Elemente zur Kugelgeometrie

Vorwort

Der vorliegende Bericht entstand im Rahmen des Programms "ETH für die Schule". Er greift ein Kapitel der Raumgeometrie heraus: die Kugelgeometrie. Die Wahl dieses Aspektes der Raumgeometrie ist nicht zufällig. Die Kugelgeometrie hat einerseits viele praxisbezogene Anwendungen und schlägt andererseits die Brücke zur nicht-euklidischen Geometrie. Sowohl die konstruktive wie die analytische Lösung der Probleme der Kugelgeometrie gelingt mit wenigen einfachen Hilfsmitteln, die in diesem Bericht eingeführt werden. Zur Konstruktion genügt die senkrechte Eintafelprojektion, zur Rechnung (im wesentlichen) der Seitencosinussatz der sphärischen Trigonometrie. Dieser Bericht möchte dazu anregen, die Kugelgeometrie als Unterrichtsgegenstand aufzugreifen.

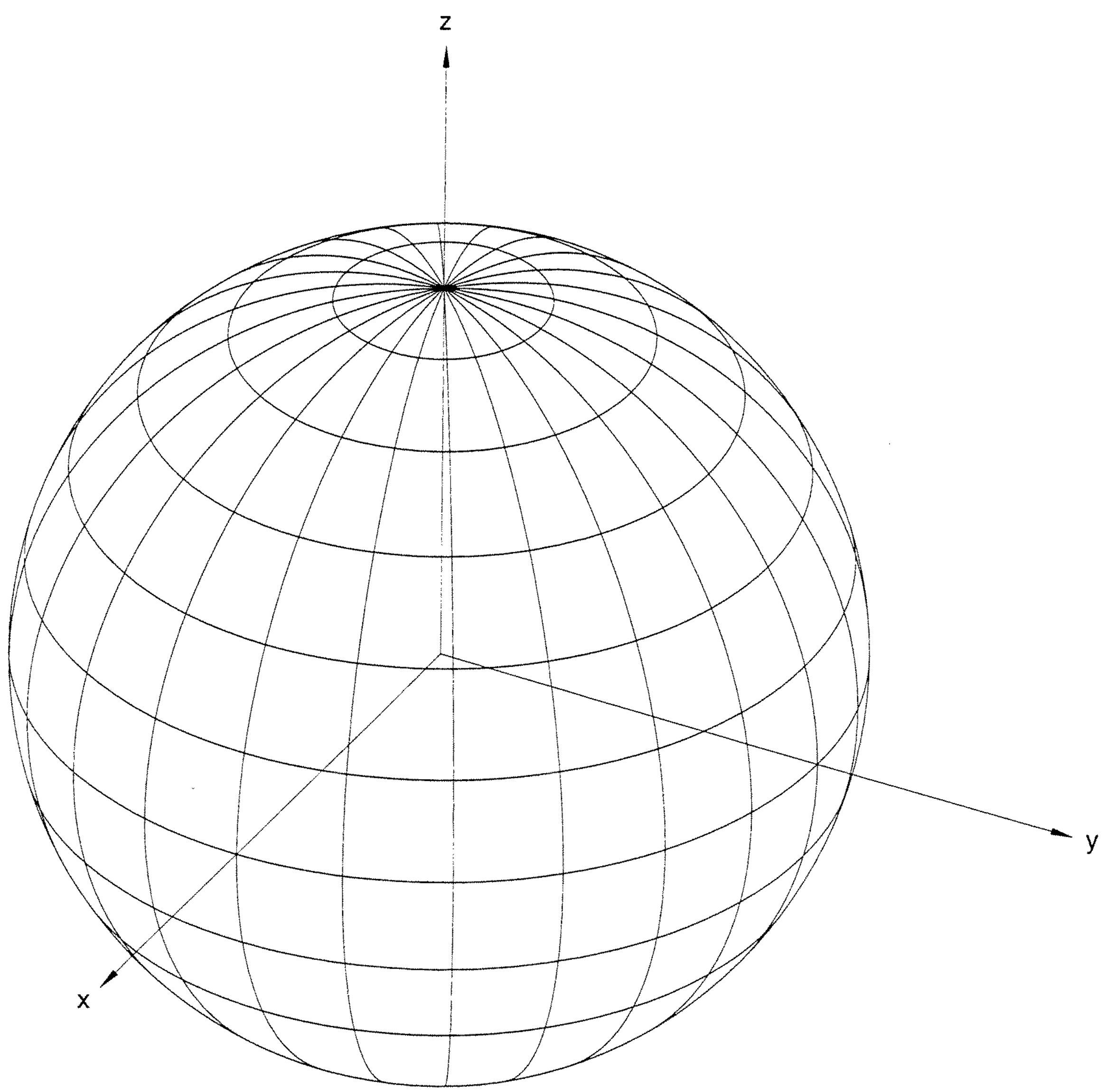
Grundlegende Ideen zur Behandlung der Kugelgeometrie, wie sie in diesem Bericht skizziert werden, finden sich im Büchlein von Herbert Meschkowski: Sphärische Trigonometrie (Kugelgeometrie), Berlin 1965, 5. Aufl. (Mentor Verlag), das mich schon als Schüler begleitet hat.

Es bleibt mir noch zu danken. Ich danke Urs Kirchgraber, dem Leiter des Programms "ETH für die Schule", für seine Unterstützung, sowie Moritz Adelmeyer für die Bereitschaft, das Manuskript zu lesen und zu kommentieren. Jean-Paul David hat das Manuskript sehr sorgfältig durchgesehen. Ihm verdanke ich viele Verbesserungen. Schliesslich möchte ich Frau Gisela Gassmann für die Reinschrift danken.

Sommer 1997 Franz Spirig

1 Bilder von Kugel und Kreis

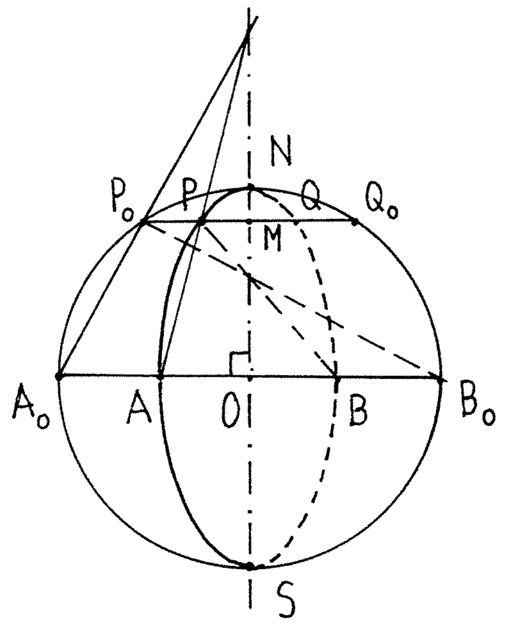
Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, wie anschauliche Bilder einer Kugel, etwa der Erdkugel, mit Längen- und Breitenkreisen skizziert und konstruiert werden können. Dabei werden auch die Grundkonstruktionen eingeführt, die später zur konstruktiven Lösung von Problemen auf der Erdkugel benötigt werden. Die Ellipse wird genauer untersucht, als es für das Zeichnen solcher Bilder unbedingt nötig wäre; dafür sind die Ausführungen dazu eher knapp gehalten. Anschauliche Bilder von Kugeln kann und soll man auch mit Hilfe von Anwenderprogrammen vom Computer zeichnen lassen.



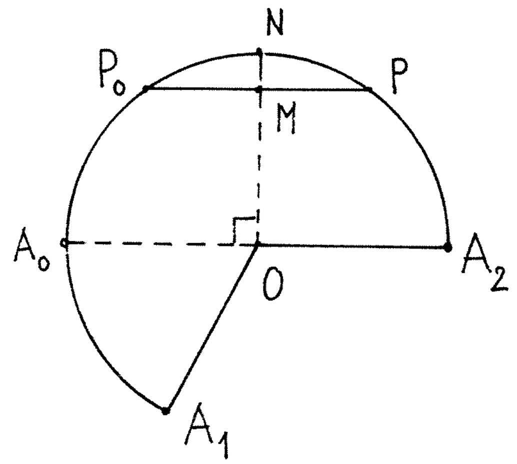
3D Geometer 2.3

Solche Programme sind von H. Klemenz, Kantonsschule Zürcher Oberland, 8620 Wetzikon für den Mac und von E. Holzherr, Kantonsschule Luzern, Alpenquai 36, 6005 Luzern für PC entwickelt worden. Die obige Figur wurde mit dem von Klemenz angebotenen 3D-Geometer gezeichnet. Nach Meinung des Autors sollte man sich aber bei der Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens nicht allein auf solche Programme stützen.
Sowohl Zentral- wie allgemeine Parallelprojektion sind ungeeignet, um anschauliche Bilder einer Kugel zu erhalten (wieso?). Es bleibt die senkrechte Parallel- oder Normalprojektion. Auf eine allgemeine Theorie der Normalprojektion wird verzichtet. Vielmehr sollen die Zusammenhänge mit Modellen und Zeichnungen erarbeitet werden. Es wird angestrebt, die Konstruktionstechniken auf ein Minimum zu reduzieren. Von den Schülerinnen und Schülern wird erwartet, dass sie mit den Begriffen geographische Länge und Breite aus dem Geographieunterricht vertraut sind.

Als Kugel stelle man sich die Erdkugel bzw. einen (kleinen) Globus mit Nordpol N, Südpol S, Längen- und Breitenkreisen vor. (Längenkreise werden hier als Meridiane, d. h. Halbkreise aufgefasst).
Es soll nun ein Bild dieser Kugel gezeichnet werden. Die Kugel wird so gewählt, dass ihr Nullmeridian gerade in der Zeichenblattebene liegt. Eine Kugelhälfte liegt daher vor, die andere hinter dem Zeichenblatt. Das Bild eines Punktes ist seine (senkrechte) Projektion auf das Zeichenblatt, d. h. der Durchstosspunkt der Senkrechten zum Zeichenblatt durch den Punkt mit dem Zeichenblatt. Es ist üblich, die Projektion eines Punktes P mit P' zu bezeichnen. Hier wird aber das Bild eines Punktes P auch mit P bezeichnet, da aus dem Zusammenhang hervorgehen wird, ob mit P der Punkt oder sein Bild gemeint ist.
Der Kreis, auf dem der Nullmeridian liegt, ist der Umriss der Kugel. Seine Punkte fallen mit ihren Bildern zusammen. Einem Bildpunkt innerhalb des Umrisses entsprechen zwei Kugelpunkte. Wird der Nullmeridian im Bild von N nach S im positiven Sinn durchlaufen, so liegen Punkte östlich vom Nullmeridian auf der vorderen Halbkugel. Die Äquatorebene steht senkrecht auf der Erdachse SN, welche auf dem Zeichenblatt liegt, und somit senkrecht auf dem Zeichenblatt. Die Projektion des Äquators ist daher eine Strecke A_0B_0. Auch die Bilder der (anderen) Breitenkreise sind Strecken. Dreht man den Nullmeridian um die Achse SN um einen Winkel λ aus der Zeichenebene heraus (ohne die Kugel mitzudrehen), so geht er in den Längenkreis zur Länge λ über. Ein Punkt P_0 des Nullmeridians wandert dabei auf einem Breitenkreis. Die Projektion des Längenkreises ist (für $\lambda \neq \pm 90^o$) eine halbe Ellipse. Zur Veranschaulichung schneide man aus Papier eine halbe Kreisscheibe aus, deren Radius gleich dem Kugelradius ist, und klebe ihren Durchmesser auf die Achse SN der Zeichnung.



Aufgabe:
Es soll ein Papiermodell hergestellt werden. Dazu wird ein Kreissektor ausgeschnitten, längs A_0O und NO gefaltet und OA_1 und OA_2 zusammengeklebt.



Zeichne die Winkel ein, welche der Länge λ und der Breite φ von P entsprechen (wenn A_0, P_0 auf den Nullmeridian liegen). Schneide zusätzlich einen Kreissektor aus, der so ins Modell geklebt werden kann, dass sein Bogen den Bogen P_0P des Breitenkreises darstellt.

Aufgabe:
Zeichne ein Bild der Erdkugel mit dem Nullmeridian auf dem Zeichenblatt und einem Punkt P. Bestimme die geographische Breite φ von P.

Das Bild des Breitenkreises durch P ist eine zum Bild A_0B_0 des Äquators parallele Strecke P_0Q_0. Die Breite φ von P ist der Winkel A_0OP_0, wobei O der Erdmittelpunkt ist.

Aus dieser einfachen Aufgabe soll schrittweise eine Konstruktion entwickelt werden, mit der das Bild eines Punktes auf der Erdkugel mit gegebener Länge und Breite gezeichnet werden kann.
Um den Komplementwinkel NOP der Breite φ in wahrer Grösse zu konstruieren, wird das Bild A_0B_0 des Äquators nicht benötigt.
Das Bild P_0Q_0 des Breitenkreises durch P steht senkrecht auf der Erdachse SN. Der gesuchte Winkel ist NOP_0 oder NOQ_0.
Man kann sich auch vorstellen, dass die Kugel um die Achse SN gedreht wird, bis P in die Zeichenebene fällt.
Oder dass der Längenkreis durch P umgeklappt, d. h. um seinen Durchmesser SN in die Zeichenebene gedreht wird. P wandert dabei auf einem Breitenkreis.

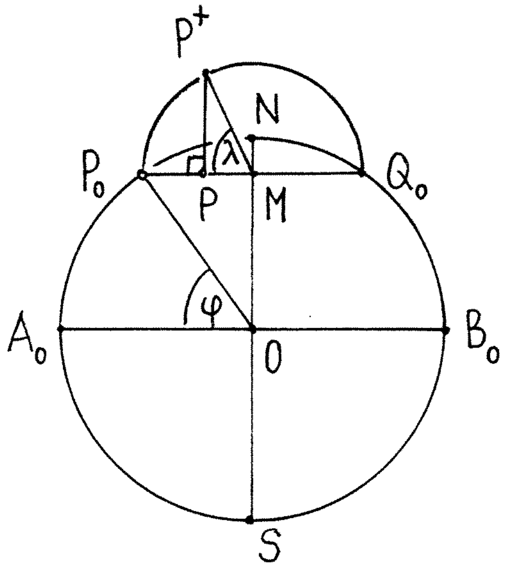
Aufgabe:
Gegeben ist ein Bild der Erdkugel mit Mittelpunkt O und dem Nullmeridian auf dem Zeichenblatt, das Bild A_0B_0 des Äquators und eines Punktes A auf dem Äquator (auf der vorderen Halbkugel). Bestimme die Länge λ von A, d. h. den Winkel A_0OA in wahrer Grösse, wenn A_0 auf dem Nullmeridian liegt.

Hier führt eine Drehung des Äquators um seinen Durchmesser A_0B_0 um 90^0 zum Ziel. Eine solche 90^0-Drehung heisst auch Umlegung. Eine Umlegung ist eine spezielle Umklappung, bei der eine zum Zeichenblatt senkrechte Ebene umgeklappt wird.

Aufgabe:
Gegeben ist ein Bild der Erdkugel mit dem Nullmeridian auf dem Zeichenblatt und einem Punkt P (auf der vorderen Halbkugel). Bestimme die Länge λ und die Breite φ von P.

P liegt auf einem Breitenkreis mit Bild P_0Q_0. Genau so wie in der vorherigen Aufgabe der Äquator umgelegt wurde, wird jetzt der Breitenkreis umgelegt, d. h. um seinen Durchmesser P_0Q_0 um 90^0 in die Zeichenebene gedreht. Dabei wandert P auf einem Kreis, dessen Bild eine zur Drehachse P_0Q_0 senkrechte Strecke ist.

Die Lösung dieser Aufgabe zeigt die folgende Figur.



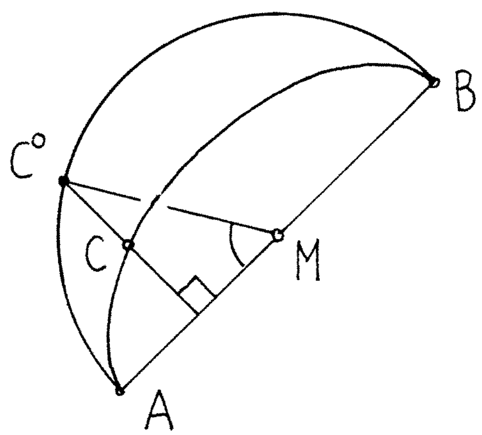
Dabei wurde angenommen, dass der Nullmeridian durch A_0 geht. P liegt dann östlich vom Nullmeridian. Sind umgekehrt Länge und Breite eines Punktes auf der Erdkugel gegeben, so kann sein Bild konstruiert werden.

Aufgabe:
Gegeben sind die Länge λ und die Breite φ eines Punktes P auf der Erdkugel. Konstruiere seinen Bildpunkt (im Bild der Erdkugel mit dem Nullmeridian auf dem Zeichenblatt). Wähle den Nullmeridian so, dass P auf der vorderen Halbkugel liegt.

Die Konstruktionen, die zur Lösung dieser Aufgabe führen, lassen sich zu folgenden zwei Grundkonstruktionen verallgemeinern.

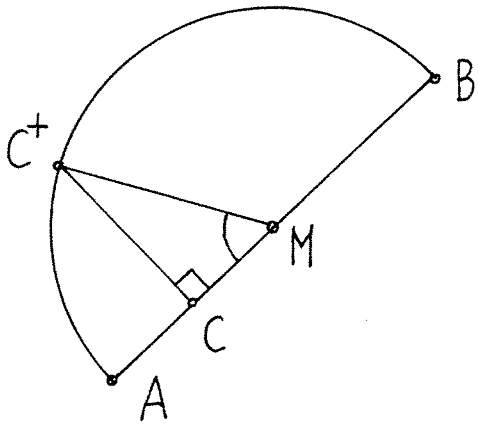
1. Grundkonstruktion

Von einem Halbkreis über AB ist der Durchmesser AB auf dem Zeichenblatt und das Bild eines Punktes C auf dem Halbkreis gegeben. Der Winkel AMC soll in wahrer Grösse konstruiert werden, wobei M der Mittelpunkt von AB ist.
Der umgeklappte Halbkreis ist ein Halbkreis auf dem Zeichenblatt über AB. Die Senkrechte zu AB durch den Bildpunkt von C schneidet den Halbkreis in C^0. Der gesuchte Winkel ist AMC^0.



2. Grundkonstruktion

Auf dem Zeichenblatt ist die Strecke AB mit Mittelpunkt M gegeben. Sie ist das Bild eines Halbkreises über AB. Es soll das Bild eines Punktes C auf dem Halbkreis konstruiert werden, der durch den Winkel AMC gegeben ist.
Der umgelegte Halbkreis ist ein Halbkreis auf dem Zeichenblatt über AB. C^+ ist ein Punkt auf diesem Halbkreis, so dass der Winkel AMC^+ gleich dem gegebenen Winkel AMC ist. Die Senkrechte zu AB durch C^+ schneidet AB im gesuchten Bildpunkt.



Auf diese beiden Grundkonstruktionen wird später zur konstruktiven Lösung von Problemen auf der Erdkugel zurückgegriffen.
Um das Bild eines Längenkreises zu zeichnen, können Bilder von Kugelpunkten mit gleicher Länge und verschiedener Breite konstruiert werden. Es ist jedoch zweckmässig, nur das Bild des Punktes A auf dem Längenkreis und dem Äquator zu bestimmen, und dann eine einfachere Ellipsenkonstruktion anzuwenden.
Die Ellipse soll nun anhand der ersten Figur genauer untersucht werden. Sie ist das Bild eines Kreises und entsteht auf folgende Weise: Ein Kreis wird um einen Durchmesser SN aus der Zeichenebene herausgedreht und anschliessend auf diese senkrecht projiziert. Eine Ellipse ist durch ihre Achsen bestimmt. In der Figur ist die grosse Achse NS, die kleine Achse AB. Die Längen der Halbachsen werden mit a und b bezeichnet: $a = \overline{ON}$, $b = \overline{OA}$. Es gilt $\overline{MP} : \overline{MP_0} = b : a$ (wieso?) bzw. $\overrightarrow{MP} = k\ \overrightarrow{MP_0}$ mit $k = \pm\frac{b}{a}$. Die Abbildung, welche P_0 auf P abbildet, heisst axiale Streckung oder normale Affinität. Die Achse ist die Gerade $[SN]$, der Streckfaktor bzw. das Affinitätsverhältnis ist k (wobei hier $|k| < 1$ ist). Die Ellipse kann als normalaffines Bild eines Kreises definiert werden, wobei die Affinitätsachse ein Kreisdurchmesser und der Betrag des Affinitätsverhältnisses kleiner als eins ist. Das Bild eines Kreises bei einer beliebigen normalen Affinität, d. h. (a) mit beliebiger Achse und (b) mit beliebigem Verhältnis, ist wieder eine Ellipse im Sinne dieser Definition:

(a) Wählt man als Drehachse statt des Kreisdurchmessers SN eine dazu parallele Gerade in der Zeichenebene und dreht um denselben Winkel, so entsteht eine parallel verschobene

Ellipse.

Man kann auch abbildungsgeometrisch argumentieren: Führt man ein xy-Koordinatensystem mit Ursprung O ein, so gilt: Eine axiale Streckung an einer zur y-Achse parallelen Achse $x = v$ mit Streckfaktor k ist die Verkettung einer axialen Streckung an der y-Achse mit Streckfaktor k und einer Translation um $(1-k)v$ in x-Richtung. Wird ein Kreis um O an der y-Achse und an einer dazu parallelen Geraden mit dem gleichen Faktor gestreckt, so sind die Bilder also kongruent.

(b) Eine axiale Streckung an der x-Achse mit Streckfaktor k ist die Verkettung einer zentrischen Streckung an O mit dem Streckfaktor k und einer axialen Streckung an der y-Achse mit Streckfaktor $1/k$. Bei der zentrischen Streckung geht aber ein Kreis in in einen Kreis über, und wenn $|k| > 1$ ist, so ist $|1/k| < 1$. Eine nicht-abbildungsgeometrische Begründung für (b) wird weiter unten gegeben.

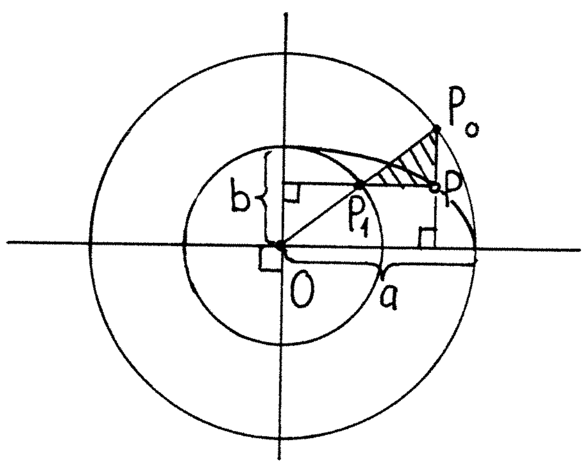
Eine normale Affinität ist durch ihre Achse, einen Punkt, der nicht auf der Achse liegt, und seinen Bildpunkt bestimmt. Sind z. B. die Punkte A_0 und A gegeben, so ist das Bild P von P_0 bestimmt. P liegt auf der Bildgeraden der Geraden $[A_0P_0]$. Die Gerade $[A_0P_0]$ und ihre Bildgerade schneiden sich auf der Achse $[SN]$. Ebenso kann der Bildpunkt P von P_0 mit Hilfe der Punkte B_0 und B konstruiert werden.

Aufgaben:

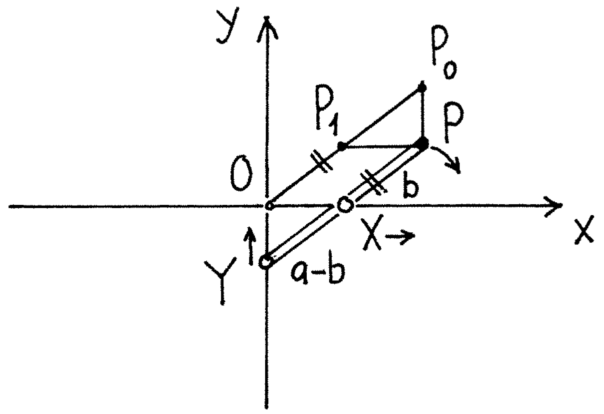
* Konstruiere einen Punkt samt Tangente einer Ellipse, welche durch die Achsen gegeben ist.

* Konstruiere ein Bild der Erdkugel mit einem Gradnetz von 15^0 zu 15^0 aus Längen- und Breitenkreisen. Wähle den Nullmeridian auf dem Zeichenblatt und konstruiere zuerst die Bilder von Punkten auf dem Äquator mit der Länge $15^0, 30^0 \ldots$

Eine Ellipse mit gegebenen Achsen der Länge $2a$ und $2b$ kann punktweise konstruiert werden durch axiale Streckung eines Kreises mit Radius a an einem Durchmesser mit Streckfaktor $b:a$. Darauf beruht die sogenannte Gitter-oder Fähnchenkonstruktion:

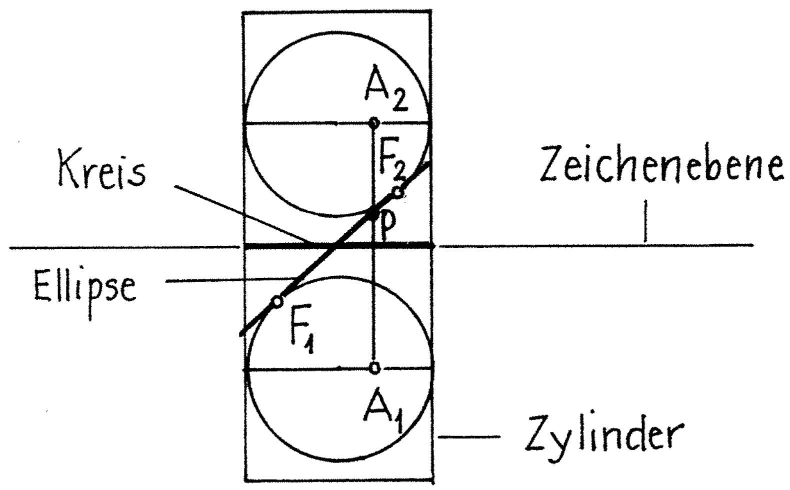


Von dieser Konstruktion lässt sich die Papierstreifenkonstruktion und damit das Prinzip eines Ellipsenzirkels herleiten (siehe E. Ch. Wittmann: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig 1987(Vieweg)).



Auf einer Strecke YP wird ein Punkt X gewählt. Gleitet dieser Punkt X auf der x-Achse und der eine Endpunkt Y der Strecke auf der y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so beschreibt der andere Endpunkt P eine Ellipse.
Mit der Idee der Papierstreifenkonstruktion lässt sich leicht die kleine Achse einer Ellipse konstruieren, von der ein Punkt P und die grosse Achse gegeben ist.
Aus der Gitterkonstruktion folgt weiter, dass die Ellipse auch aus einem Kreis mit Radius b durch axiale Streckung mit dem Streckfaktor $k = a : b > 1$ hervorgeht. Die Streckachse liegt auf der kleinen Achse der Ellipse. Diese axiale Streckung, welche P_1 auf P abbildet, kann wie folgt interpretiert werden. Eine Ebene schneide die Zeichenebene in einer Geraden durch die kleine Achse der Ellipse. P_1 ist die Projektion eines Punktes dieser Ebene auf die Zeichenebene. Wird die Ebene in die Zeichenebene umgeklappt, so fällt der Punkt auf P. Die Ebene ist durch die Schnittgerade mit der Zeichenebene und durch den Neigungswinkel $\arccos(b/a)$ gegenüber der Zeichenebene bestimmt.

Daraus folgt der **Satz**:
Eine Ebene schneidet einen Drehzylinder in einer Ellipse.

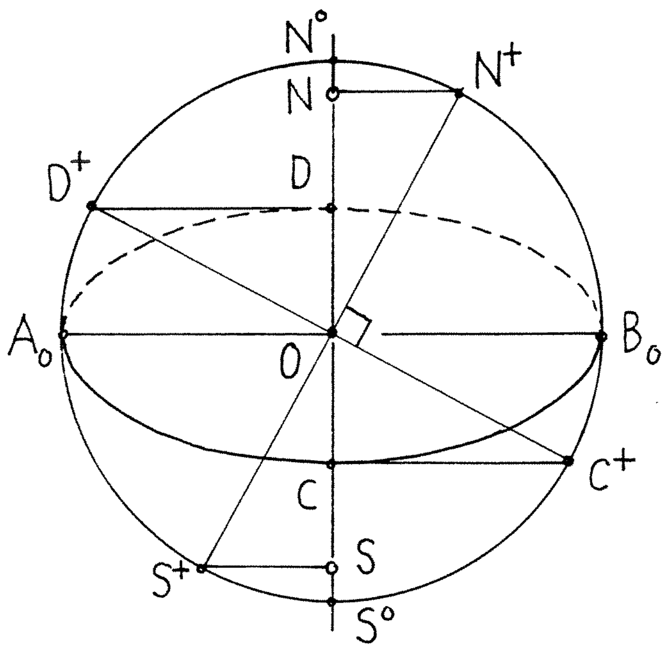


Die bekannteste Ellipsenkonstruktion ist wohl die Gärtner- oder Fadenkonstruktion (siehe z. B. Wittmann). Diese lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Dandelinschen Kugeln begründen.
Die Dandelinschen Kugeln berühren den Zylinder und die Schnittebene. Die Berührungspunkte mit der Schnittebene sind die Brennpunkte F_1 und F_2 der Ellipse. Die Mantellinie des Zylinders durch einen beliebigen Ellipsenpunkt P berührt die Kugeln in A_1 und A_2, wobei $\overline{A_1A_2}$ von P unabhängig ist. Da die Tangentenabschnitte von P an eine Kugel gleich lang sind, gilt:

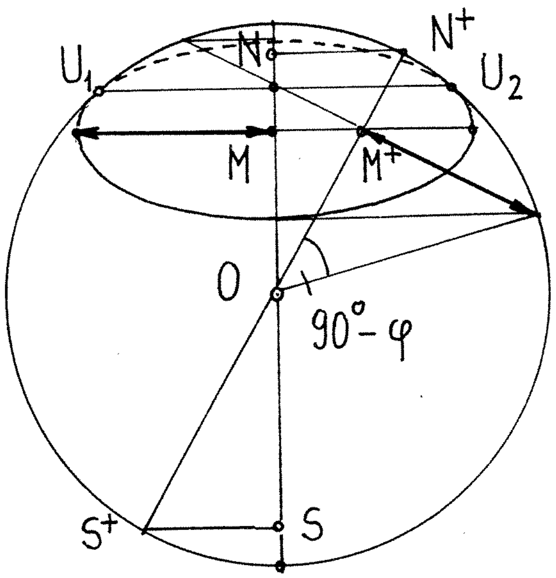
$$\begin{aligned} \overline{PA_i} &= \overline{PF_i}, \\ \overline{F_1P} + \overline{PF_2} &= \overline{A_1A_2} \end{aligned}$$

D. h. die Ellipse ist die Menge aller Punkte P in einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant ist.
Daraus ergibt sich die Gärtner- oder Fadenkonstruktion.

Es soll nun wieder das Hauptthema, das Zeichnen anschaulicher Bilder der Kugel, aufgenommen werden. Man kann einwenden, dass die bis jetzt gezeichneten Bilder so anschaulich gar nicht sind. Das Bild eines Modells der Erdkugel wird anschaulicher, wenn die Erd achse gegenüber der Zeichenebene geneigt ist, so dass der Äquator durch eine Ellipse und nicht durch eine Strecke dargestellt wird. Obwohl es genügen dürfte, ein solches Bild mehr oder weniger richtig zu skizzieren, soll gezeigt werden, wie es konstruiert werden kann (siehe auch P. Gallin, H. Keller, H. Stocker: Perspektive und Axonometrie. Berichte über Mathematik und Unterricht. Zürich 1993 (Hrsg. U. Kirchgraber, ETH)).
Die Kugel wird senkrecht auf die Zeichenebene projiziert. Es ist bequem, sich vorzustellen, dass der Kugelmittelpunkt O auf dem Zeichenblatt liegt. Die Zeichenebene schneidet dann die Kugel in einem Kreis um O, dem Umriss der Kugel. Nach dem Kugelumriss kann die Ellipse mit Mittelpunkt O gezeichnet werden, welche den Äquator darstellt. Die Länge der grossen Halbachse der Ellipse ist gleich dem Kugelradius, die kleine Achse kann vorgegeben werden. Das Problem ist nun, zum gegebenen Bild des Äquators die Bilder der Pole zu konstruieren.

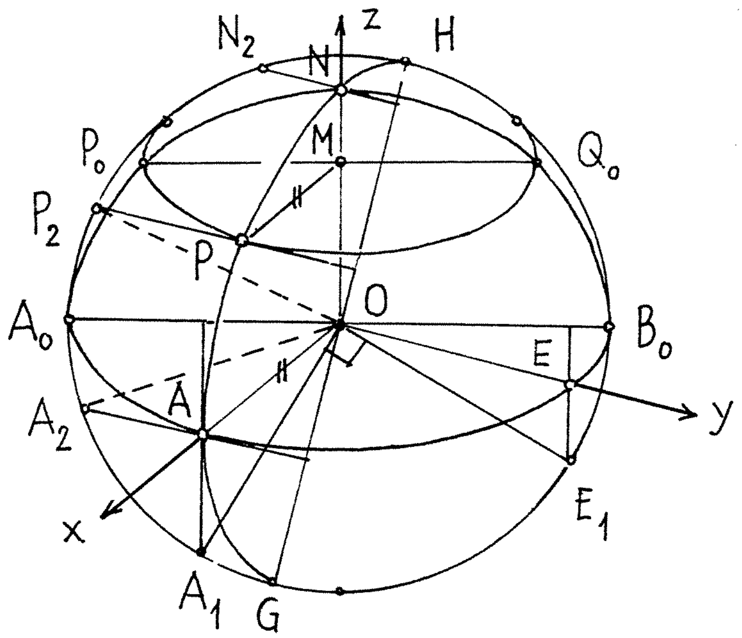


Die zum Zeichenblatt senkrechte Ebene durch die Erdachse SN schneidet die Kugel in einem Kreis, dessen Bild die Strecke S^0N^0 ist. Dieser Kreis schneidet den Äquator in C (und D). Der Nordpol N ist durch den rechten Winkel CON bestimmt. Das Bild des Nordpols (und damit des Südpols) kann mit Hilfe der beiden Grundkonstruktionen konstruiert werden. Kurz gesagt, wird die zum Zeichenblatt senkrechte Ebene durch die Erdachse umgelegt.
Mit Hilfe dieser Umlegung kann auch das Bild eines Breitenkreises, zu beliebiger Breite φ, samt den Umrisspunkten (d. h. den Punkten auf dem Umriss) U_1 und U_2 konstruiert werden.



Aufgabe:
Erkläre die Konstruktion.

Es sind noch die Bilder der Längenkreise zu konstruieren. Dazu ist es zweckmässig, den Begriff der *Pole eines Grosskreises* einzuführen. Ein Kreis auf einer Kugel, dessen Mittelpunkt mit dem Kugelmittelpunkt zusammenfällt, heisst *Grosskreis* (wieso?). Der Äquator ist ein Grosskreis, Längenkreise sind halbe Grosskreise. Interpretiert man einen Grosskreis als Äquator, so heissen der zugehörige Nord- und Südpol die Pole des Grosskreises. Die Pole eines Grosskreises sind also die Durchstosspunkte der Achse des Grosskreises, d. h. der Senkrechten zur Grosskreisebene durch den Mittelpunkt, mit der Kugel. Wird auf dem Grosskreis ein Umlaufsinn festgelegt, so kann man analog zum Nord- und Südpol des Äquators vom Nord- und Südpol des Grosskreises sprechen.
Der Nullmeridian schneide den Äquator im Umrisspunkt A_0. Um das Bild eines Punktes A mit der gegebenen Länge λ auf dem Äquator zu konstruieren, wird dieser um den Durchmesser A_0B_0 in die Zeichenebene umgeklappt. In der Figur ist der Winkel $A_0OA_1 = \lambda$.



Das Bild von A erhält man jetzt z. B. mit der Gitterkonstruktion. Die Pole E und F des Längenkreises bzw. des entsprechenden Grosskreises durch A liegen auf dem Äquator. Ihre Bilder können wie das Bild von A konstruiert werden, da ihre Länge $\lambda \pm 90^0$ bekannt ist. Die Meridianebene durch A steht senkrecht auf OE. Daher steht auch die Schnittgerade dieser Meridianebene mit der Zeichenebene senkrecht auf OE. Da diese Schnittgerade auf dem Zeichenblatt liegt, steht sie auch senkrecht auf dem Bild von OE. Die Schnittgerade geht aber durch die Umrisspunkte G und H des Grosskreises durch A und N. Das Bild des Grosskreises durch A und N ist also eine Ellipse, deren grosse Achse GH senkrecht auf der Bildstrecke von OE steht. Das Bild eines Punktes P auf der Erdkugel mit gegebener Länge λ und gegebener Breite φ kann z. B. durch Umklappen des Längenkreises um seinen Durchmesser GH konstruiert werden. Die Breite $\varphi = AOP$ erscheint dann in wahrer Grösse als Winkel A_2OP_2.
Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die Vektoren $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}$ und $\overrightarrow{ON}$ die Grundvektoren eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit Ursprung O bilden, wenn als Einheit der Kugelradius gewählt wird. Dieses Koordinatensystem kann als Ausgangspunkt für weitere Konstruktionen dienen. Sind etwa von einem Punkt seine rechtwinkligen Koordinaten bezüglich dieses Koordinatensystems bekannt, so kann sein Bild gezeichnet werden, indem man seine Koordinaten in die Zeichnung überträgt. Man spricht dann von *normalaxonometrischer Darstellung.*

2 Eine exemplarische Anwendung der Grundkonstruktionen

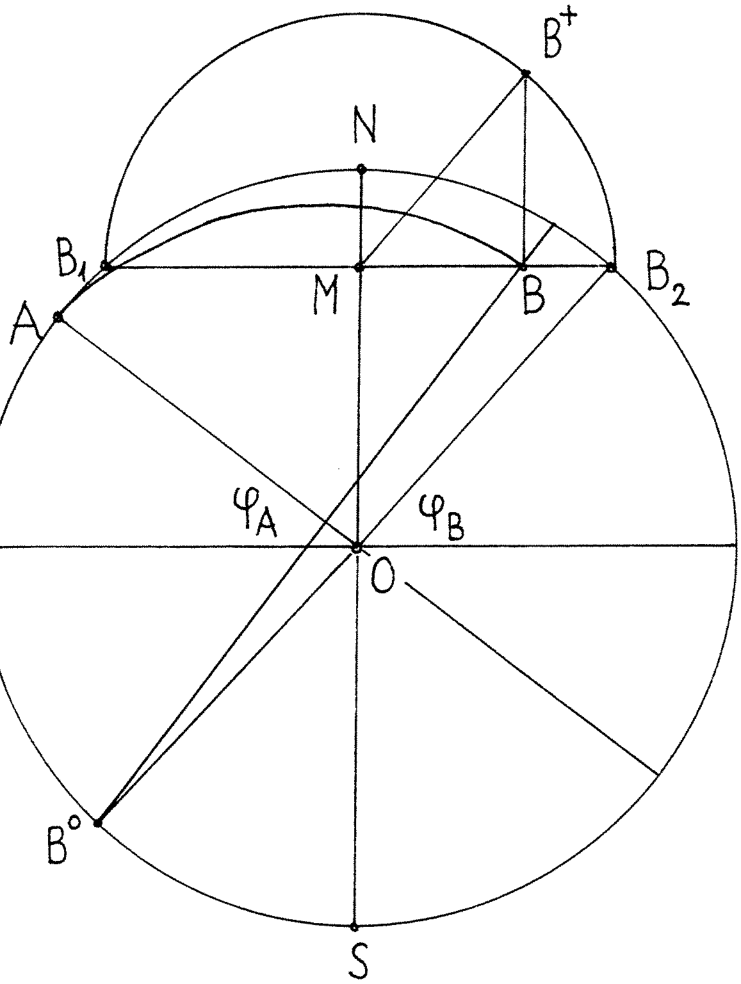
In diesem Abschnitt wird der kürzeste Weg zwischen zwei Orten auf der Erdkugel konstruktiv bestimmt. Eine analytische Lösung wird skizziert.

Zunächst stellt sich die Frage, was für eine Kurve der kürzeste Weg auf der Kugel ist bzw. wie der Abstand zweier Orte auf der Kugel gemessen werden kann.

Die Antwort soll hier nur plausibel gemacht und nicht rigoros begründet werden. Wer die richtige Antwort weiss, sieht wahrscheinlich gar nicht mehr ein, dass da ein Problem vorliegt. Aber wieso folgt der kürzeste Weg zwischen zwei Orten auf der Erdkugel mit gleicher Breite nur dann dem Breitenkreis, wenn die Orte auf dem Äquator liegen? Haben die Orte die gleiche Länge, so beschreibt die kürzeste Verbindung offenbar (!) einen Bogen auf dem Längenkreis, d. h. auf einem Grosskreis. Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf der Kugel ist also ein Grosskreisbogen. Zu diesem Schluss führt auch folgende Überlegung: Der Abstand zweier Punkte auf einem Globus kann mit Hilfe eines Messbandes gemessen werden. Beim Messen des ganzen Umfangs des Globus bildet das Messband einen den Globus berührenden Zylinder, und es ist klar, dass das Messband den Globus längs eines Grosskreises berührt.

Aufgabe:
Gegeben sind zwei Punkte A und B auf der Erdkugel durch ihre Längen λ_A, λ_B und Breiten φ_A, φ_B.
(a) Zeichne ein Bild der Erdkugel sowie die Bildpunkte von A und B. Wähle den Meridian von A auf dem Zeichenblatt und zwar so, dass B auf der vorderen Halbkugel liegt.
(b) Klappe den Grosskreis durch A und B um und messe den Winkel des Grosskreisbogens von A nach B.
Bestimme die Länge des kürzesten Weges von A nach B auf der Erdkugel (Erdumfang=40'000km).
Die folgende Figur zeigt die Lösung für A: San Francisco ($\lambda_A = -122.40°, \varphi_A = 37.75°$) und B: Kloten ($\lambda_B = 8.59°, \varphi_B = 47.45°$).

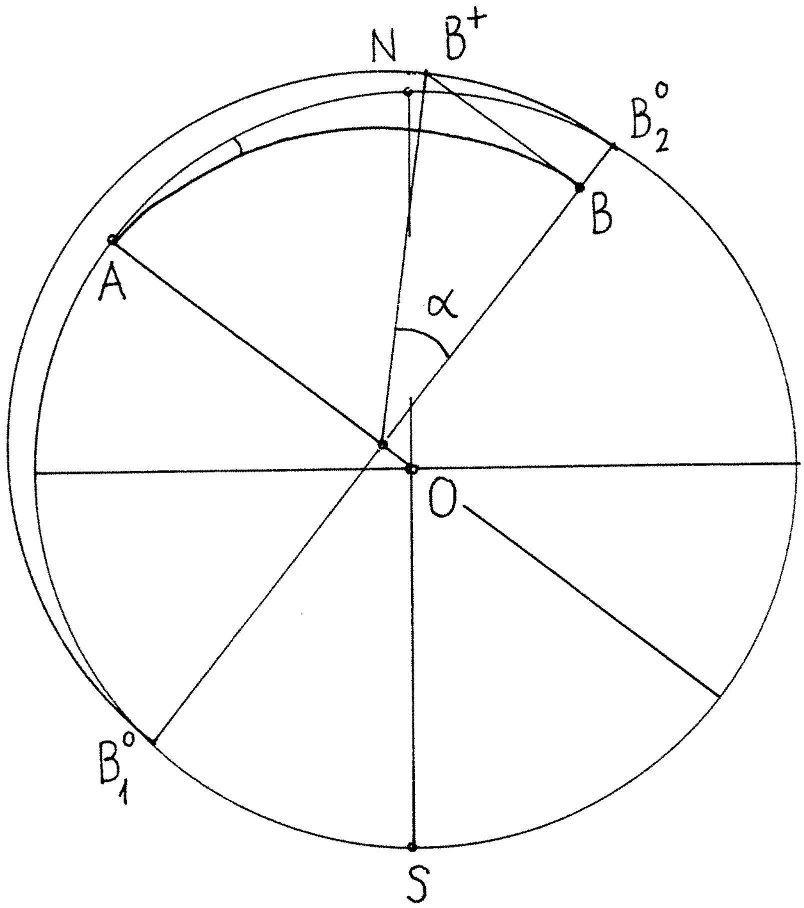
Dabei ist der Winkel $B_1MB^+ = \lambda_B - \lambda_A = 130.99°$. Der Winkel AOB^0 des Grosskreisbogens von A nach B misst 84°. Somit beträgt der Abstand zwischen San Francisco und Kloten $\frac{84°}{360°} \cdot 40'000\text{km}=9300\text{km}$.



Ein Flugzeug, das von San Francisco auf einem Grosskreis nach Kloten fliegt, muss ständig den Kurswinkel ändern. Der Kurswinkel ist der Winkel, den der Weg mit dem Meridian in einem bestimmten Punkt einschliesst. Er gibt also die Himmelsrichtung an, in der sich sich das Flugzeug momentan bewegt. Es sollen nun die Kurswinkel α und β des kürzesten Weges von A nach B in A bzw. B konstruiert werden. Der Winkel α ist der Schnittwinkel zweier Grosskreise: des Meridians durch A und des Grosskreises durch A und B. Er kann genauso bestimmt werden wie der Schnittwinkel $\lambda_B - \lambda_A$ der Längenkreise durch A und durch B. Man braucht nur A als neuen Nordpol und den Grosskreis durch A und B als neuen Längenkreis zu interpretieren.

Aufgabe:
(a) Konstruiere den Kurswinkel α des kürzesten Weges von A nach B in A.
(b) Konstruiere den Kurswinkel β des kürzesten Weges von A nach B in B.
(Hinweis: Wähle die Meridianebene von B auf dem Zeichenblatt).

Lösung von a):



$B_1^0B_2^0$ ist das Bild des Kreises auf der Kugel durch B mit Achse $[OA]$. Der Winkel α wird durch Umlegen dieses Kreises bestimmt. In der Figur misst der Kurswinkel α 31°. Ein Flugzeug, das auf kürzestem Weg von San Francisco nach Kloten fliegt, startet also in Richtung N 31° O.

Zum Schluss und als Ausblick soll das gelöste Problem in einen allgemeineren Zusammenhang gestellt werden. Die Meridiane durch A und B bilden zusammen mit dem kürzesten Weg von A nach B ein sogenanntes *sphärisches Dreieck* ABC, wenn der Nordpol N mit der Ecke C identifiziert wird.

Die Winkel α, β und γ sind Schnittwinkel von Grosskreisen, d. h. von Grosskreisebenen. Die Seiten a, b und c werden ebenfalls als Winkel gemessen: $a=$ Winkel BOC, $b=$ Winkel COA und $c=$ Winkel AOB. Wird als Längeneinheit der Kugelradius gewählt, und werden Winkel im Bogenmass ausgedrückt, so messen die Seiten des sphärischen Dreiecks die Abstände zwischen seinen Ecken auf der Kugel. Auf der Erdkugel entspricht ein Grosskreisbogen von einer Bogenminute 40'000 km/(360·60)=1.852 km, d. h. einer Seemeile.

Die obigen Aufgaben können also auch so formuliert werden: Gegeben ist ein sphärisches Dreieck ABC durch zwei Seiten $a = 90° - \varphi_B$, $b = 90° - \varphi_A$ und dem eingeschlossenen Winkel $\gamma = |\lambda_B - \lambda_A|$ (bzw. $360° - |\lambda_B - \lambda_A|$). Bestimme die restlichen Stücke α, β und c.

Zur analytischen Bestimmung von c aus a, b und γ kann ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt werden, dessen Ursprung mit dem Kugelmittelpunkt O und dessen z-Achse mit $[OC]$ zusammenfällt. Es ist bequem, die xz-Ebene durch A (oder B) zu legen. Von den Punkten A und B sind nun die räumlichen Polarkoordinaten bekannt. Daraus lassen sich die rechtwinkligen Koordinaten von A und B bzw. die Komponenten der Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ bestimmen. Mit Hilfe des Cosinussatzes oder des Skalarprodukts lässt sich schliesslich der Zwischenwinkel c=Winkel AOB dieser Vektoren berechnen. Als Resultat ergibt sich

$$\cos c = \cos a \, \cos b + \sin a \, \sin b \, \cos \gamma,$$

der sogenannte Seitencosinussatz der sphärischen Trigonometrie. Das ist der grundlegende Satz der sphärischen Trigonometrie. Es lässt sich nämlich zeigen, dass jede Aufgabe der sphärischen Trigonometrie letztlich mit dem Seitencosinussatz gelöst werden kann.

Aufgabe:
Berechne die Länge des kürzesten Weges von San Francisco nach Kloten sowie seine Kurswinkel bei Start und Ziel.

Prof. U. Kirchgraber
Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematatik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89–01	H. Walser	Fraktale
89–02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89–03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89–04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90–01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90–02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91–02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91–03	M. Federer	Preistheorie
91–04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92–01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93–04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93–05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93–06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93–07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94–01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94–02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94–03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94–04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95–01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95–02	U.Kirchgraber	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten.
	U. Kirchgraber, N. Sigrist	Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95–03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95–04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
95–05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95–06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme
96–01	W. Burgherr	Schwimmende Prismen mit Schlagseite
96–02	M. Struwe	Sattelpunkte oder Variationsprinzipien in Geometrie und Mechanik
96–03	M. Huber	Warum denn ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar?
97–01	B. Eicke, E. Holzherr	Analysis – mit dem Computer-Algebra-System des TI-92 (Preis: Fr. 8.- incl. MWSt)
97–02	C. Blatter	Notizen zu einer Mathematik fürs Leben
97–03	F. Spirig	Elemente zur Kugelgeometrie