in der Abbildung 6, und betrachten die Würfe zwei direkt aufeinander folgender Zeitschritte (zum Beispiel $t = 7$ und $t = 8$). Die Würfe zu diesen Zeitpunkten lassen sich ändern, ohne dass der Rest des Jongliermusters angepasst zu werden braucht. Dazu verändern wir die Würfe von $h(7) = 3$ und $h(8) = 3$ zu $h(7) = 4$ und $h(8) = 2$. Wir verlängern also den ursprünglichen Wurf zum Zeitpunkt $t = 8$ um eins, werfen ihn dafür aber einen Zeitschritt früher – andererseits verkürzen wir den ursprünglichen Wurf zum Zeitpunkt $t = 7$ um eins, werfen ihn dafür aber einen Zeitschritt später. Visualisiert ist diese Strategie (im folgenden nur noch *Vertauschung* genannt) in Abbildung 12.

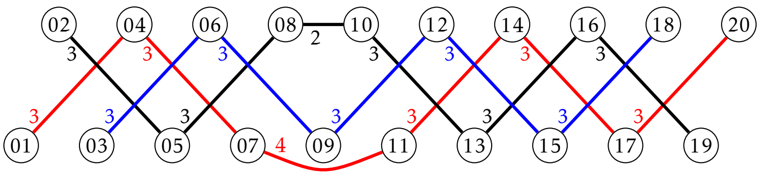


Abbildung 12: Vertauschung

Natürlich kann eine Vertauschung mehrfach und an verschiedenen Stellen, insbesondere auch periodisch, angewendet werden. Aus 33 (zwei Perioden des Siteswaps 3) entsteht der Siteswap 42 (Siehe Abbildung 13) und aus 42 – was dasselbe ist wie 24 – kann der Siteswap 51 abgeleitet werden (Shower, Abbildung 9).

Startet man mit 333 (drei Perioden des Siteswaps 3), so findet man direkt den Siteswap 423 (Abbildung 11) und in einem zweiten Schritt den vielleicht einfachsten und nicht offensichtlichen Siteswap 441 (Abbildung 14).

Eine weitere Vertauschung vom Siteswap 441 bzw. von 144 liefert den Siteswap

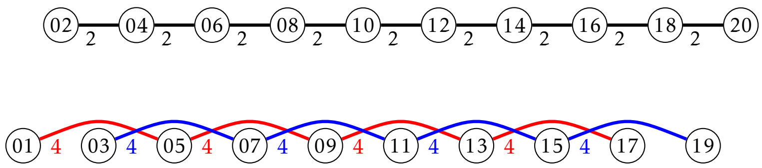


Abbildung 13: Siteswap 42

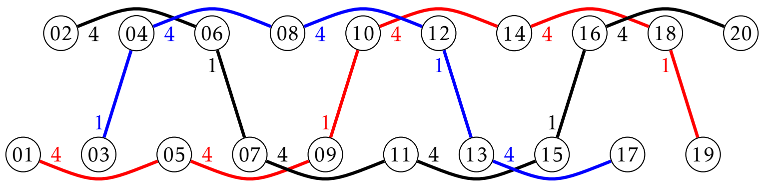


Abbildung 14: Siteswap 441

504 (Abbildung 15). Man beachte, dass Vertauschungen auch dann noch möglich sind, wenn eine Null entsteht. Natürlich ist keine Vertauschung möglich, falls die Höhenfunktion ein negativer Wert bekommen sollte.

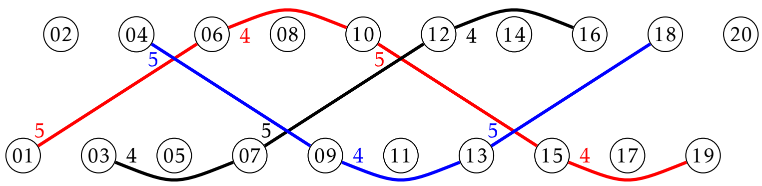


Abbildung 15: Siteswap 504

Zusammenfassend können, begonnen mit einem bekannten Siteswap, viele neue Siteswaps erzeugt werden durch Vertauschung, zyklisches Vertauschen und allfälliger Repetition.

4. Eigenschaften von Siteswaps

Für die folgenden Kapitel werden Methoden der Algebra benötigt. Nach einer Zusammenstellung der benötigten Begriffe und Konzepte werden diese sogleich benutzt werden, um interessante Einsichten über Siteswaps zu gewinnen.

Definition 4.1 (Gruppe [Bos04, Seite 11])**.** Eine *Gruppe* ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto ab$, welche folgenden Eigenschaften genügt:

(i) Die Verküpfung ist *assoziativ*, das heisst, dass $(ab)c = a(bc)$ für alle $a,b,c \in G$ ist.

(ii) Es existiert ein *Einselement*, das heisst, dass es ein $e \in G$ gibt, mit $ea = a = ae$ für alle $a \in G$.

(iii) Jedes $a \in G$ besitzt ein *inverses Element* $a^{-1} \in G$. Das heisst, dass $aa^{-1} = e = a^{-1}a$.

Beispiel 4.2. Die Menge der Permutationen einer Menge X

$$\mathcal{S}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

bildet zusammen mit der Verknüpfung $(fg)(x) := f(g(x))$ eine Gruppe.

Definition 4.3 (Ordnung einer Gruppe [Bos04, Seite 16])**.** Die Anzahl Elemente einer Gruppe G heisst *Ordnung* der Gruppe G und wird mit $|G|$ bezeichnet .

Definition 4.4 (Untergruppe [Bos04, Seite 13])**.** Eine Teilmenge $H \subset G$ heisst *Untergruppe* der Gruppe G, falls H die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $e \in H$

(ii) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

(iii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

Gemäss Definition 2.2 ist ein Jongliermuster, geschrieben als Funktion f, eine Permutation der ganzen Zahlen. Also ist die Menge aller Jongliermuster J eine Teilmenge von $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$. Jedoch ist J keine Untergruppe von $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, weil Bedingung (iii) von Definition 4.4 nicht erfüllt ist. Genauer ist es die Bedingung $f(t) \geq t$, welche die Existenz inverser Elemente verhindern kann: Die zum Siteswap 3 inverse Permutation wäre „Siteswap -3“.

Proposition-Definition 4.5 (Erzeugte Untergruppe [Bos04, Seite 20])**.** *Für jedes Element g einer Gruppe G gibt es eine Untergruppe $\langle g \rangle$ von G mit kleinster Ordnung, sodass g Element dieser Untergruppe ist. $\langle g \rangle$ heisst die von g* erzeugte Untergruppe *und es gilt:*

$$\langle g \rangle = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k$$

Beweis. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k$ eine Untergruppe von G ist, die g enthält. $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k$ hat ausserdem kleinst mögliche Ordnung, weil mit dem Element g gemäss Definition 4.4 zumindest alle Elemente von $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k$ in einer Untergruppe enthalten sein müssen, die g enthält. □

Definition 4.6 (Zyklische Gruppe [Bos04, Seite 21])**.** Eine Gruppe G heisst *zyklisch*, falls $\langle g \rangle = G$ für ein $g \in G$ ist.

Definition 4.7 (Bahnen einer Permutation [Bos04, Seite 240])**.** Sei $g \in \mathcal{S}(X)$ ein Element der Permutationsgruppe der Menge X. Ausserdem sei $x \in X$ fest.

$$\langle g \rangle x := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k(x)$$

heisst *Bahn* oder *Orbit* von x unter $\langle g \rangle$.

Beispiel 4.8 (Bahnen)**.** Wir betrachten die Permutationsgruppe $\mathcal{S}(\{1,2,3,4,5\})$, welche besser bekannt ist unter der Bezeichnung $\mathcal{S}_5$. Sei $\sigma \in \mathcal{S}_5$ diejenige Permutation, welche bestimmt wird durch $\sigma(1) = 5$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 3$ und $\sigma(5) = 1$.

Dann ist

$$\langle\sigma\rangle 1 = \bigcup_{k=0}^{4} \sigma^k(1) = \{1,5\}$$

$$\langle\sigma\rangle 2 = \bigcup_{k=0}^{4} \sigma^k(2) = \{2,4,3\}$$

$$\langle\sigma\rangle 3 = \bigcup_{k=0}^{4} \sigma^k(3) = \{3,2,4\}$$

$$\langle\sigma\rangle 4 = \bigcup_{k=0}^{4} \sigma^k(4) = \{4,3,2\}$$

$$\langle\sigma\rangle 5 = \bigcup_{k=0}^{4} \sigma^k(3) = \{5,1\}$$

Die Bahnen der Elemente 1 und 5 stimmen überein; auch die Bahnen der Elemente 2, 3 und 4 stimmen überein. Die Permutation σ „besteht" aus den Bahnen $\{1,5\}$ und $\{2,4,3\}$. Genaueres dazu ist dem Lemma 4.9 und der Proposition-Definition 4.10 zu entnehmen. In diesem Beispiel sind die Bahnen besser bekannt als Zykel $(1,5)$ und $(2,4,3)$ im Zusammenhang mit der beliebten Zykel-Schreibweise von Permutationen: $\sigma = (1,5)(2,4,3)$.

Lemma 4.9 ([Bos04, Seite 240])**.** *Für zwei Bahnen $\langle g\rangle x$ und $\langle g\rangle y$ gilt immer entweder $\langle g\rangle x \cap \langle g\rangle y = \emptyset$ oder $\langle g\rangle x = \langle g\rangle y$.*

Beweis. Sei $z \in \langle g\rangle x \cap \langle g\rangle y$. Dann ist $z = g^n(x) = g^m(y)$ für geeignete n und m. Also ist $x = g^{-n}(z) = g^{m-n}(y)$. Folglich ist $x \in \langle g\rangle y$ und damit $\langle g\rangle x \subset \langle g\rangle y$. Analog folgt $\langle g\rangle x \supset \langle g\rangle y$. □

Aus Lemma 4.9 folgt nun direkt:

Proposition-Definition 4.10 (Vertretersystem und Anzahl Bahnen [Bos04, Seite 240])**.** *Es gibt ein* Vertretersystem *$V \subset X$ der Bahnen von $g \in \mathcal{S}(X)$, sodass*

$$X = \bigsqcup_{v \in V} \langle g\rangle v$$

die disjunkte Vereinigung der Bahnen von g ist. Die Mächtigkeit verschiedener Vertretersysteme ist gleich und heisst Anzahl Bahnen von g.

Lemma 4.11 ([GW97, Seite 511]). *Sei $f \in J$ ein Jongliermuster und $t \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Mächtigkeit der Bahn $\langle f \rangle t$ entweder unendlich oder eins.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus der Eigenschaft, dass für ein Jongliermuster $f(t) \geq t$ gilt $\forall t \in \mathbb{Z}$. □

Definition 4.12 (benötigte Anzahl Bälle [GW97, Seite 511]). Die Anzahl Bälle, welche zum Jonglieren eines Jongliermusters $f \in J$ benötigt werden, entspricht der Anzahl unendlicher Bahnen von f und wird mit $B(f)$ bezeichnet.

Satz 4.13 (Grundmuster [Knu10]). *Für ein natürliches $b \geq 1$ erzeugt die konstante Höhenfunktion $h(t) = b$ einen Siteswap mit Periode 1, für welchen b Bälle benötigt werden. Siteswap: b*

Beweis. Eine konstante Höhenfunktion $h(t) = b$ entspricht in bekannter Art und Weise einem $f(t) = h(t) + t = b + t$, welches als „Translation" auf der unendlichen Menge $\mathbb{Z}$ eine Permutation aus $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ sein muss. Ausserdem ist $h(t) > 0$ und folglich auch $f(t) \geq t$. Es liegt also ein Siteswap vor, welcher durch die konstante Höhenfunktion Periode 1 haben muss.

Die Menge $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ der Restklassen von $\mathbb{Z}$ modulo b kann als Vertetersystem der (unendlichen) Bahnen von f aufgefasst werden, deren Anzahl der Ordnung von $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, also b, der Anzahl benötigter Bälle entspricht. □

Die Grundmuster von Satz 4.13 haben übrigens unterschiedliche Namen, je nachdem ob die Anzahl Bälle b gerade oder ungerade ist. Man spricht von der Kaskade mit b Bällen, falls b ungerade ist und von der Fontäne mit b Bällen, falls b gerade ist. Diese Bezeichnungen kommen aus einer Zeit lange bevor die moderne Notation und Klassifikation von Jongliermustern durch Siteswaps entwickelt wurde. In Anbetracht dessen ist es wenig verwunderlich, dass für die Grundmuster mit einer geraden Anzahl Bälle unterschiedliche Namen verwendet wurden, als für Grundmuster mit einer ungeraden Anzahl Bälle, denn bei einer geraden Anzahl Bälle und zwei Händen zum Jonglieren wechseln die Bälle nie die Hände, während bei einer ungeraden Anzahl die Bälle immer die Hände wechseln, was vom Standpunkt eines Betrachters zu sehr unterschiedlichen Mustern führt. Siehe dazu auch die Abbildung 2 und Abbildung 4.

Während im Abschnitt 3 die Siteswaps eingeführt werden und gezeigt wird, wie neue Siteswaps aus bekannten erzeugt werden können, möchten wir nun besonders der umgekehrten Fragestellung nachgehen und uns fragen, wie man (möglichst leicht) erkennen kann, wann eine gegebene endliche Zahlenfolge einem Siteswap entspricht und wie viele Bälle zum Jonglieren eines gegebenen Siteswaps benötigt werden. Dazu werden wir unterschiedliche Ideen verfolgen – gewisse werden auf dieselben Resultate führen, aber unterschiedliche mathematische Vorkenntnisse benutzend und mit verschiedenem Potential zur Verallgemeinerung und Anwendung versehen sein.

Eine Idee zur Beantwortung dieser Fragen ist, dieselben Prinzipien von Abschnitt 3, nämlich die „Vertauschung" und das „zyklische Vertauschen" zu verwenden: das natürlich in „umgekehrter Reihenfolge", das heisst, wir werden versuchen aus einer gegebenen endlichen Zahlenfolge mit Hilfe dieser Prinzipien eine konstante Folge zu erhalten. Da gemäss Satz 4.13 eine konstante Folge einem Grundmuster entspricht, von welchem wir wissen, dass es einen bekannten Siteswap erzeugt, können wir interessante Rückschlüsse ziehen zu Eigenschaften der ursprünglichen Zahlenfolge, vorausgesetzt das ursprüngliche Vorhaben zur Erzeugung einer konstanten Folge gelingt.

Satz 4.14 (Modifikationen [Knu10; Knu93]). *Eine endliche Zahlenfolge* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *entspricht genau dann einem Siteswap, falls eine endliche Abfolge von Modifikationen*

(M1) $b := a_k$, $c := a_{k+1}$, $a_k := c + 1$, $a_{k+1} := b - 1$ *(Vertauschung an der Stelle* k*)*

(M2) $a_1 := a_2$, $a_2 := a_3, \ldots$, $a_n := a_1$ *(zyklisches Vertauschen)*

auf eine konstante Zahlenfolge führt. (M1) ist dabei nur erlaubt, falls $b \geq 0$ *ist.*

Beweis. Als erstes bemerken wir, dass es genügt zu zeigen, dass jede Zahlenfolge, welche auch tatsächlich ein Siteswap ist, durch eine endliche Abfolge dieser Modifikationen auf eine konstante Zahlenfolge gebracht werden kann. Das deshalb, weil gemäss Satz 4.13 konstante Zahlenfolgen Siteswaps darstellen und beide Modifikationen, wie in Abschnitt 3 erklärt, eine Zahlenfolge einen Siteswap bleiben lässt (in beide Richtungen).

Wir beginnen also mit einer Zahlenfolge, welche ein Siteswap ist. Die Strategie ist nun immer, wenn ein Index k gefunden werden kann, für welchen $a_k > a_{k+1}$ ist, die Modifikation (M1) anzuwenden. Sobald es keinen Index k mehr gibt, für welchen $a_k > a_{k+1}$ ist, die Folge aber immer noch nicht konstant sein sollte, dann wird (M2) angewendet, bis es wieder einen Index k gibt, mit $a_k > a_{k+1}$, sodass wieder (M1) angewendet werden kann. Das funktioniert immer, solange die Folge nicht konstant ist. Man muss sich an dieser Stelle aber fragen, ob man so immer eine konstante Folge erhält. Wann könnte das Verfahren scheitern? Das könnte man genau dann beobachten, falls es an einer Stelle des Verfahrens zumindest einen Index k geben würde, mit $a_k = a_{k+1} + 1$. Nur dann würde nämlich die Modifikation (M1) keine Veränderung bewirken, obwohl $a_k > a_{k+1}$ ist. Dann wäre aber die Folge wegen Bemerkung 3.5 kein Siteswap, weshalb auch die ursprüngliche Folge kein Siteswap sein könnte. Das wäre im Widerspruch zur Annahme, dass mit einem Siteswap begonnen wurde. Wir erreichen auf diese Weise also immer eine konstante Folge, solange wir mit einem Siteswap beginnen. ☐

Beispiel 4.15. 51414 ist ein Siteswap, weil

$$51414 \xrightarrow{\text{M1}} 24414 \xrightarrow{\text{M1}} 24234 \xrightarrow{\text{M1}} 23334 \xrightarrow{\text{M2}} 42333 \xrightarrow{\text{M1}} 33333$$

Beispiel 4.16. 5141 ist kein Siteswap, weil

$$5141 \xrightarrow{\text{M1}} 2441 \xrightarrow{\text{M1}} 2423 \xrightarrow{\text{M1}} 2333 \xrightarrow{\text{M2}} 3332 \xrightarrow{\text{M1}} 3332 \xrightarrow{\text{M1}} \cdots$$

Wegen dem Satz 4.14 wissen wir nun auch, dass wir mit den Strategien zur Konstruktion von Siteswaps aus Abschnitt 3, im Wesentlichen (M1) und (M2), alle Siteswaps aus den Grundmustern konstruieren können. Jedoch sagt uns der Satz nicht, wie wir das genau bewerkstelligen. Allerdings haben (M1) und (M2) die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie die Anzahl benötigter Bälle zum Jonglieren nicht verändern. Von den Grundmustern kennen wir aber die Anzahl benötigter Bälle. Aus Beispiel 4.15 folgt nicht nur, dass 51414 ein Siteswap ist, sondern auch, dass dieser drei Bälle benötigt. Doch muss die genaue Abfolge der Modifikationen überhaupt bekannt sein, wenn man nur die Frage nach der Anzahl benötigter Bälle beantworten will? Nein, denn das arithmetische Mittel einer Zahlenfolge wird durch (M1) und (M2) ebenfalls nicht verändert. Weil dieses arithmetische Mittel bei den Grundmustern der Anzahl benötigter Bälle entspricht, folgt unmittelbar der Satz:

Satz 4.17 (Mittelwert eines Siteswaps [GW97, Seite 511]). *Das arithmetische Mittel der Ziffern, welche einen Siteswap bilden, entspricht der Anzahl Bälle, die zum Jonglieren dieses Siteswaps benötigt werden.*

Beispiel 4.18. Der Siteswap 51414 benötigt 3 Bälle, weil $\frac{5+1+4+1+4}{5} = 3$ ist.

An dieser Stelle sei auf die vielen Beispiele interessanter Siteswaps im Anhang A verwiesen.

Eine effizientere Art den Satz 4.17 zu beweisen ist, anstatt den Satz 4.14, das folgende Lemma 4.19 zu verwenden. Man beachte, dass bei diesem Lemma ein Grenzprozess eine zentrale Rolle spielt.

Lemma 4.19 ([GW97, Seite 511]). *Sei $h(t)$ die Höhenfunktion eines Jongliermusters f. Dann existiert der Grenzwert*

$$\lim_{|I|\to\infty} \frac{\sum_{t\in I} h(t)}{|I|} \qquad I = \{a, a+1, \ldots, b\} \subset \mathbb{Z}$$

und entspricht der Anzahl benötigter Bälle $B(f)$ des Jongliermusters f.

Beweis. Als Höhenfunktion eines Jongliermusters ist $h(t)$ beschränkt. Angenommen $h(t) \leq B$ für alle $t \in \mathbb{Z}$. Falls I ein Intervall ist mit $|I| > B$, dann gilt für jede unendliche Bahn O der Permutation f, dass $O \cap I \neq \emptyset$ ist. Ausserdem gilt dann:

$$|I| - 2B \leq \sum_{t\in O\cap I} h(t) \leq |I| \tag{1}$$

Die Summe in (1) kommt also der Anzahl unendlicher Bahnen von f beliebig nahe, falls nur $|I|$ genügend gross ist. Man beachte, dass wegen Lemma 4.11 immer $|O| = \infty$ oder $|O| = 1$ ist und im letzteren Fall $h(t) = 0$ ist und nichts zur Summe (1) beiträgt. Also muss der Grenzwert des arithmetischen Mittels von $h(t)$ über ein Intervall $\{a, a+1, \ldots, b\}$ aufeinander folgender ganzer Zahlen der Anzahl unendlicher Bahnen der Permutation f entsprechen. $\square$

Wie angekündigt, folgt der Satz 4.17 direkt aus Lemma 4.19, denn ein Siteswap $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ hat eine periodische Höhenfunktion h und es gilt:

$$B(f) = \lim_{|I| \to \infty} \frac{\sum_{t \in I} h(t)}{|I|} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

Selbstverständlich muss wegen Satz 4.17 jede Folge, welche einen Siteswap beschreibt, einen ganzzahligen Mittelwert besitzen. Da drängt sich natürlich die Frage auf, ob jede endliche natürliche Zahlenfolge mit ganzzahligem Mittelwert auch einem Siteswap entspricht. Dass das nicht stimmt, kann einfach an einem Gegenbeispiel, wie 432 aus Abbildung 10 eingesehen werden, denn $\frac{4+3+2}{3} = 3$ und 432 ist kein Siteswap. Interessant ist, dass gilt

Satz 4.20 (Existenz einer Permutation [Pol03, Seite 30])**.** *Für jede endliche natürliche Zahlenfolge mit ganzzahligem Mittelwert gibt es eine Permutation, welche die Zahlenfolge zu einem Siteswap macht.*

Bemerkung 4.21. Der Beweis von Satz 4.20 ist zwar elementar und leicht verständlich, jedoch ziemlich umfangreich und nicht wichtig für das Verständnis der folgenden Resultate. In der Hoffnung so für mehr Übersicht zu sorgen, wird für einen Beweis auf [Pol03, Seite 30] verwiesen.

Der ganzzahlige Mittelwert ist also nur ein notwendiges Kriterium für einen Siteswap, jedoch kein hinreichendes. Im folgenden wird ein hinreichendes Kriterium erarbeitet werden.

Bemerkung 4.22. Die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, die Restklassen, können im folgenden nicht speziell als solche gekennzeichnet sein. Wir schreiben zum Beispiel $4 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Lemma 4.23 ([GW97, Seite 513])**.** *Falls $f \in J$ einem n-periodischen Siteswap entspricht, dann gilt*

$$s \equiv t \mod n \quad \Rightarrow \quad f(s) \equiv f(t) \mod n.$$

Beweis. Falls $h(t)$ n-periodisch ist, dann ist die Funktion $f(t) = t + h(t)$ n-periodisch modulo n. □

Satz 4.24 (induzierte Permutation [GW97, Seite 514])**.** *Falls $f \in J$ einem n-periodischen Siteswap entspricht, dann induziert f eine wohldefinierte Permutation $\pi_f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Beweis. Wegen Lemma 4.23 ist mit der Bedingung

$$f(t) \equiv \pi_f(t) \mod n \quad 0 \leq t \leq n$$

π_f eine wohldefinierte Permutation. □

Korollar 4.25. *Die Menge J_n der n-periodischen Siteswaps lässt sich als Teilmenge von $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathcal{S}_n$ auffassen.*

Satz 4.26 (Permutationskriterium [GW97, Seite 514]). *Eine Folge $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ nicht negativer ganzer Zahlen entspricht einem n-periodischen Siteswap genau dann, wenn $\pi(t) = (a_t + t \mod n)$ eine Permutation auf der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist, also $\pi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ist.*

Beweis. Angenommen f ist ein Jongliermuster mit $f(t) = t + h(t) = t + a_t$. Dann ist $f(t) \equiv \pi_f(t) \mod n$. Also gibt es eine ganzzahlige Funktion $g(t)$, sodass $f(t) = \pi_f(t) + n \cdot g(t)$ ist. Es folgt $h(t) = f(t) - t = \pi_f(t) - t + n \cdot g(t)$ und $a_t + t \equiv h(t) + t \equiv \pi_f(t) \mod n$, was $a_t + t$ zur Permutation macht.

Umgekehrt, angenommen für $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ist $a_t + t \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ eine Permutation. Falls wir a_t für alle $t \in \mathbb{Z}$ periodisch fortsetzen und dann $f(t) = a_t + t$ definieren, dann ist f das gesuchte Jongliermuster. f ist injektiv: Aus $f(t) = f(u)$ folgt, dass $t \equiv u \mod n$ ist, weil $f(t)$ injektiv modulo n ist. Also ist $a_t = a_u$ und aus $f(t) = a_t + t = f(u) = a_u + u$ folgt $t = u$, was f injektiv macht. f ist surjektiv: Angenommen $u \in \mathbb{Z}$. Weil $t + a_t \mod n \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ finden wir ein t, sodass $f(t) = t + a_t \equiv u \mod n$ ist. Wird ein geeignetes Vielfaches von n hinzugefügt, so finden wir ein t' mit $f(t') = u$, was den Beweis beendet. □

Beispiel 4.27. Falls wir mit Satz 4.26 prüfen möchten, ob 771711 einem Siteswap entspricht, dann berechnen wir zuerst $\pi(t)$.

$$\begin{aligned}
\pi(0) &= 7 + 0 \equiv 1 \mod 6 & \pi(0) &= 1\\
\pi(1) &= 7 + 1 \equiv 2 \mod 6 & \pi(1) &= 2\\
\pi(2) &= 1 + 2 \equiv 3 \mod 6 & \pi(2) &= 3\\
\pi(3) &= 7 + 3 \equiv 4 \mod 6 & \pi(3) &= 4\\
\pi(4) &= 1 + 4 \equiv 5 \mod 6 & \pi(4) &= 5\\
\pi(5) &= 1 + 5 \equiv 0 \mod 6 & \pi(5) &= 0
\end{aligned}$$

π ist offensichtlich eine Permutation von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, da bei den Werten von π jede Restklasse genau einmal angenommen wird. Folglich ist 771711 ein Siteswap, für den übrigens

$$\frac{7+7+1+7+1+1}{6} = 4$$

Bälle benötigt werden.

Mit dem Satz 4.26 lassen sich schnell und effizient auch komplizierte Ziffernfolgen darauf prüfen, ob sie Siteswaps sind. Angenommen man hat zufällig eine Ziffernfolge als Siteswap identifiziert. Das einzige, was wir an dieser Stelle sofort sagen können ist, wie viele Bälle man für diesen Siteswap benötigt. Interessant wäre zum Beispiel zu wissen, ob und wie sich der Siteswap aus einfacheren Siteswaps zusammensetzen könnte. Das ist natürlich von besonderem Interesse, wenn man den Siteswap tatsächlich zu jonglieren lernen sucht. Die Idee ist einen Siteswap als Element der Gruppe $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ aufzufassen – nicht etwa als Element von $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ – und dann den Begriff der Bahn aus

Definition 4.7 zu Hilfe zu nehmen. Es wird sich zeigen, dass dadurch Informationen gewünschter Art gewonnen werden können.

Wegen der Proposition-Definition 4.10 muss ein Siteswap auch bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ immer in ein Vertretersystem disjunkter Bahnen zerfallen.

Beispiel 4.28 (Bahnen eines Siteswaps)**.** 534 ist ein Siteswap und hat Periode 3. Aufgefasst als Element von $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ sind die Bahnen:

$$\begin{aligned}\langle 534\rangle 0 &= \{0, 2\}\\ \langle 534\rangle 1 &= \{3\}\\ \langle 534\rangle 2 &= \{2, 0\}\end{aligned}$$

Die Bahnen der Restklassen 0 und 2 stimmen überein. Ein Vertretersystem vom Siteswap 534 besteht folglich nur aus zwei Bahnen.

Werden Bahnen bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ bestimmt, wird oft jede Ziffer eines Siteswaps direkt in bijektiver Korrespondenz zu den Elementen aus $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ aufgefasst – und das in der Reihenfolge, in welcher der Siteswap notiert ist. Der Vorteil davon ist, dass so sofort erkennbar ist, welche Art Würfe in jeder Bahn vorkommen. Aufzupassen gilt es jedoch dann, wenn im Siteswap die gleiche Ziffer mehrfach vorkommt, denn diese müssen unterschieden werden.

Beispiel 4.29. Bei einem Vertretersystem der Bahnen vom Siteswap 534 setzt sich eine Bahn aus den Würfen 5 und 4, die andere Bahn nur aus dem Wurf 3 zusammen. Dieser Sachverhalt lässt sich auch so darstellen:

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[rr, bend right] & 3 \arrow[loop right] & 4 \arrow[ll, bend right] \end{tikzcd}$$

Beispiel 4.30. Der Siteswap 55244 zerfällt in drei disjunkte Bahnen:

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[loop right] & 5 \arrow[loop right] & 2 \arrow[rr, bend right] & 4 \arrow[l, bend right] & 4 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

Natürlich kann wie bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ auch bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ immer noch jeder Ball genau einer Bahn eines Vertretersystems zugeordnet werden. Wer bei den vorherigen Beispielen die Anzahl benötigter Bälle mit der Anzahl Bahnen verglichen hat, der wird bemerkt haben, dass im Gegensatz zu einer Bahn bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ eine Bahn bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ mehrere Bälle benötigen kann. Die Bälle einer solchen Bahn können diese nicht verlassen. Das hat zur Folge, dass jede Bahn vom Vertetersystem eines Siteswaps bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ einen eigenen Siteswap bilden muss. Dazu müssen einfach alle Bälle der jeweilig disjunkten Bahnen „weggelassen" werden. Den Siteswap einer einzelnen Bahn erhält man natürlich dadurch, dass die Ziffern, welche Würfen aus disjunkten Bahnen entsprechen, durch Nullen ersetzt werden.

Beispiel 4.31. Der Siteswap 534 zerfällt in die Siteswaps 504 und 030. 504 und 030 entsprechen einem Vertretersystem seiner Bahnen bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Wird ein Siteswap so in Teil-Siteswaps zerlegt, dass diese, wie vorher beschrieben, einem Vertretersystem seiner Bahnen bezüglich $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ entsprechen, dann können mit Satz 4.17 die Anzahl benötigter Bälle jedes dieser Teil-Siteswaps berechnet werden. Da jeder Ball immer eindeutig einer Bahn eines Vertretersystems zugeordnet werden kann, muss die Summe der benötigten Bälle für die Teil-Siteswaps mit der Anzahl benötigter Bälle für den ursprünglichen Siteswap übereinstimmen.

Beispiel 4.32. Der Siteswap 55244 zerfällt in die Siteswaps 50000, 05000 und 00244. Für die Anzahl benötigter Bälle gilt:

$$\underbrace{\frac{5+5+2+4+4}{5}}_{4} = \underbrace{\frac{5+0+0+0+0}{5}}_{1} + \underbrace{\frac{0+5+0+0+0}{5}}_{1} + \underbrace{\frac{0+0+2+4+4}{5}}_{2}$$

Es bleibt noch zu bemerken, dass die Anzahl Bahnen eines Siteswaps der Periode n den Wert n offensichtlich nicht überschreiten kann. Genauer kann nicht einmal der Wert $n-1$ überschritten werden: Der Wert n wäre nur möglich, wenn alle Bahnen einelementig und disjunkt wären. Das wäre aber nur dann der Fall, wenn alle Ziffern im Siteswap übereinstimmen würden, was einem Grundmuster entspräche. Dieses würde aber „gekürzt“ auf nur eine Periode.

5. Generieren und zählen von Siteswaps

Wie generiert man systematisch alle Siteswaps? Wie viele Siteswaps gibt es? Das sind Fragen, die nicht nur von passionierten Jongleuren gerne gestellt werden. Selbstverständlich braucht es Einschränkungen, wenn man ein endliches Resultat möchte. Die wichtigsten beschränkenden Grössen sind:

- die benötigte Anzahl Bälle b vom Siteswap
- die Periodenlänge n des Siteswaps
- die grösste Ziffer h (Wurfhöhe) im Siteswap

Eine genauere Betrachtung führt unmittelbar zur Einsicht, dass zumindest zwei dieser drei Grössen vorgegeben werden müssen, um ein endliches Resultat für die eingangs gestellten Fragen zu erhalten.

Aus Satz 4.26 lässt sich ein Verfahren gewinnen, welches alle n-periodischen Siteswaps generieren kann, die b Bälle zum Jonglieren benötigen. Die naheliegende Idee dabei ist, „rückwärts“ vorzugehen. Erinnern wir uns zuerst daran, was beim Anwenden von Satz 4.26 passiert. Nur für eine Zahlenfolge, welche einem Siteswap entspricht, berechnet das Verfahren ein π, welches eine Permutation auf der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist. Wir werden im Folgenden aus allen Permutationen der Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alle n-periodischen Siteswaps, die b Bälle benötigen, zu konstruieren versuchen in Anlehnung an [Pol03, Seite 24].

Wir beginnen mit einem $\pi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Dieses π lässt sich auch wie folgt als Vektor v darstellen.

$$v := (\pi(0), \pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n-1))$$

Aus v berechnen wir, im Verfahren von Satz 4.26 „rückwärts" gehend, den Vektor w.

$$w := \left(v - \underbrace{(0, 1, 2, \ldots, n-1)}_{u} \right) \mod n$$

Alle n-periodischen Siteswaps, die gemäss Satz 4.26 der Permutation π entsprechen, müssen die Eigenschaft haben, dass deren Ziffern modulo n mit den Komponenten des Vektors w übereinstimmen. Zu jeder Komponente von w darf also ein beliebiges Vielfaches von n addiert werden, um einen solchen Siteswap zu erhalten. Als Formel lässt sich das wie folgt ausdrücken, wobei q ein beliebiger Vektor bestehend aus n nicht-negativen Komponenten ist.

$$s := w + n \cdot q \tag{2}$$

Die Schwierigkeit besteht darin, all jene s zu finden, die genau b Bälle benötigen. Gemäss Satz 4.17 muss der Mittelwert der Ziffern dieser Siteswaps b sein. Da wir den Mittelwert der Komponenten von w berechnen können, sind diese relativ einfach zu finden. Sei m der Mittelwert der Komponenten von w.

Zuerst bemerken wir, dass m gewisse Eigenschaften haben muss. Weil die Summe der Komponenten von Vektor v mit der Summe der Komponenten von Vektor u übereinstimmt, gilt für die Komponenten w_k vom Vektor w, dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k \equiv 0 \mod n$$

Das bedeutet nichts anderes, als dass m eine ganze Zahl ist. Ausserdem muss $0 \leq m \leq n-1$ sein, da für alle Komponenten von w ebenfalls $0 \leq w_k \leq n-1$ gilt.

Soll der Mittelwert der Komponenten von Vektor s in (2) exakt b betragen, dann muss die Summe der Einträge vom Vektor q genau $c := b - m$ sein.

Das liefert das gewünschte Verfahren, denn man bestimmt einfach schrittweise zu jedem v das zugehörige w, berechnet m, dann c und daraus die möglichen q, um dann schliesslich gemäss (2) die gesuchten s zu berechnen.

In der Tabelle 2 auf Seite 38 sind alle 3-periodischen Siteswaps, für die 3 Bälle benötigt werden, beispielhaft mit diesem Verfahern erzeugt worden.

Bemerkung 5.1. Das Verfahren erzeugt jede zyklische Vertauschung eines Siteswaps separat. Zum Beispiel nicht nur 441, sondern auch 414 und 144.

Nun sind wir in der Lage, alle n-periodischen Siteswaps, die eine vorgegebene gewisse Anzahl Bälle b zum Jonglieren benötigt, zu generieren. Doch wie viele Siteswaps sind das jeweils? Tabelle 2 auf Seite 38 kann entnommen werden, dass für den Fall $n = b = 3$ die Antwort 37 ist. Leider lässt sich die Frage nach der Anzahl Siteswaps für allgemeines n und b nicht direkt durch das Verfahren beantworten. Die Antwort liefert

Satz 5.2 (Anzahl Siteswaps [GW97, Seite 518]). *Es gibt $(b+1)^n$ n-periodische Siteswaps, für die bis zu b Bälle zum Jonglieren benötigt werden, wobei alle zyklischen Vertauschungen extra gezählt werden.*

Das wurde erstmalig in der Originalversion von [GW97] formuliert und bewiesen. Dort wird ein Beweis vorgestellt, dessen Methoden dazu verwendet werden, um anschliessend ein allgemeineres Resultat zu beweisen. Bereits dort werden Verweise auf effizientere Beweise von Satz 5.2 gegeben. Später wurde dann in [ER96] ein besonders illustratives Verfahren zum Beweis von Satz 5.2 und allgemeineren Resultaten benutzt. Dieses Verfahren benutzt sogenannte *Jonglierkarten* (siehe Abbildung 18), die bis anhin wohl eleganteste bekannte Art den Satz 5.2 – aber auch einige interessante Verallgemeinerungen – zu beweisen.

Beweis von Satz 5.2 [ER96, Seite 111] [Pol03, Seite 38]. Jeder Siteswap kann nicht nur wie im Abschnitt 3 und im Anhang A als mit zwei Händen jongliert dargestellt werden, sondern auch mit allen Wurfzeitpunkten in einer horizontalen Linie, was dem Jonglieren mit nur einer Hand entspricht. Das sieht dann für den Siteswap 534 wie in Abbildung 16 aus.

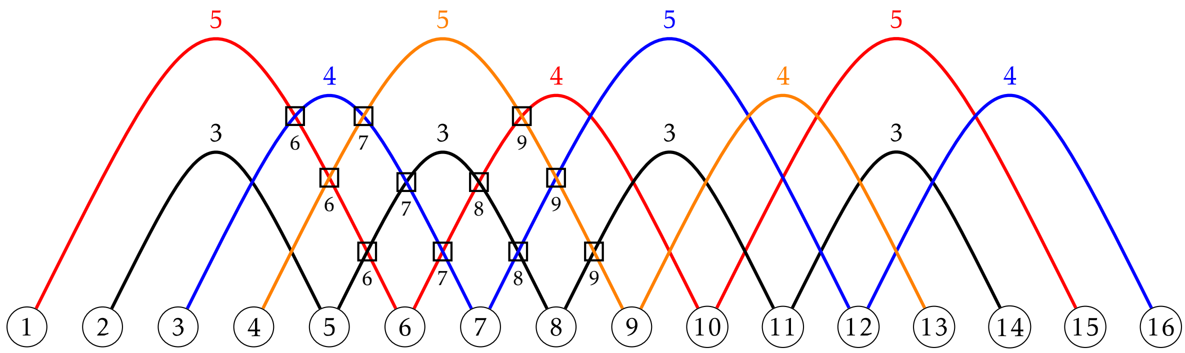


Abbildung 16: Siteswap 534 einhändig

Fokussieren wir den Wurf von Zeitpunkt 1 zu Zeitpunkt 6. Nun zählen wir, wie viele Bälle zwischen diesen beiden Zeitpunkten geworfen werden und nach dem Zeitpunkt 6 landen. Diese Würfe generieren Schnittpunkte von innerhalb nach ausserhalb der Flugbahn des fokussierten Wurfes. Diese Schnittpunkte – drei an der Zahl – sind in der Abbildung 16 durch Quadrate markiert und mit der Ziffer 6 des Zeitpunktes der Landung des fokussierten Wurfes versehen. Analog wurde mit den Würfen mit den Landezeitpunkten 7, 8 und 9 verfahren. Man beachte, dass jeder Schnittpunkt immer als von einem Wurf von innerhalb nach ausserhalb einer Flugbahn aufgefasst werden kann je nach fokussierter Flugbahn.

Sei $h(t)$ die Höhenfunktion eines Siteswaps. Allgemein definieren wir nun die Funktion

$$\begin{aligned} s(t) = \ & \text{Anzahl Würfe, die zwischen den Zeitpunkten } t - h(t) \text{ und } t \\ & \text{geworfen und nach dem Zeitpunkt } t \text{ landen werden.} \end{aligned}$$

Der Abbildung 16 entnehmen wir, dass für den Siteswap 534 gilt

$$\ldots \quad s(6) = 3 \quad s(7) = 3 \quad s(8) = 2 \quad s(9) = 3 \quad s(10) = 3 \quad s(11) = 2 \quad \ldots$$

Betrachtet man die Flugbahn eines Wurfes, welcher zum Zeitpunkt $t - h(t)$ geworfen und zum Zeitpunkt t landet, dann kann ein „einhändiges" Diagramm des Siteswaps immer so gezeichnet werden, dass ausschliesslich die Flugbahnen von Würfen, die zwischen den Zeitpunkten $t - h(t)$ und t geworfen werden und nach dem Zeitpunkt t landen werden, die betrachtete Flugbahn von innen nach aussen genau einmal kreuzt. In solchen Diagrammen, die ohne unnötige Überschneidungen auskommen, können alle Schnittpunkte auf die im Beispiel 534 beschriebene Art, eindeutig einem Zeitpunkt zugeordnet werden. Die Funktion $s(t)$ zählt dabei die Schnittpunkte, die jedem Zeitpunkt t eindeutig zugeordnet werden. Gemäss Konstruktion hat $s(t)$ die Eigenschaft, dass $s(t) < b$ ist $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Die Idee der Jonglierkarten ist nun, die soeben beschriebene Zuordnung der Schnittpunkte geschickt darzustellen. Dazu wird Abbildung 16 so verzerrt, dass alle Schnittpunkte über ihren zugehörigen Zeitpunkt zu liegen kommen. Das sieht für den Siteswap 534 wie in Abbildung 17 aus, wobei zusätzlich das Diagramm zwischen den Wurfzeitpunkten zerschnitten wurde. Weil der Siteswap 534 vier Bälle benötigt, wurden bei jedem Schnitt genau vier Linien durchtrennt. Da das für alle Siteswaps mit $b = 4$ der Fall sein muss, wird deutlich, dass die Anzahl Schnittpunkte auf einer dieser Karten nicht grösser als drei sein kann.

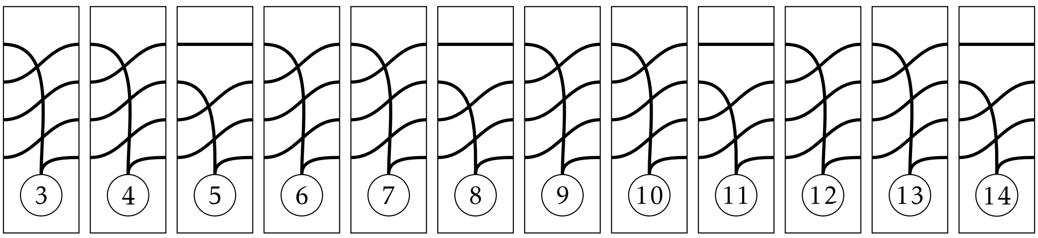


Abbildung 17: Siteswap 534 verzerrt

Dass nun auch Karten denkbar sind, die mit einer anderen Anzahl Schnittpunkten versehen sind, sollte klar sein. Die Abbildung 18 zeigt die sogenannten Jonglierkarten vom Typ C_{-1} bis C_5.

Angenommen wir besitzen einen unerschöpflichen Vorrat an Jonglierkarten vom Typ C_{-1} bis C_5 und legen n dieser Karten nebeneinander. Das entstehende Diagramm

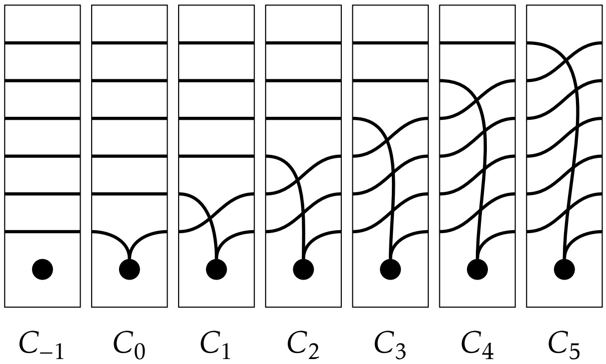


Abbildung 18: Juggling Cards

muss einen Siteswap, „einhändig" jongliert, darstellen. Man beachte, dass im Fall, wo nur die Jonglierkarten vom Typ C_{-1} bis C_k mit $k < 5$ zum Erzeugen eines Siteswaps verwendet werden, mindestens eine oberste durchgehende Linie entsteht, die einer Flugbahn eines Balles entsprechen müsste, welcher nie landet. Dieses Phänomen muss natürlich so interpretiert werden, dass solche Bälle gar nicht jongliert werden. Legen wir nun zu jedem Zeitpunkt t die Jonglierkarte vom Typ $C_{s(t)}$, dann entsteht das verzerrte Diagramm, welches den Siteswap einhändig jongliert darstellt. Am Beispiel des Siteswaps 534 ist das in Abbildung 19 dargestellt. An diesem Beispiel sieht man auch das Phänomen der „überzähligen Bälle" sehr gut.

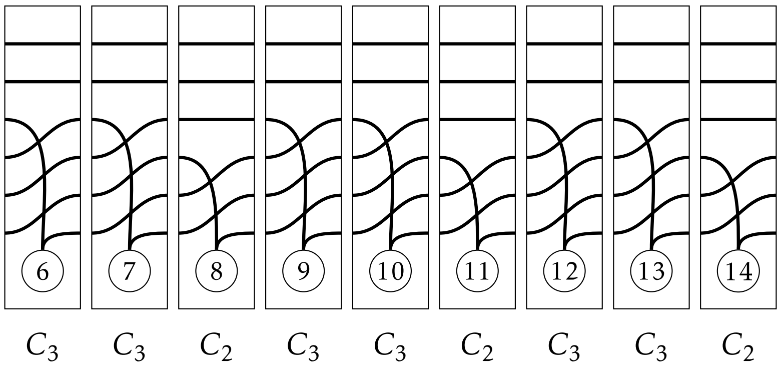


Abbildung 19: Siteswap 534 mit Jonglierkarten

Zusammen mit den vorherigen Überlegungen haben diese Jonglierkarten die bemerkenswerte Eigenschaft, dass jede Möglichkeit, mit welcher wir n dieser Karten nebeneinander legen können, genau einem Siteswap entspricht, für welchen nicht mehr als 6 Bälle benötigt werden. Umgekehrt kann jeder n-periodische Siteswap, für welchen nicht mehr als 6 Bälle benötigt werden, mit einer geeigneten Auswahl von n Jonglierkarten vom Typ C_{-1} bis C_5 dargestellt werden. Das heisst, es gibt in diesem Fall 7^n Siteswaps. Jede Permutation der Ziffern eines Siteswaps wird dabei separat gezählt. Selbstverständlich können auf analoge Art und Weise auch Jonglierkarten vom Typ C_6, C_7, C_8 etc. produziert werden, man muss dann jedoch auf den Karten vom Typ

C_{-1} bis C_5 oben – je nach Gesamtzahl benötigter Jonglierkartentypen – horizontale Striche ergänzen. Damit folgt das zu beweisende Resultat. □

Korollar 5.3. *Es gibt $(b+1)^n - b^n$ n-periodische Siteswaps, für die genau b Bälle zum Jonglieren benötigt werden, wobei alle zyklischen Vertauschungen extra gezählt werden.*

Beispiel 5.4. Es gibt genau

$$(5+1)^7 - 5^7 = 201'811$$

7-periodische Siteswaps, die genau 5 Bälle benötigen, zyklische Vertauschungen extra gezählt.

6. Anregungen und Ausblick

Sehr empfehlenswert ist der Simulator *Juggling Lab*, siehe [al11]. Dieser ist freie Software unter der GNU General Public License und plattformunabhängig dank Implementation in der Programmiersprache Java. Das macht ihn besonders attraktiv für edukative Zwecke. Ausserdem besitzt er einen umfangreich ausgestatteten Generator, der alle Siteswaps mit gewissen vorgegebenen Eigenschaften generieren kann, vorausgesetzt es sind insgesamt nicht allzu viele. Alle Animationen in dieser Arbeit wurden damit erzeugt.

Sehr interessant – auch für Praktiker – ist die Theorie der *State Graphs*. Das sind Graphen, die die Frage beantworten können, ob von einem bestimmten Siteswap direkt in einen anderen Siteswap (mit derselben Anzahl Bälle) gewechselt werden kann. Zum Beispiel kann von der Kaskade nicht direkt in den Shower gewechselt werden ohne einen Wurf mit einer anderen Nummer einzustreuen (Zum Beispiel eine 2 oder eine 4). Ein State Graph zeigt dann alle möglichen Verbindungen von Siteswaps, die bei einer vorgegebenen Anzahl Bälle machbar sind. Mehr dazu kann zum Beispiel [Pol03, Abschnitt 2.8] entnommen werden.

Für Freunde der fortgeschrittenen abstrakten Algebra gibt es eine faszinierende Verbindung von n-periodischen Siteswaps zur affinen Weyl Gruppe $\tilde{A}_{n-1}$. Siehe dazu [KLS11; ER96]. Ausserdem sind Zusammenhänge zur Zopftheorie bekannt [DM07].

Die Notation der Siteswaps kann für Multiplex-Würfe verallgemeinert werden. Selbst die *Jonglierkarten* können so modifiziert werden, dass auch Multiplex-Würfe erzeugt werden können. Siehe [Pol03; ER96; BG10].

7. Didaktische Bemerkungen

Diese Arbeit richtet sich primär an Mathematik-Lehrpersonen, welche sich für das Jonglieren interessieren, dieses vielleicht selber mehr oder weniger praktizieren und eventuell sogar gedenken eine „Sonderwoche“ zu diesem Thema zu gestalten. Die Lektüre dürfte aber auch Informatik- und Physik-Lehrpersonen ansprechen.

In Zeiten, wo sich Sport und Bewegung als Freizeitbeschäftigungen ungebrochenem Interesse erfreuen, mathematisch intellektuelle Spiele jedoch häufig weniger beliebt sind, sogar oft ihren Nutzen rechtfertigen müssen, ist es besonders wichtig Brücken zu schlagen, um den Geist der Zeit wieder mehr für letzteres öffnen und begeistern zu können. Diese Arbeit kann als ein weiterer Versuch gesehen werden praxisorientiert und spielerisch mathematische Konzepte – in diesem Fall primär solche algebraischer und kombinatorischer Natur – so in Aktivitäten einzubetten, dass die Mathematik den Schülerinnen und Schülern attraktiver erscheinen möge. Hoffentlich werden sich auch solche dadurch positiv angesprochen fühlen, welche sonst bei mathematischen Themen weniger begeistert zu reagieren pflegen. Obwohl das Jonglieren auch ohne mathematischen Hintergrund betrieben werden kann, sollte immer im Hinterkopf behalten werden, dass, wer sich einmal für das Jonglieren begeistern lässt, sicherlich bald nach interessanten neuen Mustern fragen wird, womit das Tor zur Mathematik sich langsam zu öffnen beginnt.

Aufbauend auf hoffentlich vielen positiven Erwartungen und der Motivation neues zu lernen, kann je nach Vorkenntnissen ein Programm gestaltet werden, welches auch oder vor allem mathematische Lernziele zu erreichen sucht. Diese Arbeit möchte neben solidem, mathematischem Hintergrund über das Jonglieren besonders auch als Quelle zur Inspiration und Gestaltung solcher Projekte dienen. Grosser Wert wurde bei dieser Arbeit darauf gelegt, so in die Thematik einzuführen, dass immer der Bezug zum tatsächlichen Jonglieren aufrecht erhalten bleibt. Das nicht zuletzt in der Hoffnung, dass damit das nötige Wissen vermittelt werden kann, um bei der Lektüre anderer mathematischer Texte, die das Jonglieren im Titel tragen, besser den Bezug zum tatsächlichen Jonglieren sehen zu können.

Um die Einstiegshürde möglichst niedrig zu gestalten, wurden Abschnitt 2 und Abschnitt 3 ausführlich, praxisorientiert und herleitend gestaltet. Auch ohne den exakten theoretischen Hintergrund und die Beschreibung mit Hilfe von Funktionen, kann relativ schnell zu den Diagrammen und dem Prinzip der Vertauschung vorgestossen werden. Damit sind dann die Schülerinnen und Schüler bereits in der Lage selbst neue korrekte Siteswaps zu finden, aufzuzeichnen und zu analysieren. Höchstwahrscheinlich werden viele relativ schnell Siteswaps finden, die noch vor 1980 mit ziemlicher Sicherheit unbekannt waren. Je nach Belieben, Zeit und besonderem Interesse oder Fokus kann aufgebaut werden und Resultate aus den folgenden Kapiteln ausgewählt, erklärt, analysiert, hergeleitet, bewiesen etc. werden.

In Abschnitt 4 und Abschnitt 5 gilt es einerseits ein paar kompliziertere Sätze über Siteswaps möglichst elementar zu beweisen, wobei das wichtige Prinzip der bijektiven Beweisführung beispielhaft verwendet wird, andererseits aber wird auch versucht möglichst viele Verbindungen zur elementaren Gruppentheorie, dessen Grundprinzipien und Notationen aufzuzeigen.

A. Diagramme ausgewählter Siteswaps

Die folgende Zusammenstellung soll möglichst viele Siteswaps visualisieren, welche mit mehr oder weniger Übung tatsächlich jonglierbar sind. Inspiriert wurde die Auswahl durch [Dar93; Knu93]. Diese Siteswaps wurden nach der Anzahl benötigter Bälle geordnet. Viele, welche nicht oder nur wenig selbst jonglieren, sind häufig der Meinung, dass die benötigte Anzahl Bälle am meisten über das Können eines Jongleurs verrät, wenn dieser ein bestimmtes Muster beherrscht. Meistens sagt aber die höchste Nummer, welche in einem Siteswap vorkommt, mehr darüber aus. Ausserdem ist ein Siteswap, bei welchem hohe Nummern aus beiden Händen geworfen werden müssen, meist schwieriger, als Siteswaps, welche eine hohe Nummer immer aus derselben Hand werfen müssen: Man wählt für die schwierige hohe Nummer die dominante Hand. Ausserdem sind jene Siteswaps besonders schwierig, bei welchen direkt auf eine sehr hohe Nummer eine sehr niedrige Nummer, welche aber grösser als Zwei ist, folgt. Dann muss nämlich das Auge die höchsten Punkte beider Flugbahnen beider Bälle praktisch gleichzeitig registrieren, um die Bälle später auch fangen zu können. Das ist natürlich umso schwieriger, je grösser der Höhenunterschied dieser Punkte ist.

Viele Siteswaps sehen so aus, wie wenn sie sehr einfach auszuführen wären. Manchmal kann sogar der Eindruck entstehen, dass ein Grundmuster schwieriger ist als ein anderer Siteswap mit derselben Anzahl Bälle, obwohl das Gegenteil zutrifft. Ein gutes Beispiel ist der Shower und die Kaskade mit derselben Anzahl Bälle. Vermutlich ist genau das der Grund, warum viele Jongleure weniger Siteswaps zeigen, als sie vielleicht tatsächlich beherrschen. Wenn es um Effekthascherei geht, kann mehr in kürzerer Zeit erreicht werden, wenn unterschiedliche Ausführungen ein und desselben Jongliermusters, eingeübt werden. Siehe dazu Abbildung 7.

An dieser Stelle ist zu bemerken, dass der Schwierigkeitsgrad der Grundmuster nicht linear bezogen auf die benötigte Zeit zum Erlernen ist. Der Schritt vom Nichtjongleur zum Beherrschen der 3-Ball-Kaskade lässt sich noch knapp mit dem Schritt von der 3-Ball-Kaskade zur 4-Ball-Fontäne vergleichen – jedoch ist das Beherrschen der 5-Ball-Kaskade um ein Vielfaches schwieriger, was diesen Schritt gar nicht mehr mit den vorherigen vergleichen lässt. Weil fast alle Siteswaps mit Ziffern grösser als 5 für Hobbyjongleure unerreicht bleiben werden, wurden keine aufgenommen. Es sollte übrigens für alle mit vertretbarem Aufwand (eine ein- bis tiefe zweistellige Anzahl Trainingsstunden) möglich sein die 3-Ball-Kaskade sehr sicher zu beherrschen. Möchte man die einfachsten 3-Ball-Siteswaps und die 4-Ball-Fontäne jonglieren können, muss bereits mit einer tiefen bis mittleren zweistelligen Anzahl Trainingsstunden gerechnet werden. Möchte jemand die 5-Ball-Kaskade stabil über längere Zeit aufrechterhalten können, ist das kaum unter mehreren Hundert Stunden Training möglich.

In dieser Zusammenstellung sind die Siteswaps immer für zweihändiges Jonglieren notiert. Das heisst, dass das Muster „2 in einer Hand“ notiert wird als Siteswap 4040 und nicht als 2. Zudem ist zu beachten, dass für einen n-periodischen Siteswap die Bahnen immer auf die Permutation aus $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ bezogen wurden. Die Anzahl Bahnen ist also immer kleiner als die Periodenlänge des Siteswaps.

Alle Animationen wurden mit der freien Software [al11] erstellt.

A.1. Siteswaps mit zwei Bällen

31 Bälle: 2 Bahnen: 1

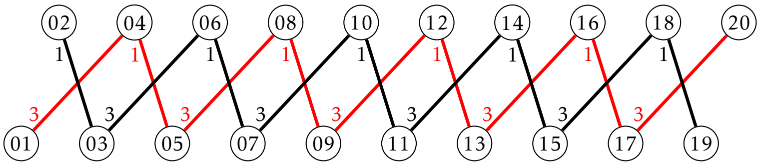
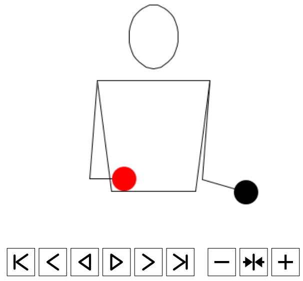


Abbildung 20: Siteswap 31



303 Bälle: 2 Bahnen: 2 (300, 003)

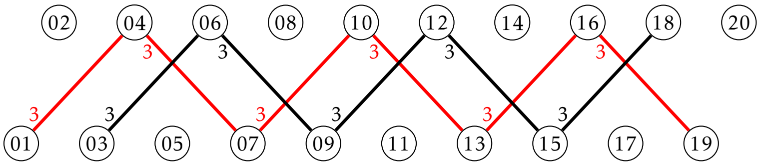
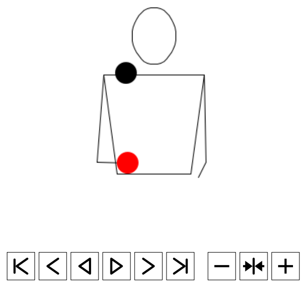


Abbildung 21: Siteswap 303



4040 Bälle: 2 Bahnen: 2 (4000, 0040)

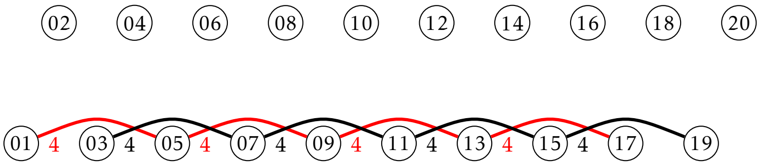
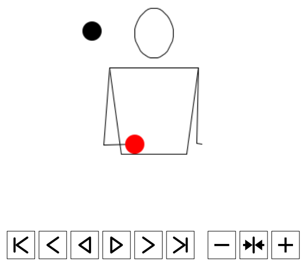


Abbildung 22: Siteswap 4040



501 Bälle: 2 Bahnen: 1

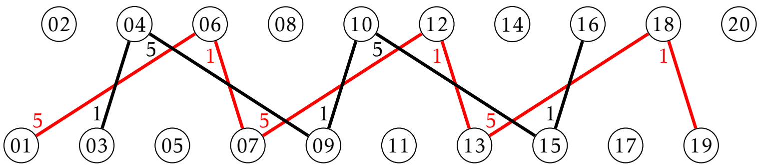
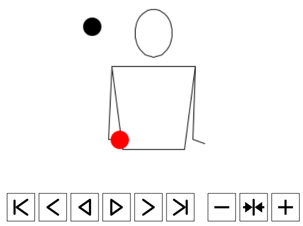


Abbildung 23: Siteswap 501



50500 Bälle: 2 Bahnen: 2 (50000, 00500)

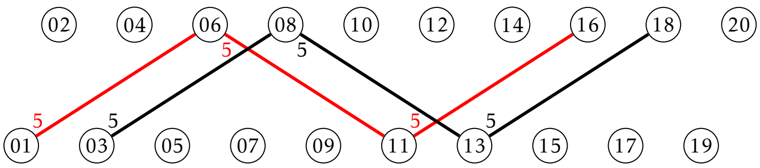
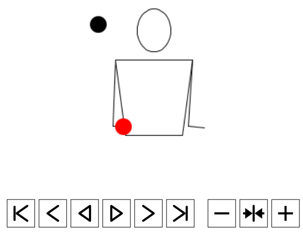
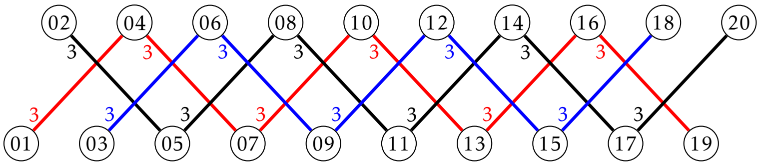


Abbildung 24: Siteswap 50500



A.2. Siteswaps mit drei Bällen

3 Bälle: 3 Bahnen: 1



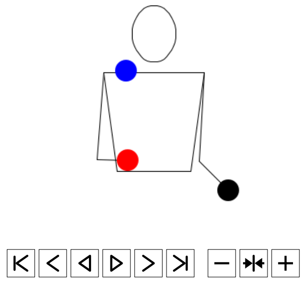
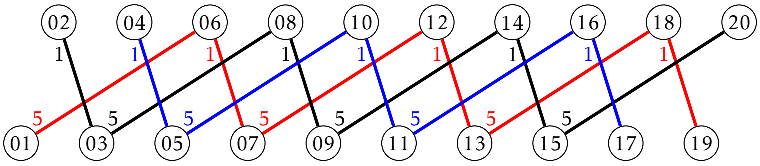


Abbildung 25: Siteswap 3

51 Bälle: 3 Bahnen: 1



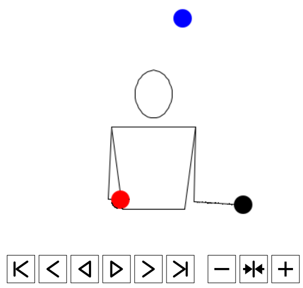
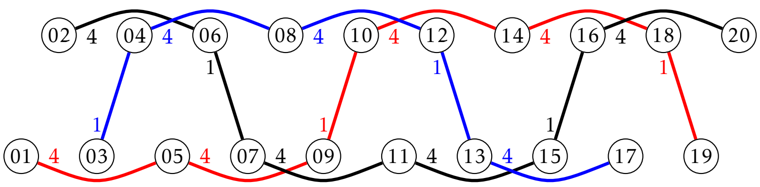


Abbildung 26: Siteswap 51

441 Bälle: 3 Bahnen: 1



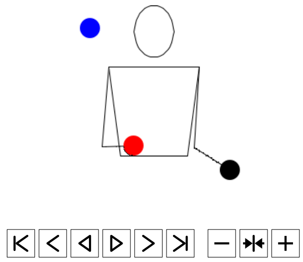
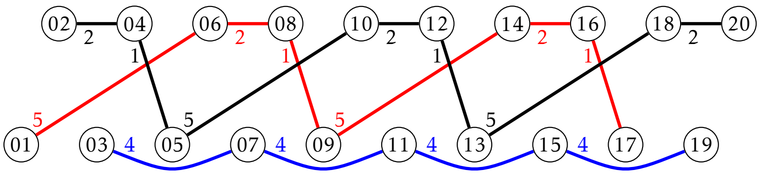


Abbildung 27: Siteswap 441

5241 Bälle: 3 Bahnen: 2 (5201, 0040)



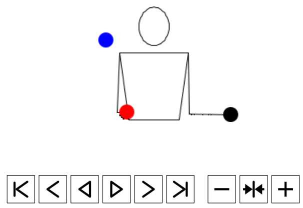
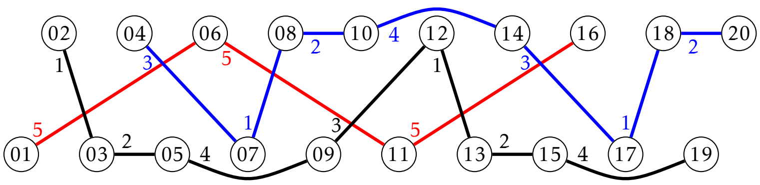


Abbildung 28: Siteswap 5241

51234 Bälle: 3 Bahnen: 2 (50000, 01234)



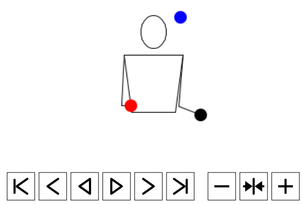


Abbildung 29: Siteswap 51234

51414 Bälle: 3 Bahnen: 3 (50000, 01400, 00014)

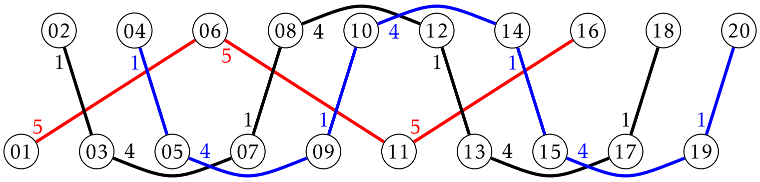
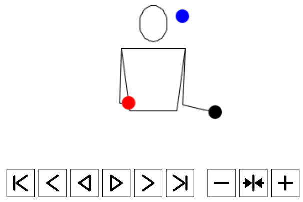


Abbildung 30: Siteswap 51414



52512 Bälle: 3 Bahnen: 3 (50000, 02012, 00500)

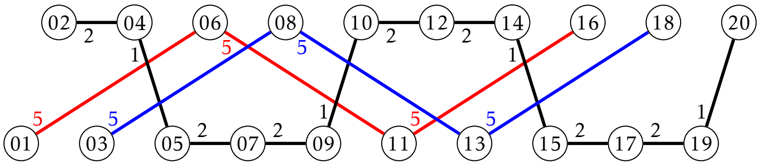
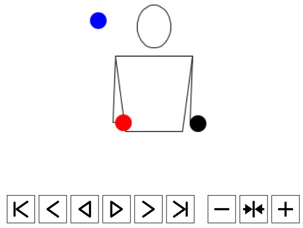


Abbildung 31: Siteswap 52512



531 Bälle: 3 Bahnen: 2 (501, 030)

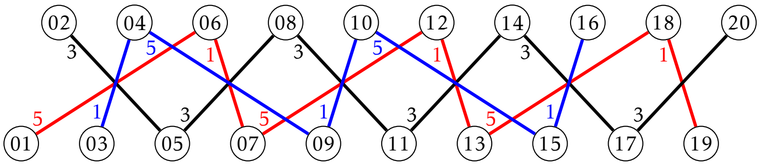
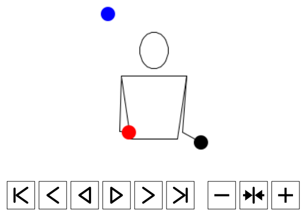


Abbildung 32: Siteswap 531



5304 Bälle: 3 Bahnen: 2 (5300, 0004)

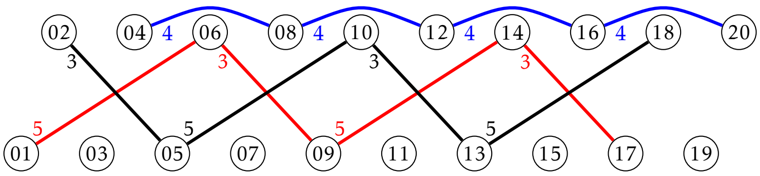
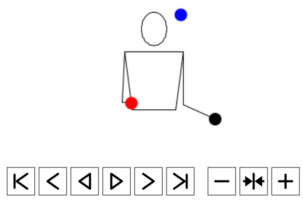


Abbildung 33: Siteswap 5304



5340 Bälle: 3 Bahnen: 2 (5300, 0040)

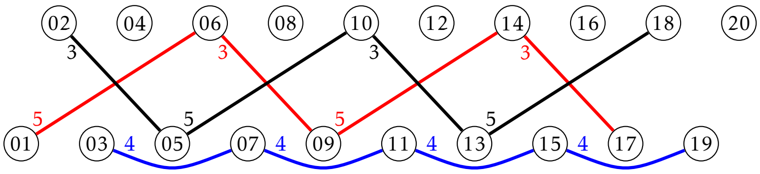
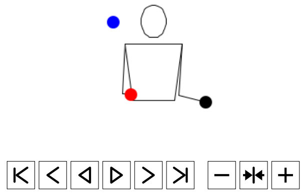


Abbildung 34: Siteswap 5340



52440 Bälle: 3 Bahnen: 2 (50000, 02440)

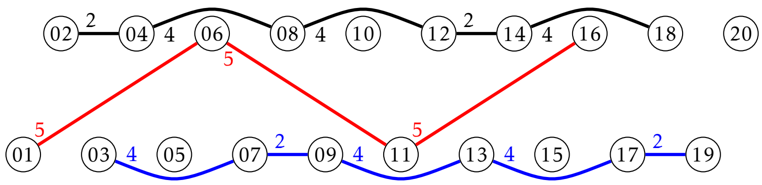
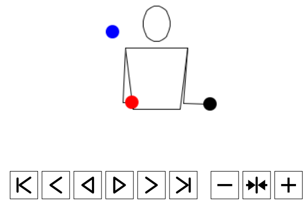


Abbildung 35: Siteswap 52440



504 Bälle: 3 Bahnen: 1

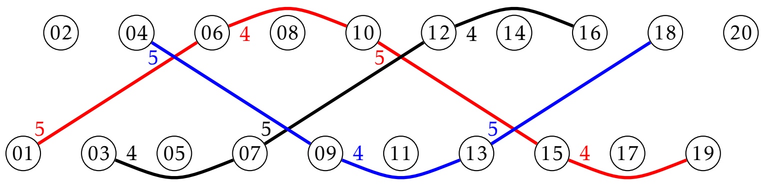
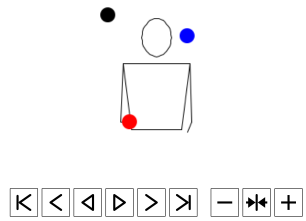


Abbildung 36: Siteswap 504



55014 Bälle: 3 Bahnen: 3 (50000, 05000, 00014)

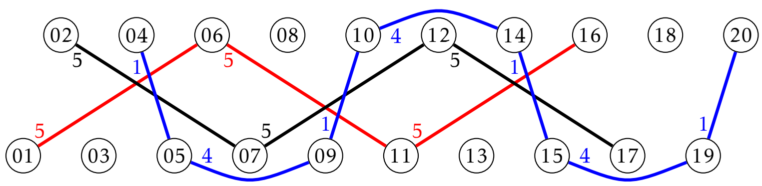
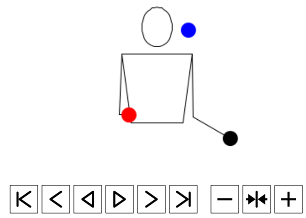


Abbildung 37: Siteswap 55014



55140 Bälle: 3 Bahnen: 3 (50000, 05000, 00140)

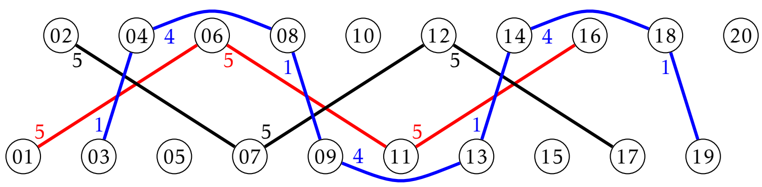
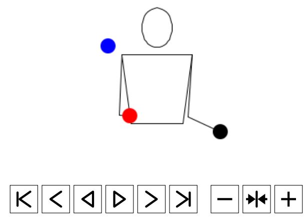
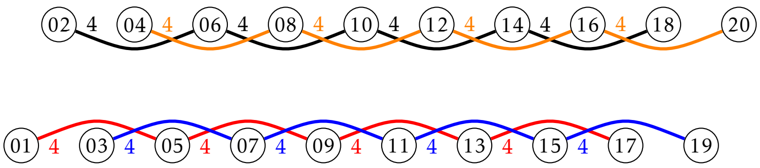


Abbildung 38: Siteswap 55140



A.3. Siteswaps mit vier Bällen

4 Bälle: 4 Bahnen: 1



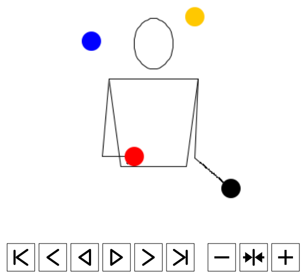
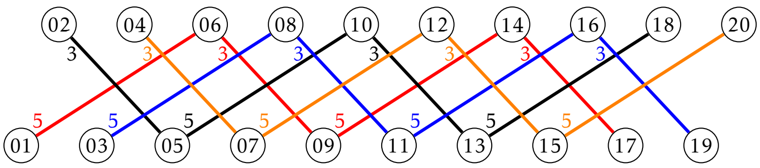


Abbildung 39: Siteswap 4

53 Bälle: 4 Bahnen: 1



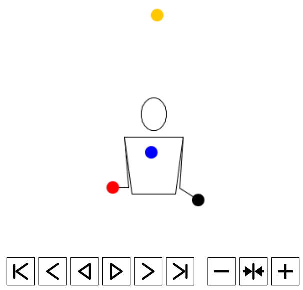
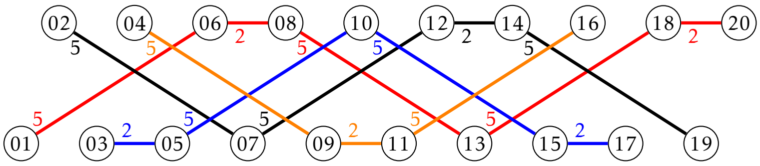


Abbildung 40: Siteswap 53

552 Bälle: 4 Bahnen: 1



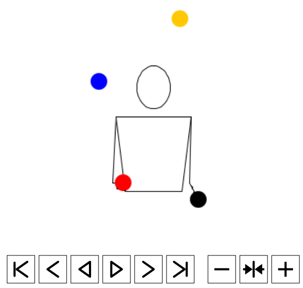
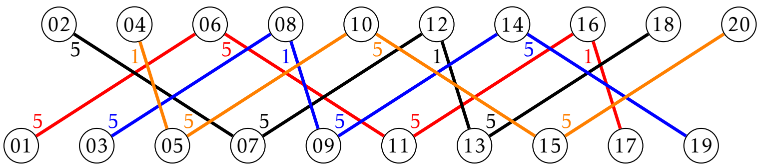


Abbildung 41: Siteswap 552

5551 Bälle: 4 Bahnen: 1



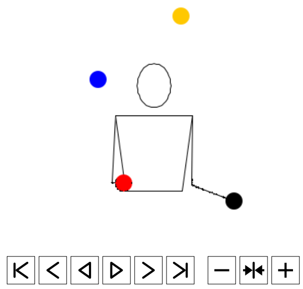
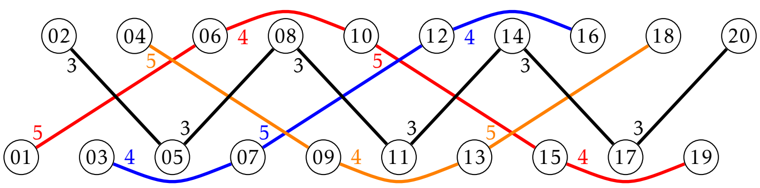


Abbildung 42: Siteswap 5551

534 Bälle: 4 Bahnen: 2 (504, 030)



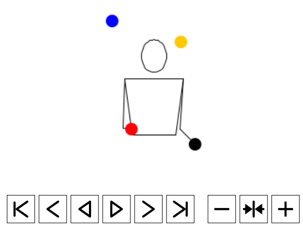
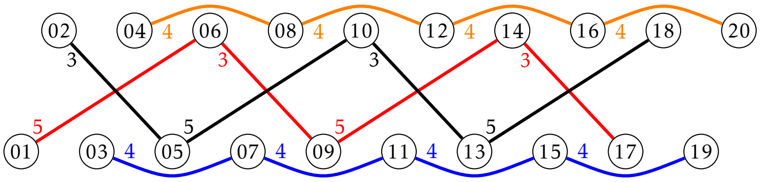


Abbildung 43: Siteswap 534

5344 Bälle: 4 Bahnen: 3 (5300, 0040, 0004)



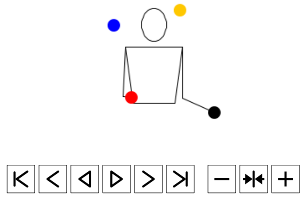
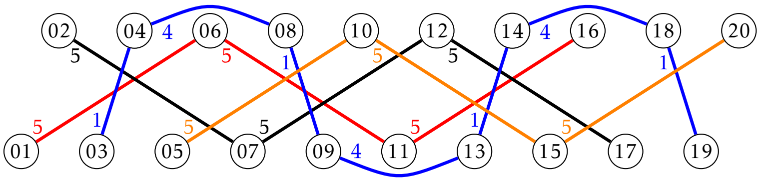


Abbildung 44: Siteswap 5344

55514 Bälle: 4 Bahnen: 4 (50000, 05000, 00500, 00014)



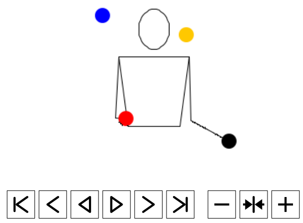
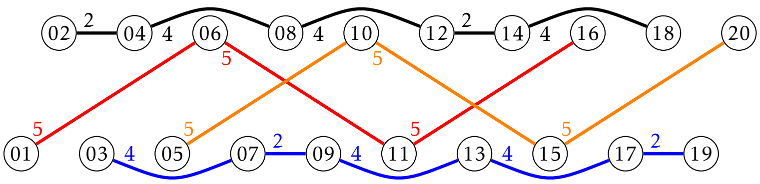


Abbildung 45: Siteswap 55514

55244 Bälle: 4 Bahnen: 3 (50000, 05000, 00244)



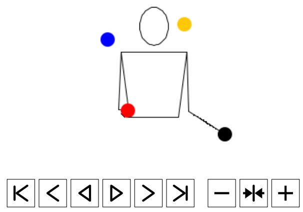
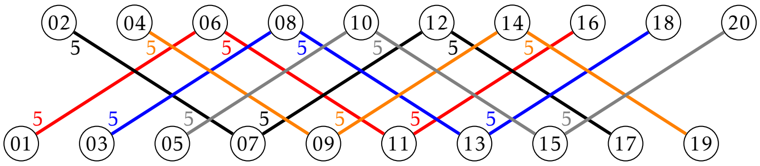


Abbildung 46: Siteswap 55244

A.4. Siteswaps mit fünf Bällen

5 Bälle: 5 Bahnen: 1



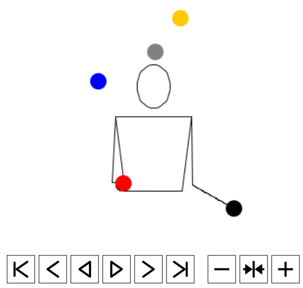


Abbildung 47: Siteswap 5

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[al11] Jack Boyce et al. *Jugging Lab*. Version 0.6.1. 11. Okt. 2011. URL: `http://jugglinglab.sourceforge.net/` (besucht am 01. 10. 2013).

[BG10] Steve Butler und Ron Graham. „Enumerating (Multiplex) juggling sequences.“ English. In: *Ann. Comb.* 13.4 (2010), S. 413–424. ISSN: 0218-0006; 0219-3094/e. DOI: `10.1007/s00026-009-0040-y`.

[Bos04] Siegfried Bosch. *Algebra. 5., überarbeitete Aufl.* German. 5., überarbeitete Aufl. Berlin: Springer, 2004, viii + 376 s. ISBN: 3-540-40388-4.

[Dar93] Vincent Darley. *Site Swaps: Examples*. 15. März 1993. URL: `http://www.juggling.org/help/siteswap/examples.html` (besucht am 01. 10. 2013).

[DM07] Satyan L. Devadoss und John Mugno. „Juggling braids and links.“ English. In: *Math. Intell.* 29.3 (2007), S. 15–22. ISSN: 0343-6993; 1866-7414/e. DOI: `10.1007/BF02985685`.

[ER96] Richard Ehrenborg und Margaret Readdy. „Juggling and applications to q-analogues.“ English. In: *Discrete Math.* 157.1-3 (1996), S. 107–125. ISSN: 0012-365X. DOI: `10.1016/S0012-365X(96)83010-X`.

[Gil86] Billy Gillen. *Remember the Force Hassan!* 1986. URL: `http://www.juggling.org/jw/86/2/egypt.html` (besucht am 02. 01. 2014).

[GW97] Joe Buhler; David Eisenbud; Ron Graham und Colin Wright. „Juggling drops and decents. (Reprint).“ English. In: *Organic mathematics. Proceedings of the workshop, Simon Fraser University, Burnaby, Canada, December 12-14, 1995*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997, S. 133–154. ISBN: 0-8218-0668-8/pbk.

[KLS11] A. Knutson, T. Lam und D. Speyer. „Positroid Varieties: Juggling and Geometry“. In: *ArXiv e-prints* (Nov. 2011). arXiv: `1111.3660 [math.AG]`.

[Knu10] Allen Knutson. *Mathematics of Juggling*. Cornell University. 29. Apr. 2010. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=38rf9FLhl-8` (besucht am 01. 10. 2013).

[Knu93] Allen Knutson. *Siteswap FAQ*. 10. Sep. 1993. URL: `http://www.juggling.org/help/siteswap/faq.html` (besucht am 01. 10. 2013).

[Pol03] Burkard Polster. *The mathematics of juggling*. English. New York, NY: Springer, 2003, S. xviii + 226. ISBN: 0-387-95513-5/pbk.

[Wri12] Colin Wright. *Math Encounters – Five Balls, Two Hands: The Patterns of Juggling – Colin Wright (Presentation)*. National Museum of Mathematics. 24. Jan. 2012. URL: https://www.youtube.com/watch?v=GNKFSpJIBOO (besucht am 01. 10. 2013).

v	w	m	c	q	s
$(0,1,2)$	$(0,0,0)$	0	3	$(3,0,0)$	900
				$(0,3,0)$	090
				$(0,0,3)$	009
				$(2,1,0)$	630
				$(2,0,1)$	603
				$(0,2,1)$	063
				$(1,0,2)$	306
				$(1,2,0)$	360
				$(0,1,2)$	036
				$(1,1,1)$	333
$(2,0,1)$	$(1,1,1)$	1	2	$(2,0,0)$	711
				$(0,2,0)$	171
				$(0,0,2)$	117
				$(1,1,0)$	441
				$(1,0,1)$	414
				$(0,1,1)$	144
$(1,2,0)$	$(2,2,2)$	2	1	$(1,0,0)$	522
				$(0,1,0)$	252
				$(0,0,1)$	225
$(1,0,2)$	$(1,2,0)$	1	2	$(2,0,0)$	730
				$(0,2,0)$	180
				$(0,0,2)$	126
				$(1,1,0)$	450
				$(1,0,1)$	420
				$(0,1,1)$	153
$(2,1,0)$	$(2,0,1)$	1	2	$(2,0,0)$	027
				$(0,2,0)$	018
				$(0,0,2)$	612
				$(1,1,0)$	045
				$(1,0,1)$	042
				$(0,1,1)$	351
$(0,2,1)$	$(0,1,2)$	1	2	$(2,0,0)$	702
				$(0,2,0)$	801
				$(0,0,2)$	261
				$(1,1,0)$	504
				$(1,0,1)$	204
				$(0,1,1)$	135

Tabelle 2: Alle 3-periodischen Siteswaps, die 3 Bälle benötigen [Pol03, Seite 25]