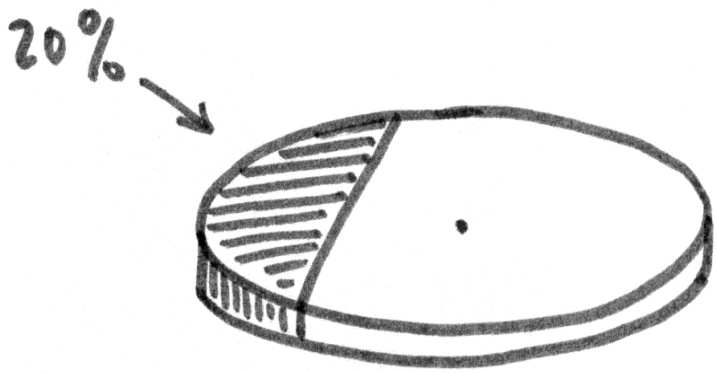
Die Fläche eines Kreissegmentes (Version II)

Eine Lernaufgabe zur Geometrie



Beschreibung

In dieser Lernaufgabe geht es darum, dass die Schüler/-innen selbständig über folgende Fragen nachdenken:

1) Durch was für Grössen kann man ein Kreissegment charakterisieren, und wie hängen sie zusammen?
2) Wie gewinnt man eine Formel für den Flächeninhalt eines Kreissegments?
3) Wie löst man die Umkehraufgabe: Gegeben der Flächeninhalt, gesucht das zugehörige Kreissegment. Diese Frage führt auf eine transzendente Gleichung.

Voraussetzungen

Die Schüler/-innen kennen die Formel für die Sektorfläche und eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines gleichschenkligen Dreiecks. Das bedeutet, dass ihnen die trigonometrischen Funktionen geläufig sein müssen. Hingegen brauchen sie Sinussatz und Cosinussatz nicht zu kennen.

Fach:	Mathematik
Schule:	Gymnasium
Adressaten:	10. Schuljahr
Bearbeitungsdauer:	2 Lektionen
Autoren:	Verena Gebauer, Urs Kirchgraber
Schulerprobung:	Ja
Fassung vom:	April 2000
Projektleitung:	K. Frey, U. Kirchgraber, ETH Zürich

Download

Die Lernaufgabe steht Ihnen im Word- und im PDF-Format zur Verfügung.

Die Fläche eines Kreissegmentes (Version II)

Eine Lernaufgabe zur Geometrie

Ziel

Sie erinnern sich: Die Fläche eines Kreises mit Radius r lässt sich mit der Formel $A = \pi r^2$ berechnen. (Dabei ist π=3.1415.. die sogenannte Kreiszahl) Auch von einem Kreissektor, s. Abbildung 1, haben Sie schon die Fläche berechnet. (Wenn Sie Ihre Erinnerung auffrischen wollen, hilft Ihnen dabei die Repetitionsaufgabe unten an der Seite.) In dieser Lernaufgabe geht es um den Flächeninhalt von *Kreissegmenten.*

Was ist ein Kreissegment?

Eine Sekante zerlegt einen Kreis in zwei Kreissegmente, s. Abbildung 2.

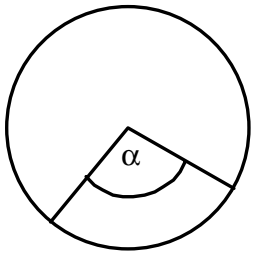


Abbildung1

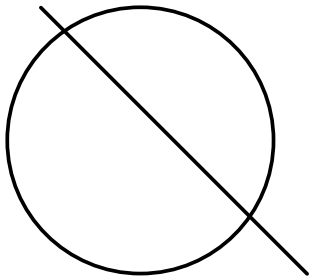


Abbildung 2

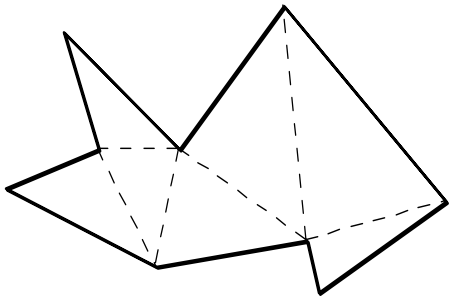


Abbildung 3

Warum interessiert der Flächeninhalt eines Kreissegments?

Am einfachsten ist die Berechnung von geradlinig begrenzten Flächenstücken. Diese Aufgabe kann man nämlich auf die Berechnung von Dreiecksflächen zurückführen, s. Abbildung 3. Die Bestimmung des Flächeninhaltes von krummlinig begrenzten Flächenstücken ist viel schwieriger, wie das Beispiel des Kreises zeigt (die Schwierigkeit steckt in der Berechnung von π). Auch Kreissegmente sind (teilweise) krummlinig begrenzt. Es ist daher interessant, zu überlegen, wie ihr Flächeninhalt bestimmt werden kann.

Der Auftrag

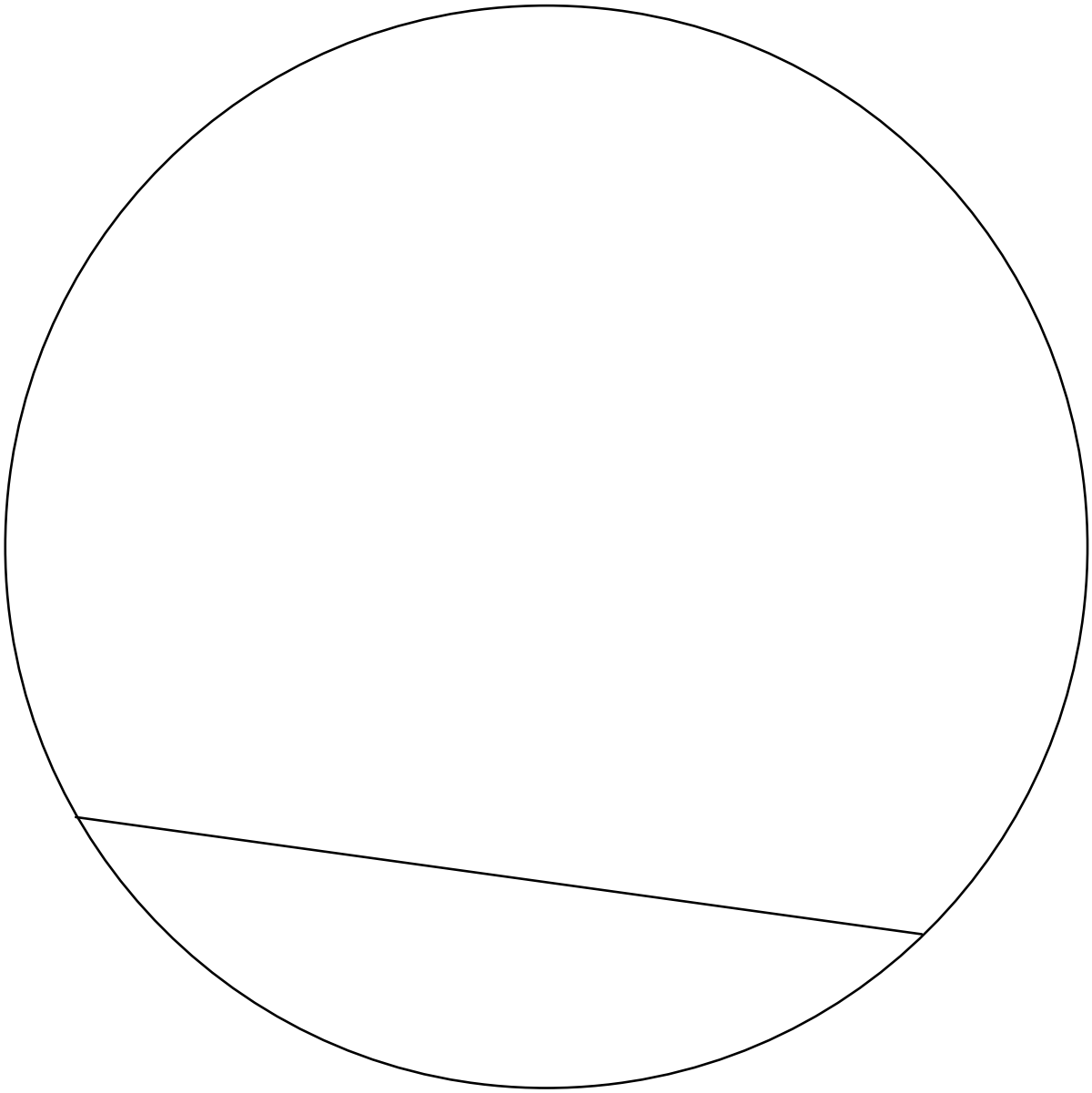
1. Können Sie sich eine Situation vorstellen, in der die Kenntnis des Flächeninhalts eines Kreissegments von praktischem Nutzen ist?
2. Betrachten Sie das Kreissegment auf dem beiliegenden Blatt. Stellen Sie sich vor, Sie wollten am Telefon einer Mitschülerin erklären, um was für ein Kreissegment es sich handelt - so, dass sie es zeichnen kann. Was für Angaben würden Sie übermitteln?
3. Ein Kreissegment lässt sich auf verschiedene Arten erfassen. Überlegen Sie sich mehrere Möglichkeiten, und stellen Sie die Zusammenhänge her.
4. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Kreissegmentes auf dem beiliegenden Blatt, wenn möglich auf mm^2 genau. Welchen Anteil (in Prozent) der Gesamtfläche des Kreises macht es aus?
5. Versuchen Sie eine Formel für den Flächeninhalt eines Kreissegments anzugeben.
6. Bestimmen Sie ein Kreissegment, dessen Fläche 20% der Kreisfläche ausmacht. Zeichnen Sie es auf dem beiliegenden Blatt ein.
7. Formulieren Sie mindestens eine verwandte Fragestellung.

Organisation, Bewertung

Sie arbeiten alleine, dürfen aber mit Ihrer Nachbarin, Ihrem Nachbarn diskutieren. Es stehen Ihnen die 90 Minuten der heutigen Doppelstunde zur Verfügung. Ich erwarte, dass alle zumindest die Aufgaben 1 bis 4 bearbeiten. Ihre Arbeit wird nicht benotet, aber sie wird eingezogen und mit einem Kommentar versehen zurückgegeben. Es ist daher wichtig, dass Sie Ihre Überlegungen gut dokumentieren.

Repetitionsaufgabe

Wie gross ist die Fläche eines Halbkreises?, eines Viertelkreises?, eines Kreissektors mit Öffnungswinkel 60°, eines Kreissektors mit Öffnungswinkel 43°? (Antworten: ca. $1.57r^2$, ca. $0.785r^2$, ca. $0.524r^2$, ca. $0.375r^2$)



Die Fläche eines Kreissegmentes (Version II)

Eine Lernaufgabe zur Geometrie

Lösungen und Kommentare

Aufgabe 1

Man könnte sich vorstellen, dass der Querschnitt eines Auto- oder Eisenbahntunnels (ungefähr) die Gestalt eines Kreissegments hat, und der Flächeninhalt wäre für die Abschätzung des Tunnelvolumens von Interesse.

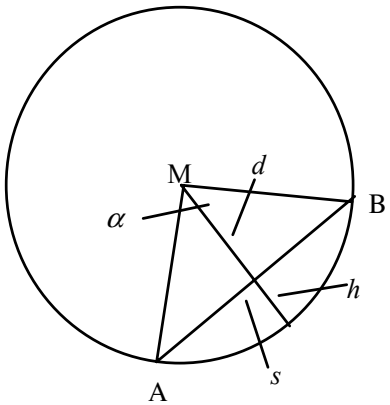
Bei der Berechnung der Eintauchtiefe eines langen homogenen zylindrischen Gegenstandes in eine Flüssigkeit muss man die entsprechende Kreissegmentfläche berechnen können.

Kommentar: Diese Aufgabe soll einen offenen Einstieg in ein eher enges mathematisches Thema ermöglichen. Vielleicht kommen unerwartete Vorschläge. So oder so ist es nötig, sich über die Bedeutung der Fragestellung Gedanken zu machen. Wenn der Sinn des Themas nur darin bestünde, dass es sich dafür eignet, dass die Schüler/-innen kleine Entdeckungen machen können, so wäre auch das schon ein guter Grund, die Lernaufgabe zu stellen. Die Schüler/-innen sollten dann dieses Motiv erfahren.

Aufgaben 2 und 3

Ein Kreissegment kann durch mindestens vier verschiedene Grössen charakterisiert werden: Die Höhe h, die Länge der Sehne s, den Abstand d des Kreismittelpunktes von der Sehne, den Öffnungs- oder Zentriwinkel α des zugehörigen Kreissektors. Die gesuchten Beziehungen lauten:

$$h + d = r, \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s}{2r}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{r}$$



Kommentar: Die Tatsache, dass ein Kreissegment durch verschiedene Grössen beschrieben werden kann, ist wichtig. Es ist schade, wenn zu schnell Vorgaben durch die Lehrperson gemacht werden. Das Ringen um eine vorteilhafte Beschreibung eines Objektes ist ein wichtiger Bestandteil in einem mathematischen Entdeckungsprozess. Wahrscheinlich sind s, oder h die für die Schüler/-innen naheliegenden Beschreibungsgrössen. Ob die etwas weniger offensichtliche Option der Erfassung durch den Zentriwinkel α, die sich schliesslich als die geeignetste erweist, von den Schüler/-innen in Betracht gezogen wird, muss sich zeigen. Eine solche Unsicherheit ist der Preis für eine offenere Fragestellung. Sie erfordert u.U. einen Gedankenaustausch zwischen den Schüler/-innen, oder sogar eine Intervention der Lehrperson. Dadurch, dass bei der Einführung der Lernaufgabe auf Kreissektoren und den zugehörigen Zentriwinkel Bezug genommen wird, sollte sich die Chance erhöhen, dass die Schüler/-innen die Benutzung von α in Erwägung ziehen. Indem verlangt wird, dass die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Beschreibungen hergestellt werden, wird die Einführung des Dreiecks ABM stimuliert. Es spielt für die Lösung der Aufgaben 4 und 5, wenn es darum geht, den Flächeninhalt eines Kreissegments zu berechnen, eine Schlüsselrolle.

Aufgaben 4 und 5

Kommentar: Hinter der Idee, ein ganz bestimmtes Kreissegment vorzugeben und seine Fläche ermitteln zu lassen, stehen zwei Überlegungen. Zum einen soll die Frage auf diese Weise konkretisiert werden. Vermutlich gewinnt sie dadurch für manche Schüler/-innen an Authentizität: Die Motivation, sie zu beantworten, ist grösser. Vielleicht trägt diese konkrete Form dazu bei, dass mathematisch weniger routinierte Schüler/-innen unkonventionelle Lösungswege einschlagen. Der zweite Grund ist folgender. Es kann so ein Zahlenbeispiel ins Spiel gebracht werden, ohne dass man das Kreissegment durch eine der möglichen Grössen festlegt und damit die Aufgaben 2 und 3 konkurrenziert. Dass die Schüler/-innen die Daten durch Messen selber beschaffen müssen ist ein zusätzlicher Pluspunkt.

Damit die Aufgabe gelöst werden kann, muss das Kreissegment als Differenz des zugehörigen Kreissektors und des Dreiecks ABM gesehen werden. Um diese Zerlegung zu stimulieren wurde bei der Einführung der Aufgabe darauf hingewiesen, dass Zerlegungen oft ein wirksames Instrument für die Bestimmung von Flächeninhalten sind, s. Abbildung 3. Die Art der Zerlegung wird einerseits durch den Hinweis auf die schon bekannte Bestimmung des Flächeninhalts von Kreissektoren und andererseits durch Aufgabe 3 vorbereitet, s. den Kommentar zur Lösung.

Der Flächeninhalt kann in verschiedenen Formen dargestellt werden. Aufgabe 4 könnte dazu führen, dass zahlreiche Schüler/-innen eine der folgenden Formeln verwenden

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2 - \frac{1}{2}sd = \frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2 - \frac{1}{2}s(r-h)$$

und die Werte von r, α, s, d durch Messung ermitteln. Das ist, was Aufgabe 4 anbelangt, durchaus befriedigend, und kann auch als Antwort für Frage 5 akzeptiert werden. Im Hinblick auf Aufgabe 6 ist es zweckmässig, wenn die Lehrperson darauf hinweist, dass die Grössen α, s und d bzw. h gemäss Aufgabe 3 voneinander abhängig sind, und sich die Formel für den Flächeninhalt durch eine einzelne dieser Grössen ausdrücken lässt. Vielleicht kann zusätzlich angemerkt werden, dass nicht jede der vier Grössen gleich praktisch ist. Da sich s und d bequem durch α darstellen lassen, erhält man für A in Abhängigkeit von α

$$A = A(\alpha) = \frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)r^2 = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\pi - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)r^2 = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\pi - \frac{1}{2}\sin(\alpha)\right)r^2,$$

wobei die letzte Umformung die Kenntnis der Doppelwinkelformel erfordert. Für Aufgabe 4 ergibt sich für das kleinere Segment (durch Messung) $r = 8cm$, $s = 12.65cm$, (durch Rechnung) $\alpha = 54.48^\circ$, Sektorfläche=$58.36cm^2$, $A = 26.37cm^2$, das entspricht einem Anteil von 13.1% der Kreisfläche.

Aufgabe 6

Jetzt geht es um die Lösung der Gleichung

$$A(\alpha) == \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\pi - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)r^2 = 0.2\pi r^2,$$

bzw.

$$\alpha - \frac{360}{\pi}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 72 = 0 \qquad (*)$$

Wie mit Gleichung (*) umgegangen wird, hängt von den Vorkenntnissen der Schüler/-innen ab. Eine Vorgehensweise, die auf systematischem Probieren beruht, ist durchaus passend. Zunächst könnten sich die Schüler/-innen überlegen, dass $\alpha = 180^\circ$ offensichtlich zu gross ist, während umgekehrt $\alpha = 90^\circ$ wohl zu klein ist. Dann könnten sie das Intervall von 90° bis 180° zum Beispiel in Schritten von 30° abtasten. Ein Versuch mit $\alpha = 120^\circ$ erweist sich als überraschend erfolgreich. Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung (*) mit $L(\alpha)$, folgt nämlich: $L(120^\circ) = -1.619....$ Aus $L(121^\circ) = -0.112...$ und $L(121.1^\circ) = 0.0395...$ kann der Schluss gezogen werden, dass der Zentriwinkel des gesuchten Kreissegments zwischen 121° und 121.1° liegt, dass die Länge s der Sehne etwa 87% des Kreisdurchmessers beträgt, und dass die Höhe h des Segments knapp 51% des Radius ausmacht.

Es gibt natürlich mehrere Alternativen, wie die Schüler/-innen mit der Gleichung (*) umgehen können. Sie könnten z.B. die linke Seite grafisch darstellen, oder die Gleichung mit dem Solver lösen.

Eine Gleichung vom Typ (*) tritt übrigens auch auf, wenn man die Eintauchtiefe eines zylindrischen Gegenstandes in eine Flüssigkeit berechnen will, vergl. Lösung b) zu Aufgabe 1.

Kommentar: Diese Aufgabe ist die „Rampe“ in dieser Lernaufgabe. Die Schüler/-innen begegnen hier einer recht komplizierten Gleichung, die nicht durch eine Formel gelöst werden kann. Sie machen hier (wieder einmal?) die Erfahrung, dass die Lösung einer Umkehraufgabe schwieriger ist, als die Lösung des direkten Problems.

Anmerkung: Es handelt sich bei der Gleichung (*) um einen Spezialfall der sogenannten Kepler-Gleichung (K): $E - e\sin(E) = M$. (K) folgt aus dem 2. Keplerschen Gesetz, dem sogenannten Flächensatz, und stellt den Zusammenhang her zwischen dem Ort (beschrieben durch die exzentrische Anomalie E) eines Planeten und dem Zeitpunkt (beschrieben durch die mittlere Anomalie M), zu dem er sich an diesem Ort befindet. e ist die Exzentrizität der elliptischen Bahn.

Aufgabe 7

Eine naheliegende Aufgabenvariation ist die Frage nach dem Umfang eines Kreissegments. Spannender ist die Frage nach dem 3-dimensionalen Analogon: Wie berechnet man das Volumen einer Kugelhaube?