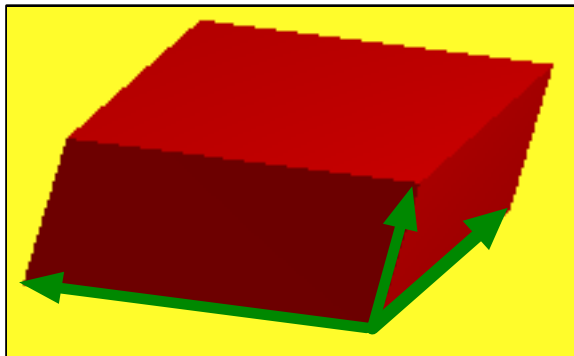


Volumen eines Spats

Eine Lernaufgabe zur Vektorgeometrie



Beschreibung

Die Schüler/-innen haben im Rahmen der Vektorgeometrie das Skalarprodukt und das Vektorprodukt erarbeitet und in verschiedenen Anwendungen erprobt. Insbesondere sind die beiden wesentlichen Eigenschaften des Vektorprodukts (Richtung als Normale und Betrag als Flächeninhalt) bekannt.

Die Lernaufgabe beinhaltet die selbständige Herleitung des Spatprodukts aus dem Skalar- und dem Vektorprodukt.

Mit Hilfe des Spatprodukts können die Schüler/-innen später verschiedene raumgeometrische Problemstellungen elegant lösen und sie erhalten einen einfachen geometrischen Zugang zum Begriff der 3-reihigen Determinante.

Fach:	Mathematik
Schule:	Gymnasium
Adressaten:	11. oder 12. Schuljahr
Bearbeitungsdauer:	45 Minuten
Autor/-innen:	H. Klemenz, M. Weisstanner
Schulerprobung:	Ja
Fassung vom:	Februar 2000
Projektleitung:	K. Frey, U. Kirchgraber, ETH Zürich

Download

Die Lernaufgabe steht Ihnen zur weiteren Bearbeitung im Word98-Format für Macintosh und als PDF-Format zur Verfügung.

Volumen eines Spats

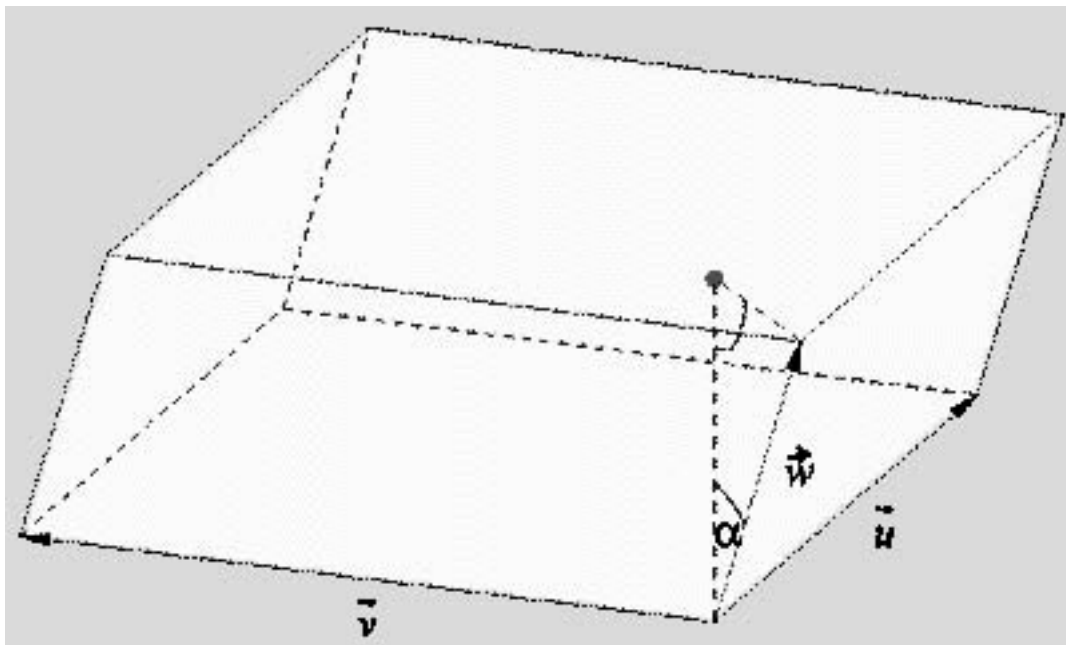
Eine Lernaufgabe zur Vektorgeometrie

In dieser Lernaufgabe werden Sie eine Formel kennen lernen, mit welcher man das Volumen eines Spats bestimmen kann. Sie wissen bereits, wie man das Spatvolumen durch eine Grundfläche und die zugehörige Höhe berechnet. Sie werden im folgenden lernen, wie man das Volumen ermittelt, wenn die drei den Spat aufspannenden Kantenvektoren gegeben sind.

Lösen Sie während der nächsten 25 Minuten die nachfolgenden Aufgaben der Reihe nach. So kommen Sie Schritt für Schritt auf die gesuchte Formel. Als Hilfsmittel dürfen Sie das Theorieheft verwenden. Wenn Sie bis zur 4. Aufgabe alle Schritte selbständig ausführen können, haben Sie das Lernziel erreicht. Die 5. Aufgabe ist eine zusätzliche Aufgabe, in welcher die in Aufgabe 4 gefundene Formel weiter untersucht wird.

Gegeben sind die Kantenvektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} eines Spats, s. Figur unten.

1. Schreiben Sie die Formel für das Volumen eines Spats ohne Vektoren auf.
2. Eine der beiden Größen in der Volumenformel können Sie unmittelbar mit Hilfe der gegebenen Vektoren ausdrücken. Wie sieht die Volumenformel dann aus?
3. Betrachten Sie die folgende Skizze. Drücken Sie die zweite vorkommende Grundgrösse mit Hilfe eines der gegebenen Vektoren und dem zunächst unbekannten Winkel α aus. Notieren Sie, wie die Formel für das Volumen bis dahin aussieht.



4. Entweder : a) Vereinfachen Sie die in Aufgabe 3 erhaltene Formel, so dass nur noch die drei gegebenen Vektoren vorkommen.

- Oder : b) Drücken Sie $\cos\alpha$ durch die gegebenen Vektoren aus und schreiben Sie schliesslich die Volumenformel so auf, dass sie möglichst kompakt ist und nur noch die drei gegebenen Vektoren enthält.
5. Untersuchen Sie folgende Frage. Stimmt das in Aufgabe 4 erhaltene Resultat auch noch, wenn man in der Formel die Vektoren \vec{u} und \vec{v} vertauscht?

Volumen eines Spats

Eine Lernaufgabe zur Vektorgeometrie

Lösungen

1. $V = G \cdot h$

2. $V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$

3. $\cos\alpha = \frac{h}{|\vec{w}|} \Rightarrow h = |\vec{w}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\alpha$

4. a) $V = (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \\ \cos\alpha = \frac{\vec{n} \bullet \vec{w}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{w}|} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}}{|\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

$$\Rightarrow V = (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$$

5. Nein, da dann das Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ und damit auch V das Vorzeichen wechselt.

Deshalb schreiben wir für das Volumen : $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}|$

Was ist bekannt?

- Skalarprodukt
- Vektorprodukt (Normale, Flächeninhalt)

Was lernen Sie?

- Volumenberechnung eines Spats

Wie gehen wir vor?

- Repetition Skalar- und Vektorprodukt (10 Min.)
- Lernaufgabe (25 Min.)
- Besprechung der Lernaufgabe (10 Min.)