

Man stelle sich eine Billardkugel auf einem schönen, grossen Billardtisch vor, nehme in Gedanken eine Queue zur Hand und stosse die Kugel in irgendeine Richtung an. Wie rollt sie weiter? – So stellt sich das mathematische Billardproblem dar.

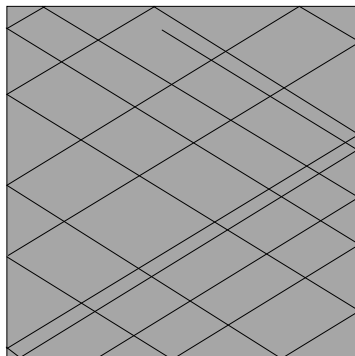
Für die Untersuchung schrumpft die Kugel allerdings auf einen Punkt. Von Reibung ist keine Rede und der Rückstoss an der Bande geschieht zu 100 Prozent nach dem Reflexionsgesetz. Als Entschädigung für diese Vereinfachungen braucht der Tisch aber nicht rechteckig zu sein.

Gibt es nun zum Beispiel Bahnen, die sich irgendwann einmal wiederholen?

MathematikerInnen studieren dieses Problem im Rahmen der Theorie der dynamischen Systeme. Wegen seiner Einfachheit eignet es sich dafür, Erkenntnisse zu gewinnen oder zu überprüfen. Das Problem ist übrigens keineswegs abschliessend gelöst. Die Bahnen in Dreiecken beispielsweise sind noch nicht ausgelotet [Berger].

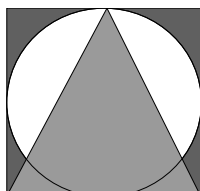
Mathematisches Billard

Zwei Vorschläge zu projektartigem Unterricht



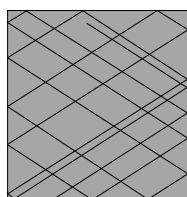
Zwei Vorschläge zu projektartigem Unterricht

Was ist mathematisches Billard? Wozu mathematisches Billard? Eine Antwort auf diese Fragen findet sich auf dem Titelblatt und den nachfolgenden Seiten. Zunächst aber soll eine kurze Inhaltsangabe zeigen, welche konkreten Vorschläge dieser Bericht anbietet. Jedem Vorschlag ist dann ein Kapitel gewidmet, in dem man nähere Angaben zur Projektorganisation findet sowie eine Beschreibung von möglichen Resultaten der Projektarbeit.



Elementargeometrische Untersuchungen

Ein "Denk-Projekt" für 4 - 12 Lektionen. Die SchülerInnen beantworten die Frage nach periodischen Bahnen selbständig mit Hilfe von geometrischen Skizzen und elementargeometrischem Wissen. Seite 1



"Computer Aided Mathematical Billard"

Ein "Kreativ-Projekt" für 4 - 8 Lektionen. Die SchülerInnen lernen das mathematische Billard als dynamisches System kennen. Als Hilfsmittel steht im Internet eine geeignete Software zur Verfügung. Seite 2

Die Materialien wurden im Rahmen des Valbella-Workshops im Herbst 1997 von M. Bettinaglio und F. Lehmann ausgearbeitet. Die Autoren haben die Vorschläge in ihrem Unterricht je ein Mal erprobt. Die Herstellung dieses Berichtes wurde gefördert durch die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) und das Programm „ETH für die Schule“.

*Marco Bettinaglio
MNG Rämibühl Zürich
mbettinaglio@borox.ch*

*Ferdinando Lehmann
Liceo Cantonale Bellinzona
lehmann@lba.lic.tiedu.ch*

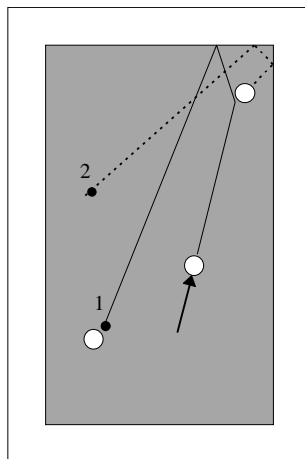
Einführung

Es ist bestimmt keine schlechte Idee, das Studium des mathematischen Billards mit einer Partie echtem Billard zu beginnen. Man spielt es auf schweren Tischen, deren Fläche meist mit grünem Samt ausgeschlagen ist und von einer breiten Bande umrandet wird.

Auf der Spielfläche werden drei Kugeln plziert, eine rote und für jeden der beiden Spieler eine weisse Kugel. – Das Spiel kann beginnen. Die Spielerin nimmt einen langen Stab, die Queue, reibt die Spitze mit Kreide ein, setzt sie vor ihre Kugel, hält einen Moment inne und stösst sie an. Die Kugel rollt lautlos fort, trifft mit einem Klacken auf die andere weisse Kugel, prallt an der Bande zurück, verlangsamt ihren Lauf und touchiert – nun beinahe ohne Geräusch – die dritte, rote Kugel. Einen Moment später stehen alle Kugeln wieder still.

Voilà!

Die Spielerin hat das Problem gelöst, das sich beim Billard in unzähligen Varianten stellt: Ihr ist eine sogenannte Carambolage gelungen:



Könnte man dieses Problem auch durch *Rechnen* lösen?

Dazu müsste man jedenfalls die folgende Grundaufgabe bewältigen können:

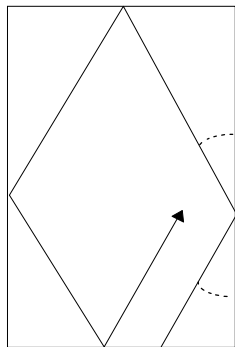
Man setzt eine einzige Kugel auf den Billardtisch und stösst sie irgendwie an. Kann man ihre Bewegung vorausberechnen?

Das ist eine komplizierte physikalische Fragestellung, wenn man alle Effekte berücksichtigen will, die eine Rolle spielen!

Das mathematische Billard im Vergleich zum realen

So wie es ein mathematisches Pendel neben dem physikalischen gibt, gibt es auch ein mathematisches Billard neben dem echten. Es beruht auf folgenden Vereinfachungen:

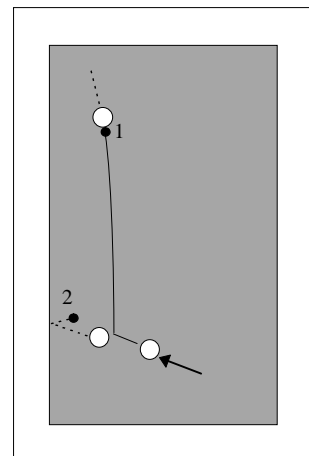
Der Tisch wird durch ein Rechteck ersetzt, seine Bande durch den Rand der Fläche. Aus der Kugel wird ein Punkt. Auch die Bewegung kommt nicht ungeschoren davon. Sie besteht ganz aus geradlinigen Stücken. Und schliesslich gilt beim Aufprall auf die Bande das Reflexionsgesetz: Zwei aufeinanderfolgende Bahnstücke bilden mit der Bande den selben Winkel.



Dieses Modell berücksichtigt wichtige Effekte des realen Billard nicht.

Reibung fehlt. Das hat zur Folge, dass im mathematischen Billard die Kugel nie zum Stillstand kommt.

Der sogenannte "Effet" fällt weg. Wenn eine Kugel über den Billardtisch rollt, dann dreht sie sich wie ein Rad um eine Achse. Stösst man mit der Queue genau zur Mitte der Kugel hin, dann liegt diese Achse wie bei einem Rad horizontal und die Kugel rollt auf einem Umfang ab. Stösst man sie aber etwas neben dem Zentrum an, dann richtet sich die Drehachse auf. Die Kugel rollt auf einem kleinen Kreis, einem Fass vergleichbar, das in schiefer Lage über den Boden gerollt wird. Das hat einen grossen Einfluss auf die Bahn. Sie wird mehr oder weniger krummlinig. Vor allem aber setzt der "Effet" das Reflexionsgesetz ausser Kraft.

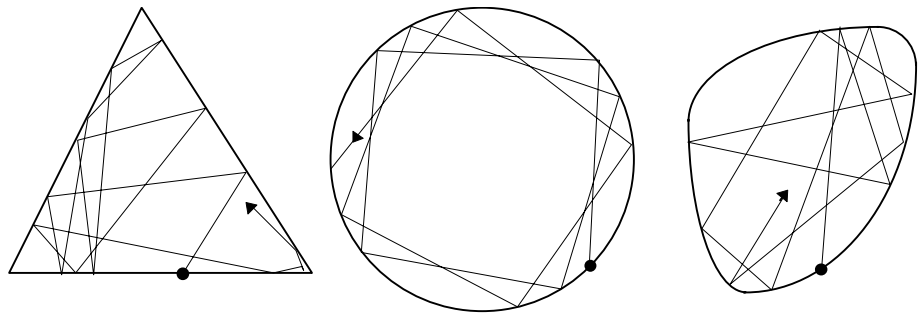


Gewiefte Billardspieler nutzen den "Effet" in hohem Masse aus, um ihre Kunststücke zu vollbringen. An Billard-Wettbewerben hätte man also wenig Chancen, wenn man den "Effet" nicht berücksichtigen wollte.

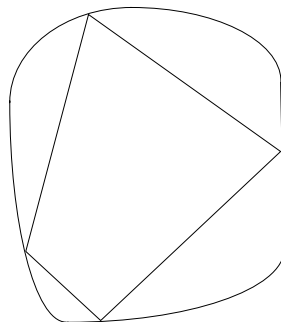
Mathematisches Billard ist in diesem Sinne eine eher akademische Angelegenheit und bietet kein befriedigendes Modell des realen Billard. Aber es ist *mathematisch* interessant! Das möchten die hier vorgestellten Projekte den Schülerinnen und Schülern zeigen.

Die Qualitäten des mathematischen Billard

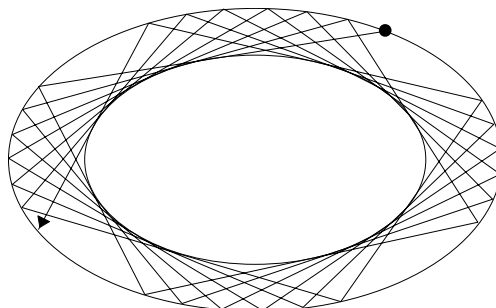
Das mathematische Billard hat eigene Qualitäten, die es anregend machen. Zum einen ist die Tatsache gemeint, dass die Bewegung sich in alle Ewigkeit erstreckt, zum anderen die Möglichkeit, nach Belieben nicht nur rechteckige Banden anzuschauen, sondern auch dreieckige, kreisförmige, ellipsenartige oder überhaupt irgendwie krummlinige.



Im mathematischen Billard lassen sich viele interessante Fragen stellen. Zum Beispiel: Gibt es auf einem bestimmten Tisch geschlossene Bahnen? Das sind Bahnen, die sich nach einer gewissen Zeit wiederholen, wie die Bahn in nächsten Bild:



Oder man kann das Phänomen untersuchen, wann und weshalb die Segmente (die geraden Stücke) einer Bahn eine schöne Kurve – eine sog. Kaustik – umhüllen:



Die Qualitäten des mathematischen Billard

Ist mathematisches Billard nun ein exotisches Spielzeug für mathematische Seelen?
Die Antwort lautet: Ja und Nein.

Weshalb nicht?

Man kann am Billard grundsätzliche Erkenntnisse gewinnen. Das mathematische Billard beschreibt nämlich einen Bewegungsvorgang mit Hilfe eines einfachen Bewegungsgesetzes. Trotz seiner Einfachheit sind die Bewegungen – je nach Bande – alles andere als einfach zu überblicken.

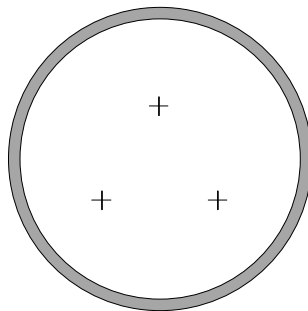
Diese Erkenntnis findet man wieder in guten Modellen von realen Vorgängen. Eines der berühmtesten Beispiele ist das Planetenbewegungsproblem. Für dieses Problem kennt man seit Newton ein hervorragend genaues Modell mit einem ebenfalls einfachen Bewegungsgesetz. Dennoch ist die Untersuchung des Bewegungsverhaltens äusserst kompliziert und bis heute in keiner Weise abgeschlossen.

Ein anekdotischer Nachtrag

Lewis Carroll, der Mathematiker, der Alice im Wunderland geschrieben hat, hat sich auf seine Weise auf den Weg zum mathematischen Billard gemacht.

Er hat 1890 Regeln vorgeschlagen, wie man Billard auf einem runden Tisch spielen könnte. Diese Regeln beschreiben zuerst einmal die Anforderungen an den Tisch. Die Platte muss kreisförmig sein mit einer Bande, die lückenlos rund herum läuft. Weiter darf sie keine Löcher aufweisen und auf ihrer Oberfläche sollen drei Punkte markiert sein, die die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

Lewis Carolls Billardtisch:



Soviel zum Tisch. Nun kann das Spiel losgehen. Zunächst werden drei verschiedenfarbige Kugeln auf die markierten Stellen gesetzt. Dann plaziert die Spielerin eine weisse Kugel am Rand der Bande und stösst sie an.

Wenn der Ball nun die Bande trifft und dann eine der farbigen Kugeln, erhält sie einen Punkt. Falls die Kugel zwei Mal an die Bande stösst und erst dann eine farbige Kugel trifft, erhält die Spielerin 2 Punkte. Die folgende Liste gibt einen Überblick über den ganzen Set von Regeln:

Spielregeln:	Bande - Kugel	1 Punkt
	Bande - Bande - Kugel	2 Punkte
	Kugel - Bande - Kugel	3 Punkte
	Bande - Kugel - Kugel	4 Punkte
	Bande - Kugel - Bande - Kugel	5 Punkte

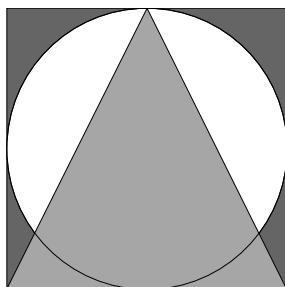
Macht ein Spieler, eine Spielerin mehr als einen Punkt, darf er, sie gerade weitermachen.

Lewis Carroll hat sich offenbar einen derartigen Tisch anfertigen lassen und sein Kreis-Billard darauf (wohl ausgiebig) gespielt. Er schreibt: "The circular table will be found to yield an interesting variety of Billiard-playing, as the rebounds from the cushion are totally different from those of the ordinary game." [zit. aus Peterson].

Elementargeometrische Untersuchungen

Projektziel

Die Grundidee des Projekts ist einfach: Wir stellten uns die Frage, wie sich eine Billardkugel verhält, wenn man sie auf dem Tisch anstösst. Dabei untersuchten wir vier verschiedene Tischformen: Kreis, Quadrat, Rechteck und gleichseitiges Dreieck. Was lässt sich über die Bahn der Kugel aussagen, wenn man Startpunkt und Richtung vorgibt? Gibt es periodische Bahnen, d.h. kommt die Kugel irgendwann einmal wieder zum Startpunkt zurück, so dass die Bahn wiederholt wird¹? Wenn ja, lassen sich solche Bahnen erkennen, und wie?²



Didaktische Ziele	Selbständige Arbeit an einem mathematischen Problem Entwicklung der Fähigkeit, auf Ideen zu kommen Nutzung der geometrischen Kenntnisse Intensive Zusammenarbeit mit einer Person
Organisation	Arbeit in Zweiergruppen.
Zeitaufwand	4 bis 15 Lektionen
Vorkenntnisse	Elementargeometrie in Kreis und Dreieck. Grobe Kenntnis der irrationalen Zahlen Tangens eines Winkels
Hilfsmittel	Keine besonderen

¹ Genaugenommen ist die Bahn erst periodisch, wenn sie wieder zum Startpunkt zurückkehrt und dann in der ursprünglichen Richtung weiterläuft.

² Dieses und die folgenden Zitate (*kursiv gedruckt*) stammen aus einer Schülerarbeit. Christian Frei und Christoph Steiger haben an der KS Baden im Sommersemester 1997 einen Nachmittag pro Woche dieses Projekt verfolgt (im Rahmen des sog. 4-stündigen Projektunterrichts). Sie arbeiteten ohne jegliche Einmischung und benötigten für die sehr sorgfältige Lösung des Problems für Kreis, Quadrat und Rechteck etwa 15 Stunden.

Kreis

Das Prinzip Einfallswinkel = Ausfallswinkel ist am Kreis nicht offensichtlich. Es muss noch ergänzt werden. Wir beziehen uns auf die Tangente am Reflexionspunkt:

Einfallswinkel zur Tangente = Ausfallswinkel zur Tangente

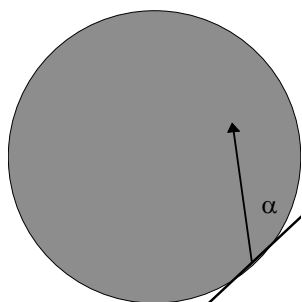
Die Vorgabe war, jeden Punkt mit einer beliebigen Startrichtung im Kreis zu untersuchen. Man kann hier die Sache in zwei Schritten drastisch vereinfachen:

1. Startpunkt und Richtung lassen sich zu einem Vektor zusammenfassen. Damit lässt sich der Startpunkt auf einer Geraden verschieben, ohne dass sich die Bahnform ändert. Also verschoben wir den Startpunkt auf die Bande, d.h. auf die Kreislinie.

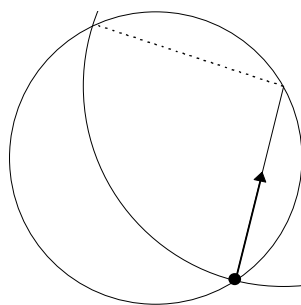
2. Durch Rotation des Kreises lässt sich jeder Punkt auf der Kreislinie in einen anderen überführen (dabei rotiert die ganze Bahn mit).

Folgerung:

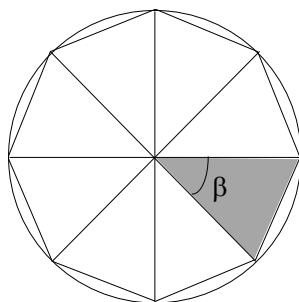
Das Problem lässt sich reduzieren auf einen Startpunkt und eine zugehörige Abschussrichtung.



Eine **Skizze**, in der eine Bahn bei irgendwelchen Vorgaben geometrisch konstruiert wird, kann zur Erkenntnis führen, dass die Bahnstücke zwischen den Reflexionen immer gleich lang sind.

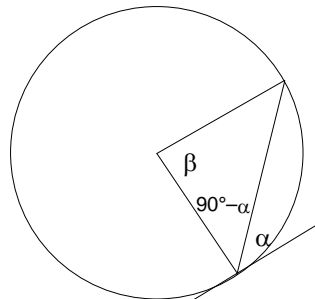


Ein solches Bahnstück definiert gerade einen Kreissektor. Die Bahn ist periodisch, wenn ein solcher Sektor den Kreis genau ausfüllen kann. Der Zentriwinkel β geht also im vollen Winkel 360° gerade auf.



Kreis

Wenn nicht der Zentriwinkel, sondern der Winkel zur Tangente gegeben ist, muss der Zusammenhang dieser Winkel hergestellt werden. Das geschieht natürlicherweise durch eine Winkelbetrachtung:



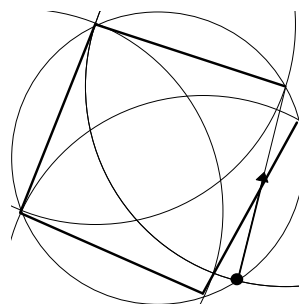
$$\beta = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha)$$

$$\beta = 2\alpha$$

Damit erhält man ein erstes Resultat: Die Bahn ist periodisch, wenn das Doppelte des Abschusswinkels im vollen Kreiswinkel aufgeht. Das heisst, wenn $2\alpha \cdot n = 360^\circ$, wobei n ist eine natürliche Zahl ist.

Es gibt SchülerInnen, die den Schritt zum Vielfachen nun sofort vollziehen oder direkt zum allgemeinen Resultat gelangen (s.u.).

Den andern hilft folgende Fragestellung weiter: Ist das alles? Ist eine Bahn, die in einem Umlauf neben den Anfangspunkt führt, nicht periodisch?



Dann ist bald klar, dass die Bahn auch periodisch ist, wenn sie erst nach zwei Umläufen wieder beim Ausgangspunkt angelangt ist. Das heisst, dass der Sektor im Doppelten des vollen Kreiswinkels aufgeht: $2\alpha \cdot n = 2 \cdot 360^\circ$, mit einer natürlichen Zahl n . In diesem Fall beschreibt die Bahn eine Art Sternfigur.

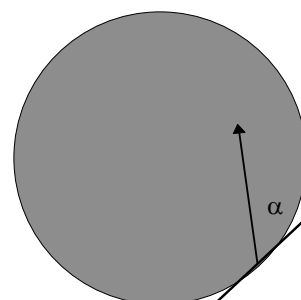
Durch Verallgemeinern erhält man das folgende Resultat:

Eine Bahn zum Abschusswinkel α ist genau dann periodisch, wenn der Zentriwinkel $\beta = 2 \cdot \alpha$ und der volle Kreiswinkel 360° ein gemeinsames Vielfaches haben.

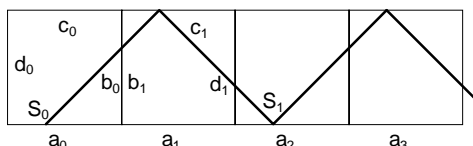
$$n \cdot 2\alpha = m \cdot 360^\circ$$

Ist $n \cdot 2\alpha$ das *kleinste* gemeinschaftliche Vielfache, dann hat die Bahn die

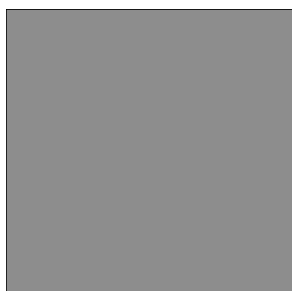
Periodizität n



Es lässt sich leicht nachvollziehen, dass mit der selben Überlegung wie am Kreis der Startpunkt der Bahn auf den Rand des Tisches verlegt werden kann, ohne dabei die Bahn zu verändern. Doch lässt sich der Startpunkt auch entlang der Bande verschieben, so dass sich der Charakter der Bahn nicht ändert? Dazu spiegeln wir das Quadrat jeweils an einer Seite in der Reihenfolge b, d, b, d, \dots , so dass sich folgendes Bild ergibt:



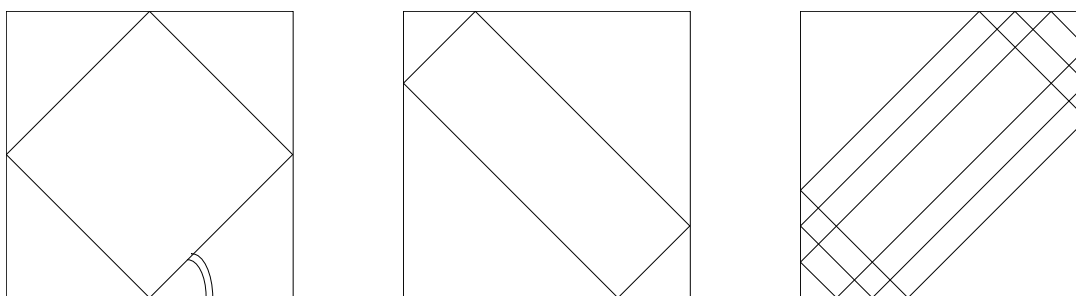
Wir wollen das Quadrat $\langle a_0, b_0, c_0, d_0 \rangle$ als Q_0 bezeichnen, das Quadrat $\langle a_1, b_1, c_1, d_1 \rangle$ als Q_1 , und so weiter. S_0 soll der Startpunkt unserer Bahn sein.



1. Wenn wir nun S_0 nach links oder rechts verschieben, so machen alle anderen Punkte auf a_n und c_n dieselbe Bewegung, der Abstand zum Startpunkt bleibt also gleich. Die Folge davon ist, dass wir den Startpunkt S_0 nicht mehr berücksichtigen müssen, das heißt, wir können uns nur auf den Startwinkel α konzentrieren.

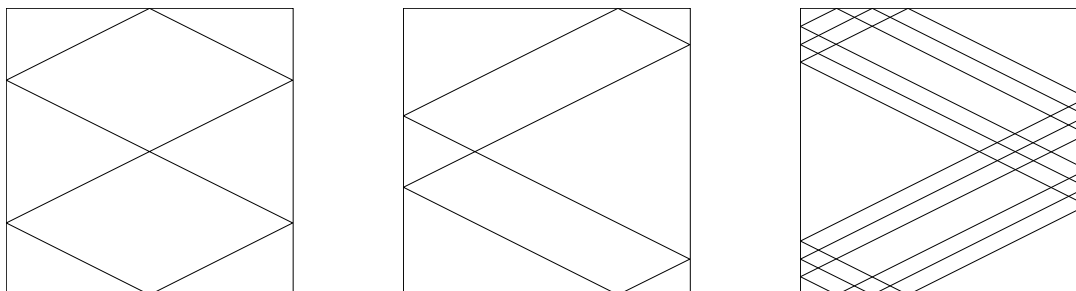
Die **Konstruktion** einer ersten periodischen Bahn ist einfach. Sie verläuft von Seitenmitte zu Seitenmitte. Die Abschussrichtung wird bei dieser Tischform ohne weiteres durch den Winkel zur Seite bestimmt. Er beträgt 45° .

Man kann sich bereits hier fragen, welche Wirkung die Verschiebung des Abschussortes hat. Mit Konstruktion oder geometrischer Überlegung sieht man, dass die Bahn periodisch bleibt.

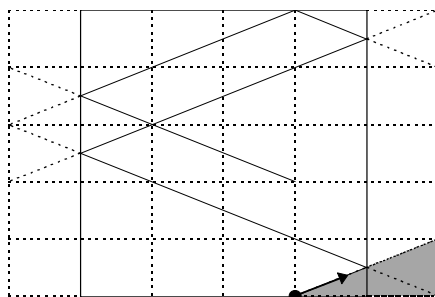


Ähnlich kann die **Entdeckung** weiterer periodischen Bahnen gelingen: Gestartet wird z.B. im Mittelpunkt einer Seite. Der erste Aufprallpunkt liegt auf dem Punkt der Nachbarseite, der diese z.B. Verhältnis $1 : 3$ teilt. Bei Verschiebung des Abschussortes scheint die Bahn periodisch zu bleiben.

Bahnen zum Steigungsverhältnis 1 : 2



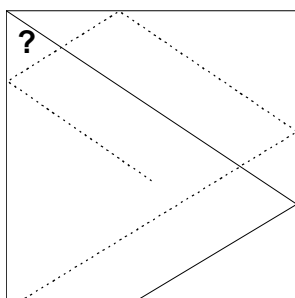
Das **Zeichnen** periodischer Bahnen wird stark erleichtert, wenn über das Quadrat ein geeigneter Raster gelegt wird. Man legt z.B. einen Raster, der die horizontalen Seiten in vier, die vertikalen Seiten in fünf Abschnitte teilt. Den Abschussort setzt man auf einen Gitterpunkt:



Damit kann man sich schnell ein Bild dieser Bahn machen. Auf diese Weise werden auch die Spiegelungen und Symmetrien der Bahn einsichtiger. Bei der skizzierten Bahn beträgt das Steigungsverhältnis der Abschussrichtung

$$\text{Steigungsverhältnis} = \frac{\text{Höhe}}{\text{Weite}} = \frac{1/5}{1/2} = \frac{2}{5}$$

Eine Nebenbemerkung

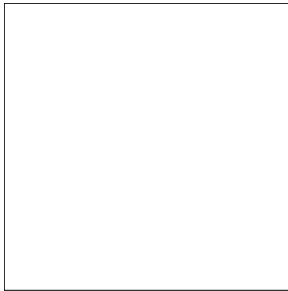


Bei gewissen Startpunkten und Verhältnissen trifft die Bahn übrigens gerade in eine **Ecke**³. Hier lässt sich eine vernünftige Lösung finden, indem man den Startpunkt probenhalber um ein Weniges verschiebt. Durch eine Winkelbetrachtung sieht man, dass die Bahn auf einer parallelen Spur zurückkommt. Dasselbe kann man nun für die betrachtete Bahn annehmen. Sie kommt auf der selben Linie zurück.

³ SchülerInnen verweilen recht gerne bei diesem Problem. Seine mathematische Relevanz ist jedoch gering.

Quadrat

Eine zweite Nebenbemerkung



Fixieren sich die Gedanken der Schülerin zu sehr auf die Beziehung zwischen dem Wert des Abschusswinkels und der Periodizität, dann wird die Sache schwierig. Selbst bei einem "einfachen" Winkel wie 30° entsteht keine periodische Bahn. Auch in diesem Fall führt der direkte Weg über Konstruktion und geometrische Betrachtung der Bahnen vermutlich nicht weit(er).

Weiter im Text

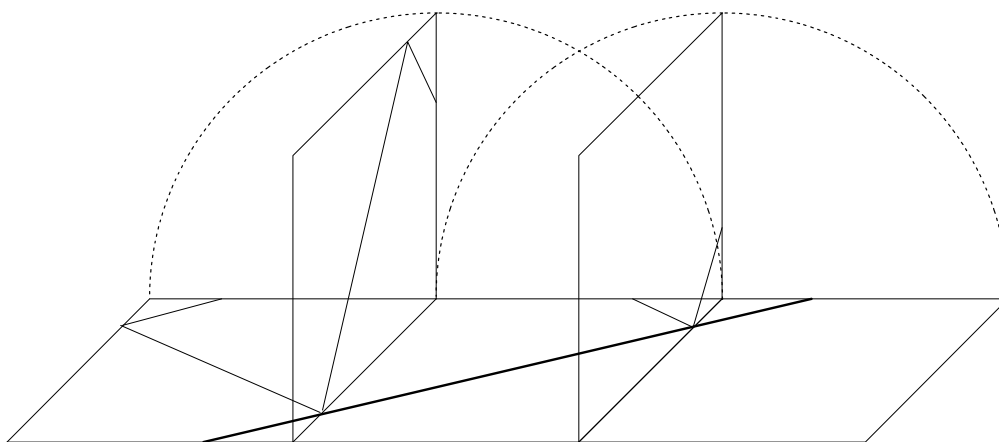
Möglicherweise keimt bereits nach wenigen Zeichnungen eine **Vermutung** über den Zusammenhang von Periodizität und Abschussrichtung auf. Ist der Tangens des Abschusswinkels ein (einfaches) Zahlenverhältnis, dann scheint die Bahn periodisch zu sein. Das Problem besteht nun darin, diese Vermutung einsichtig zu begründen.

Auf dem geschilderten, konstruktiven Weg werden die Bahns Spuren allerdings bald unübersichtlich. Die Bahn wird zu oft an den Seiten reflektiert und man verliert den Überblick über ihren Verlauf und damit den Überblick über die Abhängigkeit des Verlaufes von den Anfangsbedingungen.

An diesem Punkt müssen die SchülerInnen eine **Idee** entwickeln.

Anstoss dazu ist – wie erwähnt – der Wunsch, Übersicht zu schaffen, das Problem der "Verknäuelung" zu auflösen. Die eigenständige Entwicklung dieser Idee braucht (viel) Zeit, obschon einem das Prinzip, das hinter dieser Idee steckt, gut vertraut ist:

Die Bahn ist verknäuel, also wird sie aufgefaltet!

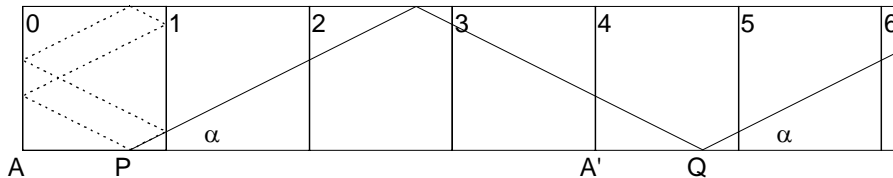


Die Auffaltung (genauer: Spiegelung) bewirkt eine Begradigung der Bahn, weil das Reflexionsgesetz nach Voraussetzung genau erfüllt ist.

Quadrat

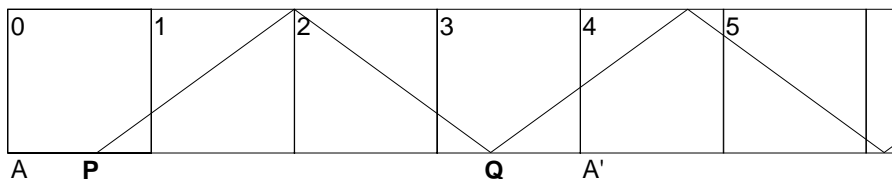
Nun muss man sich mit der Handhabung dieses Darstellungsmittels vertraut machen. Auch das braucht Zeit und geschieht am besten mit Bleistift und Lineal.

Durch die Auffaltung in einer Richtung wird die Bahn gewissermassen zu einem Lichtstrahl, der zwischen parallelen Wänden reflektiert wird⁴. Man wird ein paar solcher Lichtstrahlen zeichnen und versuchen, Bezüge zur entsprechenden Billdard-Bahn zu schlagen.



Dann sieht man beispielsweise, dass die Bahn zum oben skizzierten Lichtstrahl periodisch ist, wenn der Abstand AP vom Startpunkt zur linken unteren Ecke des Quadrates gleich gross ist wie der Abstand A'Q. Dann kommt sie zum Startpunkt zurück und geht in der Abschussrichtung weiter, denn das Quadrat Nummer 4 ist nicht gespiegelt, es liegt gleich auf wie das ursprüngliche.

Dem folgenden Lichtstrahl hingegen entspricht nicht unbedingt eine periodische Bahn:



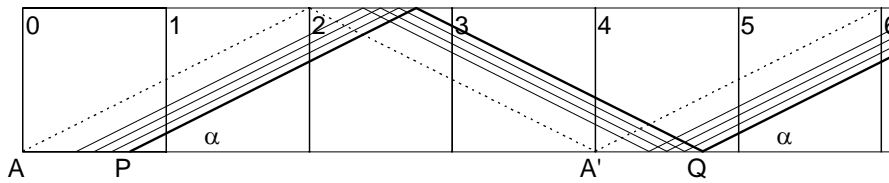
Ist $AP = QA'$, dann kommt die Bahn zwar an den Startpunkt zurück. Aber dort ist die Reflexionsrichtung "falsch", denn das Quadrat Nummer 3 liegt gespiegelt auf. Die Bahn geht in Gegenrichtung weiter, und ist – jedenfalls bis zu dieser Stelle – nicht periodisch.

Für periodische Bahnen muss der Lichtstrahl also an bestimmten Punkten auf die untere Wand auftreffen. Diese Punkte liegen in einem der Quadrate mit gerader Nummer und entsprechen dem Startpunkt.

⁴ Wem die Bahn in obiger Streifen-Darstellung noch zu verknäuelst erscheint, kann die Quadrate noch in der zweiten Richtung spiegeln. Die Bahn wird dadurch zu einer Geraden in einem quadratischen Gitter. SchülerInnen werden vermutlich nicht mit dieser Darstellungsweise arbeiten. Deshalb soll auch hier die Streifen-Darstellung benutzt werden. In einem Nachtrag (siehe weiter unten) wird die Gitter-Darstellung kurz abgehandelt.

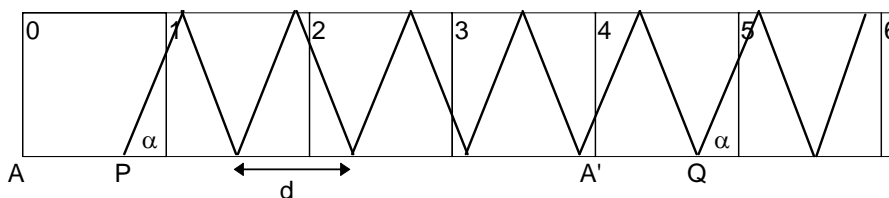
Quadrat

Es ist in dieser Darstellung sehr gut sichtbar, dass eine Verschiebung des Abschusortes keine wesentliche Änderung der Bahn bewirkt.



Wenn $AP = A'Q$ ist, dann gilt das Entsprechende für alle parallelen Lichtstrahlen. Die zugehörigen Bahnen sind somit alle periodisch.⁵ Für die Periodizität ist nur die Abschussrichtung massgebend. Anhand von Beispielen sieht man: Die Bahn ist periodisch, wenn der Tangens des Abschusswinkels ein Bruchteil von 1 ist: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

Es ist aber auch möglich, dass der Lichtstrahl mehrere Male zwischen den Wänden hin und her läuft, bis er auf einen "Startpunkt" Q trifft:



Auch dann ist die Bahn periodisch. Um den Tangens des Abschusswinkels zu bestimmen, betrachtet wird die Strecke d. Sie geht in einem (geraden!) Vielfachen der Quadratseite s auf. Symbolisch formuliert heisst das:

$$m \cdot d = 2n \cdot s \quad \text{wobei } m \text{ und } n \text{ natürliche Zahlen sind}$$

Der Tangens ist das Verhältnis der Quadratseite zur Hälfte der Strecke d, also

$$\tan(\alpha) = \frac{s}{\frac{d}{2}} = \frac{s}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{m} \cdot s} = \frac{m}{n}$$

Eine Bahn zum Abschusswinkel α ist genau dann periodisch, wenn der Tangens dieses Winkels eine rationale Zahl ist.

$$\tan(\alpha) = \frac{m}{n}$$

Ist der Bruch gekürzt, dann beträgt die

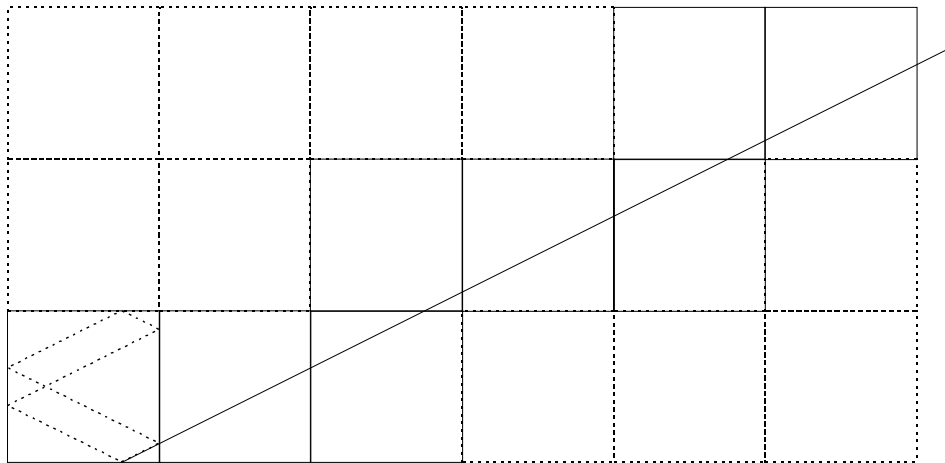
Periodizität $(m+n) \cdot 2$



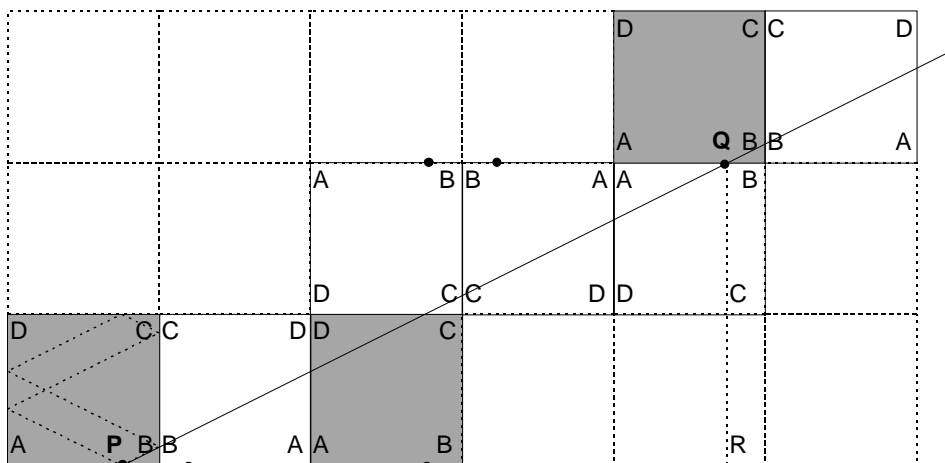
⁵ Deshalb könnte man diese ganze "Familie" von Bahnen durch eine Einzige repräsentieren. Dafür böte sich die Bahn zum gestrichelten Lichtstrahl an. Diese Art von Überlegung werden SchülerInnen jedoch wohl kaum anstellen.

Quadrat: Gitterdarstellung der Bahn

Die Auffaltung einer Bahn in zwei Richtungen führt zu einer Geraden in einem quadratischen Gitter:



Der Schnittpunkt der Geraden mit einer Gitterlinie gibt einen Aufprallort an. Um diesen Ort im ursprünglichen Quadrat aufzufinden, muss man sich über die Spiegelungsweise orientieren.



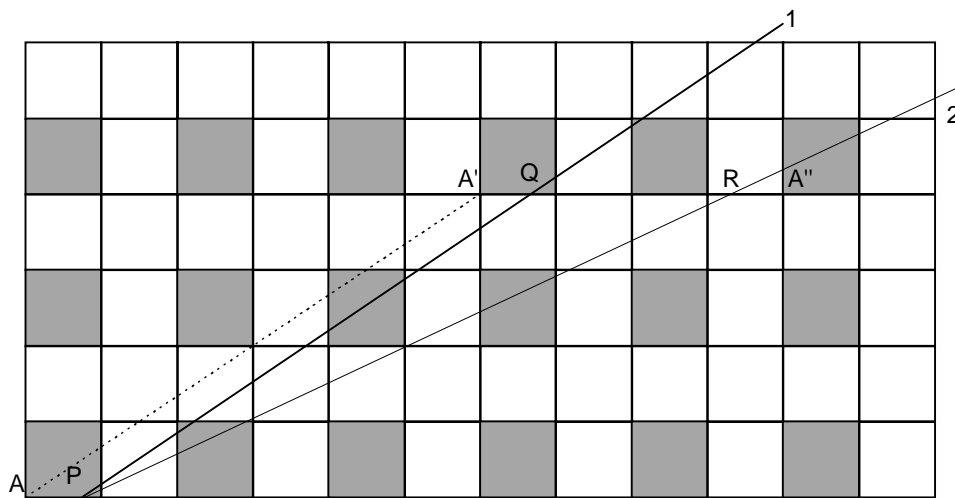
Zur besseren Übersicht sind in der obigen Darstellung die Quadrate leicht getönt, die gleich wie das ursprüngliche liegen. Zudem sind die Punkte hervorgehoben, die dem Startpunkt entsprechen.

Die Bahn zur skizzierten Geraden kommt nach 6 Aufprallern wieder zum Startpunkt zurück und zieht dann mit dem ursprünglichen Abschusswinkel weiter. Sie ist also periodisch. Um diese Tatsache mit dem Abschusswinkel zu verknüpfen, wählt man auch hier den Weg über dessen Tangens. Man kann ihn an den Katheten des Dreiecks PQR ablesen. Er beträgt also 2:4, d.h. 0.5.

Es ist auch in dieser Darstellung sehr gut sichtbar, dass eine Verschiebung des Abschussortes keine wesentliche Änderung der Bahn bewirkt. Für die Periodizität ist demzufolge die Abschussrichtung massgebend.

Quadrat: Gitterdarstellung der Bahn

Durch Betrachtung weiterer Beispiele lässt sich das obige Resultat verallgemeinern.



Der Geraden mit Nummer 1 entspricht eine periodische Bahn, wenn der Abstand AP gleich dem Abstand A'Q ist. Der Tangens des Abschusswinkels beträgt $4 : 6$, also $2/3$. Die Bahn wiederholt sich nach $10 = 2 \cdot (2 + 3)$ Reflexionen.

Die Bahn zur Geraden Nummer 2 kommt ebenfalls wieder zum Startpunkt zurück, wenn der Abstand A''R gleich AP ist. Sie ist – jedenfalls bis zu dieser Stelle – aber nicht periodisch, weil sie in Gegenrichtung zur Abschussrichtung weiterläuft.

Eine Bahn ist demzufolge unter folgender Bedingung periodisch: Die entsprechende Gerade schneidet eines der getönten Quadrate auf der Seite AB in einem Punkt Q, der von der Ecke A' gleich weit weg ist, wie der Startpunkt P von der Ecke A. Das ist der Fall, wenn der Tangens des Abschusswinkels eine rationale Zahl ist.

Wenn der Tangens des Abschusswinkels nun aber keine rationale Zahl ist?

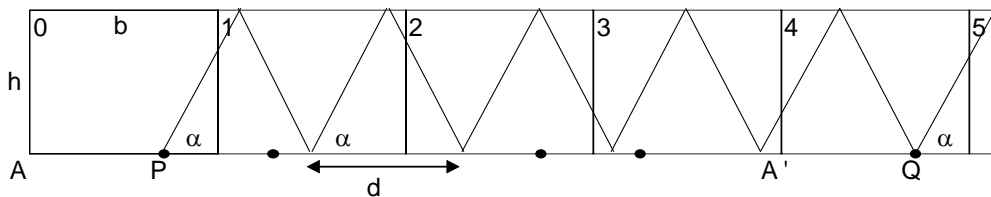
Lässt man der Einfachheit halber die Bahn in der Ecke A starten, dann trifft die entsprechende Gerade nie mehr einen Schnittpunkt des Gitters. Sonst wäre der Tangens rational. Damit kann die Bahn nicht periodisch sein.

Rechteck



Das Rechteck ist schnell abgehandelt. Da wir das Verhalten der Kugel im Abschnitt 3 [über das Quadrat] schon vollständig beschrieben haben, bleibt uns nur, eine Bedingung für die Periodizität zu finden.

Wie beim Quadrat, lässt sich durch fortgesetzte Spiegelung die Bahn als Lichtstrahl zwischen parallelen Wänden darstellen. Ein Beispiel:



Und wie beim Quadrat gilt auch hier: Die Bahn ist periodisch, wenn der Abstand AP gleich dem Abstand A'Q ist. Dann entspricht Q dem Startpunkt. Bestimmen wir den Tangens des Abschusswinkels: Die Strecke d geht in einem geraden Vielfachen der Rechtecksbreite b auf. Symbolisch formuliert heisst das:

$$m \cdot d = 2n \cdot b \quad \text{wobei } m \text{ und } n \text{ natürliche Zahlen sind}$$

Der Tangens ist das Verhältnis der Rechteckshöhe h zur Hälfte der Strecke d, also

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{\frac{d}{2}} = \frac{h}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{m} \cdot b} = \frac{m}{n} \cdot \frac{h}{b}$$

Eine Bahn zum Abschusswinkel α ist genau dann periodisch, wenn der Tangens dieses Winkels ein rationales Vielfaches des Seitenverhältnisses ist:

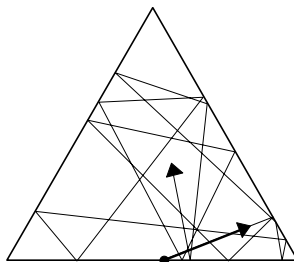
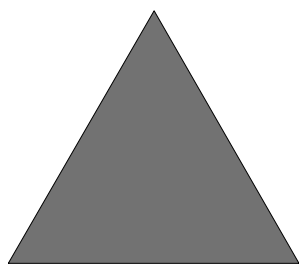
$$\tan(\alpha) = \frac{m}{n} \cdot \frac{\text{Rechteckshöhe}}{\text{Rechtecksbreite}}$$

Ist der Bruch m:n gekürzt, dann beträgt die Periodizität $(m+n) \cdot 2$



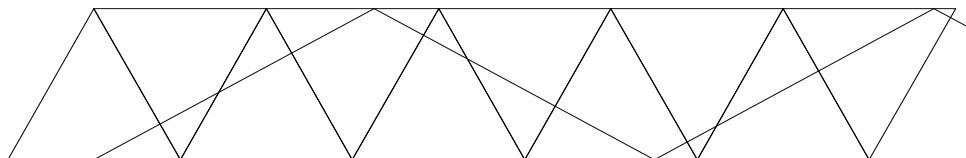
Gleichseitiges Dreieck

Das gleichseitige Dreieck ist wohl das regelmässigste aller Dreiecke: alle Winkel und Seitenlängen sind gleich, Höhe, Seitenhalbierende und Winkelhalbierende fallen zusammen. Beginnen wir auch hier mit einer Zeichnung: ein gleichseitiges Dreieck mit einer Bahn, die zur Grundseite einen 20° -Winkel einschliesst:

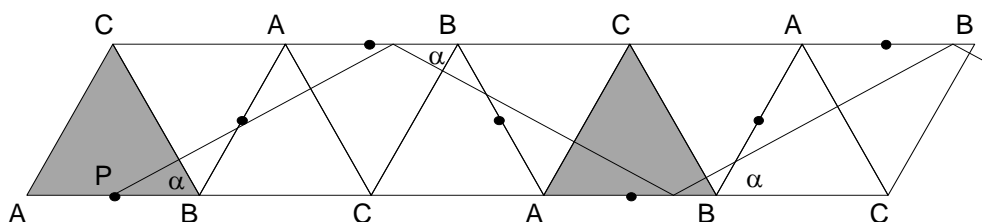


Leider können wir aus diesem Gewirr von Linien keine Informationen über Regelmässigkeiten oder gar Gesetze ableiten. Wie beim Quadrat müssen wir uns anders helfen.

Die Idee, Bahnen durch Auffalten zu entknäueln, hilft auch bei Billardtischen in Form von gleichseitigen Dreiecken weiter. Sukzessives Entfalten / Spiegeln in einer Richtung führt wieder zu einem Kanal, in dem sich die Bahn wie ein Lichtstrahl bewegt:

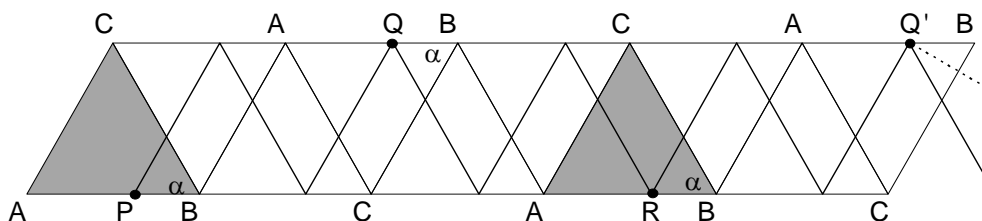


Zuerst wird man sich über die Lage der Dreiecke orientieren müssen. Anders als bei Quadrat und Rechteck liegt hier nur jedes sechste Dreieck gleich wie das ursprüngliche. Zur besseren Übersicht sind in der folgenden Skizze die Punkte hervorgehoben, die dem Startpunkt entsprechen:

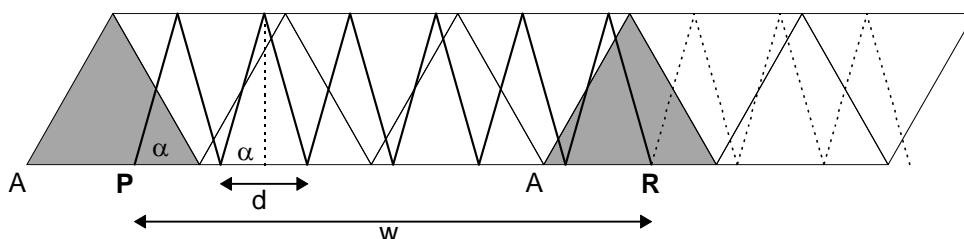


Der Winkel α tritt nur bei Reflexion an den Wänden auf. Bei der Suche nach periodischen Bahnen müssen deshalb nur die Reflexionspunkte an der Wand im Auge behalten werden.

Reflexionspunkte an der Wand:



Die Bahn kann – wie oben – nach einer gewissen Anzahl von Reflexionen auf einen der Punkte Q an der oberen Wand treffen. Dann trifft er nach einer weiteren Folge von Reflexionen auch einen der Punkte R in der unteren Wand. Im Grunde braucht man sich also nur die Lichtstrahlen anzuschauen, die nach einer gewissen Anzahl von Reflexionen in einem der Punkte R landen. Ein weiteres Beispiel:



Die Entfernung w beträgt das 3-fache der Grundseite oder ein Vielfaches davon. Die Strecke d geht bei periodischen Bahnen gewisse Anzahl Mal (hier 6) in der Strecke w auf. Damit kann der Tangens des Abschusswinkels bestimmt werden:

$m \cdot d = n \cdot 3g$ wobei m und n natürliche Zahlen sind

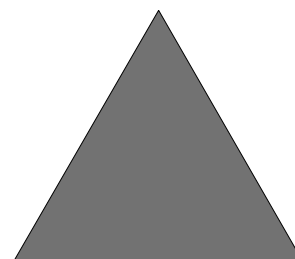
$$\tan(\alpha) = \frac{h}{d} = \frac{h}{\frac{1}{n} \cdot \frac{3g}{m}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{g}$$

Durch geeignete Wahl von n und m bringt man jedes Verhältnis zustande.

Eine Bahn zum Abschusswinkel α ist genau dann periodisch, wenn der Tangens dieses Winkels ein rationales Vielfaches des Verhältnisses der Höhe zur Grundseite des gleichseitigen Dreieckes ist.

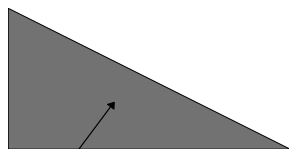
$$\tan(\alpha) = \frac{m}{n} \cdot \frac{\text{Dreieckshöhe}}{\text{Grundseite}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Beim gleichseitigen Dreieck ist der Tangens also ein rationales Vielfaches von $\sqrt{3}$.



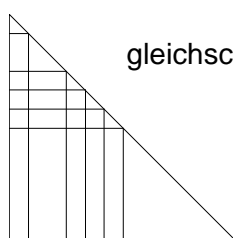
Bemerkungen zu weiteren Tischformen

Das rechtwinklige Dreieck

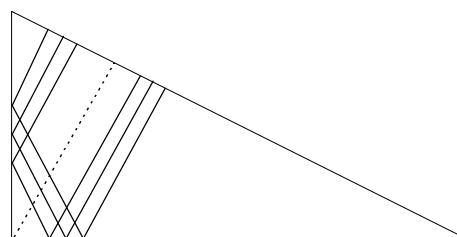


Die Auffaltung der Bahn durch Spiegelung führt auch hier zu Ergebnissen. Allerdings scheinen den Autoren damit die Grenzen dessen erreicht, was mit elementargeometrischen Mitteln getan werden kann. Zur Betrachtung solcher Bahnen sollten wirkungsvollere mathematische Werkzeuge verwendet werden – Werkzeuge, die nicht für den Projektunterricht in Mittelschulen zur Verfügung stehen.

Ein paar periodische Bahnen sind jedoch schnell gefunden:

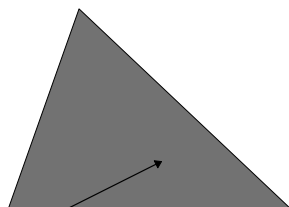


gleichschenkliges Δ



Diese Bahnen haben die Besonderheit, dass sie nicht schön rundherum laufen, wie man das von anderen Figuren gewohnt ist.

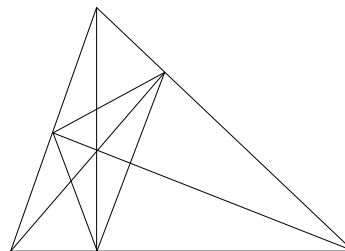
Allgemeine Dreiecke



Wie oben ist die Suche nach periodischen Bahnen aufwendig und selbst noch heute nicht restlos geklärt [Berger 1991]. Deshalb soll man sich hier auf die **Frage** beschränken, ob es in einem beliebigen Dreieck überhaupt periodische Bahnen gibt.

Zumindest in spitzwinkligen Dreiecken gibt es immer eine periodische Bahn:

Sie läuft durch die drei Höhenfußpunkte. Ein Satz aus der Elementargeometrie besagt, dass das Reflexionsgesetz erfüllt ist: Die Höhen sind Winkelhalbierende im Höhenfußpunkt-Dreieck.⁶



Wird der Startpunkt etwas verschoben, so bleibt die Bahn periodisch, weil der Abstand zwischen parallelen Bahnstücken erhalten bleibt.

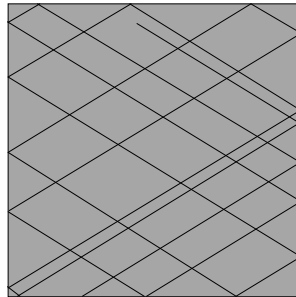
Bei stumpfwinkligen Dreiecken hingegen ist nicht einmal geklärt, ob es überhaupt eine einzige periodische Bahn gibt [Berger].

⁶ Man kann sich das durch eine Winkelbetrachtung klar machen.

CAMB – Computer Aided Mathematical Billard

Projektziel

Die SchülerInnen studieren das mathematische Billard mit Hilfe einer Software, die den Bahnverlauf bei verschiedenen Tischformen auf zweierlei Art visualisieren kann. Die Projektarbeit ist auf die Phänomene gerichtet, die sich bei der Simulation zeigen. Diese Phänomene gilt es zu beobachten, zu beschreiben und allenfalls zu erklären.



Didaktische Ziele

Die SchülerInnen haben die Möglichkeit, ein dynamisches System im Computer-Experiment kennen zu lernen. Sie erfahren die Nützlichkeit verschiedener Visualisierungsformen.

Bei Erklärungsversuchen können sie ihre Geometrie-Kenntnisse anwenden und/oder das Internet als Informationsquelle ...erfahren. Nutzen?

Organisation

Arbeit in kleinen Gruppen (ideal zwei Personen)

Schulstufe

ab 2 Jahren vor der Matur

Zeitaufwand

6 Lektionen

Vorkenntnisse

Grundkenntnisse als Anwender von Computerprogrammen (speziell Internet)

Kurze Einführung ins mathematische Billard-Problem, damit die SchülerInnen die Experimente einordnen können. Die Darstellung der Bewegung im Konfigurations- und Phasenraum sollte in Beispielen vorgestellt worden sein.

Hilfsmittel

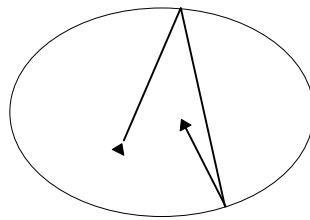
Computer mit Internet-Anschluss
 Einigermassen aktueller Browser
 Experimentier-Software auf dem Internet unter der Adresse <http://serendip.brynmawr.edu/chaos/home.html>

Vorbemerkung zur Visualisierung der Kugelbahn

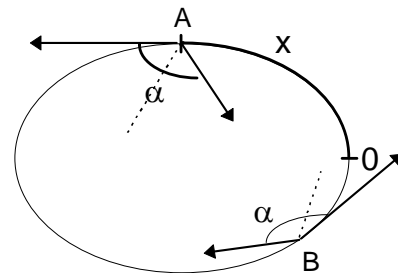
Bei dynamischen Systemen wie dem mathematischen Billard haben sich zwei Darstellungsformen der Bahn eingebürgert, die Darstellung im Konfigurationsraum und jene im Phasenraum. Beide Darstellungsweisen haben den Zweck, die Bewegung aufzuzeichnen, die die Kugel bei bestimmten Startbedingungen vollführt.

Unter Konfigurationsraum versteht man den Tisch. Auf ihm wird die Spur der rollenden Kugel eingezeichnet.

Der Konfigurationsraum:

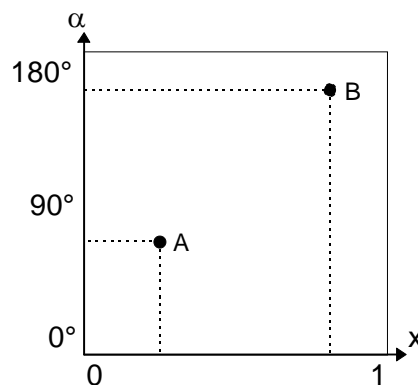


Demgegenüber wird im Phasenraum die Bewegung schrittweise erfasst, von Reflexionspunkt zu Reflexionspunkt. Das geschieht durch Angabe des Ortes, an dem die Kugel aufprallt und der Richtung, in der sie weiter läuft. Zur Ortsbestimmung zeichnet man auf der Bande einen Nullpunkt aus und misst das Bandenstück x von diesem Punkt bis zum Reflexionspunkt. Dabei wird der Umfang der Bande meist auf 1 normiert. Die Richtung wird durch den positiv orientierten Winkel α zwischen der Tangente und der Abschussrichtung angegeben (siehe Figur).

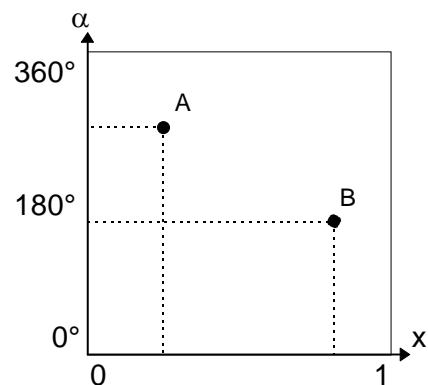


Diese beiden Werte – Ort und Richtung – werden für jeden Aufpraller in einem Koordinatensystem als Punkt eingetragen. Das Resultat bezeichnet man als Phasendiagramm.

Phasendiagramm:



Winkel zur Bande



Winkel zur Horizontalen

Die Experimentier-Software

Auf dem Internet ist unter der Adresse

<http://serendip.brynmawr.edu/chaos/home.html>

eine Software erhältlich, die die Simulation des mathematischen Billard für verschiedene Tischformen erlaubt. Angeboten werden

regelmässige Polygone bis 30 Ecken
(insbesondere gleichseitiges Dreieck und Quadrat)
Kreis
Ellipsen
Fussballstadion-Form

Die Software ist eingebunden in eine Internet-Seite, die als Lerneinheit konzipiert ist und sich zum Selbststudium eignet. Der Text ist in Englisch abgefasst. Die Internet-Seite enthält eine Dokumentation zum Gebrauch der Software und eine Art interaktives Leitprogramm, das etwas Hintergrundinformation enthält, Vorschläge für Experimente macht, Fragen stellt und Antworten bereithält. Das Leitprogramm ist einfach und anschaulich geschrieben.

Das Simulations-Programm ist sehr bedienungsfreundlich. Anfangsbedingungen können per Maus oder numerisch eingegeben werden. Der Verlauf der Bahn wird im Konfigurationsraum dargestellt und auf Wunsch in einem Phasendiagramm. Dazu werden wahlweise die Einfallswinkel zur Horizontalen bzw. diejenigen zur Banden-Tangente verwendet.

Die Software kann die Phänomene, die in diesem dynamischen System auftreten, auf anschauliche Art illustrieren. Für spezifische, quantitative Betrachtungen ist sie weniger gut geeignet.

Zwei grundlegende Experimentier-Tatsachen vorweg

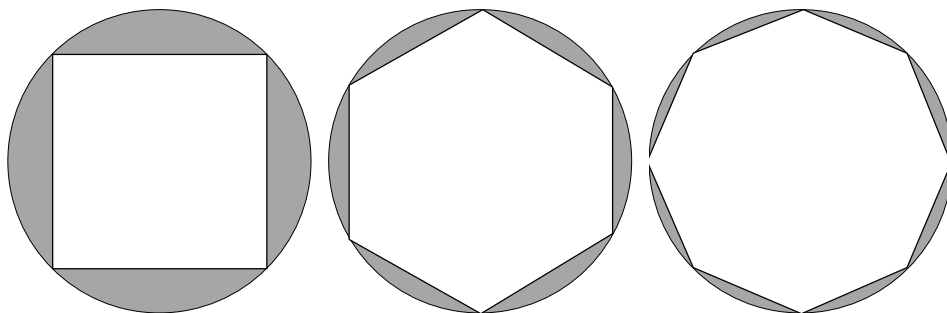
Beim mathematischen Billard mit gegebenem Tisch bestimmen die Anfangsbedingungen den Verlauf der Entwicklung vollständig. Der Charakter einer Bahn hängt also nur von zwei Grössen ab, vom Startpunkt und der Anfangsrichtung der Kugel.

Im Computer-Experiment sind nichtperiodische Bahnen oder Bahnen mit grosser Periodizität nicht wirklich erkennbar. Auffallend sind nur periodische Bahnen mit relativ kleiner Periodizität, Regelmässigkeiten im Phasenraum (invariante Kurven) und die Abwesenheit dieser Regelmässigkeiten ("chaotische" Bahnen). Regelmässigkeiten machen eine Bahn einfach(er) überblickbar.

Aus diesen Gründen ist es sinnvoll, in erster Linie von "einfachen" bzw. "schwierig(er) überblickbaren" Bahnen zu reden und nicht von periodischen oder nicht-periodischen Bahnen.

Billard in Polygonen

Auf der Suche nach einfachen, überblickbaren Bahnen ist es am zweckmässigsten, die Anfangsbedingungen, insbesondere die Richtung, numerisch einzugeben, damit eine feine Variation möglich wird. Auch wenn das Programm nur reguläre Polygone zur Verfügung stellt, sind hier einige interessante Entdeckungen zu machen.



Bahnen, die parallel zu periodischen Bahnen verlaufen, sind auch periodisch.

Schon kleine Abweichungen der Startrichtung können den Charakter der Bahn stark verändern.

Der Zusammenhang zwischen Bahntyp ("einfach" bzw. "kompliziert") und Anfangsbedingungen scheint – ausser beim Quadrat – keiner einfachen Gesetzmässigkeit zu gehorchen⁷.

Einfache, periodische Bahnen produzieren im Phasendiagramm⁸ nur einzelne Punkte. Komplizierte, unübersichtliche Bahnen erscheinen als eine Reihe von horizontalen Strichen.

Diese Regelmässigkeit kann zur Vermutung führen, dass nur eine begrenzte Anzahl von Reflexionsrichtungen möglich sind. Das liegt daran, dass die Winkel der betrachteten Polygone rationale Vielfache von 360° sind. Die Vermutung stimmt nämlich nur für die sogenannten „rationalen“ Polygone⁹.

⁷ Siehe dazu auch das Kapitel über elementargeometrische Untersuchungen

⁸ Im Phasendiagramm wird die Bahn der Billardkugel durch Punkte in einem Koordinatensystem dargestellt, wo jeder Aufprall an der Bande durch die Bogenlänge der Bande (x-Koordinate) und den Winkel zwischen Bahn und Horizontale (y-Koordinate) dargestellt wird. Für polygonale Tische wird der Winkel zwischen Bahn und Seite gemessen.

⁹ Ein Polygon heisst rational, wenn alle seine Winkel rationale Vielfache von 360° sind (s. Berger, S. 79)

Billard im Kreis

Der Übergang zu einem Billardtisch mit glattem Rand bringt ein neues Phänomen zum Vorschein. Auch den kompliziertesten Bahnen gelingt es nicht mehr, die ganze Tischfläche auszufüllen. Es treten sogenannte Kaustiken auf, welche die Fläche begrenzen, die der Bahn zugänglich ist.

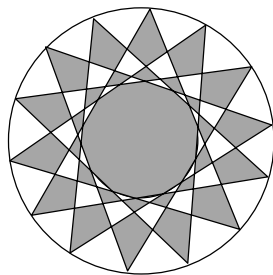
Im Fall des kreisförmigen Billardtisches verläuft jede Bahn innerhalb einer Kreisscheibe, die durch die Bande und einen konzentrischen Kreis begrenzt ist, der die Anfangsstrecke als Tangente besitzt. Ein Grenzfall sind die Bahnen mit Periode 2, die auf einem Durchmesser des Tisches verlaufen.

Die Begründung dieser Eigenschaft ist sicher für MittelschülerInnen zugänglich. Sie stützt sich auf die gleichen Überlegungen, die im Projektvorschlag „Elementargeometrische Untersuchungen“ angestellt wurden¹⁰.

Die experimentelle Suche nach einfachen Bahnen geschieht am einfachsten, indem berechnete Startwerte numerisch eingegeben werden. Es zeigt sich, dass einfache Bahnen eine schöne Sternfigur in den Kreis zeichnen.

Mit relativ einfachen Überlegungen lässt sich entdecken, dass periodische Bahnen in regulären (Stern-)Polygonen verlaufen müssen.

Es ist nicht auszuschliessen, dass die SchülerInnen selber die Initiative ergreifen und sich vorstellen, wie das reale Billardspiel auf einem kreisförmigen Billardtisch aussehen könnte¹¹. Sie werden bald merken, wie schwer die Dynamik der Kugel dort zu beherrschen ist. Auch dieses Problem kann zu sehr interessanten mathematischen Entdeckungen führen, vor allem wenn die SchülerInnen die Möglichkeit haben, sich dazu Unterlagen zu verschaffen¹².



¹⁰ Die Grundlinien der von den Kreisradien und Bahnstrecken gebildeten gleichschenkligen Dreiecke sind Tangenten am inneren Rand der Kreisscheibe.

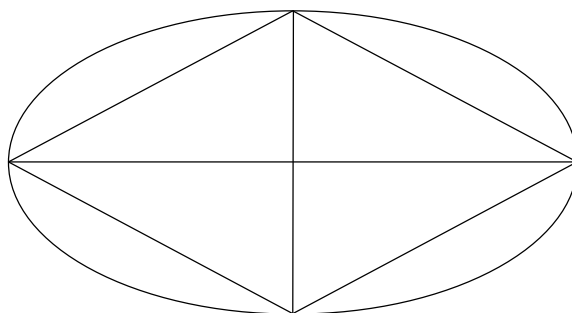
¹¹ In der Einleitung ist das Kreis-Billard beschrieben, das Lewis Carroll 1890 vorgestellt hat.

¹² Man siehe dazu zum Beispiel: Waldvogel (1992), Hungerbühler (1992) oder http://www.maa.org/mathland/mathland_3_3.html <http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/AlhazensBilliardProblem.html>

Billard in Ellipsen

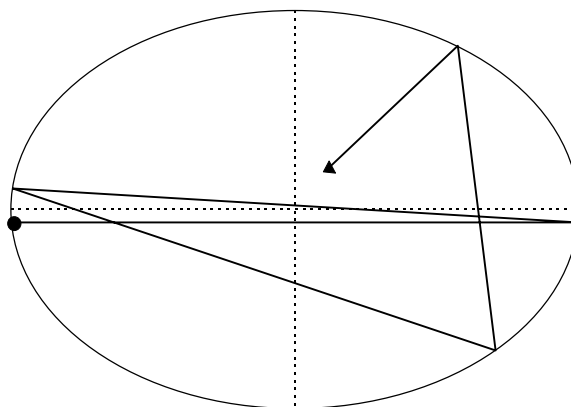
Die Untersuchung des ellipsenförmigen Billardtisches bietet den grössten Schatz an interessanten Beobachtungen und Resultaten unter verschiedenen Gesichtspunkten an.

Die Suche nach einfachen Bahnen führt rasch, auch ohne Benutzung der Simulationssoftware, auf die beiden Achsen (Periode 2) und das Viereck mit den Ecken in den Scheiteln (Periode 4).



Andere periodische Bahnen sind wesentlich schwieriger zu entdecken, auch wenn Computer-Experimente mit Bahnen entlang des Randes ihre Existenz vermuten lassen könnten¹³.

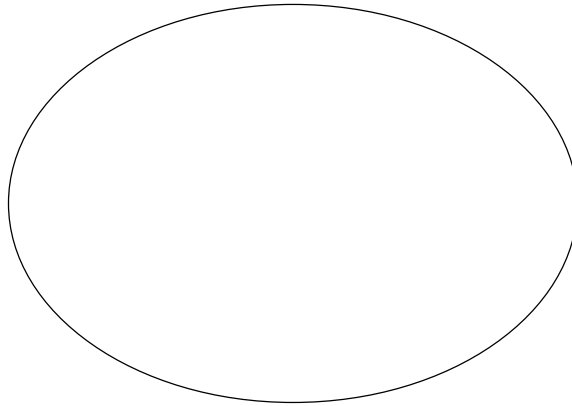
Auch das experimentelle Studium der Bahnen, die in der Nähe einer Bahn mit Periode 2 starten, ist interessant und lehrreich. Dabei kann man eine intuitive Idee vom Unterschied zwischen stabilen und instabilen periodischen Bahnen bekommen. Bahnen, die „nahe“ bei der kleinen Achse starten, werden von ihr gewissermassen „angezogen“. Die 2-periodische Bahn entlang der kleinen Achse ist stabil. Bahnen, die „nahe“ bei der grossen Achse starten, werden von dieser „abgestossen“. Diese periodische Bahn ist instabil.



¹³ Birkhoff hat bewiesen, dass es in einem streng konvexen Bereich periodische Bahnen zu jeder Periode >2 existieren. Solche Sätze der Variationsanalyse gehen natürlich weit über das hinaus, was in einer Mittelschule behandelt werden soll. Es ist aber nicht auszuschliessen, dass es jemandem in einer Mittelschulklasse gelingt, zum Beispiel eine Bahn mit Periode 3 experimentell und/oder mit Hilfe der Vektorgeometrie zu entdecken.

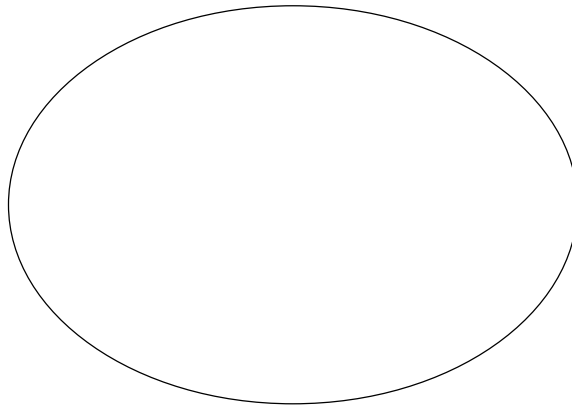
Die Untersuchung der Bahnen anhand der Simulationssoftware führt die SchülerInnen auf eine natürliche Weise dazu, die fundamentalen Eigenschaften des elliptischen Billard zu entdecken. Wie schon beim Kreis ist der für eine Bahn zugängliche Bereich des Tisches durch eine Kaustik begrenzt.

Es gibt Bahnen, die nur in der Mitte der Ellipse durchführen und auf beiden Seiten eine Fläche frei lassen.



Wenn eine Bahn einmal zwischen beiden Brennpunkte der Ellipse läuft, ist ihre ganze Dynamik zwischen den Ästen einer Hyperbel eingeschlossen. Die Bahnstücke berühren abwechslungsweise die beiden Äste der Hyperbel.

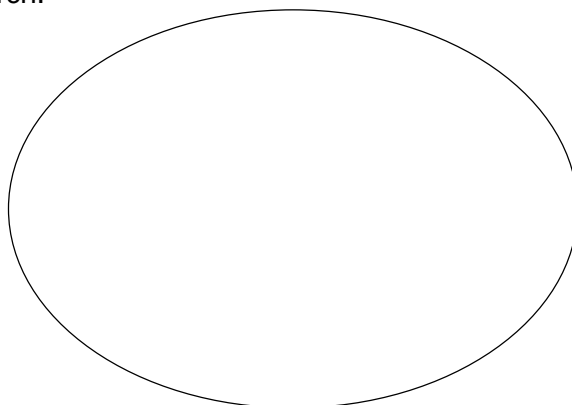
Dann gibt es Bahnen, die sich nur im Rand der Ellipse bewegen und im Innern eine ellipsenförmige Fläche frei lassen.



Wenn eine Bahn einmal die grosse Achse der Ellipse ausserhalb der Verbindungsstrecke der Brennpunkte schneidet, verläuft sie ganz in einem durch die Bande und eine weitere Ellipse eingeschlossenen Bereich. Auch in diesem Fall berühren alle Bahnstücke die innere Ellipse.

Um festzustellen, dass alle diese Kaustiken (Hyperbeln, Ellipsen) die selben Brennpunkte wie die Bande haben, braucht es längeres Experimentieren und eine gewisse Menge an Intuition.

Wenn man versucht, den Grenzfall herauszufinden, der diese zwei Bahntypen trennt, dann stösst man auf ein weiteres Phänomen: Bahnen, die durch einen bestimmten Punkt (im Innern auf der grossen Achse) verlaufen, gehen abwechselungsweise immer wieder durch diesen und einen anderen, symmetrisch liegenden Punkt hindurch.



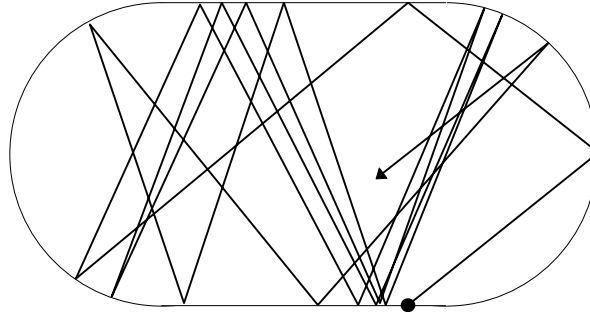
Bei den erwähnten Punkten handelt es sich um die Brennpunkte der Ellipse. Diese Besonderheit des elliptischen Billards kann aus der optischen Eigenschaft der Ellipse hergeleitet werden.

Die Fähigkeit der SchülerInnen, diese wichtige Vermutung mehr oder weniger sauber und allgemein zu beweisen, hängt sehr stark davon ab, über welche Kenntnisse der Eigenschaften der Kegelschnitte sie verfügen (konfokale Kegelschnitte, Tangenten, optische Eigenschaften, ...). Je nach Situation bietet sich für die SchülerInnen hier die Möglichkeit, ihr Wissen über Kegelschnitte in einer interessanten Situation anzuwenden, indem sie versuchen, die Vermutungen zu begründen, die sie aus dem Experiment hergeleitet haben. Sie können auch das Thema Kegelschnitte vertiefen, indem sie die ihnen fehlende Information in Büchern oder im Internet suchen¹⁴.

¹⁴Nützliche Hilfe findet man zum Beispiel bei Bachmann (1993) oder http://www-valence.ujf-grenoble.fr/LICENCE/public_html/cours/WebConiques.html

Andere Tischformen: Das Beispiel von Bunimovich

Das „Stadion“ von Bunimovich, ein Rechteck mit angesetzten Halbkreisen, ist ein wichtiges Beispiel für die ErforscherInnen des mathematischen Billards¹⁵.



Im Rahmen des Projektes spielt diese Tischform aber wegen der Komplexität der Dynamik höchstens die Rolle eines Kuriosums. Dennoch: Hier kann man seltsame „unregelmässige“ Bahnen beobachten, die einem ein Gefühl für den mathematischen Begriff des „Chaos“ vermitteln.

¹⁵ Leonid Bunimovich (<http://www.math.gatech.edu/people/better/bunimovh.vita.html>) hat 1979 anhand dieses Beispiels gezeigt, dass die (nicht strenge) Konvexität der Tischform die Ergodizität nicht ausschliesst. Die Dynamik im Stadion ist ergodisch. Die nicht periodischen Bahnen füllen gleichmässig die ganze Tischfläche aus. (s. Berger, S. 83)

Literatur und Referenzen

Einführung und Simulation

Marcel Berger, "La mathématique du billard", in: Pour la Science, 163, Mai 1991, S. 76-85.

Roger Rugère, "Traité de Billard", Paris: Editions Leymarie, 1988

<http://serendip.brynmawr.edu/chaos/home.html>

<http://serendip.brynmawr.edu/exhibitions/chaos/javacode/ellipse/Feature.html>

(Bedienungsanleitung)

Geometrische Untersuchungen

Christian Frei, Christoph Steiger, "Das Billardproblem: Eine geometrische Sicht", Projektarbeit an der KS Baden unter der Leitung von Marco Bettinaglio, Sommersemester 1997.

Billard im Kreis und in der Ellipse

Heinz Bachmann, Vektorgeometrie, 13. Auflage, Zürich: SABE, 1993, S. 237-285.

http://www-valence.ujf-grenoble.fr/LICENCE/public_html/cours/WebConiques.html

http://www.maa.org/mathland/mathland_3_3.html

http://www.sciencenews.org/sn_arc97/3_1_97/mathland.htm

<http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/Billiards.html>

<http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/BilliardTableProblem.html>

<http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/AlhazensBilliardProblem.html>

Norbert Hungerbühler, "Geometrical Aspects of the Circular Billiard Problem", in: Elemente der Mathematik, 47, 1992, S. 114-117.

Jörg Waldvogel, "The Problem of the Circular Billiard", in: Elemente der Mathematik, 47, 1992, S. 108-113.

Einführung

Zwei Vorschläge zu projektartigem Unterricht	1
Einführung	2
Das mathematische Billard im Vergleich zum realen	3
Die Qualitäten des mathematischen Billard	4
Ein anekdotischer Nachtrag	6

Elementargeometrische Untersuchungen

Ziele und organisatorischer Überblick	7
Kreis	8
Quadrat	10
Quadrat: Gitterdarstellung der Bahn	15
Rechteck	17
Gleichseitiges Dreieck	18
Bemerkungen zu weiteren Tischformen	20

CAMB – Computer Aided Mathematical Billard

Ziele und organisatorischer Überblick	21
Vorbemerkung zur Visualisierung der Kugelbahn	22
Die Experimentier-Software	23
Billard in Polygonen	24
Billard im Kreis	25
Billard in Ellipsen	26
Andere Tischformen: Das Beispiel von Bunimovich	29

Schluss

Literatur und Referenzen	30
--------------------------	----