Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mentorierte Arbeit in Fachwissenschaftlicher Vertiefung mit pädagogischem Fokus in Mathematik

zur

Spieltheorie

von

Andreas Bärtschi

Inhalt
Ziel dieser Arbeit ist es, mithilfe des Konzepts der Nash-Gleichgewichte einen Einblick in ein junges und interessantes Teilgebiet der Spieltheorie zu geben: der Ineffizienz von Gleichgewichten. Dabei werden insbesondere "Local Connection Games" betrachtet, ein Thema welches Anwendungen in der Analyse der Entstehung sozialer Netzwerke oder auch der Gestaltung effizienter P2P Netzwerke hat.

Zielpublikum
Lehrpersonen

Form
Lesetext mit Aufgaben und Lösungen

Voraussetzungen
Vorausgesetzt werden grundlegende Begriffe aus der diskreten Mathematik, insbesondere der Graphentheorie. Kenntnisse von Sätzen und Resultaten sind hingegen nicht vonnöten.

Betreuung
Prof. Dr. Norbert Hungerbühler

Datum
14. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Einführung **1**

1.1 Spieltheorie 2

1.2 Strategische Spiele 2

1.3 Soziales Optimum 4

1.4 Dominierende Strategien 5

1.5 Nash-Gleichgewichte 6

Kapitel 2: Ineffizienz von Gleichgewichten **9**

2.1 Didaktische Überlegungen 9

2.2 Ineffizienz von Gleichgewichten 11

Kapitel 3: Local Connection Games **12**

3.1 Einführung 12

3.2 NG und OPT 14

3.3 Preis der Stabilität 15

3.4 Preis der Anarchie 15

3.5 Schlusswort 16

Lösungen **17**

Kapitel 1: Einführung 17

Kapitel 2: Ineffizienz von Gleichgewichten 18

Kapitel 3: Local Connection Games 19

Literaturverzeichnis **21**

Kapitel 1

Einführung

Eine Einführung in das Konzept der Nash-Gleichgewichte sowie einige Bemerkungen zu deren Bedeutung.

Diese Arbeit möchte einen Einblick verschaffen in ein Teilgebiet der Spieltheorie. In einem ersten Kapitel erläutere ich das Konzept der Nash-Gleichgewichte. Zugunsten eines intuitiven Verständnisses und eines vertieften Einblickes in ein Anwendungsgebiet wird auf die Aufarbeitung der Theorie sowie auf Beweise weitgehend verzichtet. Ich verweise den Leser dabei auf [KSBB10a].
Im zweiten Teil der Arbeit geht es um didaktische Überlegungen sowie eine Betrachtung der Qualität dieser Nash-Gleichgewichte, respektive um ihre Ineffizienz in Bezug auf die sozialen Kosten.
Zuletzt wird die erarbeitete Theorie auf sogenannte "Local Connection Games" angewandt. Dabei werden auch Anwendungsgebiete genannt sowie die aktuellsten Resultate vorgestellt.

In allen drei Kapiteln werden einige Aufgaben gestellt; die Lösungswege finden Sie im letzten Teil dieser Arbeit.

1.1 Spieltheorie

Die Spieltheorie ist ein Forschungsgebiet, das sich im letzten Jahrhundert entwickelt hat. Ab 1970 entwickelte sich die Forschung in der Spieltheorie in verschiedene Richtungen, insbesondere in die evolutionäre Spieltheorie, die kombinatorische Spieltheorie und die algorithmische Spieltheorie [wik11b]. Letztere befasst sich sowohl mit dem Entwurf effizienter Algorithmen zur Lösung spieltheoretischer Problemstellungen als auch mit der Komplexität von Spielen [wik10]. Der dritte Teil dieser Arbeit bewegt sich deshalb im Bereich der algorithmischen Spieltheorie; davor werden jedoch noch einige Grundlagen behandelt, welche zur klassischen Spieltheorie gezählt werden können.

Obwohl die Spieltheorie ein junges Gebiet ist und oft auf einfachen Grundüberlegungen beruht, ist sie doch relevant und hat sowohl in der Soziologie wie auch in der Ökonomie und auch in technischen Anwendungen aktuelle Beiträge geleistet. Dies zeigt sich auch daran, dass bereits mehrere Spieltheoretiker mit Nobelpreisen ausgezeichnet wurden.

Der Name Spieltheorie kommt daher, dass ursprünglich vor allem Gesellschaftsspiele wie Mühle analysiert wurden. Unterdessen ist der Begriff jedoch auch formal definiert und damit auf weitere Situationen ausgedehnt worden:

> **Zitat:** "Bei einem Spiel im Sinne der Spieltheorie handelt es sich um ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Vorgängen, in denen mehrere Akteure gegenseitig die Ergebnisse ihrer Entscheidung beeinflussen." [wik11a]

Meistens nimmt man dabei an, dass die Spieler egoistisch sind und sich sowohl rational wie auch strategisch verhalten. Darüber hinaus spielt jeder Spieler für sich alleine und weiss, dass die anderen Spieler die oben genannten Punkte erfüllen (und dass diese wissen, dass er diese ebenfalls erfüllt, etc...)

1.2 Strategische Spiele

Am besten schauen wir uns gleich ein bekanntes Beispiel aus der Spieltheorie an: *Den Kampf der Geschlechter*.

Beispiel 1.1 (Kampf der Geschlechter) In dieser Spielsituation möchte ein Paar, sagen wir John und Alicia, einen gemeinsamen Abend verbringen. Leider haben beide unterschiedliche Vorstellungen, was ihr mögliches Abendprogramm betrifft. Während Alicia lieber in die Tonhalle an ein Klavierkonzert möchte, würde John gerne im Letzigrund den heutigen Fussballmatch anschauen (natürlich könnte es auch genau anders rum sein, das ändert aber nichts Grundlegendes an den folgenden Betrachtungen).
Selbstverständlich würden die Beiden den Abend am liebsten gemeinsam verbringen. Aber ebenso möchten John und Alicia auch ihr jeweilig bevorzugtes Abendprogramm besuchen. Sowohl John als auch Alicia müssen sich nun für eine der Optionen entscheiden. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass beide überzeugte Ökonomen sind; sie entscheiden sich also möglichst rational.
Als Mathematiker versuchen wir das Ganze in einem möglichst einfachen Schema zu veranschaulichen. Am besten geht dies in einer Tabelle, siehe Tabelle 1.1.

A / J	Fussball F	Konzert K
Fussball F	(3,2)	
Konzert K		(2,3)

Tabelle 1.1: Kampf der Geschlechter

Die Tabelle ermöglicht es, die möglichen *Strategieprofile* einfach zu analysieren. Nehmen wir zum Beispiel an, dass sich beide entschieden haben, die Tonhalle aufzusuchen. Dann sehen wir rot markiert das Ergebnis dieses Strategieprofils (K, K). Der *Nutzen* $u_J(K, K)$ *von John* entspricht dem ersten Eintrag in Zeile K, Spalte K. Hier beträgt der Nutzen 2, schliesslich ist er zwar zufrieden, dass er den Abend mit Alicia verbringen kann, allerdings wäre er lieber mit seiner Partnerin im Fussballstadion. Alicia hingegen ist rundum glücklich, also ist $u_A(K, K) = 3$.

Aufgabe 1.1 : Überlegen Sie sich, bevor Sie weiterlesen, wie Sie die Tabelle 1.1 sinnvoll vervollständigen könnten.

Wenn Sie die fehlenden zwei Einträge unterschiedlich ergänzt haben, so sind sie auf der richtigen Spur.

Wir beschränken uns im Folgenden darauf, Spiele zu analysieren und *Lösungen* für die Spiele zu finden. Was eine Lösung ist, ist a priori nicht klar - wir werden verschiedene Möglichkeiten kennenlernen, wie man eine Lösung definieren kann. Wie die Spieler eine dieser Lösungen auch erreichen können, bleibt uns jedoch fürs erste egal - Anleitungen dazu (also mathematisch ausgedrückt: Algorithmen) werden von der algorithmischen Spieltheorie geliefert. Um besser argumentieren zu können, definieren wir zuerst den kennengelernten Typ von Spielen[1]:

Definition 1.1 (Strategisches Spiel) Ein *Strategisches Spiel* erfüllt die folgenden Bedingungen:

- Es existieren n Spieler.
- Jeder Spieler i hat eine Menge von Strategien S_i zur Auswahl.
- $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ ist das kartesische Produkt der Strategiemengen über alle n Spieler.
- Für jeden Spieler existiert eine Nutzenfunktion (englisch: utility function)

$$u_i : S \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.1}$$
$$s \longmapsto u_i(s) \tag{1.2}$$

die angibt, wie sehr der Spieler i ein $s \in S$ schätzt.

[1] die folgenden Definitionen orientieren sich grösstenteils an [KSBB10b]

Damit können wir unsere getätigten Annahmen ausdrücken durch:

- Jeder Spieler kann unabhängig von den andern eine Strategie $s_i \in S_i$ wählen.
- Diese gewählten Strategien definieren ein Strategisprofil $s = (s_1, \ldots, s_n)$.
- Die Spieler kennen die Ergebnisse aller möglichen Strategieprofile.
- Die Spieler versuchen ihren Nutzen u_i durch geschickte Wahl von s_i zu optimieren.

Manchmal betrachtet man anstatt der Nutzenfunktion u_i die Kostenfunktion $cost_i$. Dem entsprechend versuchen die Spieler ihre Kosten $cost_i$ zu minimieren.

1.3 Soziales Optimum

Eine Analyse des Kampfs der Geschlechter ist recht einfach - der Leser wird sicher bereits vermuten, dass die Strategieprofile (K, K) und (F, F) im Vergleich zu den anderen beiden Profilen besser abschneiden. Ausserdem sind sie irgendwie gleichwertig oder symmetrisch. Wenn wir diese Beobachtungen formalisieren wollen, so tun wir das am besten indem wir die folgenden Funktionen definieren:

$$\begin{aligned} \textbf{Sozialer Nutzen} \qquad & SU : S \longrightarrow \mathbb{R} \\ & s \longmapsto SU(s) := \sum_{i=1}^{n} u_i(s) \\ \textbf{Soziale Kosten} \qquad & SC : S \longrightarrow \mathbb{R} \\ & s \longmapsto SC(s) := \sum_{i=1}^{n} cost_i(s) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 : Analysieren Sie mithilfe der eingeführten Begriffe das Spiel *Kampf der Geschlechter*.

Für eine erste einfache Betrachtung eines strategischen Spiels und seiner Strategieprofile genügt es, den sozialen Nutzen der einzelnen Strategieprofile zu betrachten. Somit führen wir das *soziale Optimum* ein:

Definition 1.2 (soziales Optimum) Ein *soziales Optimum* $s \in S$ ist ein Strategieprofil, welches den sozialen Nutzen maximiert, das heisst

$$s \in S \text{ ist ein soziales Optimum} \iff s \in \arg\max_{s' \in S} SU(s').$$

Für solch ein Optimum s schreiben wir kurz OPT.

Beachte: In einem Spiel kann es mehrere soziale Optima geben, wie wir in Aufgabe 1.2 gesehen haben. Ausserdem können wir auch dann von einem sozialen Optimum sprechen, wenn wir keine Nutzen-, jedoch eine Kostenfunktion haben. In diesem Fall gilt

$$s \in S \text{ ist ein soziales Optimum} \iff s \in \arg\min_{s' \in S} SC(s').$$

1.4 Dominierende Strategien

Ein soziales Optimum optimiert zwar denn Gesamtnutzen der Gesellschaft, trotzdem kann ein einzelner Spieler durchaus Interesse haben, das soziale Optimum zu vermeiden - wenn es denn zu seinem eigenen Nutzen ist. Dies sieht man sehr schön am *Gefangenendilemma*:

Beispiel 1.2 (Gefangenendilemma) Zwei Verbrecher werden nach einem Überfall bei der Fahndung geschnappt. Leider kann man Ihnen trotz aller Bemühungen den Raubüberfall nicht nachweisen, wohl aber illegalen Waffenbesitz. Da beide auf Bewährung sind, würden sie bei einem allfälligen Urteil 3 Jahre Gefängnis erhalten. Deshalb schlägt der Staatsanwalt beiden folgenden Deal vor:

- Gesteht einer der beiden, so erhält dieser als Kronzeuge nur 1 Jahr Gefängnis, der andere die vollen 8 Jahre für den Überfall.
- Gestehen beide Gefangenen, so wird ihre Strafe wegen Kooperation mit dem Gericht und Anzeichen von Reue von 8 auf 6 Jahre reduziert.

In Matrixform schreiben wir die Einträge als *Kosten* der Gefangenen (= Anzahl Jahre im Gefängnis). Dies sieht folgendermassen aus:

P_1 / P_2	gestehen g	schweigen s
gestehen g	(6,6)	(1,8)
schweigen s	(8,1)	(3,3)

Tabelle 1.2: Gefangenendilemma

Das soziale Optimum (hier wäre es vielleicht eher angebracht, von einem kriminellen Optimum zu schreiben) besteht eindeutig aus dem Strategieprofil (s, s). Für P_2 ist es nun vorteilhaft, zu gestehen, falls P_1 schweigt. Es gilt sogar: Für P_2 ist es auch dann vorteilhaft zu gestehen, wenn P_1 ebenfalls gesteht. Man spricht deshalb davon, das die Strategie g die Strategie s *strikt dominiert*.
Da die Situation für beide Spieler symmetrisch ist, endet dieser Deal für rationale Verbrecher folglich damit, dass beide Verbrecher für den Raubüberfall belangt und für 6 Jahre weggesperrt werden können.

Aufgabe 1.3 : In der Zeitung lesen wir fast täglich, dass es sehr schwierig ist, der Umweltverschmutzung Einhalt zu gebieten. Dies liegt unter anderem daran, dass (wie im Gefangenendilemma) für den einzelnen Spieler Motivation besteht, auf Kosten der Umwelt zu sparen.

Wir geben ein Beispiel an:

- **Spieler:** $n > 3$ Städte mit Meeresanschluss und Industrie

- **Strategien:**
  - R: Reglementierung der Entsorgung von Industrieabfällen
  - V: Hinnahme der Meeresverschmutzung durch die heimische Industrie

- **Kosten:** Sei k die Anzahl Städte, die auf eine Reglementierung verzichten. Dann entstehen Kosten von
  - 3 Mio. Franken für die Installierung von Kontrollmechanismen (für jede Stadt mit Strategie R), sowie
  - k Mio. Franken für Tourismusausfälle aufgrund verschmutzter Strände (für alle Städte, unabhängig von deren Strategie).

Analysieren Sie dieses Spiel. Was geschieht Ihrer Meinung nach in der Küstenregion, falls keine Verträge abgeschlossen werden, in welchen sich die Städte zur Reglementierung verpflichten?

Oftmals haben wir keine strikte Dominanz zwischen den verschiedenen Strategien eines Spielers und verschiedene Spieler müssen auch nicht zwingend über dieselben Strategien verfügen können. Deshalb müssen wir das Konzept der Dominanz noch erweitern oder abändern, um einen sinnvollen und realitätsnahen Begriff für Lösungen von Spielen zu finden.

1.5 Nash-Gleichgewichte

Der Nutzen eines Spielers wird durch zwei Faktoren bestimmt: die Gesamtheit der Strategien der anderen Spieler, sowie der Wahl der eigenen Strategie. Wir benötigen deshalb eine Notation, die diesen Faktoren gerecht wird.

Definition 1.3 (s_{-i}) Wir definieren

$$S_{-i} := S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$
$$S_{-i} \ni s_{-i} := (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Für jeden Spieler i bezeichnet s_{-i} den $(n-1)$-dimensionalen Vektor der Strategien der anderen Spieler. Somit können wir jedes Strategieprofil auch als $s = (s_i, s_{-i})$ schreiben, also als Vektor bestehend aus der Strategie des Spielers i und den Strategien der anderen Spieler.

Angenommen, die Spieler $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ hätten sich bereits auf ihre Strategien festgelegt, das heisst s_{-i} ist bekannt. Dann bestimmt der Spieler i den Ausgang des Spieles, indem er seine eigene Strategie s_i festlegt. Er wird diese so wählen, dass er unter den gegebenen Umständen am meisten Gewinn erzielt:

Definition 1.4 (Bestmögliche Antwort) Eine Strategie $s_i \in S_i$ ist eine *bestmögliche Antwort des Spielers i* auf (festgelegte) Strategien $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ genau dann, wenn

$$s_i \in \arg\max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, s_{-i}).$$

Spieler i kann also nichts besseres spielen als seine bestmögliche Antwort.

Betrachten wir nun alle möglichen Strategieprofile eines Spieles. Gilt für ein Strategieprofil s, dass für alle Spieler ihre gewählte Strategie eine bestmögliche Antwort ist (bezogen auf s_{-i}, die gewählten Strategien der anderen Spieler), so kann sich kein Spieler durch einseitiges Ändern seiner eigenen Strategie verbessern. So ein Strategieprofil nennen wir *Nash-Gleichgewicht*.

Definition 1.5 (Nash-Gleichgewicht) Ein Strategieprofil $s = (s_1, \ldots, s_n)$ ist ein *(reines) Nashgleichgewicht (NG)*, falls

$$\forall\ i : \forall\ s'_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}).$$

Aufgabe 1.4 : Überlegen Sie sich, weshalb die Definition des NG tatsächlich der gegebenen Beschreibung entspricht. Das heisst: Zeigen Sie, dass für ein Strategieprofil s gilt:

$$s \text{ ist ein NG} \iff \forall\ i :\ s_i \text{ ist eine bestmögliche Antwort auf } s_{-i}$$

Beispiel 1.3 (Münzvergleich) Es stellt sich die Frage, ob jedes strategische Spiel ein reines Nash-Gleichgewicht besitzt. Dies ist leider nicht der Fall, wie wir an folgendem Beispiel sehen:

- **Spieler:** 2 Spieler, P_1 und P_2, beide im Besitz einer Münze
- **Strategien:**
  - K: Der Spieler legt die Münze verdeckt mit "Kopf" nach oben auf den Tisch
  - Z: Der Spieler legt die Münze verdeckt mit "Zahl" nach oben auf den Tisch
- **Gewinner:**Die Münzen werden gleichzeitig aufgedeckt. Es gewinnt
  - P_1, falls beide Münzen "Kopf" zeigen oder falls beide Münzen "Zahl" zeigen.
  - P_2, falls die Münzen unterschiedlich auf dem Tisch liegen.

P_1 \ P_2	K	Z
K	(1,-1)	(-1,1)
Z	(-1,1)	(1,-1)

Die Spieler sind deshalb gezwungen, ihre Strategie zu variieren. In diesem Fall ist es für beide Spieler am besten, jede Strategie mit *Wahrscheinlichkeit 50 %* zu spielen. Damit weist dieses Spiel Ähnlichkeiten zum bekannten Spiel "Schere, Stein, Papier" auf, bei dem jede Strategie in $\frac{1}{3}$ der Fälle gespielt werden sollte.

Das Konzept der reinen Gleichgewichte kann also auf *gemischte Nash-Gleichgewichte* erweitert werden, in denen die Spieler ihre Strategien mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit spielen. Der wichtige Beitrag von John Nash zur Spieltheorie war sein Beweis der Existenz gemischter Nash-Gleichgewichte in jedem strategischen Spiel. Dem interessierten Leser seien als Literatur [KSBB10c] sowie diverse Onlineartikel zu den Suchbegriffen "Nash Equilibrium" und "Kakutani Fixpoint Theorem" empfohlen. Darüber hinaus finden Sie die originalen Beweise von John Nash in [Nas50] und [Nas51].

Kapitel 2

Ineffizienz von Gleichgewichten

Nash-Gleichgewichte können im Hinblick auf die sozialen Kosten sehr unterschiedlich ausfallen. Um dies zu erklären, betrachten wir auf der einen Seite eine weitere Erklärungsmöglichkeit der Nash-Gleichgewichte, auf der anderen Seite werden Begriffe zur Analyse der Ineffizienz von Gleichgewichten *eingeführt.*

2.1 Didaktische Überlegungen

Für die Einführung des gemischten Nash-Gleichgewichtes und den Beweis desselben sind grundlegende Kenntnisse in linearer Algebra (Vektoren, Matrixmultiplikation) sowie in der Analysis (Stetigkeit, Konvergenz, Konvexität, Abgeschlossenheit) vonnöten. Demgegenüber ist die Definition eines reinen Nash-Gleichgewichtes einfacher Natur und kommt ohne Vorkenntnisse aus.
Im Hinblick auf eine mögliche Behandlung des Themas im gymnasialen Unterricht wird in diesem Text auf die Verwendung von gemischten Gleichgewichten verzichtet; trotz dieses Verzichts können erstaunlich starke Aussagen und Resultate erzielt werden.

Trotzdem ist das Konzept eines Nash-Gleichgewichtes nicht intuitiv verständlich, wenn es direkt über seine Definition eingeführt wird. Auch die Verwendung von Beispielen ist nicht unbedingt hilfreich. Beispielsweise ist das Nash-Gleichgeicht im Fall des Gefangenendilemmas dasjenige Strategieprofil mit den *höchsten* sozialen Kosten:

P_1 / P_2	gestehen g	schweigen s
gestehen g	(6,6)	(1,8)
schweigen s	(8,1)	(3,3)

Tabelle 2.1: Hohe soziale Kosten im NG

Es wäre also für beide Parteien besser, nicht im Nash-Gleichgewicht (g, g) sondern im Strategieprofil (s, s) zu landen. Weshalb sollte so ein Zustand dann ein Gleichgewicht darstellen, wenn doch beide Spieler nachweislich mit dem Ergebnis nicht zufrieden sind?

In seinem Artikel "Wie erklärt man ein Nash-Gleichgewicht?" [Sch07] führt Uwe Schäfer deshalb den Begriff des "Schlichters" ein:

> **Zitat:** Durch die Kenntnis eines Nash-Gleichgewichts (s_1, s_2) kann eine dritte Person (nennen wir diese Person *Schlichter*) in einem Spiel, in dem keine Absprachen erlaubt sind, bzw. in einem Verhandlungsspiel, in dem die Verhandlungspartner miteinander zerstritten sind (und daher nicht miteinander reden), eine Einigung erreichen[1].

Im Beispiel des Gefangenendilemmas wäre der Schlichter ein geschickter Staatsanwalt: Dieser kann den Gefangenen P_1 in seiner Zelle aufsuchen und dessen Optionen erläutern (d.h. er zeigt dem Inhaftierten die Tabelle 2.1). Anschliessend erzählt er ihm, dass der Komplize P_2 bereits gestanden hat. In diesem Fall gibt es für P_1 keine bessere Strategie, als ebenfalls zu gestehen.
Dasselbe Spiel wiederholt der Staatsanwalt mit P_2. Da die Gefangenen in der Untersuchungshaft in getrennten Zellen inhaftiert sind, wissen sie nicht, ob der andere tatsächlich gestanden hat und werden deshalb gestehen (sofern sie nicht jeweils ein extrem hohes Mass an Vertrauen in ihren Komplizen haben). Dies erklärt auch die hohen Kosten der Gefangenen mit je 6 Jahren Haft:

> **Zitat:** Den Hauptnutzen aus der Kenntnis des Nash-Gleichgewichts (g, g) ziehen also nicht unbedingt die Spieler, sondern den zieht der Schlichter!

Nach dieser Bemerkung zu didaktischen Schwierigkeiten gehen wir dazu über, Gleichgewichtszustände auf ihre Qualität zu untersuchen. Dabei analysieren wir die Nash-Gleichgewichte in Bezug auf ihre sozialen Kosten.

[1] Zitate aus [Sch07] in leicht abgewandelter Form

2.2 Ineffizienz von Gleichgewichten

Unser allererstes Beispiel, der Kampf der Geschlechter, hatte je zwei Nash-Gleichgewichte und zwei soziale Optima (welche?). Im folgenden Spiel gibt es wiederum sowohl mehrere NG als auch mehrere OPT:

Aufgabe 2.1 : Finden Sie alle Nash-Gleichgewichte und alle sozialen Optima des Spiels in Tabelle 2.2 (die Einträge entsprechen den *Kosten* der Spieler).

P_2 / P_1	C	D	E
A	(7,7)	(10,15)	(8,8)
B	(8,17)	(10,11)	(1,13)

Tabelle 2.2: Ein Spiel mit mehreren ausgezeichneten Strategieprofilen

Wie man in Aufgabe 2.1 sieht, kann es folglich sowohl Nash-Gleichgewichte mit *hohen* als auch *tiefen* sozialen Kosten geben. Ein NG mit den *höchsten* sozialen Kosten nennen wir *schlechtestes NG*, ein NG mit den *tiefsten* sozialen Kosten nennen wir *bestes NG*. Anstatt solche Nash-Gleichgewichte direkt miteinander zu vergleichen, vergleichen wir sie ausserdem mit den Kosten eines sozialen Optimums.

Auf diese Art und Weise können wir nun Spiele analysieren: Für ein gegebenes Spiel schauen wir, wie böse oder wie gut das Spiel für die Spieler ausgehen kann, indem wir die folgenden Werte betrachten:

Definition 2.1 (Preis der Anarchie) Der *Preis der Anarchie* ist definiert als

$$PdA := \frac{SC(\text{schlechtestes NG})}{SC(\text{OPT})}.$$

Definition 2.2 (Preis der Stabilität) Der *Preis der Stabilität* ist definiert als

$$PdS := \frac{SC(\text{bestes NG})}{SC(\text{OPT})}.$$

Aufgabe 2.2 : Berechnen Sie den Preis der Anarchie und den Preis der Stabilität für das Spiel aus Aufgabe 2.1.

Aufgabe 2.3 : Beweisen Sie die folgende Ungleichungskette:

$$PdA \geq PdS \geq 1.$$

Kapitel 3

Local Connection Games

Ein Einblick in einen Spieltyp, der auf graphentheoretischen Grundlagen beruht. Anwendung der Preise der Stabilität und der Anarchie aus Kapitel 2.

3.1 Einführung

In den letzten 20 Jahren untersuchte man verschiedene Arten von Netzwerken spieltheoretisch auf ihre Entstehung und auf ihre möglichen Gleichgewichtszustände. Hier werden *Local Connection Games* vorgestellt, in welchen jeder Spieler für sich entscheiden muss, zu welchen anderen Spielern er Verbindungen aufbauen soll. Ein Spieler hat dabei zwei Interessen:

- die Baukosten zu minimieren
- die Distanzen zu den anderen Spielern zu minimieren

Beispiele hierfür sind die Entstehung sozialer Netzwerke sowie Peer-to-peer (P2P) Netzwerke, welche mit diesen Modell gut untersucht werden können. Wir konzentrieren uns

auf eine Betrachtungsweise, in der wir vereinfachend Folgendes festlegen:

- Alle möglichen Verbindungen kosten gleich viel.
- Jeder Spieler kann eine Verbindung zu jedem anderen Spieler aufbauen.
- Wir betrachten die Summe aller Distanzen zu den anderen Spielern. Deshalb sprechen wir auch von SumGames.

Definition 3.1 (Local Connection Game) Sei G ein Graph mit n Knoten. Ein *Local Connection Game* erfüllt die folgenden Bedingungen:

- Es existieren n Spieler (die Knoten).
- Jeder Spieler i kann eine Teilmenge aller zu ihm inzidenter Kanten kaufen, das heisst
$$S_i = \{ A \mid A \subseteq \{ \{i, j\} \mid j \neq i\} \} .$$
- Jede Kante hat Kosten von α für jeden möglichen Käufer zur Folge. Die Kosten können nicht aufgeteilt werden.
- $G(s) = (V, E(s)) = (V, E)$ bezeichnet den Graphen eines Strategieprofils s.
- Jeder Spieler i trägt die Kosten seiner gekauften Kantenmenge A und die Kosten seiner Netzwerkverbindungsqualität, das heisst
$$cost_i(s) = \alpha \cdot |A| + \sum_j \text{dist}\,\{i, j\}.$$

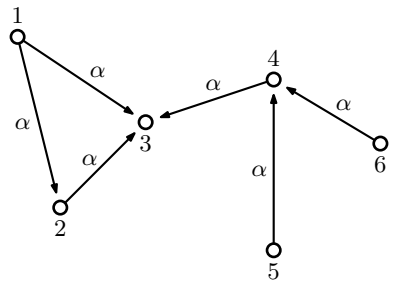

Abbildung 3.1: Der Graph eines Strategieprofils

In der Abbildung 3.1 zeigt die Pfeilrichtung an, welcher Spieler die Kante gekauft hat. $G(s)$ selbst ist ungerichtet, jede Kante kann also in beide Richtungen benutzt werden. Exemplarisch berechnen wir die Kosten des Spielers 1:

$$\begin{aligned} cost_1(s) &= \alpha \cdot |A| + \sum_j \text{dist}\,\{i, j\} \\ &= 2\alpha + \text{dist}\,\{1, 2\} + \text{dist}\,\{1, 3\} + \text{dist}\,\{1, 4\} + \text{dist}\,\{1, 5\} + \text{dist}\,\{1, 6\} \\ &= 2\alpha + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 = 2\alpha + 10 \end{aligned}$$

Beachte: Ist der Graph nicht verbunden, so existiert für jeden Spieler i mindestens ein Spieler j, der nicht erreicht werden kann, und es gilt $\text{dist}\{i,j\} = \infty$.

Aufgabe 3.1 : Berechne die Kosten der anderen Spieler sowie die sozialen Kosten

$$SC(s) = \sum_{i=1}^{n} cost_i(s).$$

Die folgenden Abschnitte orientieren sich stark an der Vorlesung *Algorithmic Game Theory* an der ETH Zürich ([WM08], [KSBB10d]).

3.2 NG und OPT

Wir möchten im Local Connection Game / SumGame wiederum Nash-Gleichgewichte und Optima bestimmen. Als erstes untersuchen wir die sozialen Kosten eines beliebigen Strategieprofils s. Dabei unterscheiden wir, ob zwei Spieler i, j Nachbarn sind (das heisst, sie sind durch eine Kante verbunden), oder ob sie eine grössere (≥ 2) Distanz zueinander haben. Wir sagen NB sei die Menge aller Nachbarpaare. Beachten Sie ferner, dass eine Kante auf dem kürzesten Weg von i nach j immer doppelt gezählt wird: Einmal durch $\text{dist}\{i,j\}$ und einmal durch $\text{dist}\{j,i\}$.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
SC(s) &= \alpha \cdot |E| \quad + \sum_{i,j} \text{dist}\{i,j\} \\
&= \alpha \cdot |E| \quad + \sum_{\{i,j\} \in NB} \underbrace{\text{dist}\{i,j\}}_{=1} \quad + \sum_{\{i,j\} \notin NB} \underbrace{\text{dist}\{i,j\}}_{\geq 2} \\
&\overset{(*)}{\geq} \alpha \cdot |E| \quad + \underbrace{\sum_{\{i,j\} \in NB} 1}_{} \quad + \underbrace{\sum_{\{i,j\} \notin NB} 2}_{} \\
&= \alpha \cdot |E| \quad + \quad 2 \cdot |E| \cdot 1 \quad + \quad 2 \cdot (\underbrace{n(n-1)}_{\#\text{Paare von Spielern}} \quad - \quad \underbrace{2|E|}_{\#\text{Nachbarpaare}} \quad) \\
&= |E| \cdot (\alpha - 2) + 2n(n-1)
\end{aligned}$$

OPT
Da ein soziales Optimum die Kosten minimiert und $SC(s)$ nach obiger Berechnung von unten beschränkt ist, muss für ein Optimum in der Ungleichung $(*)$ Gleichheit gelten! Das bedeutet aber, dass alle Paare von nicht-benachbarten Spielern Distanz 2 haben müssen! Ausserdem ergibt eine Betrachtung des Terms $|E| \cdot (\alpha - 2)$, dass die sozialen Kosten für ein $\alpha \leq 2$ am kleinsten sind, wenn viele Kanten gebaut werden und für ein $\alpha \geq 2$ am kleinsten sind, wenn möglichst wenig Kanten gebaut werden. Damit erhalten wir die Fälle

$\alpha < 2$: s ist OPT $\iff$ $G(s)$ ist ein vollständiger Graph K_n.

$\alpha > 2$: s ist OPT $\iff$ $G(s)$ ist ein Stern-Graph S_{n-1}.

$\alpha = 2$: s ist OPT $\iff$ $G(s) = S_{n-1}$ oder $G(s) = K_n$.

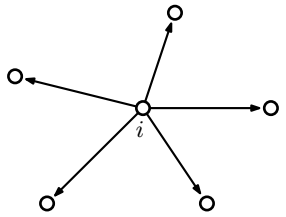

Abbildung 3.2: Der Stern-Graph S_5

NG
Es gilt:

$\alpha \leq 1$: $G(s)$ ist ein vollständiger Graph $K_n \Longrightarrow s$ ist ein NG.

$\alpha \geq 1$: $G(s)$ ist ein Stern-Graph $S_{n-1} \Longrightarrow s$ ist ein NG.

Im zweiten Fall gibt es mehrere Nash-Gleichgewichte, für unsere Zwecke genügt es, sich auf den Stern-Graphen zu beschränken.

Aufgabe 3.2 : Beweisen Sie die behaupteten Nash-Gleichgewichte.

3.3 Preis der Stabilität

Anstatt den Preis der Stabilität genau zu bestimmen, schätzen wir ihn ab. Selbst mit einer einfachen Abschätzung können wir den PdS sehr gut eingrenzen. Aus den Beschreibungen für OPT und NG in Local Connection Games folgt sofort der die erste Behauptung aus

Theorem 3.1 (*PdS* in SUMGAME)

In Local Connection Games mit summierten Distanzkosten gilt

- *Ist $\alpha \leq 1$ oder $\alpha \geq 2$, so ist $PdS = 1$*
- *Ist $1 < \alpha < 2$, so ist $PdS \leq \frac{4}{3}$*

Aufgabe 3.3 : Versuchen Sie die zweite Aussage zu zeigen. Verwenden Sie dabei die Beschreibungen für OPT und NG sowie die Tatsache, dass für Graphen mit Durchmesser 2 (also vollständige Graphen und Stern-Graphen) $SC(s) = |E| \cdot (\alpha - 2) + 2n(n-1)$ gilt.

3.4 Preis der Anarchie

Es ist bedeutend schwieriger, eine Aussage über den Preis der Anarchie zu machen, als über den Preis der Stabilität. Es genügt nämlich nicht, ein bestimmtes Gleichgewicht zu betrachten, man muss auch zeigen, dass dieses das schlechtestmögliche Nash-Gleichgewicht ist. Deshalb gibt es zwei Arten, wie der Preis der Anarchie abgeschätzt

werden kann:

- Es werden Betrachtungen über den Graphen eines *beliebigen* Nash-Gleichgewichtes angestellt. Da ein NG betrachtet wird, darf es für keinen Spieler möglich sein, neue Kanten zu bauen oder alte wegzulassen und somit seine Kosten zu verkleinern. Analysieren kann man dabei graphentheoretische Konstrukte wie den Durchmesser eines Graphen oder Schnitte eines Graphen.
- Man zeigt, dass alle Nash-Gleichgewichte eines Graphen vom selben Typ sind (beispielsweise: alle NG haben als Graphen einen Stern-Graph.

Beide Methoden funktionieren in der Regel aber nur, wenn man Annahmen über die Grösse von α anstellt. Eine Anwendung des ersten Typs für $\alpha \in \mathcal{O}(\sqrt{n})$ findet man in [KSBB10d], eine Anwendung des zweiten Typs für $\alpha > 273n$ in [MS10]. Über alle bekannten Resultate hinweg betrachtet ergibt sich folgendes Bild: Für fast alle α ist der Preis der Anarchie konstant! Eine Zusammenstellung der Resultate liefert die folgende Tabelle (wiederum aus [MS10]):

$\alpha = 0$	1	2	$\sqrt[3]{n/2}$	$\sqrt{n/2}$	$O(n^{1-\epsilon})$	$273n$	$12n \lg n$	∞
PdA	1	$\leq \frac{4}{3}$	≤ 4	≤ 6	$\Theta(1)$	$2^{\mathcal{O}(\sqrt{\log n})}$	< 5	≤ 1.5

Abbildung 3.3: Der PdA ist fast immer konstant!

3.5 Schlusswort

Local Connection Games bieten somit eine gute Gelegenheit, das Konzept der Nash-Gleichgewichte von einfachen Tabellen-Betrachtungen auf komplexere Probleme zu erweitern. Dies ermöglicht beispielsweise eine vertiefte Betrachtung des Themas im Unterrricht, ohne das sehr theoretische Teilgebiet der gemischten Strategien anzuschneiden. Ausserdem verschaffen Local Connection Games einen Einblick in die Graphentheorie, der auch einen Bezug zu aktuellen und unter Schülerinnen und Schülern verbreiteten Alltagsthemen wie P2P-Netzwerken herstellt.
Diskussionen über die Funktionsweise und die technischen Herausforderungen solcher Netzwerke könnten im fächerübergreifenden Unterricht auch mit ethischen und rechtlichen Aspekten verbunden werden. Dadurch wird Mathematik als Teil des Lebens erfahr- und für die Schüler und Schülerinnen greifbar.

Lösungen

Lösungen zu den Aufgaben der vorhergehenden Kapitel.

Kapitel 1: Einführung

Aufgabe 1.1: John und Alicia sollten sicher weniger zufrieden sein, als bei einem gemeinsamen Abendprogramm, allerdings ist es ihnen trotzdem nicht völlig egal, wo sie sich befinden. Eine mögliche Lösung wäre deshalb $(F, K) \to (1, 1)$, $(K, F) \to (0, 0)$, womit sich folgende Tabelle ergibt:

A / J	Fussball F	Konzert K
Fussball F	(3,2)	(1,1)
Konzert K	(0,0)	(2,3)

Tabelle 4.1: Eine mögliche Lösung

Aufgabe 1.2: In Tabelle 4.1 sind bereits die Nutzen der Spieler eingetragen. Somit können wir wie in Tabelle 4.2 ersichtlich für jedes Strategieprofil den sozialen Nutzen berechen: Der grösste soziale Nutzen ergibt sich also für die Strategieprofile (F, F) und (K, K). Diese Strategieprofile nennt man deshalb auch *soziales Optimuum*.

Aufgabe 1.3: Jeder der reglementierenden Städte entstehen Kosten von insgesamt $3 + k$ Mio. Franken. Jede andere Stadt muss k Mio. Franken aufwenden. Was würde es eine Stadt kosten, ihre Strategie zu ändern?

Strategieprofil s	$u_J(s)$	$u_A(s)$	$SU(s)$
(F, F)	3	2	5
(F, K)	1	1	2
(K, F)	0	0	0
(K, K)	2	3	5

Tabelle 4.2: Sozialer Nutzen für die Strategieprofile

- Bei einem Verzicht auf Reglementierungen hat eine Stadt neu Kosten von $(k+1)$ Mio. Franken, erzielt also Einsparungen von 2 Millionen!
- Gleichermassen müsste eine Stadt, die bereits auf Reglementierungen verzichtet, denselben Betrag aufwenden, um Reglementierungen einzuführen und umzusetzen.

Da V offenbar eine strikt dominierende Strategie ist, werden alle n Städte auf eine Reglementierung verzichten und Kosten in Höhe von n Mio. Fr. aufwenden müssen. Man beachte, dass die sozialen Kosten dieses Strategieprofils (nämlich: n^2 Mio. Franken im Falle $(V, V, \ldots, V)$) ungleich höher sind als beim sozialen Optimum mit $3n$ Mio. Franken.
Das Spiel kann man auch als Erweiterung des Gefangenendilemmas auf n Spieler auffassen.

Aufgabe 1.4: Wir setzen jeweils die Definitionen für *bestmögliche Antwort* und *Nash-Gleichgewicht* ein:

"$\Rightarrow$"
Schreibe $s = (s_i, s_{-i})$ für einen beliebigen Spieler i. Falls s_i keine bestmögliche Antwort auf s_{-i} ist, so existiert ein s_i' mit $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$. Dann ist s aber kein Nash-Gleichgewicht. $\lightning$

"$\Leftarrow$"

$$\forall\, i:\ s_i \in \arg\max_{s_i' \in S_i} u_i(s_i', s_{-i}) \quad \Rightarrow \quad \forall\, i:\ \forall\, s_i' \in S_i:\ u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}),$$

also ist s ein Nash-Gleichgewicht.

Kapitel 2: Ineffizienz von Gleichgewichten

Aufgabe 2.1: Als erstes betrachten wir die sozialen Kosten der Strategieprofile. Dies ergibt:

$$SC(A, C) = 14 \qquad SC(A, D) = 25 \qquad SC(A, E) = 16$$
$$SC(B, C) = 25 \qquad SC(B, D) = 21 \qquad SC(B, E) = 14$$

OPT
Folglich sind (A, C) und (B, E) soziale Optima.

NG
(A, C) *ist ein Nash-Gleichgewicht:*
Spieler P_1 hat kein Interesse, auf das Strategieprofil (B, C) auszuweichen. Dies wäre aber die einzige Option, die P_1 besitzt, um das Ergebnis des Spieles zu ändern. Gleichermassen verschlechtert sich P_2 nur, wenn er von seiner Strategie C auf E oder D wechseln würde. Deshalb ist (A, C) ein NG.

(B, D) *ist ein Nash-Gleichgewicht:*
Wie vorhin kann sich P_2 durch einseitigen Wechsel der Strategie nur verschlechtern. Wenn P_2 die Strategie D spielt, so ist es für P_1 unerheblich, welche Strategie er wählt. Da A keinen Vorteil gegenüber B bietet, ist (B, D) ein NG.

Aufgabe 2.2: Die sozialen Kosten des Optimums belaufen sich auf 14, diejenigen des NG (A, C) auf ebenfalls 14 gegenüber 21 für (B, D). Daraus folgt

$$PdA = \frac{SC(\text{schlechtestes NG})}{SC(\text{OPT})} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} \qquad PdS = \frac{SC(\text{bestes NG})}{SC(\text{OPT})} = \frac{14}{14} = 1.$$

Aufgabe 2.3: Aus $SC(\text{schlechtestes NG}) \geq SC(\text{bestes NG})$ folgt $PdA \geq PdS$. Da OPT die sozialen Kosten minimiert, gilt $SC(\text{bestes NG}) \geq SC(\text{OPT})$ und deshalb auch der zweite Teil $PdS \geq 1$.

Kapitel 3: Local Connection Games

Aufgabe 3.1: Wir erhalten:

$$cost_2(s) = \alpha + 10 \qquad cost_3(s) = 7 \qquad cost_4(s) = \alpha + 7$$
$$cost_5(s) = \alpha + 11 \qquad cost_6(s) = \alpha + 11 \qquad SC(s) = 6\alpha + 56$$

Aufgabe 3.2: Es gilt:

$\alpha \leq 1$: Sei $G(s)$ ein vollständiger Graph.
Wir nehmen an, ein Spieler i lösche die Kante zu einem seiner Nachbarn. Dadurch spart i die Baukosten $\alpha \leq 1$, erhöht aber gleichzeitig seine Distanz zu diesem NAchbarn um mindestens 1. Da deshalb kein Spieler motiviert ist, seine Strategie zu ändern, ist s ein NG.

$\alpha \geq 1$: Sei $G(s)$ ist ein Stern-Graph.
Der Spieler im Zentrum möchte sicher nicht einseitig seine Strategie ändern. Kauft er eine zusätzliche Kante, so sinken seine Distanzkosten um maximal 1 während seine Baukosten um $\alpha \geq 1$ steigen. Löscht er hingegen eine Kante, so ist der Graph nicht mehr verbunden un es existiert für jeden Spieler i ein Spieler j mit $\text{dist}\{i, j\} = \infty$.
Für einen Spieler am Rand gelten dieselben Überlegungen.

Aufgabe 3.3: Da $\alpha < 2$ ist der Graph eines Optimums ein vollständiger Graph und es

gilt

$$\begin{aligned} SC(\text{OPT}) &= |E| \cdot (\alpha - 2) + 2n(n-1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \cdot (\alpha - 2) + 2n(n-1) \\ &= n(n-1) \cdot \frac{\alpha + 2}{2} \end{aligned}$$

Da $\alpha > 1$ ist ein Strategieprofil s mit $G(s) = S_{n-1}$ ein NG und es gilt

$$\begin{aligned} SC(\text{bestes NG}) &\leq SC(s) \\ &= |E| \cdot (\alpha - 2) + 2n(n-1) \\ &= (n-1) \cdot (\alpha - 2) + 2n(n-1) \\ &= (n-1) \cdot (2n + \alpha - 2) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} PdS = \frac{SC(\text{bestes NG})}{SC(\text{OPT})} &\leq \frac{(n-1) \cdot (2n + \alpha - 2)}{n(n-1) \cdot \frac{\alpha+2}{2}} \\ &\leq \frac{4n + 2\alpha - 4}{n(\alpha + 2)} < \frac{4n}{n(\alpha + 2)} \\ &< \frac{4n}{n \cdot 3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

Quellen: Bücher, Artikel, Websites.

[KSBB10a] Sacha Krug, Lovro Soldo, Andreas Bärtschi, and Dan Bühler., *Algorithmic Game Theory (Lecture Notes for the AGT course by Peter Widmayer and Matúš Mihalák)*, Online version, September 10th 2010, `http://agt08.origo.ethz.ch/download/2078`.

[KSBB10b] _____, *Algorithmic Game Theory (Lecture Notes for the AGT course by Peter Widmayer and Matúš Mihalák)*, Online version, September 10th 2010, `http://agt08.origo.ethz.ch/download/2078`, pp. 11–14.

[KSBB10c] _____, *Algorithmic Game Theory (Lecture Notes for the AGT course by Peter Widmayer and Matúš Mihalák)*, Online version, September 10th 2010, `http://agt08.origo.ethz.ch/download/2078`, pp. 21–27.

[KSBB10d] _____, *Algorithmic Game Theory (Lecture Notes for the AGT course by Peter Widmayer and Matúš Mihalák)*, Online version, September 10th 2010, `http://agt08.origo.ethz.ch/download/2078`, pp. 60–65.

[KSBB10e] _____, *Algorithmic Game Theory (pictures)*, Pictures with permission by Dan Bühler, September 10th 2010, `http://agt08.origo.ethz.ch/download/2078`.

[MS10] Matúš Mihalák and Jan Christoph Schlegel, *The Price of Anarchy in Network Creation Games Is (Mostly) Constant*, Tech. Report 675, Departement of Computer Science, ETH Zurich, Switzerland, 2010.

[Nas50] John Nash, *Equilibrium points in n-person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences **36** (1950), 48–49.

[Nas51] ———, *Non-Cooperative Games*, The Annals of Mathematics **54** (1951), 286–295.

[Nis07] N. Nisan, *Algorithmic game theory*, Cambridge University Press, 2007.

[Sch07] Uwe Schäfer, *Wie erklärt man ein Nash-Gleichgewicht?*, Elemente der Mathematik **62** (2007), 1–7.

[wik10] *Algorithmische Spieltheorie*, Online, aktualisiert am, 3. November 2010, `http://de.wikipedia.org/wiki/Algorithmische_Spieltheorie`.

[wik11a] *Spiel (Spieltheorie)*, Online, aktualisiert am, 30. Januar 2011, `http://de.wikipedia.org/wiki/Spiel_(Spieltheorie)`.

[wik11b] *Spieltheorie*, Online, aktualisiert am, 30. Januar 2011, `http://de.wikipedia.org/wiki/Spieltheorie#Weitere_Entwicklung`.

[WM08] Peter Widmayer and Matúš Mihalák, *Algorithmic Game Theory*, Vorlesung, Herbstsemester 2009, Herbstsemester 2008.