Eidgenössische
Technische Hochschule
Zürich

Institut für Verhaltenswissenschaft
Departement Mathematik

Wer Schulden macht,

Ich wünsche

einen Kredit von Fr. .....

zum Kauf von .....

rückzahlbar in Monatsraten von ca. Fr. .....

Name ..... Vorname .....

muss rechnen können.

Ein Leitprogramm in Mathematik

Verfasst von
Moritz Adelmeyer und Jean-Paul David

Herausgegeben von
Urs Kirchgraber und Werner Hartmann

ETH-Leitprogramm
«Wer Schulden macht, muss rechnen können.»

Version

Mai 1995

Stufe, Schultyp

9./10. Klasse, alle Schultypen

Vorkenntnisse

Termumformungen
Auflösen von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten
Quadratwurzeln

Bearbeitungsdauer

6 bis 10 Lektionen, je nach Vorkenntnissen und Fähigkeiten

Bezugsquelle

Urs Kirchgraber
ETH Zürich
Departement Mathematik
ETH Zentrum
8092 Zürich

Telefon 01 / 632 34 51

Anschrift der Autoren

Moritz Adelmeyer
Kantonsschule Baden
Seminarstrasse 3
5400 Baden

Jean-Paul David
AKAD
Jungholzstrasse 43
8050 Zürich

Die **ETH-Leitprogramme** sind ein Gemeinschaftsprojekt von Karl Frey und Angela Frey-Eiling (Initiatoren), Walter Caprez (Chemie), Hans-Peter Dreyer (Physik), Werner Hartmann (Informatik), Urs Kirchgraber (Mathematik), Hansmartin Ryser (Biologie), Jörg Roth (Geographie), zusammen mit den Autorinnen und Autoren.

Dieses Projekt wurde durch die ETH Zürich ideell und finanziell unterstützt.

Diese Vorlage darf für den Gebrauch im Unterricht nach Belieben kopiert werden. Nicht erlaubt ist die kommerzielle Verbreitung.

Einleitung

Thema

Verschuldung und **Gleichungen** scheinen wenig miteinander zu tun zu haben. Doch wer Jahr für Jahr, Monat für Monat Geld zurückzahlen muss, kommt schnell einmal ins Rechnen: «Warum muss ich soviel Zins zahlen? Ist das nicht Wucher?» Wer diesen Fragen nachgeht, trifft bald einmal auf Gleichungen: auf Gleichungen, welche die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Geldbeträgen zum Ausdruck bringen.

Angebot und Ziel

Verschuldung und **Gleichungen:** Zu beidem vermittelt dieses Leitprogramm Grundlagenwissen. Und zwar so genau, dass Sie nachher in der Lage sind, einen Schuldenplan aufzustellen und durchzurechnen.

Gründe

Verschuldung als Politikum: In der Schweiz war 1990 durchschnittlich jeder dritte Haushalt mit einem Kleinkredit von 13'400 Fr. belastet. Während rund dreieinhalb Jahren bezahlte jeder dieser Haushalte ungefähr 420 Fr. monatlich zurück. Und die Tendenz geht dahin, immer mehr auf Pump zu leben.

Gleichungen als Werkzeug: Nicht nur wirtschaftliche Probleme, sondern auch naturwissenschaftliche Fragestellungen führen häufig geradewegs zu Gleichungen. Das Problem zu lösen oder die Frage zu beantworten heisst dann: zu wissen, **ob** und **wie** Gleichungen gelöst werden können.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 3

Arbeitsanleitung 5

Kapitel 1 Frau X nimmt Kredit auf 6

Übersicht 6
Wer ist Frau X ? 6
1.1 Zins 7
1.2 Zinseszins 8
1.3 Zinsperiode 13
1.4 Abzahlungsplan 18
1.5 Abzahlungsgleichung 20
Lernkontrolle zu Kapitel 1 25

Kapitel 2 Frau X löst die Gleichung 26

Übersicht 26
2.1 Lineare und nichtlineare Gleichungen 27
2.2 Planmässiges Probieren 30
Lernkontrolle zu Kapitel 2 38
Ihre Meinung ist gefragt 39

Lösungen zu allen Aufgaben 40

Lösungen zu den Aufgaben von Kapitel 1 40
Lösungen zu den Aufgaben von Kapitel 2 49

Additum 54

Übersicht 54
Arbeitsaufträge 55

Anhang für die Lehrperson 60

Kapiteltests 60
Quellen 68

Arbeitsanleitung

Selbständig arbeiten

Sie arbeiten dieses Leitprogramm selbständig durch. Sie können dabei Ihr eigenes Arbeitstempo anschlagen.

Sie bearbeiten ein Kapitel nach dem anderen. Am Schluss jedes Kapitels absolvieren Sie einen kurzen Test. Wenn Sie diesen Test bestehen, dann heisst das: Sie sind gewappnet für das nächste Kapitel. Jedes Kapitel enthält alles, was Sie brauchen:

- eine erste Seite, die Sie darüber informiert, was auf Sie zukommt und was Sie am Schluss können werden,
- Theorieteile mit eingestreuten Übungsaufgaben und kleineren Arbeitsaufträgen
- und eine Lernkontrolle als Vorbereitung auf den Kapiteltest.

Die richtigen Antworten zu allen Übungsaufgaben und Lernkontrollen finden Sie hinten im Leitprogramm ab Seite 40. So können Sie Ihren Wissensstand fortlaufend selbst prüfen.

Zwei Symbole, die Sie antreffen werden

Informationsbox
Dieses Symbol markiert eine Zusammenfassung von **Kernpunkten** der Theorie. Studieren Sie den Inhalt einer solchen Box immer genau. Sie brauchen dieses Wissen einerseits zum Lösen der Aufgaben, andererseits aber auch, um die weitere Theorie zu verstehen.

AUFGABE X

Dieses Symbol markiert eine **Übungsaufgabe**. Lösen Sie die Aufgabe, bevor Sie mit der Theorie weiterfahren. Die richtige Antwort steht im Lösungsteil des Leitprogrammes ab Seite 40. Schlagen Sie erst dort nach, wenn Sie ein eigenes Ergebnis gefunden und dieses mitsamt Lösungsweg oder -idee auf ein Blatt Papier geschrieben haben.

Und wenn Ihnen eine Lösung trotz allem Bemühen einfach nicht gelingen will? Lesen Sie in diesem Fall unsere Antwort, und lösen Sie danach die Aufgabe noch einmal ohne Vorlage.

Manch eine Aufgabe, die zunächst schwierig aussieht, gelingt mit etwas Beharrlichkeit dann doch. Der Lohn für die Ausdauer ist Zufriedenheit über die eigene Leistung. Daran wollen die drei Gesichtlein erinnern, die jeweils das Ende einer Aufgabe markieren.

☹ ☹ ☹

Kapitel 1 Frau X nimmt Kredit auf

Übersicht

Thema

Sie lernen in diesem Kapitel Frau X kennen, die bei einer Bank Kredit aufnimmt. Die Bank fordert dafür ein Entgelt: den Zins. Frau X versucht herauszufinden, wie hoch der Zins prozentual zum Kreditbetrag ist. Dazu sieht sie sich den Abzahlungsplan genauer an. Das führt sie zu einer Gleichung, welche die verschiedenen Kreditvariablen miteinander verknüpft.

Lernziele

Wenn Sie das Kapitel 1 durchgearbeitet haben, können Sie

- jemandem erklären, welche Berechnungen der Abzahlung eines Kredites zu Grunde liegen, und
- solche Berechnungen selber mit Papier, Bleistift und Taschenrechner durchführen.

Wer ist Frau X ?

Frau X braucht kurzfristig Geld

Frau X, Studentin an der Uni Basel, plant einen Sprachaufenthalt in den USA. Sie hat sich für einen zehnwöchigen Sommerkurs im Anschluss an das kommende Semester entschieden. Das Arrangement schliesst Flug, Unterkunft und Schulgeld ein. Die Kosten von rund 8'000 Franken muss sie schon jetzt bei der Anmeldung entrichten. Etwa 3'000 Franken hat sie bereits gespart. Das Geld liegt bei einer Bank auf einem Sparkonto. Die restlichen 5'000 Franken will sie als Darlehen aufnehmen und noch vor Reiseantritt zurückzahlen. Frau X hat gute Chancen, den Kredit zu erhalten: Sie hat seit langem einen sicheren Teilzeitjob, der ihr die regelmässige Bezahlung der Raten ermöglichen wird.

Die Bank macht ein Angebot

Die Bank schlägt Frau X vor, den Kreditbetrag von 5'000 Fr. in 6 Monatsraten zu 870 Fr. zurückzuzahlen. Frau X fragt sich nun:

- Welche Berechnungen liegen diesem Angebot zu Grunde?
- Wieviel Profit erzielt die Bank?
- Entspricht dieses Angebot den gesetzlichen Zinsvorschriften?

Können Sie Frau X bei der Beantwortung dieser Fragen helfen? Nun, am Ende dieses Kapitels gewiss. Zunächst aber gilt es, die **Grundlagen der Zinsrechnung** kennenzulernen.

1.1 Zins

Was ist Zins? Über Leistung und Gegenleistung im Kreditgeschäft

Wie Wohnungen kann man auch Geld mieten.

Der Wohnungsvermieter stellt einen bestimmten Wohnraum über einen bestimmten Zeitraum zur Verfügung. Für diese Leistung verlangt er vom Mieter eine Gegenleistung in Form der Miete. Die Miete wird pro Wohneinheit und Zeiteinheit festgelegt. Zum Beispiel: 10 Fr. Miete pro Quadratmeter Wohnfläche und pro Monat.

Die Bank als **Kreditgeber** leiht einen bestimmten Geldbetrag für eine bestimmte Zeit aus. Für diese Leistung verlangt sie vom **Kreditnehmer** eine Gegenleistung in Form des **Zinses**. Zum Beispiel: 150 Fr. Zins pro 1'000 Fr. Kredit und pro Jahr.

Zinssatz

Im Kreditgeschäft sind Mietsache (Kredit) und Miete (Zins) vom gleichen Typ, nämlich Geld.

Zinssatz

Das Verhältnis Zins zu Kredit, bezogen auf eine Zeiteinheit, heisst **Zinssatz**:

$$\textbf{Zinssatz} = \frac{\textbf{Zins}}{\textbf{Kredit}}$$

Im obigen Beispiel beträgt der Jahreszinssatz $\frac{150\text{ Fr.}}{1000\text{ Fr.}} = 0.15 = \frac{15}{100} = 15\,\%$.

AUFGABE 1

Eine Bank verlangt für einen Kredit von 15'000 Fr. einen Jahreszins von 2'025 Fr.

Mit welchem Zinssatz rechnet die Bank?

☹ ☞ 😐 ☞ ☺

AUFGABE 2

Kredite zum Kauf von Wohnungen und Häusern nennt man **Hypotheken**. Der Zins heisst **Hypothekarzins**.

Herr Jacot lebt in einer Wohnung, die er vor 10 Jahren gekauft hat. Dazu nahm er damals eine Hypothek von 180'000 Fr. auf. Der Hypothekarzinssatz betrug 5.25% pro Jahr.

Wieviel Hypothekarzins hat Herr Jacot im 1. Jahr als Wohnungsbesitzer bezahlt?

☹ ☞ 😐 ☞ ☺

1.2 Zinseszins

Der Kleinsparer als Kreditgeber

Wenn Sie Geld auf einem Sparkonto einer Bank anlegen, tätigen Sie ein Kreditgeschäft. Sie selbst befinden sich dann in der Rolle des Kreditgebers. Sie überlassen der Bank Ihr Geld leihweise zur Nutzung. Die Bank befindet sich in der Rolle des Kreditnehmers. Sie vergütet das geliehene Geld mit Zinszahlungen.

Die Bank zahlt Ihnen den Zins üblicherweise nicht aus, sondern schreibt ihn Ihrem Sparkonto gut. Dadurch wächst Ihr Kontostand von Jahr zu Jahr, selbst wenn Sie keine weiteren Einzahlungen vornehmen.

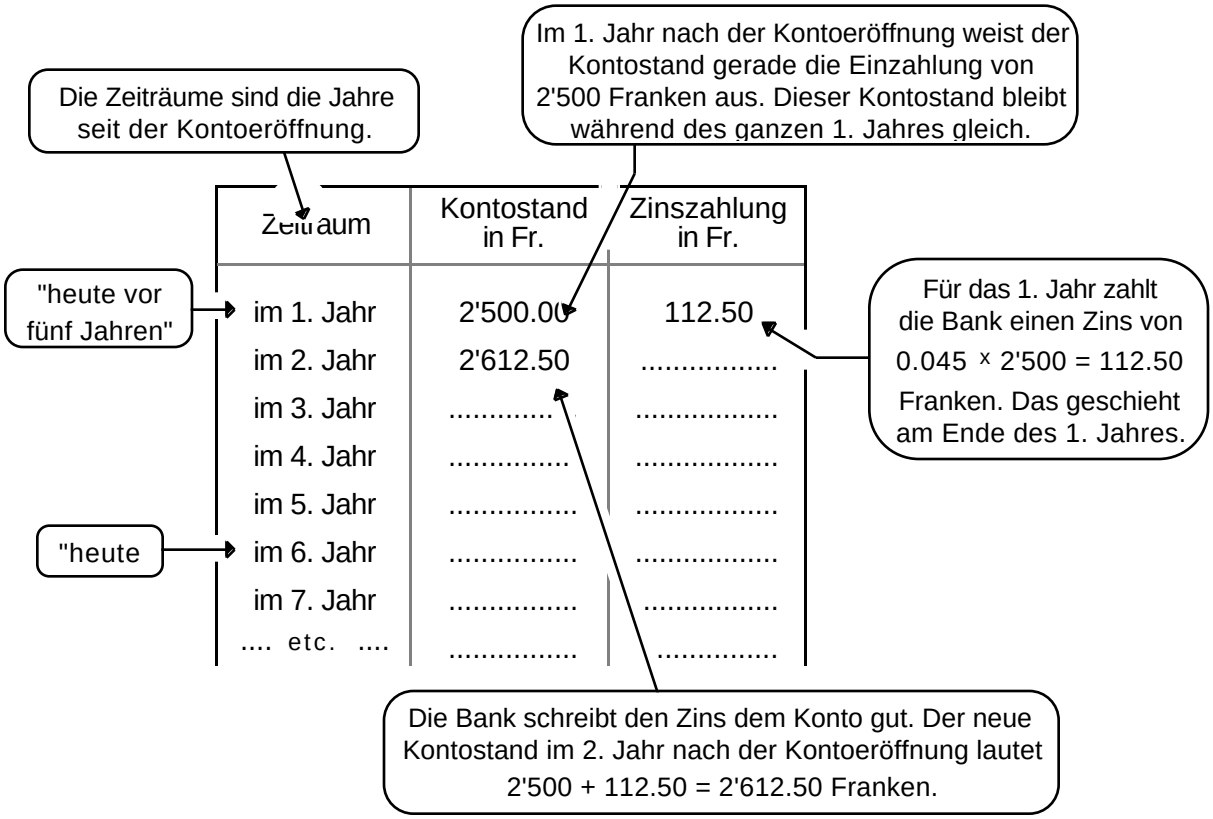
Der dem Konto gutgeschriebene Zins wird in den folgenden Jahren mitverzinst. Der Zins wirft weiteren Zins ab. Man spricht in diesem Zusammenhang vom **Zinseszins**.

Wie der Kontostand wächst

Als Beispiel studieren wir das Sparkonto von Frau X, die mit dem Ersparten einen Teil ihres Sprachaufenthaltes in den USA finanzieren will.

Frau X hat ihr Sparkonto vor 5 Jahren eröffnet und damals 2'500 Fr. eingezahlt. Seither hat sie das Konto nicht mehr angerührt. Sie hat weder Geld eingezahlt, noch hat sie sich Geld auszahlen lassen. Wie hoch ist der heutige Kontostand, wenn der Jahreszinssatz 4.5% beträgt?

Es ist nützlich, die wesentlichen Geldbeträge in einer Tabelle zusammenzustellen.



Zeitraum	Kontostand in Fr.	Zinszahlung in Fr.
im 1. Jahr	2'500.00	112.50
im 2. Jahr	2'612.50	.....
im 3. Jahr	.....	.....
im 4. Jahr	.....	.....
im 5. Jahr	.....	.....
im 6. Jahr	.....	.....
im 7. Jahr	.....	.....
.... etc.	.....	.....

AUFGABE 3

Vervollständigen Sie nun die Tabelle auf Seite 8. Beachten Sie dabei bitte folgende Punkte:

- Führen Sie (hier und im ganzen Leitprogramm) alle Berechnungen immer mit der vollen Taschenrechnergenauigkeit durch. Speichern Sie Zwischenresultate im Taschenrechner ab, und rechnen Sie mit diesen abgespeicherten, exakten Werten weiter.
- Tragen Sie Geldbeträge auf Rappen gerundet in die Tabellen ein.

☹ ➪ 😐 ➪ ☺

Der Zinsfaktor

Wir wollen jetzt die Tabelle von Seite 8 genauer unter die Lupe nehmen.

Zeitraum	Kontostand in Fr.	Zinszahlung in Fr.
im 1. Jahr	2'500.00	112.50
im 2. Jahr	2'612.50	.....
.....	.....	.....

alter Kontostand

neuer Kontostand

?

Wie hängen die Kontostände zweier aufeinanderfolgender Jahre zusammen? Lässt sich der neue Stand vielleicht direkt aus dem alten berechnen, ohne Umweg über den Zins?

neuer Kontostand = alter Kontostand + Zins

= alter Kontostand + Zinssatz x alter Kontostand

= (1 + Zinssatz) x alter Kontostand

= 1 + Zinssatz x alter Kontostand

2'612.50 = 1.045 x 2'500.00

Wie wir sehen, wird der Kontostand vom ersten zum zweiten Jahr ganz einfach mit der Zahl 1 + Zinssa **multipliziert**. Diese Zahl heisst **Zinsfaktor**. Das gleiche wiederholt sich auch vom zweiten zum dritten Jahr, vom dritten zum vierten usw. Da der Zinsfaktor etwas grösser als eins ist, wächst der Kontostand jedes Jahr ein wenig.

Zinseszinsformel

Und wie steht es nun mit dem Kontostand vor 5 Jahren und dem derzeitigen? Lässt sich hier vielleicht ein ähnlich einfacher Zusammenhang finden?

Um einem solchen auf die Spur zu kommen, bauen wir eine Tabelle auf. Anstelle der konkreten Zahlenwerte verwenden wir Buchstaben, denn nur so werden wir Gesetzmässigkeiten erkennen können.

Mit Buchstaben zu rechnen, ist für Sie nicht neu. Und auch das wissen Sie wahrscheinlich schon: Weil ein so verwendeter Buchstabe einen beliebigen Zahlenwert vertreten kann, sagt man auch, er stelle eine **Variable** dar. «Variabel» ist ein Fremdwort für «veränderbar».

	Variable	Zahlenwert
einmalige Einzahlung in Fr. zur Kontoeröffnung	E	2'500
Jahreszinssatz	p	0.045
Zinsfaktor	q	1.045

Beispiele

Der Tabellenanfang sieht jetzt so aus:

Zeitraum	Kontostand in Fr.	Zinszahlung in Fr.
im 1. Jahr	E	p E
im 2. Jahr	q E	…

$E + p\,E = (1+p)\,E = q\,E$

Zinssatz z.B. p = 0.045

Zinsfaktor z.B. q = 1.045

Wenn wir mit dem Zinsfaktor q arbeiten, brauchen wir diesen Eintrag eigentlich gar nicht mehr.

Zinsfaktor

- Der Faktor (1 + Zinssatz) heisst **Zinsfaktor**.
- Er wird üblicherweise mit **q** bezeichnet.
- Es gilt also: **q = 1 + p**
- Beispiel: Für den Zinssatz p = 4.5% beträgt der Zinsfaktor q = 1.045 .
- Der Zinsfaktor ist die Zahl, mit der man den Kontostand **multiplizieren** muss, um seinen Wert nach der nächsten Verzinsung zu erhalten.

Jetzt ist es ein leichtes, die Tabelle für weitere Jahre fortzusetzen. Dabei lassen wir die dritte Kolonne weg, weil wir sie gar nicht mehr brauchen. Hingegen fügen wir eine zusätzliche Kolonne ein, welche die Anzahl Verzinsungen zeigt.

Zeitraum	Anzahl Verzinsungen	Kontostand in Fr.
im 1. Jahr	0	E
im 2. Jahr	1	$q\ E$
im 3. Jahr	2	$q^2\ E$
im 4. Jahr	3	$q^3\ E$
im 5. Jahr	4	$q^4\ E$
im 6. Jahr	5	$q^5\ E$
.... usw.	.....	.....

$q\ (q\ E) = q^2\ E$

$q\ (q^2\ E) = q^3\ E$

etc.

Fällt Ihnen auf, dass die Hochzahl von q immer gleich der Anzahl Verzinsungen ist und um eins hinter der Jahresnummer herhinkt? Für das 20. Jahr beispielsweise würde rechts $q^{19}\ E$ stehen.

Jetzt führen wir noch eine zusätzliche Variable ein, nämlich den Buchstaben n für die Anzahl Verzinsungen.

Sie haben gesehen, dass der Exponent (die Hochzahl) von q gleich der Anzahl Verzinsungen ist. Die Jahresnummer dagegen ist um eins grösser, sie beträgt $n+1$.

Statt die Tabelle fortzusetzen, können wir nun auch einfach sagen, wie eine Zeile allgemein lautet:

Zeitraum	Anzahl Verzinsungen	Kontostand in Fr.
im (n+1)-ten Jahr	n	$q^n\ E$

Diese eine Tabellenzeile steht stellvertretend für jede beliebige Zeile der vorherigen Tabelle. Man braucht nur das gewünschte n einzusetzen. Probieren Sie das doch gleich einmal selber aus. Setzen Sie zum Beispiel n = 4.

Zinseszinsformel

Eine einmalige Einzahlung von E Franken mehrt sich nach n Verzinsungen mit einem Zinsfaktor q auf einen Wert von

$$q^n\ E \quad \text{Franken.}$$

Der Mehrwert stammt von den Zinsen und Zinseszinsen.

Kehren wir zum Beispiel von Frau X zurück. Ihre Einzahlung von E = 2'500 Fr. ist bei einem Zinsfaktor von q = 1.045 bis heute n = 5 mal verzinst worden. Ihr derzeitiger Kontostand beträgt somit

$$q^n \; E \; = \; 1.045^5 \times 2'500 \; = \; \underline{3'115.45} \text{ Franken .}$$

Das Ergebnis stimmt mit demjenigen aus Aufgabe 3 überein.

AUFGABE 4

Alice und ihr jüngerer Bruder Bertrand haben ihre Sparkonten bei derselben Bank. Der Jahreszinssatz beträgt für beide 4.5 %.

Alice hat vor 8 Jahren 700 Franken einbezahlt, Bertrand 3 Jahre später 800 Franken. Weitere Einzahlungen gab es nicht.

Wer hat heute den höheren Kontostand? Um wieviel höher?

☹ ☜ 😐 ☜ ☺

AUFGABE 5

a) Wieviel Geld muss man auf ein Sparkonto einzahlen, um bei einem Zinssatz von 6.75% nach Ablauf von 10 Jahren 25'000 Fr. angespart zu haben?

b) Herr Eibl besitzt ein Sparkonto. Vor 4 Jahren betrug der Kontostand 9'455.10 Fr. Zu jenem Zeitpunkt hat Herr Eibl letztmals eine Einzahlung getätigt. Sein derzeitiger Kontostand beträgt 12'849.15 Fr. Wie hoch war die letzte Einzahlung von Herrn Eibl, wenn der Jahreszinssatz 5.25% beträgt?

☹ ☜ 😐 ☜ ☺

1.3 Zinsperiode

Zeit ist Geld

Bis jetzt haben wir die Zinsen immer jeweils im Abstand eines Jahres berechnet. Die Zeit zwischen zwei Verzinsungen heisst **Zinsperiode**. Die Zinsperiode betrug in allen bisherigen Beispielen 1 Jahr.

Kleinkredite werden im allgemeinen in kürzeren Abständen verzinst. Der Kreditnehmer muss üblicherweise monatliche Zinszahlungen an die Bank leisten. Die Zinsperiode beträgt dann 1 Monat.

Bei Kreditangeboten ist darauf zu achten, auf welche Zinsperiode sich der angegebene Zinssatz bezieht. Je kürzer die Zinsperiode, desto schneller werden die Zinsen zum Schuldenstand hinzugerechnet und in den nachfolgenden Zinsperioden mitverzinst.

Zinssatz und Zinsperiode

Um den Zusammenhang zwischen Zinssatz und Zinsperiode deutlich zu machen, werden die Zinssätze mit einem **Zusatz** versehen.

Zusatz	Bedeutung	Zinsperiode
p. a.	pro Jahr (pro anno)	1 Jahr
p. s.	pro Semester	_ Jahr
p. q.	pro Quartal	_ Jahr
p. m.	pro Monat	1 Monat

Beispiele: 15 % **p. a.** heisst 15 % **pro Jahr**
1.20 % **p. m.** heisst 1.20 % **pro Monat**

Welches Angebot ist günstiger?

Frau Kohn und Herr Lewin nehmen bei verschiedenen Banken je einen Kredit von 5'000 Fr. auf. Die Zinssätze betragen:

12 % p. a. für Frau Kohn
6 % p. s. für Herrn Lewin .

Die Kredite sollen nach 3 Jahren durch eine einmalige Zahlung zurückgezahlt werden.

Welches Angebot ist günstiger? Das heisst: Wer muss weniger Geld zurückzahlen, Frau Kohn oder Herr Lewin?

Vielleicht wundern Sie sich über die Fragestellung: «Im ganzen Jahr 12% oder im halben Jahr 6%, das macht doch keinen Unterschied! Zur halben Zinsperiode gehört der halbe Zinssatz, das ist doch klar!» Ob dies tatsächlich zutrifft oder nicht, wollen wir rechnerisch entscheiden.

Bevor Sie losrechnen, möchten wir Sie noch auf etwas hinweisen: Im allgemeinen werden Kredite nicht auf einmal, sondern in mehreren Raten zurückgezahlt. Die Einzelheiten zur Rückzahlung in Raten werden Sie im nächsten Abschnitt kennenlernen.

AUFGABE 6

Rechnen Sie aus, wieviel Frau Kohn und Herr Lewin nach 3 Jahren zurückzahlen müssen. Sie können das auf zwei Arten tun:

- Schritt für Schritt, indem Sie für Frau Kohn und Herrn Lewin je einen Schuldenplan aufstellen,
- oder schnurstracks, indem Sie auf den letzten Abschnitt 1.2 Zinseszins zurückgreifen.

Der Schuldenplan könnte etwa so aussehen:

	Frau Kohn		Herr Lewin	
Zeitraum	Schulden-stand in Fr.	Zins in Fr.	Schulden-stand in Fr.	Zins in Fr.
1. Halbjahr	.....		.....	.....
2. Halbjahr	.....	.....	.....	.....
3. Halbjahr	.....		.....	.....
4. Halbjahr	.....	.....	.....	.....
5. Halbjahr	.....		.....	.....
6. Halbjahr	.....	.....	.....	.....
nach 3 Jahren	.....		.....	

☹ ☹ ☺

Für welche Zinssätze sind die Angebote gleichwertig?

Wir knüpfen bei der letzten Aufgabe an und stellen die Frage: Bei welchem Zinssatz p. s. wäre das Angebot von Herrn Lewin gleich günstig wie jenes von Frau Kohn?

Frau Kohn muss 7'024.64 Franken zurückzahlen. Also soll Herr Lewin auch nur 7'024.64 Franken zurückzahlen müssen.

Der Kredit von Herrn Lewin wird in den drei Jahren 6 mal verzinst. Wir suchen also einen Zinsfaktor q, für den folgendes gilt:

$$q^6 \; 5'000 = 7'024.64 \; .$$

Dividieren wir auf beiden Seiten durch 5'000, so erhalten wir

$$q^6 = 1.4049 \; .$$

Diese Gleichung können Sie nicht mit den üblichen Umformungsschritten lösen. Die Unbekannte q kommt in der 6. Potenz vor. Das Kapitel 2 «Frau X löst die Gleichung» befasst sich mit genau dieser Art von Problemen. Wenn Sie das Kapitel 2 einmal hinter sich haben, wird Ihnen eine solche Gleichung kein Kopfzerbrechen mehr bereiten.

Für den Augenblick müssen wir uns damit begnügen, Ihnen die Lösung der Gleichung einfach anzugeben: $q = 1.0583$. Bitte überzeugen Sie sich mit Hilfe des Taschenrechners, dass sie stimmt. Tippen Sie ein: $1.0583^6 = ?$ Erhalten Sie (gerundet) auch wirklich 1.4049?

Der Zins<u>faktor</u> beträgt $q = 1.0583$. Der Zins<u>satz</u> beträgt also $p = q - 1 = 0.0583 = 5.83\ \%$.

Herr Lewin sollte also nicht 6 %, sondern nur 5.83 % Zins zahlen müssen, damit sein Angebot ebenso gut wäre wie jenes von Frau Kohn.

Wir fassen das Ergebnis unserer Rechnung zusammen und führen den Begriff der **Gleichwertigkeit von Zinssätzen** ein:

Die beiden zu **verschiedenen** Zinsperioden gehörenden Zinssätze 12.00 % **p. a.** und 5.83 % **p. s.** liefern **gleiche** Rückzahlungsbeträge. Solche Zinssätze heissen **gleichwertig**.

AUFGABE 7

Herr Knopf nimmt einen Kredit von 4'000 Fr. auf und verpflichtet sich, diesen nach 1 Jahr durch eine Zahlung von 4'720 Fr. zurückzuzahlen.

a) Wie hoch ist der Zinssatz p. a.?

b) Wie hoch ist der Zinssatz p. s.?

c) Weisen Sie nach, dass zum obigen Angebot der Zinssatz 1.39 % p. m. gehört.

d) Herr Knopf will den Kredit vorzeitig nach 3 Monaten zurückzahlen. Berechnen Sie aus c) den Rückzahlungsbetrag.

e) Ermitteln Sie aus d) den Zinssatz p. q.

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

Unser Leitprogramm handelt von Geld. Um Zusammenhänge zu ergründen, setzen wir Mathematik ein. Das tut man auch in den Naturwissenschaften. Anders als dort beruhen beim Geld jedoch viele Zusammenhänge auf gesellschaftlichen Vereinbarungen. Es ist nützlich, sich dessen bewusst zu sein. Deshalb laden wir Sie ein, sich an dieser Stelle eine kleine Verschnaufpause zu gönnen und einen Text über rechtliche Aspekte des Kreditwesens zu lesen.

Der Kanton Zürich hat das strengste Kleinkreditgesetz der Schweiz. Dieses Gesetz wurde am 8. Dezember 1991 in einer kantonalen Volksabstimmung gutgeheissen.

Lesen Sie die Abstimmungsunterlagen, welche der Regierungsrat des Kantons Zürich im Vorfeld der Abstimmung an alle Stimmberechtigten versandt hat. Die Unterlagen erläutern alle wichtigen Paragraphen des neuen zürcherischen Kleinkreditgesetzes.

Kantonale Volksabstimmung

8. Dezember 1991

Einführungsgesetz zum Schweizerischen Zivilgesetzbuch (EG zum ZGB) (Änderung)

Die im kantonalen Einführungsgesetz zum Schweizerischen Zivilgesetzbuch enthaltenen Vorschriften über das Darlehenswesen sollen geändert werden.

Ausgangslage

Die bestehende Ordnung über das Darlehenswesen im Kanton Zürich wurde 1942 in das kantonale Einführungsgesetz zum Schweizerischen Zivilgesetzbuch (EG zum ZGB) aufgenommen. Seit Erlass der Vorschriften (§§ 212 bis 214b EG zum ZGB) hat das Kreditgeschäft zu Konsumzwecken stark zugenommen. Die Entwicklung hat zu einem Konsumkreditmarkt mit ständig wachsendem Volumen und neuen Kreditformen geführt.

Die vorliegende Gesetzesänderung geht zurück auf eine Motion aus dem Jahre 1964, welche eine Neuregelung des Kleinkreditwesens zur Bekämpfung gewisser Übelstände beantragte. Vorstösse auf Bundesebene haben bisher zu keiner bundesrechtlichen Regelung in diesem Bereich geführt. Um den Schutz vor Missbräuchen im Konsumkreditwesen zu verbessern, soll die bisherige kantonale Regelung − im Rahmen der Gesetzesbefugnisse des Kantons − den neuen Verhältnissen angepasst werden.

Abstimmungsvorlage

Gegenüber der bestehenden Regelung sieht die Abstimmungsvorlage im wesentlichen folgende Änderungen vor:

Konsumkreditgewerbe

Neben Darlehen (Barkrediten) werden heute in zunehmendem Masse auch andere Kreditgeschäfte mit Privatpersonen abgeschlossen. Um das Publikum vor Missbräuchen im gesamten Bereich des Konsumkreditgeschäfts zu schützen, soll neu die gewerbsmässige Ausübung aller Formen des Konsumkreditgeschäfts im Kanton Zürich grundsätzlich der staatlichen Aufsicht und Bewilligungspflicht unterstellt werden (§ 212). Als Konsumkredite gelten dabei sämtliche Rechtsgeschäfte, welche die Finanzierung von Waren und Dienstleistungen sowie die Gewährung von Geldkrediten umfassen, soweit sie für private Zwecke des Konsumenten bestimmt sind (§ 213 Abs. 2). Dazu gehören insbesondere Barkredite, Dispositionskredite (Überziehungen auf Konti), Abzahlungsgeschäfte und Kreditkarten mit eigentlicher Konsumkreditfunktion. Das Konsumgüterleasing ist, wenn es zum Eigentumserwerb führt, ebenfalls als Konsumkredit zu behandeln.

Banken, deren Tätigkeit ja bereits durch die Eidgenössische Bankenkommission bewilligt werden muss, sollen von der kantonalen Bewilligungspflicht − nicht aber von der staatlichen Aufsicht − ausgenommen werden (§ 212 Abs. 3).

Senkung des Höchstzinssatzes für Konsumkredite

Gemäss geltendem Recht dürfen Darleiher im Kanton Zürich höchstens 18% pro Jahr für Zinsen und weitere Kosten fordern. Dieser Höchstsatz gilt für alle Kreditarten.

Nach dem vorliegenden Antrag des Kantonsrates soll die Höchstgrenze für Konsumkredite auf 15% herabgesetzt werden (§ 213 Abs. 2). Unter den Begriff Konsumkredit fallen die im Ge-

setz umschriebenen und vorstehend bereits erwähnten Kreditgeschäfte. Mit der Senkung des Höchstsatzes soll die Vergabe von risikobehafteten Konsumkrediten eingeschränkt werden. Für alle übrigen Kredite soll weiterhin die bisherige Höchstgrenze von 18% gelten. Die Höchstsätze von 15% (Konsumkredite) und 18% (übrige Kredite) erfassen sämtliche zusätzlichen Kosten eines Kredits.

Der Regierungsrat und eine Minderheit des Kantonsrates haben gegen die Herabsetzung des bestehenden Höchstzinssatzes folgende Bedenken: Durch ein hohes allgemeines Zinsniveau bedingte hohe Refinanzierungskosten sowie fehlende Kreditsicherheit und verhältnismässig hoher Verwaltungsaufwand schmälern die Zinsmarge im Konsumkreditgeschäft. Es besteht daher Zweifel, ob eine Herabsetzung der Höchstgrenze unter 18% vor der Bundesverfassung Bestand hätte. Das Interkantonale Konkordat gegen Missbräuche im Zinswesen, dem neun Kantone beigetreten sind, schreibt ebenfalls 18% als Höchstgrenze vor. Eine tiefere Höchstgrenze im Kanton Zürich würde deshalb zu einer Zinsverzerrung im gesamtschweizerischen Wirtschaftsraum führen und zu Umgehungsgeschäften anreizen.

Zinsangabe in der Werbung für Konsumkredite

Konsumkreditgeber und -vermittler haben neu in ihrer Werbung immer den – einheitlich zu berechnenden – Jahresprozentsatz der höchsten Kreditkosten, die sie verlangen, anzugeben (§ 213 Abs. 2). Die Angabepflicht gilt für alle öffentlichen Werbemassnahmen, z.B. Inserate, Plakate, Streuprospekte, Schaufensterauslagen, Werbung in elektronischen Medien.

Beschränkung der Vermittlerprovisionen

Nach der heutigen Regelung kann der Kreditvermittler grundsätzlich vom Kreditgeber und vom Kreditnehmer Provisionen beziehen, wobei der Provisionsbezug gegenüber dem Kreditnehmer auf 1 bis 5% beschränkt ist. Neu sieht § 213a vor, dass der Konsumkreditvermittler ausschliesslich vom Kreditgeber Provisionen beziehen darf und diese die Ansätze von 1 bis 5% nicht überschreiten dürfen.

Strafbestimmung

Da die geltende Strafbestimmung längst nicht mehr abschreckend wirkt, soll der Bussenrahmen von bisher 20 bis 10 000 Franken auf 200 bis 100 000 Franken erhöht werden. Den von der Strafbestimmung gleichzeitig erfassten Vorschriften über das Pfandleihgewerbe und die Feilträger (Händler, die sich öffentlich zum Kauf und Verkauf von Gebrauchtwaren aller Gattungen anbieten) kommt nur noch sehr beschränkte Bedeutung zu.

Der Kantonsrat empfiehlt den Stimmberechtigten mit 86:46 Stimmen die Annahme der Vorlage.

1.4 Abzahlungsplan

Frau X überprüft den Zinssatz

Sie erinnern sich an das Angebot der Bank: Frau X würde 5'000 Franken erhalten und müsste dafür 6 Monatsraten zu 870 Franken, also insgesamt 5'220 Franken zurückzahlen.

Frau X will das Kreditangebot genauer unter die Lupe nehmen. Dazu stellt sie einen **Abzahlungsplan** auf. Das ist eine Tabelle, in der für jeden Monat der Schuldenstand, der Zins und die Rückzahlung übersichtlich zusammengestellt sind. Der Plan beginnt wie folgt:

Zeitraum	Schulden-stand in Fr.	Zins in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	5'000.00	**???**	870.00
2. Monat	.....	....	870.00
3. Monat	.....	....	870.00
.....	.....	..... .	

Um den Zins berechnen zu können, müsste Frau X wissen, mit welchem Zinssatz die Bank rechnet.

Frau X bleibt schon bei der ersten Zeile stecken. Sie kann den Zins nicht ausrechnen, weil sie nicht weiss, mit welchem Zinssatz die Bank rechnet. Kein Wunder: Gerade *das* möchte sie ja herausfinden. Wüsste sie's, brauchte sie keinen Abzahlungsplan.

So beschliesst sie denn, vorerst nur abzuklären, ob die Bank innerhalb der gesetzlichen Vorschriften bleibt. Dazu verwendet sie für ihre Tabelle einfach den gesetzlich festgelegten Höchstzinssatz. Wenn die Tabelle fertig ist, wird sie dann sehen können, ob das Bankangebot diesem entspricht oder nicht.

Der gesetzliche Jahreshöchstzinssatz beträgt in den meisten Kantonen der Schweiz 18%. Eine Ausnahme ist Zürich mit 15% (vgl. Seite 16). Frau X entscheidet sich für 18%. Dem entspricht ein Monatszinssatz von 1.39% (vgl. Aufgabe 7 auf Seite 15).

AUFGABE 8

a) Studieren Sie den Beginn des Abzahlungsplanes auf der folgenden Seite, und füllen Sie dann die noch leeren restlichen Felder aus.

b) Wenn Sie richtig gerechnet haben, bleibt am Schluss der Tabelle eine Restschuld übrig. Überlegen Sie: Zu welchem Schluss kommt Frau X bezüglich des Zinssatzes: Ist das Angebot der Bank nun korrekt oder zu teuer, gemessen an den gesetzlichen Bestimmungen?

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

Am 1. Tag des 1. Monats zahlt die Bank Frau X den vollen Kreditbetrag von 5'000 Franken aus. Der Schuldenstand bleibt während des ganzen 1. Monats

Am letzten Tag des 1. Monats wird der Zins für den abgelaufenen Monat berechnet:

Schuldenstand 1. x Zinssatz = Zins

5'000.00 x 0.0139 = 69.50

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zins in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	5'000.00	69.50	870.00
2. Monat	4'199.50	.....	870.00
3. Monat	.....	.....	870.00
4. Monat	.....	.....	870.00
5. Monat	.....	.....	870.00
6. Monat	.....	.....	870.00
Restschuld:	.....		

Am letzten Tag eines jeden Monats zahlt Frau X der Bank eine Rate zurück.

Der neue Schuldenstand für den 2. Monat wird errechnet:

Schuldenstand 1. + Zins − Rückzahlung = Schuldenstand 2.

5'000.00 + 69.50 − 870.00 = 4'199.50

AUFGABE 9

Das Kreditangebot von Frau X hat zwei Eigenschaften, die typisch sind für Kleinkredite: gleichbleibende Monatsraten und einen gleichbleibenden Monatszinssatz. Das ist nicht bei allen Krediten so. Diese Aufgabe zeigt Ihnen zwei andere Kreditformen.

a) Herr Jacot kaufte 1985 eine Wohnung. Dazu nahm er eine Hypothek von 180'000 Fr. auf. Er zahlte pro Jahr 15'000 Fr. zurück. Der Hypothekarzinssatz änderte von Jahr zu Jahr:

1985: 5.25% p.a. 1986: 5.75% p.a. 1987: 4.75%. p.a.

Stellen Sie für die Jahre 1985, 1986 und 1987 einen Abzahlungsplan auf.

b) Dem unten unvollständig abgedruckten Abzahlungsplan liegt ein gleichbleibender Monatszinssatz zu Grunde. Die Rückzahlungsbeträge dagegen ändern von Monat zu Monat. Suchen Sie die fehlenden Beträge (am besten in der Reihenfolge der angegebenen Nummern).

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zins in Fr.	Rückzahlung in Fr.
Okt. 94	❺	.....	1'250.00
Nov. 94	❸	729.10	❹ .....
Dez. 94	6'553.84	❶	1'550.00
Jan. 95	5'626.46		

❷ Monatszinssatz = ...

1.5 Abzahlungsgleichung

Wie hoch ist der Zinssatz tatsächlich?

Welcher Zinssatz steckt nun tatsächlich hinter dem Angebot, das Frau X von der Bank erhalten hat? Gibt es vielleicht eine Gleichung, aus der sich dieser Zinssatz ermitteln lässt? Welches sind überhaupt die rechnerischen Gesetzmässigkeiten des Abzahlungsgeschäftes? Solche Gesetzmässigkeiten findet man leichter heraus, wenn man mit Buchstaben statt mit Zahlen rechnet. Deshalb wiederholen wir jetzt die Rechnung aus Abschnitt 1.4 mit Variablen anstelle der konkreten Zahlenwerte.

Die Kreditvariablen

Frau X führt folgende vier Variablen ein:

Variable	Buchstabe
Kreditbetrag in Fr.	**K**
Monatsrate in Fr.	**R**
Monatszinssatz	**p**
Zinsfaktor	**q**

Wie früher gilt wiederum

$q = 1 + p$

Der Schuldenstand im 2. Monat

Frau X stellt die erste Zeile des Abzahlungsplanes auf und rechnet den Schuldenstand für den 2. Monat aus:

Zeitraum	Schulden-stand in Fr.	Zins in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	K	$p\ K$	R
2. Monat	$q\ K - R$		

Der neue Schuldenstand für den 2. Monat wird errechnet:

Schuldenstand 1. + Zins − Rückzahlung = Schuldenstand 2.

$$K + p\,K - R = q\,K - R$$

Hier kann man K ausklammern:

$$K + p\ K = (1 + p)\ K$$

Die Klammer $(1 + p)$ ist gerade der Zinsfaktor q

Frau X merkt, dass sie die dritte Kolonne im Abzahlungsplan gar nicht braucht. Wenn sie nämlich den Zinsfaktor benützt, kann sie den neuen Schuldenstand immer direkt aus dem alten Schuldenstand und der Rückzahlung berechnen, ohne den «Umweg» über den Zins:

Zeitraum	Schulden-stand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	K	R
2. Monat	$q\ K-R$	

Der Schuldenstand im 3. Monat

Frau X geht einen Schritt weiter und rechnet den Schuldenstand für den 3. Monat aus. Dabei geht sie jetzt immer genau gleich vor:

neuer Schuldenstand = Zinsfaktor x alter Schuldenstand − Rückzahlung

Zeitraum	Schulden-stand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	K	R
2. Monat	$q\ K-R$	R
3. Monat	$q^2\ K-q\ R-R$	

alter Schuldenstand

Frau X erhält zunächst $q\ \overbrace{(q\ K-R)}-R$.
Sie multipliziert das aus und erhält
$q^2\ K-q\ R-R$.

Der Schuldenstand im 4. Monat

Zeitraum	Schulden-stand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	K	R
2. Monat	$q\ K-R$	R
3. Monat	$q^2\ K-q\ R-R$	R
4. Monat	$q^3\ K-q^2\ R-q\ R-R$	

alter Schuldenstand

Frau X erhält zunächst $q\ \overbrace{(q^2\ K-q\ R-R)}-R$.
Sie multipliziert das aus und erhält

AUFGABE 10

Nun sind *Sie* an der Reihe!

a) Fahren Sie mit dem Abzahlungsplan weiter. Wie lautet der Schuldenstand im 5. Monat und im 6. Monat?

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	K	R
2. Monat	$q\ K - R$	R
3. Monat	$q^2\ K - q\ R - R$	R
4. Monat	$q^3\ K - q^2\ R - q\ R - R$	.....
5. Monat	.....	.....
6. Monat	.....	.....
Restschuld	.....	

b) Welchen Ausdruck erhalten Sie für die Restschuld nach 6 Monaten? Überprüfen Sie Ihre Formel mit den konkreten Zahlenwerten aus Abschnitt 1.4.

☹ ☺

Die Abzahlungsgleichung von Frau X

Nach Ablauf der 6 Monate hat Frau X ihren Kredit vollständig zurückgezahlt. Ihre Restschuld ist dann null:

$$q^6\ K - q^5\ R - q^4\ R - q^3\ R - q^2\ R - q\ R - R = 0$$

Genau diese Überlegung ist der Schlüssel zum Verständnis des Abzahlungsgeschäftes. Man setzt im Abzahlungsplan die Restschuld gleich null und erhält so eine Gleichung, die den Zusammenhang zwischen den Kreditvariablen angibt.

Solche Gleichungen heissen **Abzahlungsgleichungen**.

Mit Hilfe ihrer Abzahlungsgleichung wird Frau X die Frage nach der Höhe des Zinssatzes beantworten können. Sie muss dazu die Gleichung nach q auflösen. Das wird in Kapitel 2 geschehen, doch wollen wir die Gleichung zuvor noch verallgemeinern.

Die Abzahlungsgleichung für eine beliebige Laufzeit

Unter der **Laufzeit** versteht man die Anzahl Zinsperioden bis zur vollständigen Abzahlung des Kredites. Beim Kreditangebot von Frau X beträgt sie 6 Monate. Wie mag die Abzahlungsgleichung wohl aussehen, wenn die Laufzeit allgemeiner **n** Monate beträgt?

AUFGABE 11

«Erfinden» Sie eine Verallgemeinerung der obigen Gleichung für eine beliebige Laufzeit n. Begründen Sie Ihre Antwort in ein paar Sätzen (als müssten Sie jemanden von der Richtigkeit Ihrer «Erfindung» überzeugen).

☹ ☺

Wir halten das Ergebnis der Aufgabe 11 in einer Informationsbox fest:

Abzahlungsgleichung
(bei gleichmässiger Rückzahlung und festem Zinssatz)

Für einen **Kredit K**, welcher durch lauter gleich hohe **Raten R** zurückgezahlt wird und bei welchem der **Zinssatz p** während der ganzen **Laufzeit n** gleich bleibt, lautet die die Abzahlungsgleichung

$$q^n K - q^{n-1} R - q^{n-2} R - \ldots\ldots - q^3 R - q^2 R - q R - R = 0$$

Dabei ist $q = 1 + p$ der Zinsfaktor.

Diese Abzahlungsgleichung zeigt den Zusammenhang zwischen den vier Kreditvariablen Kreditbetrag K, Rückzahlrate R, Laufzeit n und Zinsfaktor q. Sind drei der Variablen bekannt, so lässt sich die vierte aus der Abzahlungsgleichung ermitteln. Wie, wird Ihnen das Kapitel 2 «Frau X löst die Gleichung» zeigen.

AUFGABE 12

Frau X zog einmal flüchtig in Betracht, sich für die Rückzahlung ihres Kredites ein ganzes statt nur ein halbes Jahr Zeit zu lassen.

Wie hätte ihre Abzahlungsgleichung für diesen Fall gelautet? (Verwenden Sie wie oben K für den Kredit, R für die Rate, q für den Zinsfaktor.)

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

Die Abzahlungsgleichung bei ungleichmässiger Rückzahlung oder bei veränderlichem Zinssatz

Die Abzahlungsgleichung in der obenstehenden Informationsbox geht von den Voraussetzungen aus, dass der Kredit durch lauter gleich hohe Raten zurückgezahlt wird, und dass der Zinssatz während der ganzen Laufzeit gleich bleibt. Fälle, in denen diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, haben Sie schon in der Aufgabe 9 gesehen. Die nächsten beiden Aufgaben behandeln noch einmal zwei solche Beispiele. Diesmal geht es um das Aufstellen von Abzahlungsgleichungen.

AUFGABE 13

Wie in Aufgabe 12 berichtet, erwog Frau X einmal kurz die Möglichkeit, die Rückzahlung ihres Kredites auf ein ganzes Jahr auszudehnen.

Dabei stand allerdings fest, dass sie in den Monaten ihrer Abwesenheit keine Zahlungen würde leisten können. Sie gedachte mit der Bank eine Rückzahlung in 8 gleichen Raten zu vereinbaren, nämlich in den ersten 6 und den letzten 2 Monaten der zwölfmonatigen Laufzeit.

a) Stellen Sie den Abzahlungsplan für diesen Fall auf. (Verwenden Sie wie oben K für den Kredit, R für die Rate, q für den Zinsfaktor.)

b) Wie lautet die Abzahlungsgleichung?

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

AUFGABE 14

Herr und Frau Lorenz kaufen Möbel im Wert von 2'000 Fr. auf Pump. Sie zahlen die Möbel im Laufe von drei Monaten mit drei unterschiedlich hohen Raten zurück. Die 1. Monatsrate beträgt 800 Fr., die 2. Monatsrate 700 Fr. Der Monatszinssatz beträgt 1.45% .

a) Stellen Sie den Abzahlungsplan zum Kreditangebot von Herrn und Frau Lorenz auf. Wie hoch ist die 3. Monatsrate?

b) Führen Sie die Variablen

K	Kreditbetrag in Fr.	R_1	1. Monatsrate
q	Monatszinsfaktor	R_2	2. Monatsrate
		R_3	3. Monatsrate

ein. Rechnen Sie den Abzahlungsplan mit den fünf Variablen anstelle der konkreten Zahlenwerte durch.

c) Wie lautet die Abzahlungsgleichung zum Kreditangebot von Herrn und Frau Lorenz? Berechnen Sie aus der Abzahlungsgleichung die 3. Monatsrate. Stimmt das Resultat mit a) überein?

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

Abzahlungsplan und Abzahlungsgleichung

- Zu jedem Abzahlungsgeschäft lässt sich ein **Abzahlungsplan** aufstellen.
- Er enthält für jeden Zeitraum den **Schuldenstand**, ausgedrückt in den **Kreditvariablen** (Kreditbetrag, Rückzahlraten, Zinssätze).
- Der Schuldenstand am Ende der Laufzeit heisst **Restschuld**.
- Ein Kredit ist vollständig abgezahlt, wenn die Restschuld null ist.
- Setzt man den Ausdruck für die Restschuld gleich null, erhält man die **Abzahlungsgleichung**.

Wir gratulieren! Sie haben das erste Kapitel durchgearbeitet. Um sich zu vergewissern, dass Sie auch die Lernziele erreicht haben, erledigen Sie bitte noch die folgenden beiden Punkte:

- Lösen Sie die Aufgaben 15 bis 19 der «Lernkontrolle» auf der nächsten Seite.

  Richtlinie: Wenn Sie das Kapitel 1 gründlich durchgearbeitet haben, müssten Sie wenigstens vier der fünf Aufgaben lösen können. Wie lange Sie dazu brauchen, ist hingegen nicht wichtig. (Auch zu diesen Aufgaben finden Sie die Antworten hinten im Leitprogramm.)

- Melden Sie sich bei Ihrer Lehrerin oder Ihrem Lehrer zum Kapiteltest. **Viel Glück!**

Lernkontrolle zu Kapitel 1

AUFGABE 15

Die Schweizerische Eidgenossenschaft steckt in Schulden! Im Jahre 1995 betrug die Staatsverschuldung pro Kopf der Bevölkerung 17'500 Franken.

a) Wieviel Zins musste der Staat für das Jahr 1995 pro Kopf der Bevölkerung zahlen bei einem Zinssatz von 6.5%?

b) Wie hoch wird die Verschuldung pro Kopf der Bevölkerung im Jahre 2000 sein, wenn der Staat weder weitere Kredite aufnimmt, noch irgendwelche Rückzahlungen leisten kann? Gehen Sie davon aus, dass der Jahreszinssatz zwischen 1995 und 2000 stets 6.5% beträgt und die Bevölkerungszahl etwa gleich bleibt.

c) Tatsächlich muss die Schweiz jährlich neue Kredite aufnehmen, um die laufenden Ausgaben zu decken. Wie hoch wird die Verschuldung pro Kopf der Bevölkerung im Jahre 2000 sein, wenn der Staat pro Jahr und pro Kopf der Bevölkerung weitere Kredite im Umfang von 2500 Franken aufnimmt und keine Rückzahlungen leistet? Gehen Sie davon aus, dass der Jahreszinssatz zwischen 1995 und 2000 stets 6.5% beträgt und die Bevölkerungszahl etwa gleich bleibt.

AUFGABE 16

Ein Kredit von 5000 Fr. soll nach 2 Jahren durch eine einmalige Zahlung von 6469.50 Fr. getilgt werden.

a) Wie hoch ist der Jahreszinssatz p. a.?

b) Weisen Sie nach, dass der Monatszinssatz rund 1.08 % p. m. beträgt.

AUFGABE 17

Herr A hat sich von Herrn B 5'000 Fr. zu einem Zinssatz 16% p. a. geborgt und vereinbart, den Betrag inkl. Zinsen nach einem Jahr zurückzuzahlen. Herr A ist aber bereits nach einem halben Jahr in der Lage, den Kredit zurückzuzahlen.

Herr B: «Das kommt mir gelegen. Zahlen Sie mir die 5'000 Fr. plus die Hälfte des Jahreszinses, also plus 400 Fr.»

Herr A: «Sie Wucherer! Sie wollen aus der vorzeitigen Rückzahlung noch zusätzlichen Profit schlagen!»

Herr B: «Wieso ist das Wucher? Und welcher Rückzahlungsbetrag ist denn korrekt?»

Formulieren Sie für Herrn A eine Antwort auf die Fragen von Herrn B.

AUFGABE 18

Herr und Frau Lauscher nehmen für den Kauf einer Stereo-Anlage einen Kredit von 6000 Fr.auf. Der Kredit soll im Laufe von 3 Jahren durch 3 gleich hohe Raten zurückgezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt im 1. Jahr 13.5%, im 2. Jahr 12.5% und im 3. Jahr 11.5%.

Zeigen Sie mit Hilfe eines Abzahlungsplanes, dass Herr und Frau Lauscher pro Jahr 2'535.30 Fr. zurückzahlen müssen.

AUFGABE 19

a) Erläutern Sie den Begriff «Abzahlungsgleichung» am Beispiel eines Kredites, der im Laufe von drei Monaten zurückbezahlt wird, wobei der Zinssatz in jedem Monat unterschiedlich hoch ist (vgl. Aufgabe 18).

b) Stellen Sie die Abzahlungsgleichung zu einem derartigen Kredit auf. Überprüfen Sie Ihre Gleichung anhand der Zahlenwerte von Aufgabe 18.

Kapitel 2 Frau X löst die Gleichung

Übersicht

Thema

In der Abzahlungsgleichung für gleichmässige Rückzahlung und festen Zinssatz kommen vier Variablen vor: der Kreditbetrag K, die Monatsrate R, der Zinsfaktor q und die Laufzeit n. Wer drei davon kennt, kann die vierte berechnen.

Dies ist nun aber ganz unterschiedlich schwer. Wer den Kreditbetrag K oder die Monatsrate R berechnen will, stösst kaum auf Probleme. Wer hingegen die Laufzeit n oder − wie Frau X − den Zinsfaktor q sucht, sitzt bald ratlos vor seinen Gleichungen: Alles Umformen nützt nichts, die Gleichungen lassen sich nicht «auf gewöhnliche Weise» lösen.

Es scheint zwei Arten von Gleichungen zu geben: solche, die man «auf gewöhnliche Weise» lösen kann, und solche, bei denen man sich «etwas Besonderes» einfallen lassen muss. Die erste Art nennt man **lineare Gleichungen** und die andere Art **nichtlineare Gleichungen**.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels handelt von diesem Unterschied. Im zweiten Abschnitt lernen Sie eine Lösungsmethode für nichtlineare Gleichungen kennen.

Lernziele

Wenn Sie das Kapitel 2 durchgearbeitet haben, haben Sie folgendes erreicht:

- Sie können zwischen linearen und nichtlinearen Gleichungen unterscheiden.
- Sie kommen mit einfachen nichtlinearen Gleichungen zurecht: Es gelingt Ihnen, mit dem Taschenrechner gute Näherungen für die Lösungen zu finden.

2.1 Lineare und nichtlineare Gleichungen

Die Abzahlungsgleichung als Beispiel

Erinnern Sie sich an die Abzahlungsgleichung von Frau X aus Kapitel 1? Sie bezog sich auf eine Laufzeit von 6 Monaten und lautete

$$q^6 K - q^5 R - q^4 R - q^3 R - q^2 R - q R - R = 0 .$$

Auf Seite 23 notierten wir sie dann etwas allgemeiner für eine beliebige Laufzeit n :

$$q^n K - q^{n-1} R - q^{n-2} R - \ldots\ldots - q^3 R - q^2 R - q R - R = 0 .$$

In dieser Gleichung kommen alle vier Kreditvariablen vor: der Kreditbetrag K, die Monatsrate R, der Zinsfaktor q und die Laufzeit n. Wir werden nun jeweils für drei der vier Variablen Zahlenwerte vorgeben und versuchen, die Gleichung nach der vierten aufzulösen. Sie werden sehen, dass das in zwei Fällen problemlos geht und in zwei Fällen nicht.

Die Variable, nach der man eine Gleichung auflöst, heisst **Unbekannte**. Wir werden jetzt also der Reihe nach **K**, dann **R**, dann **q** und schliesslich **n** als Unbekannte wählen.

Erstes Unternehmen: Die Unbekannte ist K

In diesem Fall sind die Monatsrate R, der Zinsfaktor q und die Laufzeit n feste Zahlen. Wir geben sinnvolle Werte vor, etwa R = 500, q = 1.02, n = 4. Die Gleichung lautet dann

$$1.02^4 \; K - 102^3 \; 500 - 1.02^2 \; 500 - 102 \; 500 - 500 = 0 .$$

Wir vereinfachen die Gleichung, indem wir Zahlenausdrücke ausrechnen und einfache Umformungsschritte vornehmen:

$$\begin{aligned} 102^4 \; K - (102^3 + 102^2 + 102 + 1) \; 500 &= 0 \\ 10824 \; K - 2'060.80 &= 0 \\ 10824 \; K &= 2060.80 \end{aligned}$$

Jetzt ist die Gleichung so einfach geworden, dass schon der nächste Schritt zur Lösung führt:

$$K = \frac{2'060.80}{1.0824} = \underline{\underline{1'903.86}}$$

Zweites Unternehmen: Die Unbekannte ist R

Diesmal sind der Kreditbetrag K, der Zinsfaktor q und die Laufzeit n feste Zahlen. Wir geben wieder sinnvolle Werte vor: K = 2'000, q = 1.01 und n = 4. Da man auch hier durch Umformen zum Ziel kommt, überlassen wir Ihnen das Lösen der Gleichung als Aufgabe.

AUFGABE 20

Mit K = 2'000, q = 1.01 und n = 4 lautet die Abzahlungsgleichung

$$1.01^4 \; 2'000 - 101^3 \; R - 101^2 \; R - 101 \; R - R = 0$$

Lösen Sie die Gleichung nach R auf.

☹ ☹ ☹ ☺

Drittes Unternehmen: Die Unbekannte ist q

Wir wählen K = 2'000, R = 550 und noch einmal n = 4. Die Gleichung lautet jetzt

$$q^4 \; 2'000 - q^3 \; 550 - q^2 \; 550 - q \; 550 - 550 = 0 \; .$$

Wir versuchen, zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} q^4 \; 2000 - (q^3 + q^2 + q + 1) \; 550 &= 0 \\ q^4 \; 2000 &= (q^3 + q^2 + q + 1) \; 550 \\ q^4 &= (q^3 + q^2 + q + 1) \; 0275 \\ \frac{q^4}{q^3 + q^2 + q + 1} &= 0275 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wir treten an Ort! Was immer wir auch tun: Nie erreichen wir die einfache Form der ersten beiden Fälle.

Viertes Unternehmen: Die Unbekannte ist n

Wir wählen z.B. K = 4'000, R = 300 und q = 1.02. Hier stellt sich schon beim Aufstellen der Gleichung ein Problem ein: Wir wissen ja nicht einmal, wie viele Summanden unsere Gleichung hat! Sie lautet:

$$1.02^n \; 4'000 - 102^{n-1} \; 300 - \ldots - 102^3 \; 300 - 1.02^2 \; 300 - 102 \; 300 - 300 = 0 \; .$$

Die Chancen, diese Gleichung allein durch Umformen lösen zu können, stehen offensichtlich schlecht. Später werden wir sehen, dass man die Gleichung durch geschicktes Umformen zwar wohl ein ordentliches Stück vereinfachen kann. Doch bei aller Geschicklichkeit, die einfache Form der ersten beiden Fälle erreicht man auch hier nicht.

Was sind nun lineare und nichtlineare Gleichungen?

Gehen wir unsere vier Unternehmen noch einmal in Gedanken durch. Was war das gemeinsame Besondere an den ersten zwei Fällen? Nun, die beiden Gleichungen nahmen am Schluss eine besonders **einfache Form** an. Die **vorletzten** Zeilen hiessen:

$$1.0824 \; \mathbf{K} = 2'060.80 \qquad \text{bzw.} \qquad -4.0604 \; \mathbf{R} = -2'081.21 \; .$$

Zahl x Unbekannte = Zahl Zahl x Unbekannte = Zahl

Gleichungen, die sich auf die einfache Form «Zahl × Unbekannte = Zahl» bringen lassen, heissen **linear**. Die Abzahlungsgleichung ist linear, wenn K oder R die Unbekannte ist. Sie ist **nichtlinear**, wenn q oder n die Unbekannte ist.

Lineare Gleichungen
Eine Gleichung heisst linear, wenn es möglich ist, sie auf die Form **Zahl × Unbekannte = Zahl** zu bringen.

AUFGABE 21

Ein Kredit soll im Laufe von 3 Monaten abgezahlt werden. Der Zinssatz im 3. Monat ist verschieden von jenem im 1. und 2. Monat.

Die Abzahlungsgleichung zu diesem speziellen Kreditangebot lautet

$$q_2 \; q_1^2 \; K - q_2 \; q_1 \; R - q_2 \; R - R = 0$$

Ist diese Gleichung linear oder nichtlinear,

a) wenn der Kreditbetrag **K** die Unbekannte ist?
b) wenn die Monatsrate **R** die Unbekannte ist?
c) wenn der 1. Zinsfaktor $\mathbf{q_1}$ die Unbekannte ist?
d) wenn der 2. Zinsfaktor $\mathbf{q_2}$ die Unbekannte ist?

Gehen Sie genau so vor wie oben. Wählen Sie selbst sinnvolle Zahlen.

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

Sie wissen jetzt, warum Sie Gleichungen nicht immer in der Ihnen gewohnten Weise lösen können. Sie sind manchmal nichtlinear. Um nichtlineare Gleichungen zu lösen, müssen Sie anders vorgehen. Es gibt verschiedene Wege, einer davon ist **planmässiges Probieren**.

Planmässiges Probieren führt Sie **Schritt für Schritt** immer genauer an die Lösung heran. Ganz erreichen Sie sie in der Regel nicht. Aber das ist auch gar nicht nötig. In praktischen Anwendungen reicht es üblicherweise aus, die Lösung auf einige wenige Nachkommastellen genau zu kennen.

Planmässiges Probieren hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einem bekannten Ratespiel. Manche nennen es kurz **«Hi Lo»** (eigentlich «high low», auf deutsch etwa «zu hoch – zu tief»). Nehmen Sie sich 10 Minuten Zeit zum Spielen! Die genaue Spielanleitung finden Sie auf der nächsten Seite.

2.2 Planmässiges Probieren

Hi Lo, ein Ratespiel für zwei Personen

SPIEL-
AUFTRAG

Suchen Sie eine Spielpartnerin oder einen Spielpartner. Sie kann im Leitprogramm weiter oder weniger weit sein als Sie. Spielen Sie ein paarmal **Hi Lo** zusammen. Das geht so:

Ihre Partnerin denkt sich eine **geheime Zahl** aus. Sie selber versuchen, die geheime Zahl zu erraten. Nach jedem Rateversuch meldet Ihre Partnerin: **«Zu hoch!»** Oder: **«Zu tief!»** Oder dann eben: «Richtig!».

Sie werden sehen: Wenn Sie **planmässig** raten, können Sie die geheime Zahl mit wenigen Versuchen entdecken.

Natürlich vereinbaren Sie vor jedem Spiel, in welchem Bereich die geheime Zahl liegen darf. Zum Beispiel: «Von 0 bis 100, nur ganze Zahlen.» Oder: «Von 0 bis 5, zwei Stellen nach dem Komma.»

☺☜☺☜☺

Was Hi Lo mit Frau X zu tun hat

Kümmern wir uns nun wieder um Frau X aus Kapitel 1 ! Ihr Problem: Sie möchte wissen, welcher Zinssatz dem Kreditangebot ihrer Bank zu Grunde liegt. Das Angebot sieht so aus:

Kreditbetrag: K = 5'000 Fr. Monatsrate: R = 870 Fr. Laufzeit: n = 6 Monate

Mit diesen Zahlenwerten lautet die Abzahlungsgleichung

$$q^6\ 5'000 - q^5\ 870 - q^4\ 870 - q^3\ 870 - q^2\ 870 - q\ 870 - 870 = 0$$

Frau X muss diese Gleichung lösen. Die Unbekannte ist der Zinsfaktor **q**. Wie Sie wissen, ist diese Gleichung **nichtlinear**. Man kann sie nicht «auf gewöhnliche Weise» allein durch Umformen lösen.

Und hier kommt nun «Hi Lo» ins Spiel. Kann Frau X den richtigen Wert für q vielleicht planmässig «erraten», ähnlich, wie man bei «Hi Lo» die geheime Zahl errät?

Sie kann! Zwar fehlt ihr die Partnerin, die das Resultat schon kennt und jeden Rateversuch kommentiert. Dafür erfindet sie einen **Test**, mit dem sie gleich *selber* entscheiden kann, ob ein probierter Wert für q zu gross, zu klein oder gerade richtig ist.

Frau X erfindet einen Test

Werfen Sie noch einmal einen Blick auf die Abzahlungsgleichung von Seite 30. Der Ausdruck auf der linken Seite hat eine ganz bestimmte Bedeutung. Erinnern Sie sich? Er stellt die Restschuld nach der letzten Ratenzahlung dar. Für das richtige q muss die Restschuld null geben, sonst hätte Frau X ja zuwenig oder zuviel zurückgezahlt!

Frau X überlegt nun so:

■ «Was ergibt die linke Seite der Gleichung, wenn ich ein zu **grosses** q einsetze? Ein grösseres q entspricht einem höheren Zinssatz. Bei höherem Zins würden monatliche Ratenzahlungen von 870 Franken nicht ausreichen, um die Schuld zu tilgen. Es bliebe eine Restschuld. Die linke Seite der Gleichung wird also **grösser als null**.

■ Was ergibt die linke Seite der Gleichung, wenn ich ein zu **kleines** q einsetze? Ein kleineres q entspricht einem tieferen Zinssatz. Bei tieferem Zins würde man mit monatlich 870 Franken aber zuviel zurückzahlen, und man hätte am Schluss nicht nur keine Schulden mehr, sondern sogar Geld zugute. Die Restschuld wäre sozusagen 'unter null'. Die linke Seite der Gleichung wird also **kleiner als null**.»

Der Test von Frau X

- Frau X setzt den Probierwert für den Zinsfaktor q in die linke Seite ihrer Abzahlungsgleichung ein. Vom Ergebnis interessiert sie nur das **Vorzeichen**:
- Wird das Ergebnis **p os it iv**, so ist der Probierwert für q **zu gross**.
- Wird das Ergebnis **negativ**, so ist der Probierwert für q **zu klein**.

Frau X prüft ihren Test

Bevor sich Frau X auf eine länger dauernde Rechnerei einlassen will, prüft sie die Tauglichkeit ihres Tests an zwei offensichtlichen Beispielen.

«Ein Zinsfaktor von q = 1 ist mit Sicherheit zu klein», sagt sie sich, «denn das würde ja bedeuten, dass die Bank überhaupt keinen Zins verlangt!» Sie setzt q = 1 in die linke Seite der Gleichung ein und erhält

$$\mathbf{1}^6\ 5'000 - \mathbf{1}^5\ 870 - \mathbf{1}^4\ 870 - \mathbf{1}^3\ 870 - \mathbf{1}^2\ 870 - \mathbf{1}\ 870 - 870 = -220\ .$$

Frau X setzt für q den Wert 1 ein.

Das Ergebnis ist negativ!

Das Ergebnis ist wie erwartet **negativ**. q = 1 ist **zu klein**.

«Ein Zinsfaktor von q = 1.1 ist mit Sicherheit zu gross», sagt sie sich weiter, «denn das würde bedeuten, dass die Bank 10% Zins im Monat verlangt. Das wäre Wucher!» Sie setzt q = 1.1 in die linke Seite der Gleichung ein und erhält

$$\mathbf{1.1}^6\ 5'000 - \mathbf{1.1}^5\ 870 - \mathbf{1.1}^4\ 870 - \mathbf{1.1}^3\ 870 - \mathbf{1.1}^2\ 870 - \mathbf{1.1}\ 870 - 870 \ = + 2145.22\ .$$

Frau X setzt für q den Wert 1.1 ein.

Das Ergebnis ist positiv!

Das Ergebnis ist wie erwartet **positiv**. q = 1.1 ist **zu gross**.

Frau X ist zufrieden. Ihr Test funktioniert. Und darüber hinaus weiss sie nun auch schon sicher, wie der richtige Zinsfaktor anfängt: eine Eins vor dem Komma und eine Null als erste Stelle hinter dem Komma:

$$q = 1.0\ \mathbf{....}$$

Sie kann sich als nächstes auf die Suche nach der zweiten Stelle hinter dem Komma machen.

Frau X berechnet die zweite Nachkommastelle von q

Der Wert q = 1.0 war zu klein. Frau X vergrössert ihn ganz wenig, ohne dabei die schon sichere Null hinter dem Komma zu verändern. Sie geht auf q = 1.01 .

Rechnen Sie bitte mit! Sie sollten, auf zwei Nachkommastellen gerundet, das gleiche Ergebnis erhalten wie Frau X:

$$1.01^6\ 5'000 - 1.01^5\ 870 - 1.01^4\ 870 - 1.01^3\ 870 - 1.01^2\ 870 - 1.01\ 870 - 870$$

$$= \ 1.01^6\ 5'000 - (1.01^5 + 1.01^4 + 1.01^3 + 1.01^2 + 1.01 + 1)\ \ 870$$

$$= \ -\ 44.65.$$

Das Ergebnis ist negativ!

Frau X klammert 870 aus, um sich das Rechnen zu erleichtern.

Negativ! Offenbar liegt q = 1.01 immer noch **zu tief**. Frau X erhöht den Zinsfaktor erneut um 0.01 auf q = 1.02.

Rechnen Sie wieder mit! Frau X erhält

$$1.02^6\ 5'000 - 1.02^5\ 870 - 1.02^4\ 870 - 1.02^3\ 870 - 1.02^2\ 870 - 1.02\ 870 - 870$$

$$= \ 1.02^6\ 5'000 - (1.02^5 + 1.02^4 + 1.02^3 + 1.02^2 + 1.02 + 1)\ \ 870$$

$$= \ + 142.75\ .$$

Das Ergebnis ist **positiv**. Der Rateversuch q = 1.02 ist **zu hoch**.

Nun weiss Frau X also: Der gesuchte Zinsfaktor q liegt **zwischen 1.01 und 1.02**.

Die bisherigen Ergebnisse können wir in einer Tabelle zusammenstellen:

Probierplan für die zweite Nachkommastelle von q

Probierwert für q	$q^6\ 5'000 - (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)\ 870$	Vorzeichen	Der Probierwert für q liegt ...
1.00	− 220	−	zu tief
1.01	− 44.65	−	zu tief
1.02	+ 142.75	+	zu hoch

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen 1.01 und 1.02 .

Bis zur zweiten Nachkommastelle lautet die Lösung q = 1.01 .

Frau X hat den Zinsfaktor nun also erfolgreich bis zur zweiten Nachkommastelle berechnet. Das ist natürlich bei weitem nicht genau genug. Denn jetzt würde sie den **Zinssatz** ja erst auf ein ganzes Prozent genau kennen: p = q − 1 = 0.01 = 1 %. Sie muss also weiterrechnen.

Bei der dritten Nachkommastelle werden Sie tatkräftig mithelfen können, und bei der vierten werden wir Sie sogar bitten, es ganz allein zu versuchen.

Frau X berechnet die dritte Nachkommastelle von q

Um die zweite Nachkommastelle zu finden, erhöhte Frau X den Wert von q jeweils um 0.01. Die **Schrittweite** betrug 0.01. Um die nächste Nachkommastelle zu erhalten, wählt sie die Schrittweite zehnmal kleiner, nämlich 0.001. Der neue Probierplan sieht jetzt so aus:

Probierplan für die dritte Nachkommastelle von q

Probierwert für q	$q^6\ 5'000 - (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)\ 870$	Vorzeichen	Der Probierwert für q liegt ...
1.010	− 44.65 Zweitletzte Zeile aus obigem Probierplan	−	zu tief
1.011	.....	.....	zu .....
1.012	...	.....	zu .....
1.013	.....	.....	zu .....
.....	.....	.....	.....

Neue Schrittweite: 0.001

Man weiss nicht zum voraus, wie weit die Tabelle gehen wird.

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen ..... und ..... .

Bis zur dritten Nachkommastelle lautet die Lösung q = _____ .

AUFGABE 22

Studieren Sie den angefangenen «Probierplan für die dritte Nachkommastelle von q». Achten Sie insbesondere darauf, woher die erste Zeile der Tabelle kommt.

Vervollständigen Sie nun den Probierplan. Wie viele Zeilen Sie berechnen müssen, verraten wir nicht. Wann das Ende erreicht ist, werden Sie im Laufe des Rechnens selbst feststellen.

☹ ☹ ☺ ☹ ☺

Frau X berechnet die vierte Nachkommastelle von q

Wie schon angekündigt, möchten wir diese Aufgabe ganz Ihnen überlassen!

AUFGABE 23

a) Ermitteln Sie mit Hilfe eines Probierplanes ganz selbständig die vierte Nachkommastelle des gesuchten Zinsfaktors.

b) Was bedeutet das Resultat für Frau X ? Wieviel Prozent beträgt der Monatszinssatz, der ihrem Abzahlungsangebot zu Grunde liegt?

☹ ☹ ☺ ☹ ☺

Die Aufgaben 22 und 23 haben ganz schön viel zu rechnen gegeben, nicht wahr? Bevor wir Ihnen zumuten, auch noch die fünfte Nachkommastelle von q zu berechnen, mag es Sie interessieren, ob man denn die Abzahlungsgleichung nicht etwas vereinfachen könnte, ehe man zum Taschenrechner greift. Das kann man in der Tat!

Frau X vereinfacht ihre Abzahlungsgleichung

Die Gleichung lautet

$$q^6 \; 5'000 \; - \; q^5 \; 870 - \; q^4 \; 870 - \; q^3 \; 870 - \; q^2 \; 870 - \; q \; 870 - \; 870 \; = \; 0 \; .$$

Eine erste, naheliegende Vereinfachung besteht wiederum im Ausklammern des gemeinsamen Faktors 870:

$$q^6 \; 5000 \; - \; (q^5 + \; q^4 + \; q^3 + \; q^2 + \; q + \; 1) \; 870 \; = \; 0$$

Der aufwendigste Teil beim Rechnen ist die Klammer mit den Potenzen. Und dabei ist unser Beispiel ja noch harmlos. Es hat nur sechs Summanden in der Klammer, weil die Laufzeit im Kreditangebot von Frau X nur sechs Monate beträgt. Wie muss das erst zu rechnen geben, wenn die Laufzeit 12 oder gar 48 Monate beträgt!

Aber wir haben Glück: Die Klammer lässt sich stark vereinfachen! Es gilt

$$q^5 + \; q^4 + \; q^3 + \; q^2 + \; q + \; 1 \; = \; \frac{q^6 - 1}{q - 1} \; .$$

Den Beweis geben wir Ihnen als Aufgabe auf:

AUFGABE 24

Um einzusehen, dass $q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = \frac{q^6 - 1}{q - 1}$ richtig ist, braucht man nur nachzurechnen dass

$$(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)\,(q - 1) = q^6 - 1$$

gibt. Führen Sie die Multiplikation vollständig aus. Erhalten Sie $q^6 - 1$?

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

Diese Überlegung − sie kommt nicht nur bei Abzahlungsgleichungen vor − kann man für jede beliebige Anzahl Summanden durchführen. So gilt zum Beispiel auch

$$q^{15} + q^{14} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = \frac{q^{16} - 1}{q - 1}$$

oder etwa

$$q^{700} + q^{699} + q^{698} + \ldots\ldots\ldots + q^3 + q^2 + q + 1 = \frac{q^{701} - 1}{q - 1}\ .$$

Beim letzten Beispiel haben wir selbstverständlich nicht alle Summanden hingeschrieben, sondern nur den Anfang und den Schluss der Summe.

Doch nun zurück zur Abzahlungsgleichung von Frau X. Mit der vereinfachten Klammer lautet sie:

	$q^6\ 5'000 - \frac{q^o - 1}{q - 1}\ 870 = 0$

Wie praktisch! Die Hochzahlen stimmen beide gerade mit der Laufzeit überein!

Die Gleichung ist erheblich einfacher geworden, finden Sie nicht auch? Einfach genug, dass wir es wagen, Sie in der nächsten Aufgabe noch eine weitere Nachkommastelle von q berechnen zu lassen. Und danach werden wir Ihnen zeigen, wie elegant sich selbst die Abzahlungsgleichung für eine beliebige Laufzeit im neuen Gewand präsentiert.

Frau X berechnet die fünfte Nachkommastelle von q

Im Probierplan erscheint jetzt die linke Seite der **vereinfachten** Abzahlungsgleichung:

Probierplan für die fünfte Nachkommastelle von q

Probierwert für q	$q^6\ 5'000 - \frac{q^6 - 1}{q - 1}\ 870$	Vorzeichen	Der Probierwert für q liegt ...
1.01240	− 0.80	−	zu tief
1.01241	.....	....	zu ....
.....	.....	....	.....

Aus dem Probierplan von Aufg. 23

Linke Seite der vereinfachten Abzahlungsgleichung

AUFGABE 25

a) Bestimmen Sie die fünfte Nachkommastelle des Zinsfaktors q in der Abzahlungsgleichung von Frau X. Verwenden Sie im Probierplan die linke Seite der **vereinfachten** Gleichung.

b) Sie kennen jetzt die ersten fünf Stellen des Monatszinsfaktors. Wieviel Prozent beträgt der Monatszinssatz, gerundet auf zwei Nachkommastellen?

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

Die Abzahlungsgleichung in neuem Gewand

Haben Sie festgestellt, wie sehr viel bequemer sich mit der neuen Formel rechnen lässt? Da lohnt es sich doch, auch die Abzahlungsgleichung für eine beliebige Laufzeit auf dieselbe Art zu vereinfachen, wie wir das mit der Gleichung von Frau X getan haben. Sie lautet

$$q^n\ K - q^{n-1}\ R - q^{n-2}\ R - \ldots\ldots - q^3\ R - q^2\ R - q\ R - R = 0\ .$$

Zuerst klammern wir R aus:

$$q^n\ K - (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots\ldots + q^3 + q^2 + q + 1)\ R = 0\ .$$

Dann schreiben wir wie oben die Summe in der Klammer als Bruch:

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots\ldots + q^3 + q^2 + q + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1}\ .$$

Und schon erhalten wir die endgültige Form der Abzahlungsgleichung, die wir gleich in eine Informationsbox stecken:

Abzahlungsgleichung
(bei gleichmässiger Rückzahlung und festem Zinssatz)

$$q^n\ K - \frac{q^n - 1}{q - 1}\ R = 0$$

K	Kreditbetrag
R	Monatsrate
q	Monatszinsfaktor = 1+ Monatszinssatz
n	Laufzeit in Monaten

AUFGABE 26

Die Abzahlungsgleichung ist jetzt viel einfacher. Aber Sie hat einen «Schönheitsfehler». Der Wert q = 1 kann nicht mehr eingesetzt werden.

a) Was passiert nämlich, wenn man für q den Wert 1 einsetzt?

b) Warum ist es aber − aus praktischer Sicht − nicht weiter schlimm, dass q = 1 nicht eingesetzt werden darf?

☹ ☹ 😐 ☹ ☺

AUFGABE 27

Es ist an der Zeit, ein Versprechen aus dem ersten Kapitel einzulösen. Im Abschnitt 1.3 ging es um die Gleichwertigkeit von Zinssätzen. Auf der Seite 14, ganz unten, stiessen wir in diesem Zusammenhang auf die Gleichung $q^6 = 1.4049$ und sagten dazu: «Wenn Sie das Kapitel 2 einmal hinter sich haben, wird Ihnen eine solche Gleichung kein Kopfzerbrechen mehr bereiten.» Nun, das Kapitel 2 ist beinahe zu Ende. Lassen Sie uns sehen, wie es mit dem Kopfzerbrechen steht! Aufgabe:

■ Welcher Monatszinssatz ist gleichwertig zum Jahreszinssatz 15%?

Zu dieser Frage gehört die Gleichung

$$q^{12} = 1.15$$

Dabei ist q der Monatszinsfaktor zum gesuchten Monatszinssatz.

Diese Gleichung ist nichtlinear. Lösen Sie sie mit planmässigem Probieren.

a) Formen Sie die Gleichung so um, dass die rechte Seite null wird.

b) «Der Wert $q = 1$ ist zu klein für die Lösung.» Begründen Sie diese Aussage (oder nehmen Sie sie vorläufig einfach zur Kenntnis).

c) «Ein zu kleiner Wert für q ergibt ein negatives Ergebnis für die linke Seite der Gleichung.» Begründen Sie diese Aussage (oder nehmen Sie sie vorläufig einfach zur Kenntnis).

d) Starten Sie den Probierplan mit $q = 1$. Wählen Sie im ersten Teil des Probierplanes die Schrittweite 0.01, im zweiten Teil 0.001, im dritten Teil 0.0001 und im vierten Teil schliesslich 0.00001.

e) Sie haben 5 Nachkommastellen vom Monatszinsfaktor bestimmt. Welcher Monatszinssatz ist nun gleichwertig zum Jahreszinssatz 15%? Geben Sie den Wert auf Hundertstel Prozent genau gerundet an.

f) Falls Sie bei den Teilaufgaben b) und c) die Begründungen nicht finden konnten, versuchen Sie's jetzt bitte noch einmal, bevor Sie im Lösungsteil nachschlagen.

☹ ☹ 😐 ☺

Herzlichen Glückwunsch! Sie haben auch das 2. Kapitel zu Ende bearbeitet! Wiederum gilt es, den Lernfortschritt zu sichern und zu überprüfen. Lösen Sie dazu die Aufgaben 28, 29 und 30.

Lernkontrolle zu Kapitel 2

AUFGABE 28

Im Dezember 1991 sagten die Stimmbürgerinnen und Stimmbürger des Kantons Zürich Ja zu einem neuen Kleinkreditgesetz (vgl. Seite 15-17). Im November 1993 trat es in Kraft. Die Verordnung zu diesem Gesetz schreibt vor, dass alle Kreditberechnungen mit genau der Abzahlungsgleichung vorzunehmen seien, welche wir in Kapitel 1 aufgestellt und in Kapitel 2 gelöst haben. Vor 1993 rechneten die meisten Banken bei Kleinkrediten mit der Gleichung

$$K + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{p}{12} \cdot K - n \cdot R = 0$$

K Kreditbetrag
R Monatsrate
p Jahreszinssatz
n Laufzeit in Monaten

Ist diese Gleichung linear oder nichtlinear, wenn

a) der Jahreszinssatz p die Unbekannte ist?
b) die Laufzeit n die Unbekannte ist?

Begründen Sie Ihre Antworten durch passende Umformungen. Wählen Sie dazu selbst sinnvolle Zahlen.

AUFGABE 29

Die Abzahlungsgleichung $q^n \cdot K - \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R = 0$ ist nichtlinear, wenn die Laufzeit n die Unbekannte ist.

a) Setzen Sie $K = 5000$, $R = 315$ und $q = 1.015$ in die Gleichung ein, und vereinfachen Sie diese soweit als möglich. Wir möchten, dass Sie $1.3125 - 1.015^n = 0$ erhalten. Geben Sie alle Umformungsschritte an.

b) Lösen Sie nun die Gleichung $1.3125 - 1.015^n = 0$ mit planmässigem Probieren. Achtung: Die Laufzeit n kann nur ganzzahlige Werte annehmen. Nachkommastellen wie bei K, R und q machen für n keinen Sinn.

- Suchen Sie selber einen geeigneten Startwert für n.
- Wählen Sie selber die Schrittweite für n.
- Rechnen Sie solange, bis Sie die Vorkommastellen von n kennen.
- Geben Sie die Restschuld am Ende der Laufzeit an. Sie wird üblicherweise vom Kreditnehmer zusammen mit der letzten Rate beglichen.

AUFGABE 30

Ein Kredit von 2000 Fr. soll in 2 Raten zu je 1050 Fr. im Laufe von 4 Monaten abgezahlt werden. Die Ratenzahlungen erfolgen im 2. und 4. Monat.

Die Abzahlungsgleichung zu einem solchen Kreditangebot lautet

$$q^4 \cdot K - q^2 \cdot R - R = 0$$

K Kreditbetrag
R Rate
q Monatszinsfaktor

Diese Gleichung ist nichtlinear, wenn q die Unbekannte ist. Ermitteln Sie q mit planmässigem Probieren.

- Suchen Sie selber einen geeigneten Startwert für q.
- Wählen Sie selber die Schrittweiten für q.
- Rechnen Sie solange, bis Sie die dritte Nachkommastelle von q kennen.

Ihre Meinung ist gefragt

Es steht jetzt noch der Test zum Kapitel 2 bevor. Wenn Sie uns bis hierhin gefolgt sind, haben wir keinen Zweifel, dass Sie diesen erfolgreich meistern werden.

Der Pflichtteil des Leitprogrammes ist mit dem Kapiteltest abgeschlossen. Das Additum ist als Kür für diejenigen gedacht, die schnell vorangekommen sind und sich noch etwas weiter in das Thema des Leitprogrammes vertiefen möchten.

Wir verabschieden uns von Ihnen. Uns hat es Spass gemacht, Frau X auf Schritt und Tritt bei der Suche nach dem richtigen Zinssatz zu begleiten. Und Ihnen? Schreiben Sie uns! Ihre Meinung interessiert uns. Unsere Anschriften finden Sie auf Seite 2 ganz vorne im Leitprogramm.

- Melden Sie sich nun bei Ihrer Lehrerin oder Ihrem Lehrer zum Kapiteltest. **Viel Glück!**

Lösungen zu allen Aufgaben

Lösungen zu den Aufgaben von Kapitel 1

■ Lösung zu Aufgabe 1

$$\frac{2'025}{15'000} = 0.135 = \frac{13.5}{100} = 13.5 \text{ Hundertstel} = 13.5 \text{ Prozent} = 13.5\,\%$$

«Prozent» heisst «pro Hundert», also soviel wie «Hundertstel».

■ Lösung zu Aufgabe 2

$$0.0525 \times 180'000 = 9'450 \text{ Fr.}$$

Die Gleichung für den Zinssatz kann wahlweise nach dem Zins oder nach dem Kredit aufgelöst werden:

Zins = Zinssatz × Kredit bzw. Kredit = Zins / Zinssatz

■ Lösung zu Aufgabe 3

(Auf Rappen gerundete Werte)

Zeitraum	Kontostand in Fr.	Zinszahlung in Fr.
.....	.....	.....
2. Jahr	.....	117.56
3. Jahr	2'730.06	122.85
4. Jahr	2'852.92	128.38
5. Jahr	2'981.30	134.16
6. Jahr	3'115.45	

■ Lösung zu Aufgabe 4

Die Einzahlung von Alice wurde bis heute 8 mal verzinst, jene von Bertrand 5 mal (n = 8 bzw. n = 5).

Der Kontostand von Alice beträgt $1.045^8 \times 700 = 995.47$ Fr.

Der Kontostand von Bertrand beträgt $1.045^5 \times 800 = 996.95$ Fr.

Bertrand hat 1.48 Fr. mehr auf dem Konto.

■ Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Einzahlung E wird nach 10 Jahren 10 mal verzinst worden sein.

$$1.0675^{10} \; E = 25'000 \qquad E = \frac{25'000}{1.0675^{10}} = 13'009.52$$

Man muss 13'009.52 Franken einzahlen.

b) Nach der letzten Einzahlung von E Franken betrug der Kontostand von Herrn Eibl 9'455.10 + E. Dieser wurde seither 4 mal verzinst.

$$1.0525^{4} \; (9'455.10 + E) = 12'849.15 \qquad E = \frac{12'849.15}{1.0525^{4}} - 9'455.10 = 1'015.85$$

Die letzte Einzahlung von Herrn Eibl betrug 1'015.85 Franken.

■ Lösung zu Aufgabe 6

	Frau Kohn		Herr Lewin	
Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zins in Fr.	Schuldenstand in Fr.	Zins in Fr.
1. Halbjahr	5'000.00	kein Eintrag	5'000.00	300.00
2. Halbjahr	5'000.00	600.00	5'300.00	318.00
3. Halbjahr	5'600.00	kein Eintrag	5'618.00	337.08
4. Halbjahr	5'600.00	672.00	5'955.08	357.30
5. Halbjahr	6'272.00	kein Eintrag	6'312.38	378.74
6. Halbjahr	6'272.00	752.64	6'691.13	401.47
nach 3 Jahren	7'024.64		7'092.60	

Kürzerer Lösungsweg: Der ausbezahlte Kreditbetrag von K = 5'000 Franken ist bei einem Zinsfaktor q nach n Zinsperioden q^n K Franken wert.

Frau Kohn (q = 1.12, n = 3) muss $1.12^3 \times 5'000 = 7'024.64$ Franken zurückzahlen.
Herr Lewin (q = 1.06, n = 6) muss $1.06^6 \times 5'000 = 7'092.60$ Franken zurückzahlen.

Fazit: Das Angebot von Frau Kohn ist etwas günstiger. Herr Lewin muss rund 68 Franken mehr zurückzahlen. Dafür verantwortlich sind die Zinseszinsen, die bei Herrn Lewin aufgrund seiner kürzeren Zinsperiode höher sind. **Die Überlegung «Halbe Zinsperiode gleich halber Zinssatz» ist falsch.** Der Zusammenhang zwischen Zinsperiode und Zinssatz ist **nicht** linear. Der Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen Zusammenhängen wird in Kapitel 2 «Frau X löst die Gleichung» behandelt.

■ Lösung zu Aufgabe 7

a) Bei jährlicher Verzinsung ist nach einem Jahr genau 1 Verzinsung vorgenommen worden:

$q \times 4'000 = 4'720 \qquad q = 1.18 \qquad p = 18\ \%\ p.a.$

b) Bei halbjährlicher Verzinsung sind nach einem Jahr genau 2 Verzinsungen vorgenommen worden:

$q^2 \times 4'000 = 4'720 \qquad q^2 = 1.18 \qquad q = \sqrt{118} = 1.0863 \qquad p = 8.63\ \%\ p.s.$

c) Bei monatlicher Verzinsung sind nach einem Jahr genau 12 Verzinsungen vorgenommen worden:

$1.0139^{12} \times 4'000 = 4'720.65$. Das ist sehr nahe bei 4'720.

p = 0.0139 ist tatsächlich eine gute Näherung für den Monatszinssatz.

d) Herr Knopf muss 4'169.13 Franken zurückzahlen. In einem Vierteljahr würden drei monatliche Verzinsungen erfolgen. Die anfänglichen 4'000 Franken erreichen dabei den Wert $1.0139^3 \times 4'000 = 4'169.13$ Franken.

e) Bei vierteljährlicher Verzinzung muss der Wert aus d) mit einer einzigen Verzinsung erreicht werden:

$q \times 4'000 = 4'169.13 \qquad q = 1.0423 \qquad p = 4.23\ \%\ p.q$

Zusammenfassung: Die vier Zinssätze 18.00 % p . a., 8.63 % p . s., 4.23 % p . q. und 1.39 % p . m. sind gleichwertig.

■ Lösung zu Aufgabe 8

a)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zins in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	5'000.00	69.50	870.00
2. Monat	4'199.50	58.37	870.00
3. Monat	3'387.87	47.09	870.00
4. Monat	2'564.96	35.65	870.00
5. Monat	1'730.62	24.06	870.00
6. Monat	884.67	12.30	870.00
Restschuld	26.97		

Zins 2. Monat = $0.0139 \times 4'199.50 = 58.37$ Fr.
Schuldenstand 3. Monat = 4'199.50 + 58.37 - 870.00 = 3'387.87 Fr.
etc.

b) Nach dem Abzahlungsplan müsste Frau X nach Ablauf der 6 Monate noch rund 27 Franken zurückzahlen. Die Bank verlangt das aber nicht. Sie rechnet offenbar mit einem etwas tieferen Zinssatz, überschreitet also die gesetzliche Höchstgrenze nicht.

■ Lösung zu Aufgabe 9

a)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zinssatz	Zins in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1985	180'000.00	5.25%	9'450.00	15'000.00
1986	174'450.00	5.75%	10'030.88	15'000.00
1987	169'480.88	4.75%	8'050.34	15'000.00
	162'531.22			

b)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zins in Fr.	Rückzahlung in Fr.
Okt. 94	❺ 8'150.45	✎ 774.29	1'250.00
Nov. 94	❸ 7'674.74	729.10	❹ 1'850.00
Dez. 94	6'553.84	❶ 622.62	1'550.00
Jan. 95	5'626.46		

❷ Monatszinssatz = 9.5 %

Im einzelnen sind wir so vorgegangen:

❶ 6'553.84 + ZinsDez94 − 1'550.00 = 5'626.46 ZinsDez94 = 622.62 Fr.

❷ Monatszinssatz × 6'553.84 = 622.62 Monatszinssatz = 0.0950 = 9.5%

❸ 0.095 × SchuldNov94 = 729.10 SchuldNov94 = 7'674.74 Fr.

❹ 7'674.74 + 729.10 − RückzlgNov94 = 6'553.84 RückzlgNov94 = 1'850.00 Fr.

❺ SchuldOkt94 + ZinsOkt94 − 1'250.00 = 7'674.74

SchuldOkt94 + ZinsOkt94 = 8'924.74

SchuldOkt94 + 0.095 × SchuldOkt94 = 8'924.74

1.095 × SchuldOkt94 = 8'924.74 SchuldOkt94 = 8'150.45 Fr.

✎ ZinsOkt94 = 0.095 × 8'150.45 ZinsOkt94 = 774.29 Fr.

■ Lösung zu Aufgabe 10

a)

Zinsfaktor Schuldenstand 4.Monat	−	Rück - zahlung	=	Schuldenstand5.Monat
$q\,(q^3\,K - q^2\,R - q\,R - R)$	−	R	=	$q^4\,K - q^3\,R - q^2\,R - q\,R - R$
Zinsfaktor Schuldenstand 5.Monat	−	Rück - zahlung	=	Schuldenstand 6.Monat
$q\,(q^4\,K - q^3\,R - q^2\,R - q\,R - R)$	−	R	=	$q^5\,K - q^4\,R - q^3\,R - q^2\,R - q\,R - R$

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	K	R
2. Monat	$q\ K - R$	R
3. Monat	$q^2 K - q\ R - R$	R
4. Monat	$q^3 K - q^2 R - q\ R - R$	R
5. Monat	$q^4 K - q^3 R - q^2 R - q\ R - R$	R
6. Monat	$q^5 K - q^4 R - q^3 R - q^2 R - q\ R - R$	R
Restschuld	$q^6 K - q^5 R - q^4 R - q^3 R - q^2 R - q R - R$	

b) Die Restschuld nach 6 Monaten entspricht einfach dem Schuldenstand im 7. Monat.
Für $K = 5'000$, $R = 870$ und $q = 1.0139$ ergibt sich eine Restschuld von

$$1.0139^6\ 5'000 - 1.0139^5\ 870 - 1.0139^4\ 870 - 1.0139^3\ 870 - 1.0139^2\ 870 - 1.0139\ 870 - 870$$

$$= 1.0139^6\ 5'000 - (1.0139^5 + 1.0139^4 + 1.0139^3 + 1.0139^2 + 1.0139 + 1)\ 870 = \underline{26.97}$$

was mit den Berechnungen aus Abschnitt 1.4 übereinstimmt. Um die Rechenarbeit etwas zu reduzieren, haben wir den Faktor 870 ausgeklammert.

■ Lösung zu Aufgabe 11

Die Abzahlungsgleichung wird folgende Form haben:

$$q^n K - q^{n-1} R - q^{n-2} R - \ldots\ldots - q^3 R - q^2 R - q R - R = 0$$

Die Punkte . . . . . deuten an, dass einige Terme ausgelassen sind. Für $n = 10$ beispielsweise fehlen die Terme $q^7 R$, $q^6 R$, $q^5 R$ und $q^4 R$.

Als Begründung führen wir einige wesentliche Gesetzmässigkeiten an, welche hinter dem Abzahlungsplan stecken. Zur Illustration dieser Gesetzmässigkeiten verweisen wir auf die Lösung von Aufgabe 10.

Der Schuldenstand wird von einer Zeile zur nächsten nach der stets gleichen Regel ermittelt:

Zinsfaktor $\times$ alter Schuldenstand $-$ Rückzahlung $=$ neuer Schuldenstand

Die Formel für den Schuldenstand ändert sich von einer Zeile zur nächsten wie folgt:

Bei allen Termen erhöht sich der Exponent von q um 1.
Zusätzlich kommt ein Term $-R$ hinzu.

Die Abzahlungsgleichung erhält man, indem man die Restschuld nach n Monaten gleich null setzt. Die Restschuld nach n Monaten entspricht dem Schuldenstand im $(n+1)$-ten Monat.

■ Lösung zu Aufgabe 12

Für 12 Monate hätte die Abzahlungsgleichung so gelautet:

$$q^{12} K - q^{11} R - q^{10} R - q^9 R - q^8 R - q^7 R - q^6 R - q^5 R - q^4 R - q^3 R - q^2 R - q R - R = 0$$

■ Lösung zu Aufgabe 13

a) Bis zum 6. Monat sieht der Abzahlungsplan gleich aus wie in Aufgabe 10. Wir überspringen deshalb ein paar Zeilen in unserer Darstellung.

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Rückzahlung
1. Monat	K	R
.....	.....	.....
6. Monat	$q^5 K - q^4 R - q^3 R - q^2 R - q R - R$	R
7. Monat	$q^6 K - q^5 R - q^4 R - q^3 R - q^2 R - q R - R$	0
8. Monat	$q^7 K - q^6 R - q^5 R - q^4 R - q^3 R - q^2 R - q R$	0
9. Monat	$q^8 K - q^7 R - q^6 R - q^5 R - q^4 R - q^3 R - q^2 R$	0
10. Monat	$q^9 K - q^8 R - q^7 R - q^6 R - q^5 R - q^4 R - q^3 R$	0
11. Monat	$q^{10} K - q^9 R - q^8 R - q^7 R - q^6 R - q^5 R - q^4 R$	R
12. Monat	$q^{11} K - q^{10} R - q^9 R - q^8 R - q^7 R - q^6 R - q^5 R - R$	R
Restschuld	$q^{12} K - q^{11} R - q^{10} R - q^9 R - q^8 R - q^7 R - q^6 R - q R - R$	

b) Die Abzahlungsgleichung lautet

$$q^{12} K - q^{11} R - q^{10} R - q^9 R - q^8 R - q^7 R - q^6 R - q R - R = 0$$

■ Lösung zu Aufgabe 14

a)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	2'000.00	800.00
2. Monat	1'229.00	700.00
3. Monat	546.82	554.75
4. Monat	0.00	

Die 3. Monatsrate beträgt 554.75 Fr.

Schuldenstand 2. Monat = 1.0145 × 2'000.00 − 800 = 1'229.00 Fr.

Schuldenstand 3. Monat = 1.0145 × 1'229.00 − 700 = 546.82 Fr.

1.0145 × 546.8205 − Rückzahlung 3. Monat = 0.00

Rückzahlung 3. Monat = 554.75 Fr.

b)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	K	R_1
2. Monat	$q\ K - R_1$	R_2
3. Monat	$q^2 K - q\ R_1 - R_2$	R_3
4. Monat	$q^3 K - q^2 R_1 - q\ R_2 - R_3$	

Schuldenstand 2. Monat $= q\ K - R_1$

Schuldenstand 3. Monat $= q\ (q\ K - R_1) - R_2 = q^2 K - q\ R_1 - R_2$

Schuldenstand 4. Monat $= q\ (q^2 K - q\ R_1 - R_2) - R_3 = q^3 K - q^2 R_1 - q\ R_2 - R_3$

c) Der Kredit ist nach 3 Monaten getilgt, wenn der Schuldenstand im 4. Monat gleich null ist:

$$q^3 K - q^2 R_1 - q\ R_2 - R_3 = 0$$

Man kennt $K = 2'000$, $R_1 = 800$, $R_2 = 700$ und $q = 1.0145$. Für R_3 erhält man aus der Abzahlungsgleichung

$$R_3 = q^3 K - q^2 R_1 - q\ R_2 = 1.0145^3\ \ 2'000 - 1.0145^2\ \ 800 - 1.0145\ \ 700 = 554.75 \text{ Fr.},$$

was mit dem Resultat von a) übereinstimmt.

■ Lösung zu Aufgabe 15

a) Der Zins für das Jahr 1995 betrug pro Kopf der Bevölkerung $0.065 \times 17'500 = 1'137.50$ Fr.

b) Die Verschuldung pro Kopf der Bevölkerung steigt in diesem Fall bis ins Jahr 2000 auf $1.065^5 \times 17'500 = 23'976.52$ Fr.

c) Die Verschuldung pro Kopf der Bevölkerung steigt in diesem Fall bis ins Jahr 2000 auf 38'210.62 Fr.

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Neuverschuldung in Fr.
1995	17'500.00	2'500.00
1996	21'137.50	2'500.00
1997	25'011.44	2'500.00
1998	29'137.18	2'500.00
1999	33'531.10	2'500.00
2000	38'210.62	

Schuldenstand 1996 = Jahreszinsfaktor × Schuldenstand 1995 + Neuverschuldung 1995

= $1.065 \times 17'500 + 2'500 = 21'137.50$ Fr.

etc.

■ Lösung zu Aufgabe 16

a) Bei jährlicher Verzinsung sind nach 2 Jahren 2 Verzinsungen vorgenommen worden:

$q^2 \times 5'000 = 6'469.50$ $\quad q^2 = 1.2939$ $\quad q = \sqrt{1.2939} = 1.1375$ $\quad p = 13.75\ \%$ p. a.

b) Bei monatlicher Verzinsung sind nach 2 Jahren 24 Verzinsungen vorgenommen worden:

$$1.0108^{24} \times 5'000 = 6'470.47$$

Das Ergebnis liegt sehr nahe bei 6'469.50. Tatsächlich ist 1.08 % eine gute Näherung für den Monatszinssatz.

■ Lösung zu Aufgabe 17

Herr A antwortet:

«Sie fordern für die 5'000 Franken nach einem **halben** Jahr einen Zins von 400 Franken. Das entspricht einem Zinssatz von 8 %**p . s.** Angenommen, Sie leihen die von mir zurückgezahlten 5'400 Fr. **gleich wieder** jemandem zu 8 % p . s. aus, dann streichen Sie im folgenden Halbjahr einen Zins von 432 Franken ein. Das ergibt also insgesamt einen Jahreszins von 832 Franken. Von mir hätten Sie nach einem Jahr jedoch nur 800 Franken erhalten!

Wir müssen ausrechnen, welcher **Halbjahreszinssatz** p **gleichwertig** ist zum **Jahreszinssatz** 16%. Dazu rechnen wir den Wert der 5'000 Fr. nach einem Jahr aufgrund der verschiedenen Verzinsungen aus und setzen diese Beträge einander gleich. Dies ergibt eine Gleichung für den Halbjahreszinsfaktor $q = 1 + p$.

Wert nach einem Jahr bei halbjährlicher Verzinsung	=	Wert nach einem Jahr bei jährlicher Verzinsung

$$q^2 \times 5'000 \quad = \quad 1.16 \times 5'000$$

Folglich ist $q = \sqrt{116} = 1.0770$ und damit $p = 7.70\ \%$.

Der korrekte Rückzahlungsbetrag lautet $1.077 \times 5'000 = 5'385$ Fr.»

■ Lösung zu Aufgabe 18

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zinssatz	Rückzahlung in Fr.
1. Jahr	6'000.00	13.5%	2'535.30
2. Jahr	4'274.70	12.5%	2'535.30
3. Jahr	2'273.74	11.5%	2'535.30
nach 3 Jahren	− 0.08		

Schuldenstand 2. Jahr $= 1.135 \times 6'000.00 - 2'535.30 = 4'274.70$ Fr.
Schuldenstand 3. Jahr $= 1.125 \times 4'274.70 - 2'535.30 = 2'273.74$ Fr.
Schuldenstand nach 3 Jahren $= 1.115 \times 2'273.74 - 2'535.30 = -0.08$ Fr.

Der Kredit ist also bei einer Monatsrate von 2'535.30 Fr. nach 3 Jahren in etwa abgezahlt.

■ Lösung zu Aufgabe 19

a) Die Abzahlungsgleichung stellt einen formelmässigen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Kreditvariablen dar. In diesem Beispiel treten nicht weniger als fünf Kreditvariablen auf: Der Kreditbetrag K, die Monatsrate R, der 1. Zinsfaktor q_1, der 2. Zinsfaktor q_2 und der 3. Zinsfaktor q_3.

b) Um die Abzahlungsgleichung aufzustellen, wiederholt man die Rechnung von Aufgabe 18 mit den Variablen K, R, q_1, q_2 und q_3 anstelle der Zahlenwerte.

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zinsfaktor	Rückzahlung in Fr.
1. Jahr	K	q_1	R
2. Jahr	$q_1 K - R$	q_2	R
3. Jahr	$q_2 q_1 K - q_2 R - R$	q_3	R
nach 3 Jahren	$q_3 q_2 q_1 K - q_3 q_2 R - q_3 R - R$		

Schuldenstand 2. Jahr $= q_1 K - R$

Schuldenstand 3. Jahr $= q_2 (q_1 K - R) = q_2 q_1 K - q_2 R - R$

Schuldenstand nach 3 Jahren $= q_3 (q_2 q_1 K - q_2 R - R) = q_3 q_2 q_1 K - q_3 q_2 R - q_3 R - R$

Der Kredit ist nach 3 Jahren abgezahlt, wenn der Schuldenstand nach 3 Jahren null ist. Die Abzahlungsgleichung lautet also:

$$q_3 q_2 q_1 K - q_3 q_2 R - q_3 R - R = 0 .$$

Für K = 6'000, R = 2'535.30, q_1 = 1.135, q_2 = 1.125 und q_3 = 1.115 ergibt sich

$$1.115 \times 1.125 \times 1.135 \times 6'000 - 1.115 \times 1.125 \times 2'535.30 - 1.115 \times 2'535.30 - 2'535.30$$

$$= -0.08 ,$$

was mit Aufgabe 18 übereinstimmt.

Lösungen zu den Aufgaben von Kapitel 2

■ Lösung zu Aufgabe 20

Die Gleichung lautet $1.01^4 \; 2000 - 1.01^3 \; R - 1.01^2 \; R - 1.01 \; R - R = 0$.

Wir vereinfachen:

$$1.01^4 \; 2000 - (1.01^3 + 1.01^2 + 1.01 + 1) \; R = 0$$
$$2'081.21 - 4.0604 \; R = 0$$
$$-4.0604 \; R = -2'081.21$$

Jetzt ist die Gleichung so einfach geworden, dass schon der nächste Schritt zur Lösung führt:

$$R = \frac{-2'081.21}{-4.0604} = \underline{\underline{512.56}}$$

■ Lösung zu Aufgabe 21

Die Gleichung ist linear, wenn die Unbekannte K, R oder q_2 ist.
Sie ist nichtlinear, wenn die Unbekannte q_1 ist.

Wir illustrieren den Lösungsweg anhand der Teilaufgaben c) und d) .

● Die Unbekannte ist q_1

Wir wählen für K, R, q_2 feste Zahlen, zum Beispiel: K = 1'800, R = 650, $q_2 = 1.02$.

Die Gleichung lautet: $1.02 \; q_1^2 \; 1'800 - 1.02 \; q_1 \; 650 - 1.02 \; 650 - 650 = 0$

Wir vereinfachen :

$$1'836 \; q_1^2 - 663 \; q_1 - 1'313 = 0$$
$$1'836 \; q_1^2 - 663 \; q_1 = 1'313$$

Weiter kommen wir nicht. Die Unbekannte q_1 tritt einmal in der 2. Potenz und einmal in der 1. Potenz auf. Diese Potenzen lassen sich nicht zusammenfassen.

Diese Gleichung ist ein Beispiel für eine **quadratische Gleichung**. Sind Ihnen quadratische Gleichungen ein Begriff? Wenn nein, macht das gar nichts. Wenn ja, wissen Sie wahrscheinlich, dass es für quadratische Gleichung eine **Lösungsformel** gibt. Trotzdem sind sie nichtlinear. Sie lassen sich nicht auf die Form «Zahl × Unbekannte = Zahl» bringen.

● Die Unbekannte ist q_2

Wir wählen für K, R, q_1 feste Zahlen, zum Beispiel: K = 1'800, R = 650, $q_1 = 1.01$.

Die Gleichung lautet: $q_2 \; 1.01^2 \; 1'800 - q_2 \; 1.01 \; 650 - q_2 \; 650 - 650 = 0$

Wir vereinfachen:

$$1'836.18 \; q_2 - 656.5 \; q_2 - 650 \; q_2 - 650 = 0$$
$$529.68 \; q_2 = 650$$

Die Gleichung hat nun die Form «Zahl × Unbekannte = Zahl» . Sie ist linear.

■ Lösung zu Aufgabe 22

q	$q^6 \quad 5000 - (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \quad 870$	Vorzeichen
1.010	− 44.65	−
1.011	− 26.46	−
1.012	− 8.15	−
1.013	+ 10.28	+

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen 1.012 und 1.013. Bis zur dritten Nachkommastelle lautet die Lösung somit $\underline{q = 1.012}$.

■ Lösung zu Aufgabe 23

a)

q	$q^6 \quad 5000 - (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) \quad 870$	Vorzeichen
1.0120	− 8.15	−
1.0121	− 6.32	−
1.0122	− 4.48	−
1.0123	− 2.64	−
1.0124	− 0.80	−
1.0125	+ 1.05	+

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen 1.0124 und 1.0125. Bis zur vierten Nachkommastelle lautet die Lösung somit $\underline{\underline{q = 1.0124}}$.

b) In Kapitel 1, Abschnitt 1.2, lernten Sie: Zinsfaktor = 1 + Zinssatz. Daraus erhalten Sie

$$\text{Zinssatz} = \text{Zinsfaktor} - 1 = 1.0124 - 1 = 0.0124 = 1.24\ \%$$

Der Monatszinssatz beträgt also 1.24....%. Die Punkte deuten an, dass die Zahl noch mehr Nachkommastellen hat. Zumindest eine weitere Stelle ist hier noch von Bedeutung. Zinssätze werden nämlich üblicherweise auf Hundertstel Prozent genau **gerundet** angegeben. Um Runden zu können, brauchen wir eine weitere Nachkommastelle. Diese werden wir später noch berechnen.

■ Lösung zu Aufgabe 24

$$\begin{aligned}
&(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)\,(q - 1) \\
&= (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)\,q - (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)\,1 \\
&= q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q - q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1 \\
&= q^6 - 1
\end{aligned}$$

■ Lösung zu Aufgabe 25

a)

q	$q^6 \; 5000 - \dfrac{q^6 - 1}{q - 1} \; 870$	Vorzeichen
1.01240	− 0.80	−
1.01241	− 0.61	−
1.01242	− 0.43	−
1.01243	− 0.24	−
1.01244	− 0.06	−
1.01245	+ 0.13	+

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen 1.01244 und 1.01245. Bis zur fünften Nachkommastelle lautet die Lösung somit $\underline{\underline{q = 1.01244}}$.

b) $$\text{Zinssatz} = \text{Zinsfaktor} - 1 = 1.01244 - 1 = 0.01244 = 1.244\ \%$$

Gerundet auf zwei Nachkommastellen beträgt der Monatszinssatz 1.24 %. Diesen Wert erhielten Sie auch in Aufgabe 23. Dort war jedoch die letzte Stelle noch unsicher. Jetzt ist sie **korrekt gerundet**.

■ Lösung zu Aufgabe 26

a) Es tritt eine Division durch null auf.

Die neue Form der Abzahlungsgleichung enthält einen Bruch, in dessen Nenner $(q - 1)$ steht. Für $q = 1$ wird dieser Nenner null. Durch null zu dividieren ist bekanntlich unzulässig. Auch Ihr Taschenrechner «weiss» das. Er zeigt einen Fehler an, wenn sie versuchen, durch null zu dividieren.

b) Ein Zinsfaktor von $q = 1$ entspricht einem Zinssatz von $p = q - 1 = 0$. Das würde bedeuten, dass die Bank gar keinen Zins verlangt − ein *theoretisch* möglicher Fall, der aber im Zusammenhang mit einem Kleinkredit kaum zur Diskussion steht.

■ Lösung zu Aufgabe 27

a) $$q^{12} - 1.15 = 0$$

b) Ein Monatszinsfaktor von q = 1 würde bedeuten, dass die Bank keinen Zins verlangt. Laut Aufgabe verlangt sie aber Zins, nämlich 15% im Jahr. Also muss der Monatszinsfaktor offensichtlich **grösser** als 1 sein.

c) Bezahlt man jeden Monat zuwenig Zins, so ist das natürlich auch im ganzen Jahr zuwenig. Das heisst: Für ein zu kleines q wird auch q^{12} zu klein, nämlich weniger als 1.15. Anders gesagt: Für ein zu kleines q wird $q^{12} - 1.15$ negativ.

d)

q	$q^{12} - 1.15$	Vorzeichen
1.00	− 0.150	−
1.01	− 0.023	−
1.02	+ 0.118	+
1.011	− 0.0097	−
1.012	+ 0.0039	+

q	$q^{12} - 1.15$	Vorzeichen
1.0111	− 0.00836	−
1.0112	− 0.00700	−
1.0113	− 0.00565	−
1.0114	− 0.00429	−
1.0115	− 0.00293	−
1.0116	− 0.00157	−
1.0117	− 0.00020	−
1.0118	+ 0.00116	+
1.01171	− 0.000067	−
1.01172	+ 0.000069	+

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen 1.01171 und 1.01172.

Bis zur fünften Nachkommastelle lautet die Lösung $\underline{\underline{q = 1.01171}}$.

e) Zinssatz = Zinsfaktor − 1 = 1.01171 − 1 = 0.01171 = 1.171 %

Auf Hunderstel Prozent genau gerundet beträgt der Monatszinssatz 1.17 %.

■ Lösung zu Aufgabe 28

a) Wir wählen für K, R und n die Zahlen von Frau X, das heisst K = 5'000, R = 870 und n = 6. Dann lautet die Gleichung

$$5'000 + \frac{6+1}{2} \cdot \frac{p}{12} \cdot 5'000 - 6 \cdot 870 = 0 \ .$$

Wir vereinfachen:

$$1'458.33\ p - 220 = 0$$

$$1'458.33\ p = 220$$

Die Gleichung hat nun die Form «Zahl × Unbekannte = Zahl» . Sie ist linear.

Kein Wunder also, dass die Banken lieber mit der «alten» als mit der «neuen» Abzahlungsgleichung rechnen:

Die «alte» Gleichung $K + \frac{n+1}{2} \cdot \frac{p}{12} \cdot K - n \cdot R = 0$ (Unbekannte p) ist linear.

Die «neue» Gleichung $q^n \cdot K - \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R = 0$ (Unbekannte q) ist nichtlinear.

Die Banken trauern der alten Gleichung aber noch aus einen andern Grund nach. Um diesen zu verstehen, werfen wir einen Blick auf das Resultat der obigen Rechnung: Auf vier Nachkommastellen gerundet erhalten wir $p = \frac{220}{1'458.33} = 0.1509$.

Die alte Gleichung liefert also einen Jahreszinssatz von 15.09 % für das Angebot von Frau X. Mit der neuen Gleichung indessen haben wir in Aufgabe 25 einen Monatszinssatz von 1.244 % erhalten, was einem Jahreszinssatz von fast 16 % entspricht. Die Bank verdient so oder so 6 × 870 − 5'000 = 220 Franken. Aber ein Zinssatz von nur 15 % sieht in der Werbung natürlich besser aus als einer von 16 %.

b) Wir wählen K = 10'000, R = 500 und p = 20 % = 0.2 . Dann lautet die Gleichung

$$10'000 + \frac{n+1}{2} \; \frac{0.2}{12} \; 10'000 - n \; 500 = 0 \; .$$

Wir vereinfachen:

$$\begin{aligned} 10'000 + 83.33\,(n+1) - 500\,n &= 0 \\ 10'000 + 83.33\,n + 83.33 - 500\,n &= 0 \\ -416.67\,n &= -10'083.33 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat nun die Form «Zahl × Unbekannte = Zahl» . Sie ist linear.

■ Lösung zu Aufgabe 29

a) Die Gleichung lautet:

$$1.015^n \; 5'000 - \frac{1.015^n - 1}{1.015 - 1} \; 315 = 0$$

Wir vereinfachen:

$$\begin{aligned} 1.015^n \; 5'000 - (1.015^n - 1) \; 21'000 &= 0 \\ 1.015^n \; 5'000 - 1.015^n \; 21'000 + 21'000 &= 0 \\ -1.015^n \; 16'000 + 21'000 &= 0 \\ 21'000 - 16'000 \; 1.015^n &= 0 \\ 1.3125 - 1.015^n &= 0 \end{aligned}$$

b) Würde die Bank keinen Zins verlangen, so müsste der Kreditnehmer rund 16 Raten zurückzahlen, denn 16 × 315 = 5'040 Franken. In Wirklichkeit muss er mehr bezahlen. Wir nehmen n = 16 als Startwert und erhöhen n jeweils um 1.

n	$1.3125 - 1.015^n$	Vorzeichen
16	+ 0.0435	+
17	+ 0.0245	+
18	+ 0.0052	+
19	− 0.0145	−

Die Laufzeit beträgt n = 18 Monate. Die Restschuld nach Ablauf der 18 Monate beträgt

$$1.015^{18} \; 5'000 - \frac{1.015^{18} - 1}{1.015 - 1} \; 315 = 82.55 \text{ Franken} \; .$$

■ Lösung zu Aufgabe 30

Die Gleichung lautet $2'000 \; q^4 - 1'050 \; q^2 - 1'050 = 0$, vereinfacht $40 \; q^4 - 21 \; q^2 - 21 = 0$.

Wir starten mit q = 1. Für die Schrittweite wählen wir zunächst 1, dann 0.1 usw.

q	$40 \; q^4 - 21 \; q^2 - 21$	Vorzeichen
1	− 2	−
2	+ 535	+
1. 1	+ 12.154	+
1.01	− 0.798	−
1.02	+ 0.449	+

q	$40 \; q^4 - 21 \; q^2 - 21$	Vorzeichen
1.011	− 0.675	−
1.012	− 0.552	−
1.013	− 0.429	−
1.014	− 0.305	−
1.015	− 0.180	−
1.016	− 0.055	−
1.017	+ 0.070	+

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen 1.016 und 1.017.

Bis zur dritten Nachkommastelle lautet die Lösung somit $\underline{\underline{q = 1.016}}$.

Additum

Übersicht

Eigenständig weiterarbeiten

In Kapitel 1 und 2 dieses Leitprogramms sind Sie Schritt für Schritt geführt worden. Sie erhielten von uns alle notwendigen Informationen. Die Aufgaben waren «vorgespurt». Ihre eigenen Lösungen konnten Sie mit unseren ausführlichen Musterlösungen vergleichen.

Das Additum erlaubt Ihnen nun, **eigenständig** weiterzuarbeiten.

Wir stellen Ihnen fünf Themen zur Auswahl. Zu jedem Thema haben wir einen **Arbeitsauftrag** formuliert. Die Aufträge sind so allgemein gehalten, dass Ihnen viel Spielraum bleibt.

Lösungen geben wir keine an. Zeigen Sie Ihre Lösungen Ihrer Lehrerin oder Ihrem Lehrer. Vielleicht erhalten Sie auch Gelegenheit zu einer Präsentation vor der Klasse.

Drei Themenkreise

Mensch und Umwelt. Kurzsichtiges Wirtschaftsdenken verleitet den Menschen zur Ausbeutung der Natur − seiner eigenen Lebensgrundlage. Die Rodung der Regenwälder, die Überfischung der Meere und die Belastung der Luft durch die masslose Verbrennung fossiler Brennstoffe sind Beispiele dafür. Zum besseren Verständnis kann man versuchen, solche Entwicklungen anhand mathematischer Modelle zu studieren. Bei hinreichender Vereinfachung ergibt sich dabei manchmal eine Ähnlichkeit mit Rechenabläufen, die Sie aus Kapitel 1 kennen. (Thema 1 und Thema 2)

Überschuldung. In der Schweiz ist durchschnittlich jeder dritte Haushalt mit der Abzahlung eines Kleinkredites belastet. Darunter befinden sich auch Haushalte mit einem knappen Budget. Manche von ihnen kommen mit den Rückzahlungen in Verzug und geraten dadurch in den Teufelskreis der Überschuldung. (Thema 3)

Computereinsatz. Von Hand Abzahlungspläne zu erstellen oder sich wiederholende Kreditberechnungen durchzuführen, ist eine mühsame, eintönige und nicht zuletzt fehleranfällige Angelegenheit. Mit dem Computer geht's bequemer und zuverlässiger. (Themen 4 und 5)

Das Themenangebot

1 **Die Ausbeutung des Blauwals.** Sie erhalten von uns Angaben über den Blauwal und stellen Berechnungen über Bestände und Fangmengen in diesem Jahrhundert an.

2 **Der weltweite Abbau von Erdöl.** Aufgrund von Daten, die wir Ihnen geben, berechnen Sie, wie weit die bekannten und die vermuteten Erdölvorräte noch reichen werden.

3 **Die Gefahr der Überschuldung.** Sie lesen einen Auszug aus einem Zeitungsartikel, in dem die Situation einer überschuldeten Familie geschildert wird.

4 **Abzahlungspläne vom Computer.** Sie erstellen mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms Abzahlungspläne auf dem Computer.

5 **Kreditberechnungen per Knopfdruck.** Sie erstellen ein Taschenrechner- oder Computerprogramm für Kreditberechnungen.

Thema 1 Die Ausbeutung des Blauwals

Der Blauwal, mit bis zu 30 m Gesamtlänge und 130 t Körpergewicht das grösste Tier, das jemals unsere Erde bewohnt hat, ist jahrzehntelang wirtschaftlich ausgebeutet worden und gilt heute als selten. Nach dem Einsetzen des modernen Walfanges vor etwa hundert Jahren reduzierten sich die Bestände in allen Meeren schnell und drastisch. Zu Beginn unseres Jahrhunderts dürfte es weltweit noch eine Viertelmillion Blauwale gegeben haben, heute ein paar tausend. Der Blauwal ist vom Aussterben bedroht und seit 1964 durch Bestimmungen des Internationalen Walfangabkommens ICRW geschützt. Leider gehören nicht alle Länder dem ICRW an, so dass der Schutz nicht umfassend durchsetzbar ist.

Vermehrung versus Ausbeutung

Weil das Beobachten und Zählen seltener Tiere schwierig ist, kennt man die Bestände und die Vermehrungsraten des Blauwals nicht genau. Fachberichte nennen unterschiedliche Zahlen. Die Werte für unseren Arbeitsauftrag lehnen wir an Daten an, die wir einer Publikation der World Conservation Union IUCN entnommen haben.

- 1910 gab es im *Nordpazifik* schätzungsweise 5'000 Blauwale, 1985 noch etwa 1'600.
- Seit dem Schutz des Blauwals im Jahre 1964 gab es (theoretisch) keine Fänge mehr.
- Als Vermehrungsrate nehmen wir 5% p.a.

Die Vermehrungsrate umfasst Geburten und natürliches Sterben ohne Bestandesverluste durch Jagd. 5% ist eine grobe Schätzung von uns. Die genannte Publikation erwähnt lediglich eine vermutete *Zuwachsrate* des geschützten *nordatlantischen* Blauwalbestandes von 5.2% um 1990. Wir benützen hier diese Zahl (gerundet) als Schätzwert für die Vermehrungsrate in allen Ozeanen und während aller Jahre. Immerhin scheint sie vereinbar mit dem, was man über den Fortpflanzungsrhythmus und die natürliche Lebenserwartung der Blauwale weiss.

Arbeitsauftrag

Stellen Sie Berechnungen über den nordpazifischen Blauwalbestand und Blauwalfang seit 1910 bis heute an. Versuchen Sie, Antworten auf folgende Fragen zu finden:

- Wie gross ist der Blauwalbestand im Nordpazifik heute, wenn man annimmt, dass die Vermehrungsrate unverändert geblieben und das Fangverbot seit 1964 eingehalten worden ist?
- Wieviele Wale wurden im Nordpazifik zwischen 1910 und 1964 jährlich gefangen? Gehen Sie von jährlich gleich grossen Fangmengen und einer konstanten Vermehrungsrate von 5% aus.
- Wie gross wäre der Blauwalbestand im Nordpazifik heute, wenn man 1964 für diesen Raum statt eines Fangverbotes eine Fangquote von 40 Tieren pro Jahr festgelegt hätte?
- Wie lange wird es unter Einhaltung des Fangverbotes dauern, bis sich der Blauwalbestand im Nordpazifik auf den Wert von 1910, also auf 5'000 Tiere erholt hat?

Bemerkung: Die Annahme konstanter jährlicher Fangmengen ist eine starke Vereinfachung. Die anfänglich hohe Ausbeutung im Nordpazifik ging zunächst zurück, als sich der Blauwalfang auf die südlichen Meere zu konzentrieren begann. Mit der Einführung der «schwimmenden Fabriken» in den zwanziger Jahren schnellten die jährlichen Fangmengen dann weltweit in die Höhe. 1946 legte das Internationale Walabkommen ICRW Fangquoten fest. (Obwohl schon damals voraussehbar war, dass die vereinbarten Quoten den Blauwal nicht retten würden, verstrichen noch 18 Jahre bis zu einem vollständigen Fangverbot.)

Thema 2 Der weltweite Abbau von Erdöl

In den letzten 100 Jahren ist der Energieverbrauch der Menschheit um das 60fache angestiegen. Und er nimmt weiterhin zu, derzeit um rund 3% pro Jahr. Die wichtigsten Energieträger sind die fossilen Brennstoffe Kohle, Erdöl und Erdgas. Sie decken gegenwärtig rund 80% der Energie.

Fossile Brennstoffe erneuern sich nicht, jedenfalls nicht in Zeitspannen, die für die Menschheit noch von Bedeutung sind. Die Quellen sind beschränkt. Der starke Abbau fossiler Brennstoffe in den letzten Jahrzehnten hat dazu geführt, dass viele Quellen nahezu erschöpft sind. Zwar wird viel unternommen, um neue Quellen zu erschliessen, doch können diese die stetig wachsende Nachfrage nicht mehr lange befriedigen.

Reserven versus Verbrauch

- Die weltweit bekannten Erdölreserven betrugen 1988 rund 922.1 Milliarden Barrel. Schätzungsweise gibt es auf der Erde eine noch einmal so grosse, noch nicht endeckte Menge Erdöl. Ein Barrel entspricht einem Fass von 159 Litern.
- Im Jahre 1988 wurden weltweit 21.3 Milliarden Barrel Erdöl gefördert und an die Verbraucher geliefert. Der Verbrauch nahm seither jährlich um rund 1.5% zu.

Arbeitsauftrag

Stellen Sie Berechnungen darüber an, wie die Erdölreserven im Laufe der nächsten Jahre und Jahrzehnte zur Neige gehen. Versuchen Sie, Antworten auf folgende Fragen zu finden:

- Wann werden die heute bekannten Erdölvorräte aufgebraucht sein, wenn der Erdölverbrauch unverändert ansteigt?
- Um wie viele Jahre zögern die noch nicht entdeckten Quellen das endgültige Versiegen hinaus?
- Um wie viele Prozent müsste der Erdölverbrauch jährlich abnehmen, damit die heute bekannten Vorräte noch 100 Jahre ausreichen?

Thema 3 Die Gefahr der Überschuldung

Arbeitsauftrag

Lesen Sie den folgenden Auszug aus dem Artikel «Kaufe jetzt, bereue später» von Carl J. Wiget, erschienen im «Brückenbauer» vom 9. Juni 1993. (Nachdruck mit Genehmigung der Redaktion und des Autors.)

Brückenbauer Nummer 23 9. Juni 1993

Kaufe jetzt, bereue später

Auch wenn jemand nur über ein knappes Budget verfügt, erliegt er zuweilen den Verlockungen der Konsumwelt. Als Retter in der Finanznot bieten sich Kleinkreditinstitute an. Das kann böse Folgen haben. Arbeitslosigkeit oder hohe Rechnungen führen schnell in die Überschuldung.

Roberta und Peter Heinrich* heirateten im Frühling, und kein Wölkchen trübte die Zuversicht des Paares. Alles schien geregelt: Die Wohnung bei Bern konnte sich sehen lassen; auch die Zimmer für die beiden Kinder im Vorschulalter (aus der früheren Ehe des Vaters) waren hübsch eingerichtet. Peter hatte einen krisensicheren Job als Maler, und Roberta verdiente als Teilzeitangestellte in einem Warenhaus noch etwas dazu.

Zugegeben, die beiden hatten etwas Geld aufnehmen müssen, um die Hochzeit mit allem Drum und Dran und die neuen Möbel bezahlen zu können: Der Konsumkredit belief sich auf 28 000 Franken. Die Familie Heinrich bezahlte die Raten immer pünktlich, obwohl das Haushaltsbudget knapp bemessen war: Peter verdiente monatlich 4250 Franken und seine Frau 500 Franken. Doch am 31. März dieses Jahres verlor Peter Heinrich seine Arbeit. Die Rezession trifft jetzt auch den Bereich Renovation und Umbau, in dem er als Maler tätig war. Das Warenhaus, in dem Roberta Heinrich beschäftigt ist, spart ebenfalls. Als Teilzeitangestellte kann sie nun weniger arbeiten und verdient monatlich nur noch 300 Franken.

Zum Leben bleibt nichts mehr

Bank macht auch noch die Zahnarztrechnung von 3000 Franken Sorgen, und Freunde möchten ihre geliehenen 5000 Franken zurück. Sobald die Arbeitslosenkasse das Dossier bearbeitet hat, erhält Peter Heinrich Taggelder in der Höhe von 80 Prozent seines bisherigen Verdienstes, das sind noch 3400 Franken. Damit stehen der vierköpfigen Familie, das Einkommen der Frau miteingerechnet, ganze 3700 Franken zur Verfügung. Zwar ist die Wohnungsmiete von 850 Franken bescheiden, doch die Kosten für den Lebensbedarf lassen kein Geld mehr übrig für die Bankraten. Das Betreibungsamt kann noch monatlich 690 Franken vom Arbeitslosengeld pfänden. Denn das betreibungsrechtliche Existenzminimum ist so tief angesetzt, dass nicht einmal die laufenden Steuern einberechnet werden. So entstehen bei Betreibungen zwangsläufig Steuerschulden.

Die Familie Heinrich hat ihr Problem der Beratungsstelle für Schuldensanierung in Bern vorgelegt. «In dieser Situation können wir keine Schuldensanierung planen», sagt Hansueli Mesmer von der Beratungsstelle: «Denn eine Schuldensanierung ist nur möglich, wenn das Einkommen des Schuldners eine gewisse Reserve über den Lebenshaltungskosten te für Schuldenrückzahlungen eingeplant werden kann.»

Der Konkurs droht

Derzeit hat die Bank die Verpflichtungen der Familie Heinrich gestundet. «Wenn Peter Heinrich in den nächsten zwei bis drei Monaten keine neue Stelle findet, bleibt möglicherweise nur der Konkurs als Ausweg», sagt Hansueli Mesmer. Wenn der Schuldner den Privatkonkurs anmeldet und sich für zahlungsunfähig erklärt, werden die Gläubiger zumindest für den Moment abgeschüttelt; sie erhalten für ihr Geld unverzinsliche, aber unverjährbare Verlustscheine ausgestellt. So unrühmlich ein Privatkonkurs ist, für viele ist er laut Mesmer «eine Rechtswohltat, die dem Überschuldeten einen normalen Lebensstandard ermöglicht».

1992 wurden in der Schweiz 4300 Privatkonkurse registriert, drei Jahre zuvor waren es mehr als 1000 Fälle weniger. Die Rezession schlägt durch: «Die Geldnöte sind gross», bestätigt Leo Kaufmann von der Caritas in Luzern: «Die Budgetberatungsstellen erhalten massenhaft Anfragen, was auch zusammenhängt mit der gebremsten Lohnentwicklung und den Kürzungen beim Teuerungsausgleich. Zahlreiche Sozialstellen sind heute überlastet mit Schuldensanierungen.» ....

Thema 4 Abzahlungspläne vom Computer

Arbeitsauftrag

Erstellen Sie die Abzahlungspläne von Kapitel 1 auf dem Computer. Verwenden Sie dazu ein **Tabellenkalkulationsprogramm**.

	A	B	C	D	E
1					
2		Kreditbetrag in Fr.	3000.00		
3		Monatsrate in Fr.	520.00		
4		Monatszinssatz	1.25 %		
5		Laufzeit in Monaten	6		
6					
7			Schuld	Zins	Rückzahlung
8	Monat		in Fr.	in Fr.	in Fr.
9					
10	1		3000.00	37.50	520.00
11	2		2517.50	31.47	520.00
12	3		2028.97	25.36	520.00
13	4		1534.33	19.18	520.00
14	5		1033.51	12.92	520.00
15	6		526.43	6.58	520.00
16	7	Restschuld:	13.01		
17	8				
18	9				
19	10				
20	11				
21	12				
22	13				
23	14				

Input des Benützers

Output des Computers

Voraussetzungen

- Haben Sie in der Schule Zugang zu einem Computer?
- Ist auf dem Computer ein Tabellenkalkulationsprogramm installiert?
- Haben Sie schon mit diesem Tabellenkalkulationsprogramm gearbeitet? Wissen Sie zum Beispiel, wie man darin Formeln erstellt?

Wenn Sie diese Fragen mit Ja beantworten können, dann ist dieses Thema für Sie geeignet. Andernfalls raten wir Ihnen davon ab. Sie würden viel zu viel Zeit benötigen, um sich zu organisieren und einzuarbeiten.

Thema 5 Kreditberechnungen per Knopfdruck

Arbeitsauftrag

Schreiben Sie ein Taschenrechner- oder Computerprogramm, welches zu drei vorgegebenen Kreditzahlen die vierte aus der Abzahlungsgleichung berechnet.

```
KREDIFIX − Ein Programm für schnelle
           Kreditberechnungen
−−−
```

Anhang für die Lehrperson

Kapiteltest 1 Serie A Aufgaben

■ Aufgabe 1

Frau Lersch besitzt **Aktien** (Wertpapiere) einer Firma. Für das eben abgelaufene Geschäftsjahr erhielt Frau Lersch von der Firma für ihr Aktienkapital von 37'500 Fr. eine Prämie von 1'837.50 Fr. Diese Prämie heisst **Dividende**. Das Verhältnis Dividende zu Aktienkapital heisst **Rendite**.

a) Welche Rendite hat Frau Lersch im eben abgelaufenen Geschäftsjahr erzielt?

Frau Lersch kauft für ihre Dividende jeweils sofort weitere Aktien der Firma. Sie geht davon aus, dass die Rendite im nächsten Jahr bei rund 5.4 % und im übernächsten Jahr gar bei rund 5.9 % liegen wird.

b) Wie hoch wird das Aktienkapital von Frau Lersch Ende übernächsten Jahres sein, wenn ihre Prognose zutrifft?

c) Erläutern Sie, inwiefern das Aktiengeschäft eine Art von Kreditgeschäft ist. In Ihren Erklärungen sollten die Begriffe **Kreditgeber**, **Kreditnehmer**, **Kreditbetrag**, **Zins** und **Zinssatz** auftreten.

■ Aufgabe 2

Herr und Frau Svanborg nehmen zur Finanzierung der Ausbildung ihrer Tochter einen Kredit von 4'000 Fr. auf. Der Kredit soll in 3 Raten zu je 1'390 Fr. im Laufe von 6 Monaten abgezahlt werden. Die Ratenzahlungen erfolgen im 2., im 4. und im 6. Monat.

Welcher Monatszinssatz steckt hinter diesem Angebot?

a) Stellen Sie einen Abzahlungsplan auf. Nehmen Sie dazu an, dass der Monatszinssatz 0.9 % betrage.

b) Welchen Schluss bezüglich des Monatszinssatzes ziehen Sie aus a) ?

c) Führen sie die drei Variablen

K	Kreditbetrag in Fr.
R	Monatsrate in Fr.
q	Monatszinsfaktor

ein, und stellen Sie die Abzahlungsgleichung zum Kreditangebot auf.

d) Zeigen Sie mit Hilfe von c), dass der tatsächliche Monatszinssatz 1.05% beträgt.

Kapiteltest 1 Serie A Lösungen

■ Lösung zu Aufgabe 1

a) Die Rendite von Frau Lersch beträgt 1'837.50 / 37'500 = 0.049 = 4.9 %.

b) Das Aktienkapital von Frau Lersch beträgt Ende übernächsten Jahres 43'907.97 Fr.

Zeitraum	Aktienkapital in Fr.	Rendite
im abgelaufenen Geschäftsjahr	37'500.00	4.9 %
im nächsten Geschäftsjahr	39'337.50	5.4 %
im übernächsten Geschäftsjahr	41'461.73	5.9 %
	43'907.97	

c) Durch den Kauf von Aktien stellt Frau Lersch der Firma Geld zur Verfügung. Frau Lersch ist die Kreditgeberin, die Firma die Kreditnehmerin. Der Kreditbetrag ist gleich dem Aktienkapital von Frau Lersch. Die (jährliche) Zinszahlung der Firma an Frau Lersch erfolgt über die Dividende. Der Jahreszinssatz entspricht der Rendite, die Frau Lersch erzielt.

Hinweis: Strenggenommen ist das Aktiengeschäft kein Kreditgeschäft. Frau Lersch wird durch den Aktienkauf Teilhaberin der Firma und hat keinen Anspruch darauf, dass ihr Aktienkapital von der Firma je zurückgezahlt wird.

■ Lösung zu Aufgabe 2

a)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	4000.00	keine
2. Monat	4036.00	1'390.00
3. Monat	2'682.32	keine
4. Monat	2'706.46	1'390.00
5. Monat	1'340.82	keine
6. Monat	1'352.89	1'390.00
	−24.93	

b) Der Schuldenstand nach Ablauf der 6 Monate ist negativ. Herr und Frau Svanborg hätten gemäss a) zuviel zurückgezahlt. Damit der Schuldenstand nach Ablauf der 6 Monate gerade null ist, muss die Rechnung mehr Zins ausweisen. Der Monatszinssatz von 0.90% ist also zu tief angesetzt.

c)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Rückzahlung in Fr.
1. Monat	K	keine
2. Monat	$q\ K$	R
3. Monat	$q^2 K - R$	keine
4. Monat	$q^3 K - q\ R$	R
5. Monat	$q^4 K - q^2 R - R$	keine
6. Monat	$q^5 K - q^3 R - q\ R$	R
Restschuld	$q^6 K - q^4 R - q^2 R - R$	

Die Abzahlungsgleichung lautet:

$$q^6 K - q^4 R - q^2 R - R = 0$$

d) Bei einem Monatszinssatz von 1.05% beträgt die Restschuld nach 6 Monaten

$1.0105^6 \times 4'000 - 1.0105^4 \times 1'390 - 1.0105^2 \times 1'390 - 1'390 = 0.06$ Fr. , also fast null.

■ Aufgabe 1

Ein Kredit in der Höhe von 5'000 Fr. soll nach Ablauf von 4 Jahren durch eine einmalige Zahlung zurückgezahlt werden. Wie hoch ist der Rückzahlungsbetrag, wenn der Zinssatz

a) 12.00 % p.a. **b)** 3.00 % p.q. **c)** 0.95 % p.m. beträgt?

d) Erläutern Sie anhand von a), b) und c) die Begriffe Zinsperiode und Gleichwertigkeit von Zinssätzen.

■ Aufgabe 2

Herr und Frau Scott nehmen für den Kauf eines Neuwagens einen Kredit von 24'000 Fr. auf. Der Kredit soll durch 4 Jahresraten in der Höhe von je 6'000 Fr. abgebaut werden. Der Jahreszinssatz beträgt im 1. und 2. Jahr 11.25%, im 3. und 4. Jahr 12.75%.

a) Stellen Sie einen Abzahlungsplan auf, und ermitteln Sie daraus die Restschuld nach Ablauf von 4 Jahren.

b) Führen sie die vier Variablen

K	Kreditbetrag in Fr.
R	Jahresrate in Fr.
q_1	Jahreszinsfaktor im 1. und 2. Jahr
q_2	Jahreszinsfaktor im 3. und 4. Jahr

ein, und stellen Sie eine Formel auf für die Restschuld nach Ablauf von 4 Jahren. Überprüfen Sie Ihre Formel anhand von a).

Kapiteltest 1 Serie B Lösungen

■ Lösung zu Aufgabe 1

a) $1.12^{4} \times 5'000 = 7'867.60$ Fr.

b) $1.03^{16} \times 5'000 = 8'023.53$ Fr.

c) $1.0095^{48} \times 5'000 = 7'871.79$ Fr.

d) Die Zinsperiode gibt an, in welchem zeitlichen Abstand verzinst wird. In a) wird jährlich, in b) vierteljährlich und in c) monatlich verzinst. Dies geht aus den Kürzeln p.a., p.q. und p.m. hervor, welche auf die Prozentzahlen folgen.

Die Zinssätze12% p.a. und 0.95% p.m. sind fast gleichwertig, weil sie annähernd gleiche Rückzahlungsbeiträge liefern. Der Zinssatz 3% p.q. dagegen ist nicht gleichwertig zu den beiden anderen Zinssätzen, da er einen höheren Rückzahlungsbeitrag ergibt.

Am Beispiel der Zinssätze 12% p.a. und 3% p.q. erkennt man, dass die «Regel» «ein Viertel der Zinsperiode = ein Viertel des Zinssatzes» nicht zutrifft.

■ Lösung zu Aufgabe 2

a)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zinssatz	Rückzahlung in Fr.
1. Jahr	24'000.00	11.25%	6'000.00
2. Jahr	20'700.00	11.25%	6'000.00
3. Jahr	17'028.75	12.75%	6'000.00
4. Jahr	13'199.92	12.75%	6'000.00
	8'882.90		

Die Restschuld nach 4 Jahren beträgt 8'882.90

b)

Zeitraum	Schuldenstand in Fr.	Zinssatz	Rückzahlung in Fr.
1. Jahr	K	q_1	R
2. Jahr	$q_1 K - R$	q_1	R
3. Jahr	$q_1^2 K - q_1 R - R$	q_2	R
4. Jahr	$q_2 q_1^2 K - q_2 q_1 R - q_2 R - R$	q_2	R
	$q_2^2 q_1^2 K - q_2^2 q_1 R - q_2^2 R - q_2 R - R$		

Die Restschuld nach 4 Jahren beträgt $q_2^2 q_1^2 K - q_2^2 q_1 R - q_2^2 R - q_2 R - R$.

Mit den Zahlen von a) ergibt sich

$$1.1275^2 \times 1.1125^2 \times 24'000 - 1.1275^2 \times 1.1125 \times 6'000 - 1.1275^2 \times 6'000 - 1.1275 \times 6'000 - 6'000$$
$$= 8'882.90 \text{ Fr.}$$

Für Kredite, die in Raten getilgt werden, gibt der Ausdruck

$$q^3\ K - q^2\ R - q\ R - R$$

die **Restschuld** nach der 3. Ratenzahlung an. Beide Aufgaben in diesem Kapiteltest befassen sich mit der Situation, dass diese Restschuld noch 50% des Kreditbetrages ausmacht. Zu dieser Situation gehört die Gleichung

$$q^3\ K - q^2\ R - q\ R - R = \frac{50}{100}\ K\ .$$

■ Aufgabe 1

Ist die Gleichung linear oder nichtlinear, wenn der Kreditbetrag K die Unbekannte ist?

- Begründen Sie Ihre Antwort durch eine passende Umformung. Wählen Sie dazu für R und q sinnvolle Zahlen.

■ Aufgabe 2

a) Die Gleichung ist nichtlinear, wenn der Zinsfaktor q die Unbekannte ist.

Setzen Sie K = 4'400 und R = 800 in die Gleichung ein, und vereinfachen Sie diese soweit als möglich. Wir möchten, dass Sie

$$5.5\ q^3 - q^2 - q - 3.75 = 0$$

erhalten.

- Geben Sie alle Umformungsschritte an.

b) Lösen Sie die Gleichung von a) durch planmässiges Probieren.

- Suchen Sie selber einen geeigneten Startwert für q.
- Wählen Sie selber die Schrittweiten für q.
- Rechnen Sie solange, bis Sie die **dritte** Nachkommastelle von q kennen.

■ Lösung zu Aufgabe 1

Wir wählen zum Beispiel $R = 500$ und $q = 1.02$. Dann lautet die Gleichung

$$1.02^3\ K - 1.02^2\ 500 - 1.02\ 500 - 500 = \frac{50}{100}\ K\ .$$

Wir vereinfachen .

$$\begin{aligned} 1.0612\ K - 1'530.2 &= 0.5\ K \\ 0.5612\ K - 1'530.2 &= 0 \\ 0.5612\ K &= 1'530.2 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat nun die Form «Zahl × Unbekannte = Zahl». Sie ist also linear.

■ Lösung zu Aufgabe 2

a) Für $K = 4'400$ und $R = 800$ lautet die Gleichung

$$q^3\ 4'400 - q^2\ 800 - q\ 800 - 800 = \frac{50}{100}\ 4'400\ .$$

Wir vereinfachen .

$$\begin{aligned} q^3\ 4'400 - q^2\ 800 - q\ 800 - 800 &= 2'200 \\ q^3\ 4'400 - q^2\ 800 - q\ 800 - 3'000 &= 0 \\ 5.5\ q^3 - q^2 - q - 3.75 &= 0 \end{aligned}$$

b) Wir starten mit $q=1$. Wir wählen die Schrittweite zunächst 1 und verkleinern sie dann in jedem Durchgang um das Zehnfache.

q	$5.5\ q^3 - q^2 - q - 3.75$	Vorzeichen
1	− 0.25	−
2	+ 34.25	+
1.1	+ 1.2605	+
1.01	− 0.1134	−
1.02	+ 0.0262	+

q	$5.5\ q^3 - q^2 - q - 3.75$	Vorzeichen
1.011	− 0.0996	−
1.012	− 0.0858	−
1.013	− 0.0719	−
1.014	− 0.0579	−
1.015	− 0.0440	−
1.016	− 0.0300	−
1.017	− 0.0160	−
1.018	− 0.0019	−
1.019	+ 0.0121	+

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen 1.018 und 1.019.

Bis zur dritten Nachkommastelle lautet die Lösung $\underline{\underline{q = 1.018}}$.

Für Kredite, die in Raten getilgt werden, gibt der Ausdruck

$$q^2 K - q R - R$$

die **Restschuld** nach der 2. Ratenzahlung an. Beide Aufgaben in diesem Kapiteltest befassen sich mit der Situation, dass diese Restschuld noch das 4.5 - fache einer Rate ausmacht. Zu dieser Situation gehört die Gleichung

$$q^2 K - q R - R = 4.5 R .$$

■ Aufgabe 1

Ist die Gleichung linear oder nichtlinear, wenn die Rate R die Unbekannte ist?

- Begründen Sie Ihre Antwort durch eine passende Umformung. Wählen Sie dazu für K und q sinnvolle Zahlen.

■ Aufgabe 2

a) Die Gleichung ist nichtlinear, wenn der Zinsfaktor q die Unbekannte ist.

Setzen Sie K = 9'000 und R = 1'440 in die Gleichung ein, und vereinfachen Sie diese soweit als möglich. Wir möchten, dass Sie

$$6.25 q^2 - q - 5.5 = 0$$

erhalten.

- Geben Sie alle Umformungsschritte an.

b) Lösen Sie die Gleichung von a) durch planmässiges Probieren.

- Suchen Sie selber einen geeigneten Startwert für q.
- Wählen Sie selber die Schrittweiten für q.
- Rechnen Sie solange, bis Sie die **vierte** Nachkommastelle von q kennen.

■ Lösung zu Aufgabe 1

Wir wählen zum Beispiel $K = 5000$ und $q = 1.02$. Dann lautet die Gleichung

$$1.02^2 \; 5'000 - 102 \; R - R = 4.5 \; R \; .$$

Wir vereinfachen .

$$\begin{aligned} 5'202 - 2.02 \; R &= 4.5 \; R \\ 5'202 - 6.52 \; R &= 0 \\ -6.52 \; R &= -5'202 \end{aligned}$$

Die Gleichung hat nun die Form «Zahl × Unbekannte = Zahl». Sie ist also linear.

■ Lösung zu Aufgabe 2

a) Für $K = 9'000$ und $R = 1'440$ lautet die Gleichung

$$q^2 \; 9'000 - q \; 1'440 - 1'440 = 4.5 \; 1'440 \; .$$

Wir vereinfachen .

$$\begin{aligned} q^2 \; 9'000 - q \; 1'440 - 1'440 &= 6'480 \\ q^2 \; 9'000 - q \; 1'440 - 7'920 &= 0 \\ 6.25 \; q^2 - q - 5.5 &= 0 \end{aligned}$$

b) Wir starten mit $q=1$. Wir wählen die Schrittweite zunächst 1 und verkleinern sie dann in jedem Durchgang um das Zehnfache.

q	$6.25 \; q^2 - q - 5.5$	Vorzeichen
1	− 0.25	−
2	+ 17.5	+
1.1	+ 0.9625	+
1.01	− 0.1344	−
1.02	− 0.0175	−
1.03	+ 0.1006	+

q	$6.25 \; q^2 - q - 5.5$	Vorzeichen
1.021	− 0.0057	−
1.022	+ 0.0060	+
1.0211	− 0.00457	−
1.0212	− 0.00339	−
1.0213	− 0.00221	−
1.0214	− 0.00104	−
1.0215	+ 0.00014	+

Der gesuchte Wert für q liegt zwischen 1.0214 und 1.0215.

Bis zur vierten Nachkommastelle lautet die Lösung $\underline{\underline{q = 1.0214}}$.

Quellen

Mathematische Schulbücher

Bürger Heinrich u.a.: Mathematik Oberstufe 2.
Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1. Auflage 1990. ISBN 3-209-00880-9.

Reichel Hans-Christian, u.a.: Lehrbuch der Mathematik 6.
Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 3. Auflage 1992. ISBN 3-209-00885-X.

Artikel aus mathematikdidaktischen Zeitschriften

Bender Peter: Ein Zugang zur Finanzmathematik für den Bürgergebrauch.
Der Mathematikunterricht (MU), Heft 6/1989, 4-27.

Hestermeyer Wilhelm: Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten.
Praxis der Mathematik (PM), Heft 3/1985, 129-145 (1. Teil), Heft 4/1985, 237-249 (2. Teil).

Kirsch Arnold: Der effektive Zinssatz bei Kleinkrediten.
Praxis der Mathematik (PM), Heft 3/1982, 65-71 (1. Teil), Heft 6/1982, 164-172 (2. Teil) und Heft 3/1983, 73-77 (3. Teil).

Gesetzesbestimmungen zum Kleinkreditwesen

Bundesgesetz über den Konsumkredit (KKG) vom 8. Oktober 1993.
Zu beziehen über die Eidgenössische Drucksachen- und Materialzentrale (EDMZ), 3000 Bern.

Kanton Zürich: Volksabstimmung vom 8. Dezember 1991 über das Kantonale Einführungsgesetz zum Schweizerischen Zivilgesetzbuch (EG zum ZGB), Änderung §§ 212 - 214b betreffend das Kreditwesen. Gesetzestext und Bericht des Regierungsrates für die Abstimmungszeitung.
Zu beziehen über die Staatskanzlei des Kantons Zürich, Neumühlequai 10, 8001 Zürich.
Der Bericht des Regierungsrates ist auf den Seiten 16/17 dieses Leitprogrammes abgedruckt.

Kanton Zürich: Verordnung über das Konsumkreditgewerbe vom 11. August 1993 gestützt auf §§ 212-214b EG zum ZGB.
Zu beziehen über die Staatskanzlei des Kantons Zürich, Neumühlequai 10, 8001 Zürich.

Leitprogramm-Methode

Frey Karl, u.a.: Manual für die Semesterarbeit: Leitprogramm (Fassung vom 25.03.92).
ETH, Institut für Verhaltenswissenschaft, Zürich 1992.
Zu beziehen über ETH Zürich, Institut für Verhaltenswissenschaft, ETH Zentrum, TUR 1, 8092 Zürich.

Die Ausbeutung des Blauwals

Klinowska, M.: Dolphins, Porpoises and Whales of the World. The IUCN Red Data Book.
IUCN, Gland, Switzerland and Cambridge, U.K., 1991. ISBN 2-88032-936-1.
Vorhanden beim WWF Schweiz, Projektabteilung, Hohlstr. 110, 8004 Zürich.

Der weltweite Abbau von Erdöl

Meadows Donella und Dennis, u.a.: Die neuen Grenzen des Wachstums.
Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 7. Auflage 1992. ISBN 3-421-06626-4.