Irrfahrten auf Graphen, Matrizen und Google's PageRank

H.R. Schneebeli

Version vom 16. August 2013

Zusammenfassung

Irrfahrten auf Graphen werden mit Matrizen kodiert und mit linearer Algebra bearbeitet. In einer Markowkette mit diskreten Zeitschritten wird jeder Schritt durch eine lineare Abbildung beschrieben. Das Schema der Markowkette wird uminterpretiert und in verschiedenen Anwendungen wieder gefunden, beispielsweise in den Leontjef-Modellen der Ökonomie, bei sozialen Rankings, in Googles PageRank.

Voraussetzung Lineare Abbildungen, Matrixoperationen, CAS-Rechner oder ein Numerikprogramm (Matlab™, Octave).

Ziele Flüsse auf Graphen, Matrizen und Modellbildung mit linearer Algebra. Potenzalgorithmus für Eigenvektoren. Ausblicke auf neuere Anwendungen und numerische lineare Algebra.

Hinweis Das Thema *Markowketten* wird mit Beispielen skizziert und durch eine Folge von Aufgaben abgesteckt. Einige lassen sich in *Anwendungen der Mathematik* [SPF oder EF] einsetzen, andere könnten Unterrichtsprojekte oder Maturarbeiten anregen.

Der Text stellt in geraffter Form einen Unterricht dar, der wesentlich durch Lernaufgaben gesteuert wird. Beim Lösen der Aufgaben werden Erfahrungen aufgebaut. Eine Reflexionsphase muss am Ende der Unterrichtsequenz diese Erfahrungen sammeln, systematisieren und auf wesentliche Punkte konzentrieren. Die kommentierten Lösungen richten sich als Orientierungshilfen ausschliesslich an die Unterrichtenden. Es sind *keine Musterlösungen für die Lernenden.*

Zum Einsatz im Unterricht müssen die Aufgaben ausgewählt, möglicherweise noch durch eigene Aufgaben ergänzt und dem individuellen Unterrichtstil angepasst werden. Die Art der Umsetzung bleibt weitgehend offen. Die Unterstützung durch ein CAS oder Numeriksoftware ist unabdingbar. Jede der Aufgaben wurde schon im Unterricht eingesetzt.

Die angestrebte Tiefe der Ausbildung wird im Abschnitt *Prüfungsfragen* mit ehemaligen Maturaufgaben umrissen, bei denen eine Erfolgsquote zwischen 50% und 95% erwartet wurde.

1 Begriffe und Eigenschaften, eine Zusammenstellung

Hier folgen Definitionen und Bemerkungen, die den Rahmen des Themas etwas abstecken. Es ist keine didaktisch aufgearbeitete 'Theorie'.

Ein Vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ heisst *Wahrscheinlichkeitsvektor* oder stochastisch, wenn seine Einträge nicht negativ sind und zu 1 aufsummieren. Jeder Wahrscheinlichkeitsvektor in $\mathbb{R}^n$ beschreibt eine Verteilung von relativen Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten auf Zustände, die von 1 bis n numeriert sind. Den reinen Zuständen entsprechen die Vektoren der Standardbasis, sie beschreiben deterministisches Verhalten mit sicherem Ausgang.

Eine Matrix S heisst *stochastisch,* wenn ihre Kolonnen Wahrscheinlichkeitsvektoren sind. Das Element s_{ik} in der Zeile i, Kolonne k von S gibt die Wahrscheinlichkeit an für einen Wechsel aus dem Zustand k in den Zustand i.

Sind sowohl S als auch die Transponierte $S^\intercal$ stochastisch, so heisst S *doppelt stochastisch* [und natürlich auch $S^\intercal$].

Die Zuordnung $s : \mathbf{p} \mapsto S \cdot \mathbf{p}$ definiert eine Abbildung s, welche die Menge der stochastischen Vektoren affin in sich abbildet. Durch Iteration mit s entsteht ein diskretes, deterministisches dynamisches System auf der Menge der stochastischen Vektoren. Es wird stochastisch interpretiert als Irrfahrt eines Punktes auf den Kanten des zugehörigen Graphen mit den Gewichtungen als Wahrscheinlichkeiten. Das System hat kein Gedächtnis.

Die Wahrscheinlichkeitsvektoren beschreiben ein Simplex, das von s stetig auf sich abgebildet wird. Daher gibt es nach Brouwers Fixpunktsatz mindestens einen *Fixpunkt* unter den Wahrscheinlichkeitsvektoren.

Die Markowkette heisst irreduzibel (oder ergodisch), wenn im Laufe der Systementwicklung jeder Zustand aus jedem anderen Zustand erreichbar ist.

Eine Markowkette heisst 'regulär', wenn es eine Potenz S^r gibt, $r > 0$, die lauter positive Einträge hat. Asymptotisch endet jede irreduzible, reguläre Markowkette in einem eindeutig bestimmten anziehenden Fixpunkt. Ein solcher Fixpunkt entspricht einem Eigenvektor $\mathbf{e}$ von S zum Eigenwert 1 mit lauter positiven Koordinaten.

Die Matrix $S := \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ ist singulär, sie gehört aber zu einer 'regulären' Markowkette. (Die Notation mit Anführungszeichen ist nicht üblich!)

2 Aufgaben, Beispiele, Anwendungen

1. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsvektoren in $\mathbb{R}^2$ und in $\mathbb{R}^3$ in einer Skizze schematisch dar. Welche Rolle spielen die Standardbasen in diesen Beispielen für die Menge der Wahrscheinlichkeitsvektoren?

2. Es sei $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor mit lauter Einträgen $1/3$ und $S^\intercal$ die Transponierte zu einer stochastischen 3×3-Matrix S. Bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ definiert S die lineare Selbstabbildung $\quad s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad$ durch $\quad \vec{x} \mapsto S \cdot \vec{x}$.

   Begründen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

   2.1 $S^\intercal \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$

   2.2 Die Matrix $S^\intercal$ hat einen Eigenwert 1.

   2.3 Die Matrix S hat einen Eigenwert 1.

   2.4 Wenn S doppelt stochastisch ist, so ist $\mathbf{e}$ Fixvektor von S.

   2.5 Die Abbildung s bildet den positiven Oktanten von $\mathbb{R}^3$ in sich ab.

   2.6 Die Abbildung s bildet die Menge der Wahrscheinlichkeitsvektoren von $\mathbb{R}^3$ in sich ab.

   Wie lassen sich die Überlegungen auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern?

3. *Laplace-Münze*

   3.1 Welches Zustandsdiagramm gehört zum Wurf einer Laplacemünze mit den Seiten 0 und 1 ?

   3.2 Welches ist die zugehörige stochastische Matrix und wie lauten die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren?

4. *Das Winterwetter im östlichen Mittelmeer* lässt sich für klimatologische Zwecke durch einen stochastischen Prozess mit zwei Zuständen simulieren. Die Zustände heissen *sonnig* [S] und *regnerisch* [R]. Sie wechseln nach dem Schema von Abbildung 1.

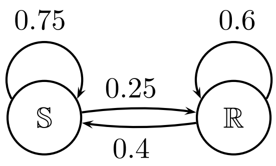

Abbildung 1: Zustandsdiagramm für Winterwetter in der Levante

4.1 Heute scheint in Beirut die Sonne. Wie gross ist die Chance, dass es in drei Tagen in Beirut regnet?

4.2 Heute scheint in Beirut die Sonne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es in 30 Tagen regnen?

4.3 Welche Wahrscheinlichkeitsvektoren beschreiben Gleichgewichtsverteilungen zwischen den beiden Wettertypen?

5. *Eine Autovermietung* hat ihre Standorte an den drei Flughafen einer Region in X, Y, Z. Die Kunden beziehen ihr Auto an einem beliebigen Standort und können es an jedem der drei Standorte abgeben. Die Bewegung der Mietwagen von Tag zu Tag zwischen den Standorten wird als Irrfahrt betrachtet. Angenommen, die zugehörige Matrix sei

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

5.1 Warum erfüllt die Matrix A die Bedingungen für eine stochastische Matrix?

5.2 Angenommen, die Firma hat heute 10 Autos in X, 22 Autos in Y und 48 Autos in Z. Wie verteilen sich diese Autos nach einer Woche auf die drei Standorte?

5.3 Welches sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert 1 und welche Bedeutung haben diese Eigenvektoren für die Autovermietung?

5.4 Wie verteilen sich die Autos nach langer Zeit auf die drei Standorte?

6. Wir betrachten ein System mit zwei Zuständen und Systemübergänge gemäss folgendem Zustandsdiagramm (Abbildung 2.) Wie viele Zeitschritte vergehen im Mittel vom Start in $\mathbb{A}$ bis zum ersten Erfolg $\mathbb{E}$? [Voraussetzungen: Erwartungswert, CAS]

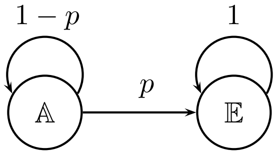

Abbildung 2: Warten auf den ersten Erfolg

7. *Ein Fotokopierer* befindet sich in einem der beiden Zustände *betriebsbereit* $\mathbb{B}$ oder *defekt* $\mathbb{D}$. Wir betrachten das Gerät während der Arbeitszeit von Stunde zu Stunde. Die Abbildung 3 zeigt die Daten. [Tip: Vorbereitung mit Aufgabe 6.]

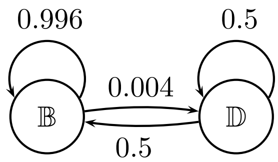

Abbildung 3: Zustandsdiagramm für den Fotokopierer

7.1 Wir simulieren das Verhalten des Fotokopierers über längere Zeit nach dem Markowmodell. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten werden die Zustände $\mathbb{B}$ und $\mathbb{D}$ in einer langen Beobachtungsreihe auftreten?

7.2 a) Wie gross sind die *mittleren Verweildauern* in den Zuständen $\mathbb{B}$ und $\mathbb{D}$ in einer langen Beobachtungsreihe?

b) Wie gross sind die *mittleren Rückkehrzeiten* zu den Zuständen $\mathbb{B}$ und $\mathbb{D}$?

7.3 Wie gross sind die Kennzahlen MTBF (mean time between failure) und MTTR (mean time to repair) gemäss dem Modell?

7.4 Welcher Zusammenhang besteht zwischen MTBF und MTTR einerseits und den im Modell postulierten Übergangswahrscheinlichkeiten? Welche praktische Bedeutung hat dieser Zusammenhang?

8. **Leontjef-Modelle** für einen abgeschlossenen Wirtschaftsraum. Ein Wirtschaftsraum wird unterteilt in verschiedene Wirtschaftszweige, beispielsweise

- Industrie und Infrastruktur
- Landwirtschaft und Nahrungsmittelproduktion
- Daten- und Güteraustausch
- Versorgung und Entsorgung
- Verwaltung und Staatsbetriebe

Die einzelnen Zweige tauschen Güter und Dienstleistungen, was durch einen Geldfluss jeweils vom Konsumenten zum Lieferanten abgebildet wird. Wir betrachten diesen Fluss in diskreten Zeitschritten. Die gesamte Geldmenge bleibe dabei konstant. Das ganze vorhandene Geld muss im Wirtschaftskreislauf eingesetzt werden, Exporte, Importe, Rückstellungen, Schulden oder Sparguthaben sind nicht vorgesehen. Das Modell einer abgeschlossenen Ökonomie entspricht einer autarken Wirtschaft, in der die Produktion den Bedarf gerade deckt.

In einem linearen Modell genügt es, zu wissen, wie die Basisvektoren abgebildet werden. Das heisst hier: Wir betrachten eine Geldeinheit, die in einem einzigen Wirtschaftszweig konzentriert ist und verfolgen, wie die Tätigkeit der Binnenwirtschaft während eines Zeitschrittes dieses Geld in die verschiedenen Wirtschaftszweige verteilt.

Wir erkennen exakt den gleichen Vorgang wie in einer Markowkette mit diskreten Zeitschritten, dort fliessen die Wahrscheinlichkeiten (als Gesamtmasse der Grösse 1) anstelle der Geldbeträge.

Die Geldflüsse lassen sich also durch ein Matrixmodell mit einer stochastischen Matrix modellieren. Die zugehörige Systemmatrix heisst dann *Leontjef-Matrix.* Für das Modell mit den fünf Wirtschaftszweigen ist

$$L = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.4 & 0.25 & 0.15 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.25 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.15 & 0.15 \\ 0.20 & 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.1 \\ 0.25 & 0.1 & 0.3 & 0.25 & 0.3 \end{bmatrix}$$

eine Leontjef-Matrix. Das Element $\ell_{12} = 0.4$ bedeutet, dass durchschnittlich von einer Geldeinheit im Sektor 2 (Landwirtschaft) während einer Zeiteinheit 40% in den Sektor 1 (Industrie) fliessen.

Das Modell sagt einen Gleichgewichtszustand für die Wirtschaft voraus, der durch den stochastischen Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Systemmatrix beschrieben wird.

Die Herausforderung in der Modellbildung besteht in der Datenerhebung, der Entschlüsselung der Geldflüsse in einem Wirtschaftsgeflecht und in der Abgrenzung der Wirtschaftszweige gegen einander.

Leontjef wurde 1973 der Nobelpreis für Ökonomie zuerkannt für empirische Modelle der US-Wirtschaft. Er nutzte schon 1943 in Harvard den ersten elektronischen Computer Mark I für die Bearbeitung grosser Matrizen, mit denen er empirische Daten aus mehreren hundert Zweigen der US-Wirtschaft analysierte.

Leontjef hat ein weiteres Matrixmodell entwickelt, das eine offene Ökonomie abbildet und dazu dient, die Produktion auf die Nachfrage abzustimmen. Dieses Modell wird hier nicht betrachtet.

Aufgaben zum Leontjef-Modell einer autarken Wirtschaft mit der Matrix L

8.1 Welche Eigenschaft der Matrix L bewirkt, dass die Geldmenge über alle Zeiten konstant bleibt?

8.2 Was geschieht im Laufe von 10 Jahren gemäss dem Modell, wenn heute die Geldverteilung auf die Wirtschaftszweige durch folgenden Vektor beschrieben wird?

$$\mathbf{g} := \begin{bmatrix} 350 \\ 100 \\ 240 \\ 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

8.3 Welche Bedeutung im Rahmen des Modelles hat der Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{e}$, für den $L \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$ gilt?

8.4 Welche Gleichgewichtsverteilung sagt das Modell für die eingesetzte Geldmenge voraus?

8.5 Wozu lassen sich Leontjef-Matrizen in den Wirtschaftswissenschaften anwenden? Welche Bedingungen muss eine Wirtschaft erfüllen, damit die Methode von Leontjef sinnvolle Antworten gibt?

9. **Monkey Business, Streicheleinheiten und PageRank**

Primatenforscher versuchen, die Entwicklung von Hierarchien in Lebensgemeinschaften von Affen zu entschlüsseln und zu verstehen. Wer hat am meisten Einfluss, wer verdient am meisten Respekt? Primatenforschung arbeitet mit quantitativen Methoden. Das Verhalten der Tiere wird mit Strichlisten protokolliert und mit der Stoppuhr untersucht. Bei manchen Affenarten wird Sympathie, Respekt und Vertrautheit durch gegenseitige Fellpflege (grooming, 'Lausen') ausgedrückt.

Die Grafik von Abb. 4 beruht auf Beobachtungen. Sie zeigt, wer bei wem Körperkontakt sucht. Die Gesamtdauer der jeweiligen Kontakte ist ein Mass für die Intensität der Beziehung zwischen den Beteiligten.

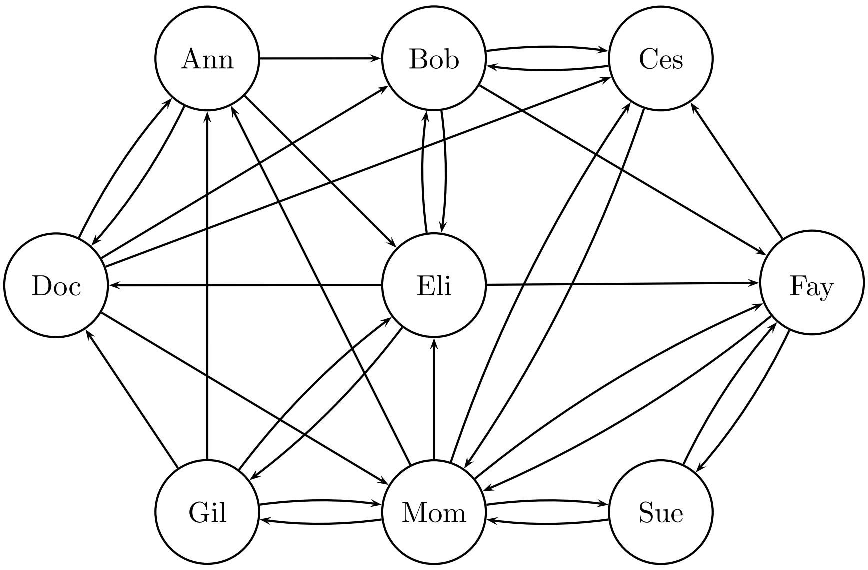

Abbildung 4: Soziogramm der Affengruppe

Diese Information wird in der 'Beziehungsmatrix' B kodiert. Sie wird in zwei Schritten konstruiert:

- Die beobachteten Intensitäten des Körperkontaktes zwischen erwachsenen Tieren werden reduziert auf einen Zahlenwert aus $\{0, 1, 2, 3\}$. Wenn das Tier mit Name k dem Tier mit Name i das Fell pflegt oder sonst hilft, wird die Intensität im Matrixelement C_{ik} eingetragen, andernfalls steht eine 0.
- Die Kolonnenvektoren in der Matrix C werden normiert zu Wahrscheinlichkeitsvektoren
$$B_{ik} := \frac{C_{ik}}{\sum_s C_{sk}}$$
Damit wird B eine stochastische Matrix.
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/3 & 1/7 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/5 & 1/5 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5 & 0 & 2/7 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/7 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & 1/7 & 0 \end{bmatrix}$$

Stellen wir uns vor, dass jeder Affe ein Guthaben von Streicheleinheiten hat. Die Kolonnen von B sagen aus, wie diese Streicheleinheiten anteilsmässig verteilt werden. Ersetzen wir in Gedanken 'Streicheleinheiten' durch 'Geldeinheiten', so befinden wir uns im input-output-Modell einer autarken Ökonomie nach Leontjef. Zur Matrix B gehört eine lineare Abbildung mit einem stochastischen Fixvektor, der die Verteilung des 'Sympathiekapitals' im langfristigen Mittel beschreibt. Das Prinzip des Rankings lautet dann: Das relative Guthaben an 'Sympathiekapital' im Gleichgewichtszustand bestimmt den sozialen Rang.

Die Zeitentwicklung lässt sich durch Potenzieren der Matrix B nachbilden. Es ist zweckmässig, iteriert zu quadrieren und in r Schritten B^{2^r} zu erreichen. Schon bald wird der Fixpunkt der Iteration mit guter Genauigkeit angenähert. Die Grösse der Einträge im Wahrscheinlichkeitsvektor, der den Fixpunkt bezeichnet, suggeriert eine Beliebtheitsskala.
$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ M \\ S \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.054678.. \\ 0.155003.. \\ 0.195428.. \\ 0.053923.. \\ 0.079753.. \\ 0.141545.. \\ 0.052858.. \\ 0.183916.. \\ 0.082892.. \end{bmatrix}$$

Daraus folgt das Ranking der Tiere: $C > M > B > F > S > E > A > D > G$. Es zeigt, wie sich die Sympathien langfristig auf die Mitglieder der Affengruppe aufteilen. Es ist nun eine blosse Konvention anzunehmen, dass damit die Hierarchie in der Gruppe entschlüsselt sei. Die gerundeten Werte am Ende der Beliebtheitsskala sind 0.055, 0.054, 0.053. Sie liegen sehr nahe bei einander. Ist dieses Ranking stabil? Würde es gleich aussehen, wenn ein anderer Beobachter die Daten zu einer anderen Zeit gesammelt hätte?

Die Stabilität der Antwort lässt sich durch Gruppenbildung verbessern

$$C > M > B > F > \{S, E\} > \{A, D, G\}$$

Diese Darstellung zeigt die Latenz der Hierarchie oder ein Konfliktpotenzial, das auf unklare Hierarchien zurückgeht.

Tatsächlich tauschen Affen nicht nur Streicheleinheiten aus, sondern es gibt auch handfesten Streit und Bisse, insbesondere, wenn die Hierarchie labil ist. Aufgrund des ungewichteten Beziehungsgeflechtes von Abb. 4 würde man erwarten, dass Mom das Leittier ist. Die gewählte Gewichtung ist ein Teil des Modelles, wird aber durch Beobachtungen nicht eindeutig festgelegt. Eine andere Wahl kann die Reihenfolge in der berechneten Hierarchie möglicherweise verändern. [vgl Aufgabe 9.1]

Bemerkungen zum PageRank

Die Hyperlinks im Internet bilden einen riesigen gerichteten Graphen. Er lässt sich analog zum Soziogramm nutzen, um ein Ranking der gespeicherten Dokumente zu konstruieren. Der PageRank ist ein pragmatisches Verfahren, das eine Irrfahrt im gerichteten Graphen der Hyperlinks simuliert und die relative Häufigkeit bestimmt für die Besuche der einzelnen Webseiten bestimmt. Diese Zahl wird als Mass für die Bedeutung der Websites interpretiert. Die Dominanz von Google verdrängt die Tatsache etwas, dass diese Rangierung von gewissen Konventionen abhängt.

Die Bestimmung der Hierarchie aus einem Soziogramm soll eine Ahnung vermitteln über prinzipielle Ideen, Methoden und Schwierigkeiten, die bei der Konstruktion von sozialen Rangordnungen auftreten. Stichworte sind: Datenerhebung, Matrixkodierung des Graphen, Umwandlung in eine stochastische Matrix, Projektion auf eine Hyperebene, Fixpunktiteration, numerische Näherung, Stabilität des Verfahrens, Robustheit der

Antwort, Konventionen über die Art der Rangordnung. Das ist schon viel für die Schule, aber bei weitem nicht genügend für Google. Die schiere Grösse des Datensatzes von Google wird im Schulbeispiel verniedlicht. Wir sind nicht auf Informatikprobleme und auf Fragen zu numerischen Näherungen oder zur Berechnungskomplexität eingetreten. Einzelheiten der Berechnung des PageRanks gelten als Firmengeheimnis.

Elementare Grundlagen zum PageRank werden in [Garcia] und [Anton, Busby] klar dargestellt, vertiefte technische Informationen gibt es in [Andrew Y. Ng et al.]

Rangordnungen, einige Aufgaben

9.1 Nochmals zur Hierarchie in der Affengruppe. Welches Ranking ergibt sich, wenn jeder Pfeil im Soziogramm von Abbildung 4 das Gewicht 1 erhält? Welche stochastische Matrix wird verwendet? Wie lautet der zugehörige stochastische Eigenvektor zum Eigenwert 1?

9.2 Es ist üblich, zum Neujahr, Bekannten und Freunden einen Brief, eine Karte oder ein SMS zu senden. Entwerfen Sie ein soziales Ranking aufgrund der Neujahrsgrüsse. Angenommen, keine Botschaft ergibt 0 Punkte, ein SMS ist 1 Punkt, eine Karte 2 Punkte und ein Brief 3 Punkte wert. Beschreiben Sie genau die Konstruktion der stochastischen Matrix.

9.3 Es ist nicht so klar, wer der 'beste' Tennisspieler ist. Es ist eine Konvention, dass in einem Turnier der Sieger als 'bester' gilt. Wie liesse sich aufgrund der Spiele im Verlaufe eines Jahres in einem Tennisclub eine stochastische Matrix ermitteln und eine alternative Rangordnung über die Stärke der Spieler finden?

9.4 Es gibt die Tradition, dass Mathematiker einander Aufgaben stellen. Etliche Fachzeitschriften enthalten eine Aufgabenseite. Es zeigt sich, dass manche der Löser selbst auch Aufgaben stellen und dass der Kreis der Löser in sich fast geschlossen ist. Angenommen, es gibt eine Gruppe von Leuten, die sich gegenseitig Aufgaben stellen. Welcher gerichtete und bewertete Graph zeigt den Austausch von 'Respekt' in der Gruppe der Löser? Wie lässt sich damit eine Rangordnung konstruieren für die 'Achtung', die ein Löser langfristig erwerben kann?

9.5 Einladung zum Essen: Man kann nicht alle Leute zum Essen einladen. Ein gelungenes gutes Essen unter Freunden ist eine Möglichkeit, Anerkennung zu zeigen oder als Köchin oder Koch Respekt zu erwerben. Gibt es eine Möglichkeit, diese 'Anerkennung' mit Hilfe einer stochastischen Matrix zu messen? Wenn ja, machen Sie einen Vorschlag.

9.6 Sehen und gesehen werden. Es gibt Anlässe, die die Besucher auszeichnen. Im Theater oder im Konzertsaal, am Opernball oder auf der Promenade kann man Leute von Rang und Namen treffen – und gesehen werden und damit vielleicht in der sozialen Rangordnung etwas gewinnen. Versuchen Sie auszudenken, wie mit einer stochastischen Matrix die Verteilung der sozialen Rangordnung an einem solchen Anlass untersucht werden könnte. Was müsste gemessen werden?

9.7 Wer erzählt wem einen Witz? Ein Ranking mit stochastischen Matrizen für Spassvögel? Welche Einzelheiten sind zu klären?

10. Prüfungsfragen

Beispiele aus dem Schwerpunktfach/Ergänzungsfach *Anwendungen der Mathematik*

10.1 Angenommen, in einem Land gibt es vier Krankenkassen, nennen wir sie K_1, K_2, K_3, K_4. Alle Verträge gelten nur für ein Jahr. Jeweils im November werden die Versicherten aufgefordert, die Verträge zu erneuern oder eine andere Versicherung zu wählen. Das Kundenverhalten wurde in Umfragen ermittelt. Die Ergebnisse sind mit einer stochastischen Matrix S dargestellt.

$$S = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.05 & 0.7 & 0.05 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 & 0.8 & 0.1 \\ 0.25 & 0.05 & 0.05 & 0.75 \end{bmatrix}$$

a) Welches Kundenverhalten beschreibt die Zahl 0.25 in der Matrix S?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der heute bei K_4 versichert ist,
   - dieser Versicherung vier auf einander folgende Jahre lang treu bleibt?
   - nach vier Jahren wieder zu den Kunden dieser Versicherung zählt?

c) Welche Bedeutung hat die Matrix S^{20} im Rahmen dieses Modells?

d) Wie lässt sich einsehen, dass 1 ein Eigenwert von S ist?

e) Welche praktische Bedeutung hat der Eigenwert 1 im betrachteten Zusammenhang?

f) Welche prozentuale Verteilung der Kunden auf die Versicherungen $K_1, \ldots, K_4$ sagt das Modell für die ferne Zukunft voraus? Was hat diese Voraussage mit Eigenwerten und Eigenvektoren zu tun? Mit welcher der bisherigen Antworten lässt sich ein Plausibilitätstest machen?

g) Inwiefern ist das Modell nicht realistisch, welche Tatsachen blendet es aus? Nennen Sie mindestens zwei Beispiele.

10.2 In einer Agglomerationsgemeinde gibt es drei Einkaufszentren, nennen wir sie A, B, C. Die Besitzer der Einkaufszentren interessierten sich vor allem dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit die drei Angebote das Interesse der jeweiligen Stammkunden finden. Es wurden Umfragen unter je 200 Kunden im Januar und im März durchgeführt. Die Ergebnisse werden durch folgende Tabellen zusammengefasst. In der Kolonne X und der Zeile Y ist jeweils die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass ein Kunde von X im gegebenen Monat auch bei Y eingekauft hat.

Januar	A	B	C
A	0.77	0.16	0.07
B	0.15	0.66	0.19
C	0.08	0.18	0.74

März	A	B	C
A	0.74	0.19	0.09
B	0.16	0.64	0.15
C	0.10	0.17	0.76

a) Wie ist die prozentuale Gleichgewichtsverteilung der Kunden auf die drei Anbieter gemäss den Daten der Januarumfrage?

b) Was ist an dieser Verteilung überraschend? Welche Eigenschaft der Datenmatrix führt auf dieses Ergebnis?

c) Wie ist die prozentuale Gleichgewichtsverteilung der Kunden auf die drei Anbieter gemäss den Daten der Märzumfrage?

d) Warum versagt das Verfahren zur Bestimmung der Marktanteile, wenn alle Stammkunden den Anbietern absolut treu sind?

e) Welche kritischen Fragen sind zu dieser Umfrage und zu den Ergebnissen anzumerken? Nennen Sie mindestens zwei Ihrer Meinung nach relevante Beispiele.

11. **Themen zur Schülerforschung**

Bisher haben wir gezeigt, wie lineare Algebra Eigenschaften von Irrfahrten auf Graphen entschlüsseln kann. Es ist reizvoll, die Rolle von Graphen und Irrfahrten zu vertauschen und zu fragen: Welche geometrischen Eigenschaften des Graphen lassen sich mit linearer Algebra aus Eigenschaften von Irrfahrten auf dem Graphen erkennen? Welche Eigenschaften zeigen sich in den zugeordneten Matrizen?

Es bleibt eine gewisse Freiheit in der Wahl der Definitionen. Welche Definitionen führen zu nützlichen Eigenschaften? (z.B.: gerichtete Graphen oder ungerichtete Graphen? Sind negative Bewertungen sinnvoll? Wann ist eine Schleife AA von einer Ecke zu sich selbst sinnvoll? Gibt es Matrixeigenschaften, die erwünscht sind, weil sie sich in der Geometrie der Graphen erkennen lassen?. . .)

Dazu bloss einige Stichworte und Hinweise:

- Beginnen Sie mit den einfachsten Beispielen.
- Protokollieren Sie die Ergebnisse, Ihre Beobachtungen und Vermutungen.

Wir betrachten ausgewählte Beispiele von Graphen: ‘Bäume’ oder die Gerüste von Polyedern. Zu diesen Graphen sollen Invarianten gefunden werden. In jeder Ecke des Graphen denken wir uns ein Laplace-Glücksrad mit so vielen Ausgängen, wie Kanten des Graphen von der betreffenden Ecke ausgehen. Damit ist ein Markowprozess als Irrfahrt auf dem Graphen definiert.

Ein weiterer möglicher Ausgangspunkt sind gerichtete Graphen, Gleichstromkreise und die Kirchhoffregeln für Knoten und Schleifen im Graphen.

Fragen zum Einstieg:

11.1 Welche Matrizen und welche Eigenwerte gehören zu einem ‘Baum’ (endlicher, zusammenhängender Graph ohne Zyklen)?

11.2 Welche Matrizen und welche Eigenwerte gehören zu den Kantengraphen der regulären n-Ecke? (Zyklen)

11.3 Welche Matrizen und welche Eigenwerte gehören zu den Kantengraphen der regulären Polyeder?

11.4 Welche geometrischen Eigenschaften der Graphen lassen sich in den Matrizen und welche in den Eigenwerten der zugehörigen stochastischen Matrix erkennen?

11.5 Warum sind diese Eigenwerte Invarianten des Graphen?

11.6 Was passiert mit der Matrix M_G, wenn die Ecken des Graphen G umnumeriert werden? Wie verhalten sich die Eigenwerte beim Umnumerieren der Ecken?

11.7 Welche Folgerung gilt, wenn bei zwei Graphen G, H sich die zugeordneten Matrizen M_G, M_H in mindestens einem Eigenwert unterscheiden?

11.8 Angenommen, G ist ein Graph und M_G die zugeordnete Matrix.

a) Welcher Graph gehört zu M_G^2, M_G^3, . . . ?

b) Welcher Graph gehört zur Transponierten M_G^{T} ?

c) Welche Eigenschaft von G bewirkt, dass $M_G = M_G^{\mathsf{T}}$ gilt?

d) Welche Bedeutung haben die Zeilensummen (Kolonnensummen) von M_G?

Literaturangaben

Anton and Rorres, Elementary Linear Algebra, Applications Version, 7th Ed, John Wiley & Sons Inc., New York 1994, ISBN 0-471-30570-7

Anton and Busby, Contemporary Linear Algebra, John Wiley & Sons Inc., New York 2003, ISBN 0-471-16362-7 [Search Engines, Page Rank, cf. pp 249-263]

S. Brin and L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual (Web) search engine. In The Seventh International World Wide Web Conference, 1998.

D. Carlson et al., Linear Algebra Gems, MAA Notes # 59, 2002, ISBN 0-88385-170-9

P. G. Doyle, J.L. Snell, Random Walks and Electric Networks, Carus Monograph Vol. 22, MAA, 1984, ISBN 0-88385-024-9

Arthur Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Klett Studienbücher, Band 2, 1978, ISBN 3-12-983170-3

Gabriel, K. R. and Neumann J. (1962); A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel Aviv, Quart. Jour. Roy. Meteorol. Soc. Vol. 88, pp 09-95.

Dr. E. Garcia www.miislita.com, [10.3.2012]
Matrix Tutorial 3: Eigenvalues and Eigenvectors. A tutorial on eigenvalues, eigenvectors and their properties. Includes step by step how-to calculations. An introduction to vector iteration, the Power Method and the Deflation Method is provided.

Andrew Y. Ng, Alice X. Zheng and Michael Jordan. Link Analysis, Eigenvectors, and Stability. In Proceedings of the Seventeenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01), 2001. [ps, pdf]

A. N. Langville und C. D. Meyer, Who is #1? The science of Rating and Ranking, Princeton University Press, ISBN 978-00691-15422-0

A. N. Langville und C. D. Meyer, Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings, Princeton University Press, 2006, ISBN 978-0-691-15266-0

Matoušek, Jiří, Thirty-three Miniatures, Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra, MAA Student Mathematical Library Vol 53, ISBN 978-8218-4977-4

C. D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 2000

Cleve B. Moler, Numerical Computing with MATLAB, section 2.11 PageRank and Markov Chains, SIAM, Philadelphia, 2004, ISBN 0-89871-560-1 (pbk)

Thomas P. Wihler, Mathematik für Naturwissenschaften: Einführung in die Lineare Algebra, Haupt Verlag, Bern 2012, UTB-Band 3636, ISBN 978-3-8252-3636-6

3 Lösungen und Kommentare

1. Die *stochastischen Vektoren* sind genau die konvexen Linearkombinationen der Standardbasis. Daher sind $E_1(1,0)$, $E_2(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ die Extremalpunkte der konvexen Menge der Wahrscheinlichkeitsvektoren.

   In $\mathbb{R}^3$ sind $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$, $E_3(0,0,1)$ die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Es ist konvexe Hülle von E_1, E_2, E_3.

   Analog bilden $E_1 \ldots, E_n$ in $\mathbb{R}^n$ die Ecken eines regulären $(n-1)$-Simplexes.

2. *Eigenschaften stochastischer Matrizen*

   2.1 $S^\intercal \mathbf{e}$ berechnet in jeder Zeile von $S^\intercal$ den Durchschnitt der Einträge. Das ist der Durchschnitt der Einträge in der entsprechenden Kolonne von S, also 1/3. Daher ist $S^\intercal \mathbf{e} = \mathbf{e}$

   2.2 $S^\intercal \mathbf{e} = 1 \cdot \mathbf{e} \neq \vec{0}$

   2.3 $S = (S^\intercal)^\intercal$ und $S^\intercal$ ist stochastisch.

   2.4 $M := S^\intercal - t \cdot \mathbb{I} \;\Rightarrow\; M^\intercal = S - t \cdot \mathbb{I}$ mit Einheitsmatrix $\mathbb{I}$.
   Für jede quadratische Matrix M gilt: M ist singulär $\Leftrightarrow$ $M^\intercal$ ist singulär.
   Variante: $\det(M) = \det(M^\intercal)$

   2.5 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, Notation: $\mathbf{p} > 0$ alle Koordinaten von $\mathbf{p}$ sind positiv, $\mathbf{q} \geq 0$ alle Koordinaten von $\mathbf{q}$ sind nicht negativ. Ein Punkt Q liegt genau dann im ersten Quadranten, wenn sein Ortsvektor $\mathbf{q} \geq 0$ erfüllt.

   Es sei s die zur stochastischen Matrix S bezüglich der Standardbasis gehörige lineare Abbildung. Dann ist für alle $\mathbf{q} > 0$ auch $s(\mathbf{q}) > 0$, weil es eine nichtnegative Linearkombination der Basisvektoren ist. Hingegen ist für alle $\mathbf{p} > 0$ das Bild $s(\mathbf{p}) > 0$, falls s regulär ist, sonst gilt $s(\mathbf{p}) \geq 0$.

   2.6 Die lineare Abbildung s bildet die Ebene η mit der Gleichung $\sum x_i = 1$ in sich ab. Sie wirkt also auf die Punkte der Ebene η als affine Abbildung. Die konvexe Hülle der Einheitspunkte auf den Koordinatenachsen (ein $(n-1)$-Simplex) umfasst genau die Punkte, deren Ortsvektoren stochastisch sind.

3. *Laplacemünze*

   3.1

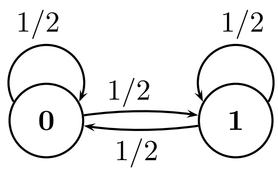

Abbildung 5: Zustandsdiagramm für Laplacemünze

   3.2

$$S = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4. *Ein stochastisches Klimamodell*

   4.1 Systemmatrix $M := \begin{bmatrix} 0.75 & 0.4 \\ 0.25 & 0.6 \end{bmatrix} \Rightarrow M^3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\text{Regen}) \approx 0.368$

   4.2 Analog $M^{30} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.615 \\ 0.385 \end{bmatrix} \Rightarrow p(\text{Regen}) \approx 0.385$

   4.3 $M \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \neq \vec{0}$ gilt für den Wahrscheinlichkeitsvektor $\mathbf{e} := \begin{bmatrix} 0.615 \\ 0.385 \end{bmatrix}$. D. h. $\mathbf{e}$ beschreibt Gleichgewichtsverteilung der Zustände [S] und [R].

   Bemerkung: Der Eigenvektor zum Eigenwert 1 wurde duch M^n für $n = 30$ schon hinreichend gut approximiert. Bei irreduziblen stochastischen Matrizen kann der Gleichgewichtszustand mit dem *Potenzalgorithmus* numerisch angenähert werden.

5. *Autovermietung*

   5.1 Alle Kolonnen von A sind stochastische Vektoren.

   5.2 $A^7 \begin{bmatrix} 10 \\ 22 \\ 48 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 31.8 \\ 18.4 \\ 29.8 \end{bmatrix}$

   5.3 stochastischer Fixvektor von A mit Potenzalgorithmus $\mathbf{e} \approx \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.229 \\ 0.371 \end{bmatrix}$.

   Die Koordinaten von $\mathbf{e}$ interpretieren mit gerundeten Werten: 40% der Autos in X, 23% der Autos in Y, 37% der Autos in Z.

   5.4 Da die Firma 80 Autos vermietet, verteilen sie sich im langfristigen Mittel gemäss $80 \cdot \mathbf{e} \approx \begin{bmatrix} 32 \\ 18.3 \\ 29.7 \end{bmatrix}$ auf die Standorte X, Y, Z.

6. *Warten auf den ersten Erfolg*
   Hinweis: Dies ist ein Beispiel für eine *absorbierende* Markowkette. Der Zustand $\mathbb{B}$ ist der *Rand.* Die zugehörige Markowkette ist *nicht* ergodisch.

   Die Berechnung des Erwartungswertes setzt eine Zufallsvariable voraus.

   1. Methode: Die Zufallsvariable X ist für alle natürlichen Zahlen definiert, $X(n) := n$ und zählt die Schritte im Versuch bis zum ersten Erfolg. Dieser tritt ein mit Wahrscheinlichkeit $P(X = n) = p \cdot (1-p)^{n-1}$. Nach Definition gilt für den Erwartungswert

$$E(X) = \sum_n X(n) \cdot P(X = n) = p \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1}) \quad \text{mit } q := 1 - p$$

   Jedes CAS kann diese Summe formal exakt bestimmen. Wer Zeit und Kraft hat, kann die Rechnung in grossen Zügen wie folgt nachvollziehen. Die Summanden von $\sum_n n \cdot q^{n-1}$ enthalten die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} q^n$. Daher versuchen wir, die Summenformel für geometrische Reihen ins Spiel zu bringen und dann abzuleiten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(\sum_n q^n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$$

und schliessen $E(X) = p/p^2 = 1/p$.

Dieser Schluss ist richtig, aber die Herleitung enthält eine Lücke, die wir hier nicht schliessen wollen: Nicht immer ist die Ableitung einer unendlichen Summe von Funktionen gleich der Summe der Ableitungen. Es möge genügen, dass für $|q| < 1$ und die geometrische Reihe dieser Schluss gilt.

2. Methode Wir betrachten das Ereignis *Erfolg nach mindestens $n > 0$ Schritten*. Die Wahrscheinlichkeit für sein Eintreffen ist $(1-p)^{n-1} = q^{n-1}$. Nun betrachten wir für jede natürliche Zahl $m > 0$ eine Zufallsvariable Y_m, $Y_m(n) := 0$ für $n < m$ und $Y_m(n) := 1$, für $n \geq m$, dann ist $X(r) = \sum_{m>0} Y_m(r) = r$ für alle natürlichen Zahlen r. Es ist

$$E(Y_m) = q^{m-1} \quad \text{und} \quad E(X) = \sum_{m>0} E(Y_m) = \sum_{r\geq 0} q^r = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

In dieser Berechnung wurde ohne Beweis benutzt, dass der Erwartungswert auch bei unendlich vielen Summanden additiv ist.

Beide unvollständigen Argumente führen aber auf das gleiche Ergebnis (auch das ist nur ein Plausibilitätsargument). Tatsächlich ist die Aussage im betrachteten Fall aber richtig. Das Thema wird in den Lösungen zu 7.2 und 7.3 weiter verfolgt.

7. *Zuverlässigkeit von Systemen modellieren*

   7.1 In einer hinreichend langen Beobachtungsreihe sieht man bei Markowketten praktisch bis auf endlich viele Ausnahmen ein System, das um weniger als eine beliebige positive Toleranz $\varepsilon > 0$ vom stationären Zustand abweicht. Eine stochastische $n \times n$-Matrix hat $n(n-1)$ Übergangswahrscheinlichkeiten als 'freie' Parameter. Im stationären Zustand bleiben aber nur $n-1$ wesentliche Parameter übrig. Wir betrachten den Fall $n = 2$

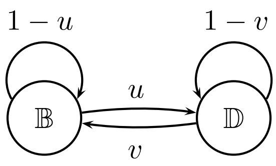

Abbildung 6: Zustandsdiagramm für ein lineares dynamisches System, Parameter u, v

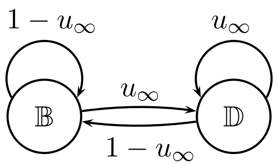

Abbildung 7: Zustandsdiagramm für dasselbe System im Gleichgewicht, Parameter u_∞

Als Grenzwert von S^k für $k \to \infty$ wird die Systemmatrix

$$S := \begin{bmatrix} 1-u & v \\ u & 1-v \end{bmatrix} \quad \text{vereinfacht zu} \quad S^\infty := \begin{bmatrix} 1-u_\infty & 1-u_\infty \\ u_\infty & u_\infty \end{bmatrix}$$

Praktisch ist für grosse $k := 2^r$ die Näherung $S^k \approx S^\infty$ mit bloss r Matrixprodukten berechenbar.
In allen Kolonnen von S^∞ steht der stochastische Eigenvektor zum Eigenwert 1 von S, dessen Komponenten den stationären Wahrscheinlichkeiten entsprechen.

Bemerkung: Das System ist im stochastischen Gleichgewicht, wenn in jedem Zustand der totale Zufluss den totalen Abfluss exakt kompensiert. [vgl Kirchhoffs Knotenregel]

Wegen $S \cdot S^\infty = S^\infty$ gilt

$$\begin{bmatrix} (1-u)\cdot(1-u_\infty) + v\cdot u_\infty \\ u\cdot(1-u_\infty) + (1-v)\cdot u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-u_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix}$$

Mit der Notation $v_\infty := 1-u_\infty$ hat die *Gleichgewichtsbedingung* die symmetrische Gestalt $u \cdot v_\infty = v \cdot u_\infty$. Daraus lässt sich der stochastische Fixvektor von S algebraisch finden. Er bildet die Kolonnen von S^∞. Also muss S^∞ nicht zwingend mit Grenzwerten berechnet werden. Es gilt

$$u_\infty = \frac{u}{u+v} \qquad v_\infty := 1 - u_\infty = \frac{v}{u+v}$$

Mit den gegebenen Daten der Aufgabe ist $u_\infty \approx 0.007936$ und $v_\infty \approx 0.9921$.

7.2 Wir betrachten ein System mit zwei Zuständen $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ und fragen nach der mittleren Länge von zwei verschiedenen Arten von Zustandswechseln:

a) Eine Folge $[\mathbb{X}, \ldots, \mathbb{X}, \mathbb{Y}]$, die beendet wird vom ersten Wechsel zum anderen Zustand. Die kürzeste derartige Folge ist $[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]$, sie hat die Länge 1 [Zeitschritt].
Dazu gehört die Frage nach dem Erwartungswert der Anzahl Schritte bis zum ersten Wechsel, das ist die *mittlere Verweilzeit* im Zustand $\mathbb{X}$. (vgl Aufgabe 6) Mit den Daten von Aufgabe 7 findet man für die mittlere Wartezeit bis zum Verlassen von $\mathbb{B}$ $t_B = 1/u = 250$ Zeitschritte und entsprechend für den Zustand $\mathbb{D}$ $t_D = 1/v = 2$ Zeitschritte.

b) Die Folge $[\mathbb{X}, \mathbb{Y} \ldots, \mathbb{Y}, \mathbb{X}]$ endet mit der ersten Rückkehr in den Ausgangszustand. Es interessiert die *mittlere Rückkehrzeit* nach $\mathbb{X}$. Die kürzeste derartige Folge $[\mathbb{X}, \mathbb{X}]$ hat die Länge 1 [Zeitschritt].

7.3 *Anwendungen von 7.2*

a) *Anwendung:* MTTR (mean time to repair). Das System ist im Zustand $\mathbb{D}$. Es interessiert die mittlere Zahl der Zeitschritte, die ein Unterhaltsdienst benötigt, bis erstmals ein Wechsel in den Zustand $\mathbb{B}$ auftritt. Mit dem Ergebnis von Aufgabe 6 und Abbildung 6 finden wir MTTR$= 1/v = 2$ [Zeiteinheiten]

b) *Anwendung:* MTBF (mean time between failure) Das System ist im Zustand $\mathbb{D}$. Es interessiert die mittlere Rückkehrzeit in den Zustand $\mathbb{D}$.
Mit Wahrscheinlichkeit $1-v$ ist dies nach einem Schritt der Fall. Andernfalls endet der erste Schritt mit Wahrscheinlichkeit v in $\mathbb{B}$ und es folgen weitere

Schritte bis zum ersten Verlassen von $\mathbb{B}$. Der Erwartungswert für die dazu benötigte Anzahl Schritte ist $1/u$ nach Aufgabe 6. Insgesamt ist der Erwartungswert für die Anzahl Schritte bis zur ersten Rückkehr nach $\mathbb{D}$ gegeben durch

$$(1-v)\cdot 1 + v\cdot(1+1/u) = 1 + v/u = \frac{u+v}{u} = 1/u_\infty = 126$$

Das mittlere Verhalten des Systems: Es ist einerlei, ob wir viele Systeme gleichzeitig mitteln oder ein einziges System über lange Beobachtungszeiten. Im Mittel gelten die Übergangswahrscheinlichkeiten gemäss Abbildung 7 und mit $v_\infty := 1 - u_\infty$ ergibt sich die Systemmatrix

$$S^\infty := \begin{bmatrix} v_\infty & v_\infty \\ u_\infty & u_\infty \end{bmatrix}$$

Die Zahl $1/u_\infty \approx 126$ lässt sich im System von Abbildung 7 nach Aufgabe 6 interpretieren, wenn wir den Pfeil benutzen, der von $\mathbb{B}$ nach $\mathbb{D}$ führt. Wir berechnen also die mittlere Wartezeit für den ersten Defekt in einer grossen Anzahl von Kopierern, die wir im betriebsbereiten Zustand vorgefunden haben.

Es gibt aber eine weitere Interpretationsmöglichkeit mit Abbildung 7, indem wir den Pfeil mit der Bewertung v_∞ von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{D}$ verwenden. Dazu gehört folgende Fragestellung: Wir sehen viele defekte Fotokopierer und möchten den Erwartungswert der Anzahl Zeitschritte kennen, bis wieder ein Defekt am Kopierer auftritt. Das ist der *Erwartungswert für die Rückkehrzeit* für $\mathbb{D}$ im stationären Zustand.

Für eine Rückkehr gibt es zwei sich ausschliessende Fälle: Entweder direkt nach $\mathbb{D}$, das ist 1 Schritt mit Wahrscheinlichkeit u_∞ oder über $\mathbb{B}$ mit Wahrscheinlichkeit v_∞. Der Umweg dauert im Mittel $1 + 1/u_\infty$ Schritte. Der Erwartungswert für die Schrittzahl bis zur Rückkehr in den Zustand $\mathbb{D}$ ist damit wegen $u_\infty + v_\infty = 1$

$$\mathrm{MTBF} = u_\infty \cdot 1 + v_\infty \cdot (1 + 1/u_\infty) = 1 + v_\infty/u_\infty = 1/u_\infty = 126$$

Analog findet man mit Abbildung 7 eine mittlere Rückkehrzeit zum Zustand $\mathbb{B}$ mit $1/v_\infty \approx 1(.008)$ [Zeitschritte].

Ergebnis: Mit den Elementen der Matrix S^∞ lassen sich die *Erwartungswerte der Rückkehrzeiten* in jeden einzelnen Zustand im ursprünglichen System berechnen. Es ist der Kehrwert der zugehörigen stationären Wahrscheinlichkeit.

Diese Eigenschaft gilt allgemein für 'reguläre' stochastische $n \times n$-Matrizen.

Bernoulliversuche und stationäre Markowketten Ein Bernoulliversuch hat zwei Zustände $\mathbb{X}$ und $\mathbb{Y}$ und zwischen ihnen Übergänge nach dem Schema von Abbildung 8. Die zugehörige Matrix ist von der Form

$$B = \begin{bmatrix} p, p \\ q, q \end{bmatrix} \quad \text{mit } q := 1 - p$$

Diese Matrixdarstellung eines Bernoulliversuchs entspricht genau einer stationären Markowkette mit zwei Zuständen.

Es gilt $B \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, also ist $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \neq \vec{0}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von B. Daraus folgt $\quad B = B^2 = \cdots = B^\infty$.

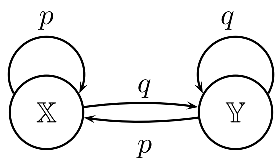

Abbildung 8: Zustandsdiagramm für ein Bernoulliexperiment, Parameter p, $q := 1 - p$

Interpretiert man das Schema mit Aufgabe 6, so ist $t_{\mathbb{X}} = 1/q$ die mittlere Verweilzeit im Zustand $\mathbb{X}$.

Benutzt man die Matrix $B = B^{\infty}$, so ist $1/q = 1/q_{\infty}$ auch die mittlere Rückkehrzeit zum Zustand $\mathbb{Y}$.

Ergebnis: Für Bernoulliexperimente mit Zuständen $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ ist die mittlere Verweilzeit im Zustand $\mathbb{X}$ gleich gross, wie die mittlere Rückkehrzeit zum Zustand $\mathbb{Y}$. Beide Ereignisse werden gestopt nach dem ersten Auftreten eines der Übergänge, die mit Wahrscheinlichkeit q eintreten und in $\mathbb{Y}$ enden.

7.4 Wir setzen b für MTBF und d für MTTR. Im Markowmodell legen sich die Paare von Parametern $(u|v)$ beziehungsweise $(b|d)$ gegenseitig und eindeutig fest.

$$v = \frac{1}{d} \qquad u = \frac{1}{d \cdot (b-1)} \qquad \text{falls } d \neq 0 \text{ und } b \neq 1$$

MTBF sollte gross und MTTR kurz sein. Ist eine Markowkette ein hinreichend realistisches Modell? Wie werden die Werte u und v gefunden? Zu MTTR gibt es viele praktische Erfahrungen. Damit lassen sich Mittelwerte für $1/v$ bestimmen.

Die praktische Bestimmung von MTBF ist mit grossen Unsicherheiten behaftet. Typischerweise sind die Streuungen etwa von der Grössenordnung der Mittelwerte selbst. Beispiel: Für handelsübliche Harddisks werden MTBF von mehr als 1 Million Stunden angegeben, das sind mehr als 100 Jahre. Daher sind technische Angaben von MTBF Hypothesen, die durch Simulationen und Modellrechnungen gestützt werden. Eine Verifikation über 100 Jahre wäre sinnlos. Die Beziehung $b = 1/u_{\infty}$ gemäss dem Markowmodell ist in der Praxis nicht zwingend erfüllt. Sie kann als Plausibilitätsargument für oder gegen das Matrixmodell verwendet werden, wenn empirische Daten vorliegen.

8. *Modelle für autarke Wirtschaftsräume*

8.1 Jede Geldeinheit in einem Wirtschaftszweig verteilt sich verlustfrei in Laufe des Zeitschrittes auf die Wirtschaftszweige (Kolonnen von L sind stochastische Vektoren). Weil die Abbildung linear ist, gilt die gleiche Aussage für alle Geldbeträge.

8.2 $\mathbf{g}_{10} := L^{10} \cdot \mathbf{g} \approx \begin{bmatrix} 294.4 \\ 201.8 \\ 214.0 \\ 187.2 \\ 292.6 \end{bmatrix}$

8.3 Der stochastische Vektor $\mathbf{e}$ beschreibt, wie sich ein Startkapital von 1 Geldeinheit im Gleichgewicht auf die fünf Wirtschaftszweige verteilt.

8.4 asymptotische Verteilung der 1190 GE $\quad \mathbf{g}_\infty \approx \begin{bmatrix} 294.42 \\ 201.79 \\ 214.01 \\ 187.23 \\ 292.56 \end{bmatrix} = 1190 \cdot \mathbf{e}$

8.5 Wirtschaftsraum abgeschlossen und autark. Geldmenge konstant, wird nach dem konstanten Zustandsschema in jedem Zeitschritt verteilt, d. h. Entwicklungen und Innovationen sind nicht berücksichtigt.

Keine Bevölkerungsentwicklung. Keine Wertschöpfung durch Ausbeutung der Natur oder durch ökologische Schäden, die nicht kompensiert werden.

Im Beispiel sind nach 10 Zeitschritten die Gleichgewichtsbedingungen praktisch schon erreicht. Ein Vergleich mit dem Startvektor **g** zeigt, dass die Geldmenge der Verwaltung und Staatsbetriebe sich wenig verändert hat (die Steuern sind angemessen?) Die Geldmenge in der Landwirtschaft hat sich etwa verdoppelt auf Kosten von Industrie, Daten- und Güteraustausch, Versorgung und Entsorgung.

Das Modell hat so viele theoretische Bedingungen zu erfüllen, dass die Existenz des Gleichgewichtes eher der Mathematik als den 'Kräften des Marktes' zu verdanken ist.

9. *Soziale Rangordnungen*

9.1 Matrix zu Soziogramm ohne Gewichtungen

$$B_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wird jede Kolonne von B_0 so skaliert, dass die Summe der Einträge 1 ergibt, wird die neue Matrix stochastisch und ihr stochastischer Eigenvektor zum Eigenwert 1 lautet:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ M \\ S \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0598 \\ 0.1311 \\ 0.1427 \\ 0.0478 \\ 0.1115 \\ 0.1630 \\ 0.0606 \\ 0.1963 \\ 0.0871 \end{bmatrix}$$

Rangordnung: $M > F > C > B > E > S > \{G > A\} > D$

9.2 Konstruktion in folgenden Schritten:

- alle Absender und Adressaten erfassen, welche Art von Mitteilung wurde gesandt?

- Soziogramm: Eckpunkte sind alle erfassten Personen, von jedem Absender geht eine gerichtete Kante zum entsprechenden Adressaten, die Kante wird je nach der Meldung gewichtet.
- Soziogramm als Matrix notieren und deren Kolonnen so skalieren, dass Kolonnensumme 1 ergibt.
- stochastischen Eigenvektor zum Eigenwert 1 ermitteln, seine Einträge geben das Gewicht für das Ranking.
- Eventuell Interpretation mit Gruppenbildung erleichtern.

9.x Bei allen folgenden Aufgaben müssen folgende Punkte geklärt werden:

- Datenerfassung und Soziogramm festlegen.
- Gewichtung festlegen.
  Für viele Probleme der Verhaltensforschung sind einfache aber robuste Masse gefragt. Was lässt sich 'objektiv' messen und erfassen, ohne den Ablauf des Anlasses zu stören. [Stoppuhr und Strichliste am Opernball ist undenkbar]. Ist das objektiv Messbare relevant?
- Matrix des gewichteten Graphen durch Skalieren der Kolonnen zu einer stochastischen Matrix umformen, stochastischen Eigenvektor zum Eigenwert 1 finden.
- Rangordnung aus den Einträgen des Eigenvektors ablesen, bei Bedarf robuste Gruppen bilden.

10. *Prüfungsaufgaben*

10.1 a) 0.25 Interpretation: 1/4 aller Kunden von K_1 wechselt im Jahr zu K_4.

b) $.75^4 \approx 0.361$
mit Systemmatrix S die Matrix $M := S^4$ berechnen und Element $m_{44} \approx 0.4068$ ablesen.

c) S^{20} beschreibt den Zustandswechsel über 20 Zeitschritte.

d) verschiedene Optionen, [eine richtige Anwtort genügt]: $S\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ist lösbar mit $\mathbf{x} \neq \vec{0}$ oder $S - \mathbb{I}$ ist singulär oder $\det(S - \mathbb{I}) = 0$ oder S ist stochastisch.

e) Der stochastische Eigenvektor $\mathbf{e}$ zum Eigenwert 1 beschreibt Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gleichgewichtszustand.

f) $\mathbf{e} \approx \begin{bmatrix} 0.1719 \\ 0.1830 \\ 0.3638 \\ 0.2813 \end{bmatrix}$

g) zeitlich konstante Matrix S vernachlässigt z.B.

- Demografische Entwicklung (z. B. Überalterung)
- Ökonomische Entwicklung (neue Angebote der Versicherungen, 'Markt' für medizinische Leistungen)
- Geburten und Todesfälle, Migration (d. h. Wechsel der Versicherten durch Gründe, die in S prinzipiell nicht erfasst werden.)

10.2 a) je 1/3 auf jeden Anbieter.

b) Laplace-Verteilung, Systemmatrix J ist doppelt stochastisch.

c) Gleichgewichtsverteilung $\quad \mathbf{e} \approx \begin{bmatrix} 0.34(31) \\ 0.30(09) \\ 0.35(60) \end{bmatrix}$

d) Die Systemmatrix wäre die Einheitsmatrix, und jeder stochastische Vektor beschreibt ein mögliches Gleichgewicht. Gleichgewicht ist indifferent, Fixpunkt nicht eindeutig.

e)
- Ist die Erhebung mit 200 Befragten repräsentativ? Wie würde eine zweite Umfrage mit 200 anderen Befragten aussehen?
- Ist ein stochastisches Modell für das Kundenverhalten sinnvoll? D. h. welches sind die Motive der Wechselkunden? Bleiben die Angebote der Anbieter konstant? Gab es im Januar oder im März bei gewissen Anbietern 'Aktionsangebote'?
- Warum sind die Daten auf 1% gerundet? Das sind formal keine plausiblen Durchschnitte von 200 Antworten.
- Sensitivität bzw, Robustheit der Methode, z.B.: Wie ändern die Werte der Umfrage, wenn nur ein einziger Kunde verschieden antwortet? [zudem: Wie vertrauenswürdig sind die Antworten? Sind alle Kundensegmente (z. B. Fremdsprachige) repräsentativ vertreten?]

Dank Ich danke H.R. Vollmer für ein sorgfältiges und kritisches Lektorat, das zu zahlreichen Verbesserungen geführt hat.