

ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 91-03 Juli 1991

Preistheorie

von Martin Federer, Biel

Preistheorie

Einleitende Bemerkungen

Die vorliegende Arbeit enthält Probleme aus der Volkswirtschaftslehre, die im Mathematikunterricht des Gymnasiums behandelt werden können. Es geht hier also nicht um eine Einführung in die *Preistheorie* als Teil der Volkswirtschaftslehre. Die Schüler des Wirtschaftsgymnasiums sollten die nötigen Grundkenntnisse aus den Ökonomie-Fächern mitbringen. In den andern Gymnasiumstypen wird es nötig sein, bei der Erläuterung der wichtigsten Begriffe etwas weiter auszuholen.

Vorgestellt werden mathematische Modelle, die alle (bis auf eines) dasselbe Ziel haben: die Bestimmung eines Warenpreises. Der Vorteil des gewählten Themas liegt darin, dass

- 1. verschiedene Gebiete der Mittelschulmathematik zum Zuge kommen und
- 2. Probleme der Modellbildung aufgezeigt werden.

Ein anderer Aspekt ist die Rolle der Mathematik in Ökonomie-Büchern: Viele Autoren setzen zwar verschiedene Grössen in funktionale Zusammenhänge, verzichten dann aber auf eine Modellbildung. Es wäre schön, wenn Mathematiklehrer helfen würden, diese Lücken zu schliessen. Und so nebenher könnte auch noch ein anderer Wunsch erfüllt werden: dass sich Ökonomen und Mathematiker auf gemeinsame Bezeichnungen und Begriffe einigen.

1. Nachfrage- und Angebotsfunktion, Marktpreis (im "vollkommenen" Markt)

Für den Käufer eines Produktes hängt die Menge, die er zu kaufen bereit ist, vom Preis dieses Produktes ab. Es besteht also ein Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge x und dem Preis y, der durch eine **Nachfragefunktion** dargestellt werden kann: $x = F_N(y)$. Dabei wird die Menge in "Mengeneinheiten" und der Preis in "Preiseinheiten pro Mengeneinheit" angegeben.

 ${\rm Im}$ Normalfall wird ein tiefer Preis zu einer grossen Nachfrage führen und umgekehrt, das heisst ${\rm F}_{\rm N}$ ist eine monoton fallende Funktion.

Für den Anbieter sieht die Sache anders aus: Er wird bei einem hohen Preis möglichst viel anbieten und umgekehrt. Das heisst die **Angebotsfunktion** $x = F_A(y)$ ist normalerweise monoton wachsend.

Nun ist aber in vielen Marktmodellen nicht der Preis y, sondern die Menge x die Entscheidungsvariable des Anbieters; so wird zum Beispiel nach dem Gewinnmaximierungsprinzip diejenige Menge x produziert (und angeboten), die den höchsten Gewinn abwirft. In solchen Modellen bezeichnet man die zu F_N und F_A inversen Funktionen $F_N^{-1} = f_N$ und $F_A^{-1} = f_A$ als

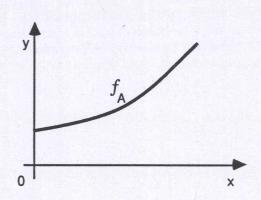
Nachfrage- bzw. Angebotsfunktion:

Nachfragefunktion

f_{N}

Figur 1

Angebotsfunktion



Im allgemeinen ist $f_{\rm N}$ eine monoton fallende, $f_{\rm A}$ eine monoton steigende Funktion. Häufig wird angenommen, dass beides Polynomfunktionen 1. Grades sind.

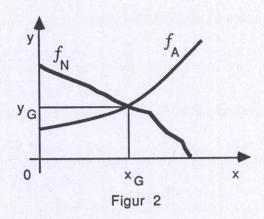
Im Modell <u>des vollkommenen Marktes</u> wird davon ausgegangen, dass für ein bestimmtes Produkt jederzeit ein genau definierter Preis feststeht, den man als **Marktpreis** bezeichnet. Das setzt voraus, dass sich Produzenten und Konsumenten genau über die Marktverhältnisse informieren können. Es bedeutet auch, dass sich das Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage augenblicklich einstellt.

Gleichgewicht besteht in dem Punkt, wo die Angebotsfunktion $f_{\rm A}$ und die Nachfragefunktion $f_{\rm N}$ übereinstimmen (s. Figur 2) :

$$f_{\mathsf{A}}(\mathsf{x}_{\mathsf{G}}) = f_{\mathsf{N}}(\mathsf{x}_{\mathsf{G}}).$$

 $\mathbf{x}_{\mathbf{G}}$ ist dann die Gleichgewichtsmenge und

$$y_G = f_N(x_G)$$
 ist der Marktpreis.



Wird ein Produkt auf dem ganzen Markt zum Marktpreis angeboten bzw. gekauft, so wird der Markt schliesslich "geräumt" und die Nachfrage ist vollständig befriedigt.

Beispiel 1 Nachfrage und Angebot für Röstkaffee seien wie folgt gegeben:

$$f_{N}(x) = -6x + 48$$
 $(0 \le x \le 8)$ $(x \text{ in 1000 kg }, f_{N} \text{ und } f_{A} \text{ in } \frac{Fr.}{kg})$ $f_{A}(x) = 4x - 12$ $(3 < x \le 10)$

Durch Gleichsetzen von $\,f_{\rm N}\,$ und $\,f_{\rm A}\,$ erhält man die Gleichgewichtsmenge

$$x_G = 6 (\cdot 1000 \text{ kg})$$
 und den Marktpreis $y_G = f_N(6) = 12 (\frac{Fr}{\text{kg}})$.

Die Wertetabellen zeigen, wie Preis und Nachfrage, bzw. Preis und Angebot, zusammenhängen:

Nachfrage x	Preis $f_N(x)$
4	24
5	18
6	12
7	6

Angebot x	Preis $f_{A}(x)$
4	4
6	12
8	2.0
10	28

Zusammenfassung:

In diesem Marktmodell sind die Nachfrage- und die Angebotsfunktion jederzeit bekannt. Der Marktpreis y_g stellt sich augenblicklich ein; er ist durch den Schnittpunkt der beiden Funktionsgrafen bestimmt.

2. Das Spinnwebmodell

Was passiert, wenn das Angebot mit Verzögerung auf eine erhöhte Nachfrage reagiert?

Die Preise steigen \rightarrow das Angebot wird erhöht \rightarrow die Preise fallen \rightarrow das Angebot wird eingeschränkt \rightarrow die Preise steigen wieder . . .

Dieser Zyklus wird nach dem Standardbeispiel, dem Markt für Schlachtschweine, «Schweinezyklus» genannt. In diesem Fall ergibt sich die Verzögerung durch eine Trächtigkeitsdauer von 4 Monaten, eine Mastzeit von einem Jahr und eine gewisse Reaktionszeit der Schweinezüchter.

Im Marktmodell wird eine diskrete Zeitvariable t eingeführt; die weiteren Variablen sind:

Pt: Preis in der Periode [t, t+1[,

Nt: Nachfragemenge in der Periode [t, t+1[,

At: Angebotsmenge in der Periode [t, t+1[.

Während im ersten Modell der Preis als Funktion der nachgefragten bzw. angebotenen Warenmenge dargestellt wurde, betrachtet man hier die Nachfrage- bzw. Angebotsmenge als Funktion des Preises:

$$(1)$$
 N_t = $a_0 + a_1$ P_t

mit den Modellannahmen

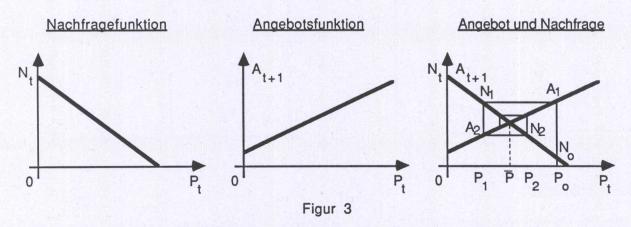
$$(2)$$
 A_t = b₀ + b₁ P_{t-1}

 $a_1 < 0$, $b_1 > 0$ und $a_0 > b_0$.

Die Verzögerung kommt in der Gleichung $A_t = b_0 + b_1 P_{t-1}$ (bzw. $A_{t+1} = b_0 + b_1 P_t$) zum Ausdruck: Das Angebot reagiert erst eine Zeitperiode später auf den neuen Preis.

Das Ziel der Produzenten, die angebotene Menge auch absetzen zu können, wird durch die Gleichung (3) $A_t = N_t$ erreicht.

Die grafische Darstellung von Nt und At+1 erklärt den Namen "Spinnwebmodell":



Interpretation der Figur "Angebot und Nachfrage":

Dem Anfangspreis P_0 entspricht die Nachfragemenge N_0 . Die Anbieter erhöhen jedoch ihr Angebot auf A_1 . Diese Menge kann - entsprechend der Nachfrage N_1 - nur zum Preis P_1 abgesetzt werden. Dieser hat eine Reduktion des Angebots auf A_2 zur Folge und so weiter.

Aus den Modellgleichungen (1) - (3) gewinnt man die Differenzengleichung:

$$a_1P_t - b_1P_{t-1} = b_0 - a_0$$

Wir setzen nun t := t+1 und dividieren beidseitig durch a1:

$$P_{t+1} - \frac{b_1}{a_1} P_t = \frac{b_0 - a_0}{a_1}$$
oder (4)
$$P_{t+1} - a P_t = b \qquad \text{mit } a = \frac{b_1}{a_1} \text{ und } b = \frac{b_0 - a_0}{a_1}$$

ausgehend von einem Anfangspreis P_0 erhält man: $P_1 = a P_0 + b$

$$P_2 = a^2 P_0 + ab + b$$

 $P_3 = a^3 P_0 + a^2b + ab + b$

$$P_3 = a^3 P_0 + a^2 b + ab + b$$
:

$$P_t = a^t P_0 + b \sum_{k=0}^{t-1} a^k$$

also:

(5)
$$P_t = a^t P_0 + b \frac{1-a^t}{1-a} = (P_0 - \frac{b}{1-a}) a^t + \frac{b}{1-a} = C_1 a^t + C_2$$

Aus den Modellannahmen: $a_1 < 0$, $b_1 > 0$, $a_0 > b_0$ folgt $a = \frac{b_1}{a_1} < 0$, das heisst $C_1 a^t$ ist eine alternierende Folge.

Drei Fälle können auftreten:

1. Fall:
$$|a| < 1$$
: P_t konvergiert gegen $\overline{P} = \frac{b}{1-a} = \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}$ (Figur 3, S. 4).

3. Fall:
$$|a| > 1$$
: P_t divergiert.

Bemerkungen:

- Stellt man Pt und At+1 in Abhängigkeit von t grafisch dar, so wird deutlich, wie sich Preis und Angebot im Gegentakt zum Gleichgewicht hin einpendeln.
- 2. Beachtet man, dass in der obigen Fallunterscheidung $a = \frac{b_1}{a_1}$ gilt, so sieht man, wie die Konvergenz von den Steigungen a_1 und b_1 abhängt. Am besten skizziert man für die drei Fälle je ein Spinnwebdiagramm (wie Figur 3, rechts).

Beispiel 2 Angenommen, der Gleichgewichtspreis von Beispiel 1 stelle sich erst nach und nach ein: Kann das Spinnwebmodell die zeitliche Entwicklung des Kaffeepreises sinnvoll wiedergeben?

Dieses Modell benützt die zu $f_{\rm N}$ und $f_{\rm A}$ inversen Funktionen:

$$f_{\rm N}^{-1}$$
: x = 8 - $\frac{1}{6}$ y

oder in der Schreibweise des Spinnwebmodells:

$$N_t = 8 - \frac{1}{6} P_t$$

$$f_A^{-1}$$
: x = 3 + $\frac{1}{4}$ y

$$A_t = 3 + \frac{1}{4} P_{t-1}$$

Die dynamische Entwicklung ergibt sich durch die dritte Modellgleichung: $A_t = N_t$.

Die Koeffizienten der Modellgleichungen lauten: $a_0 = 8$, $a_1 = -\frac{1}{6}$, $b_0 = 3$, $b_1 = \frac{1}{4}$; daraus

gewinnt man
$$a = \frac{b_1}{a_1} = -1,5$$
 und $b = \frac{b_0 - a_0}{a_1} = 30$.

Bei einem Anfangspreis $P_0 = 6 \left(\frac{Fr}{kg} \right)$ wird P_t nach (5):

$$P_t = (6 - 12) (-1,5)^t + 12$$

(Es liegt also der 3. Fall vor.)

Die zeitliche Entwicklung von Preis, Nachfrage und Angebot sieht wie folgt aus:

t	Pt	Nt	At
0	6	7	
1	21	4,5	4,5
2	-1,5	8,25	8,25
3	32,25	2,63	2,63

Die sehr starken Preisschwankungen und sogar negative Preise können nicht der Realität entsprechen. Ein Gleichgewichtspreis kann sich nicht einstellen. Das Spinnwebmodell ist also für dieses Beispiel nicht geeignet. Das Modell von Evans (s. Kap. 3.) kann ihm jedoch gerecht werden.

Zusammenfassung:

Das Spinnwebmodell eignet sich für einen Markt, auf dem das Angebot mit Verzögerung auf eine Änderung bei der Nachfrage reagiert. Der Preis ist periodischen Schwankungen unterworfen. Ist die Steigung der Nachfragefunktion dem Betrag nach grösser als jene der Angebotsfunktion, dann konvergiert der Preis gegen einen Gleichgewichtswert.

3. Das Modell von Evans

In diesem Modell sind die Nachfragemenge N(t), die Angebotsmenge A(t) und der Preis P(t) Funktionen der kontinuierlichen Zeitvariable t:

$$(6) N(t) = a_0 + a_1 P(t)$$
,

$$(7) A(t) = b_0 + b_1 P(t)$$
.

Weiter wird angenommen, dass sich der Preis proportional zum Nachfrageüberschuss ändert:

(8)
$$P'(t) = c(N(t) - A(t))$$
, $c > 0$.

Das bedeutet: Ist zu einem bestimmten Zeitpunkt t die nachgefragte Warenmenge N(t) grösser als die angebotene A(t), dann hat dies eine positive Preisänderung zur Folge und der Preis steigt. Das Umgekehrte gilt, wenn die Angebotsmenge die Nachfragemenge übersteigt. Bei Gleichheit von Angebot und Nachfrage bleibt der Preis konstant.

Aus den obigen Modellgleichungen (6) - (8) gewinnt man die Differentialgleichung:

$$P'(t) - c(a_1 - b_1) P(t) = c(a_0 - b_0)$$

Für die Koeffizienten a_1 , b_1 , a_0 , b_0 gelten dieselben Annahmen wie im Spinnwebmodell. Weiter setzen wir $\alpha = c(a_1 - b_1)$ und $\beta = c(a_0 - b_0)$. Damit vereinfacht sich obige Gleichung zu (9) P'(t) - α P(t) = β .

Die Ähnlichkeit zwischen der Differenzengleichung (4) und der Differentialgleichung (9) ist auffallend. Für den Lösungsansatz wählen wir deshalb in Analogie zur Lösung (5):

$$P(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 . \text{ Durch Einsetzen erhält man sofort } C_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ und für den Anfangspreis}$$

$$P_0 = P(0) = C_1 - \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{also} \qquad C_1 = P_0 + \frac{\beta}{\alpha} \ .$$

Damit lautet die Lösung (10) P(t) =
$$(P_0 + \frac{\beta}{\alpha}) e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}$$
.

Nach den Modellannahmen ist α negativ, das heisst für $t \to \infty$ konvergiert P(t) gegen $\overline{P} = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{c(a_0 - b_0)}{c(a_1 - b_1)} = \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}$.

Beispiel 3 Die Angaben von Beispiel 2 ergeben in diesem Modell die folgenden Gleichungen:

$$N(t) = 8 - \frac{1}{6} P(t)$$

$$A(t) = 3 + \frac{1}{4} P(t)$$

$$P'(t) = c(N(t) - A(t))$$
Wir wählen den gleichen Anfangspreis $P(0) = 6$

$$(\frac{Fr.}{kg}) \text{ und die Konstante } c = \frac{1}{2}. \text{ Dann wird}$$

$$\alpha = c(a_1 - b_1) = -\frac{5}{24}; \beta = c(a_0 - b_0) = \frac{5}{2}$$

$$\text{und } \frac{\beta}{\alpha} = -12.$$

Die Lösungsformel (10) ergibt dann: $P(t) = (6 - 12) e^{-\frac{5}{24}t} + 12$.

Der Preis konvergiert also gegen den Gleichgewichtswert $\overline{P}=12$, der sich im Modell des vollkommenen Marktes als Marktpreis herausgestellt hat. Die zeitliche Entwicklung von Preis, Nachfrage und Angebot sieht wie folgt aus:

t	P(t)	N(t)	A(t)	P'(t)
0	6	7	4,5	1,25
1	7,13	6,81	4,78	1,02
2	8,04	6,66	5,01	0,83
3	8,79	6,54	5,20	0,67
15	11,74	6,04	5,93	0,06

Der Wert der Konstante c hängt von der gewählten Zeiteinheit ab. In diesem Beispiel könnte die Zeiteinheit eine Woche betragen.

In jedem Fall konvergiert P(t) gegen denselben Gleichgewichtspreis \overline{P} , unabhängig von der Wahl von c.

Zusammenfassung:

Das Modell von Evans geht davon aus, dass der Preis dauernd angepasst wird - solange, bis Angebot und Nachfrage gleich sind. Er steigt oder fällt in jedem Fall monoton vom Anfangswert Po gegen den Grenzwert P.

Vergleich des Spinnwebmodells mit dem Modell von Evans

Wählt man für die Nachfrage- und Angebotsfunktion in beiden Modellen dieselben Koeffizienten a_1 , b_1 , a_0 , b_0 und denselben Anfangspreis P_0 , so liefern sie für $\left|\frac{b_1}{a_1}\right| < 1$ dieselbe stationäre Lösung $\overline{P} = \frac{b}{1-a} = \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}$.

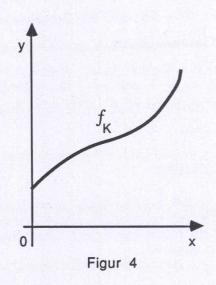
Während im Spinnwebmodell der Preis P_t um die Gleichgewichtslage hin und her pendelt, so steigt oder fällt er im Modell von Evans monoton gegen die Gleichgewichtslage! Die Wahl des geeigneten Modells hängt von der Art des gehandelten Gutes ab.

4. Preisbildung im Monopol

Der Monopolist ist Alleinanbieter eines Produktes. Da er keine Konkurrenz zu befürchten hat, kann er den Preis selbst festsetzen. Er produziert diejenige Menge x seines Produktes, die ihm den höchsten Gewinn y_{G} einbringt. Der Gewinn ist die Differenz von Erlös und Herstellungskosten .

Stellt man die Herstellungskosten y einer Ware in Funktion der hergestellten Menge x dar, so hat der Graf der entsprechenden Kostenfunktion $f_{\rm K}$ etwa folgenden Verlauf:

In vielen Fällen kann $f_{\rm K}$ durch eine monoton wachsende Polynomfunktion 3. Grades approximiert werden.



"Marginale Grössen" in der Ökonomie

Wie entscheidet nun der Produzent, ob sich eine Erhöhung der Produktion lohnt? Zur Beantwortung dieser Frage betrachtet man in der Ökonomie sogenannte marginale Grössen. Wird die Produktionsmenge um eine Einheit erhöht, dann steigen die Herstellungskosten um einen bestimmten Betrag. Diesen Betrag nennt man "marginale Kosten" oder "Grenzkosten".

Bezeichnet man die Erhöhung der Herstellungskosten mit $\Delta f_{\rm K}$ und die Erhöhung der Produktionsmenge mit Δx , so lautet die allgemeine Definition:

Grenzkosten = Erhöhung der Herstellungskosten Erhöhung der Produktionsmenge =
$$\frac{\Delta f_{K}}{\Delta x}$$
 (im diskreten Fall);

oder Grenzkosten = $f'_{\rm K} = \frac{{
m d}f_{\rm K}}{{
m dx}}$ (im kontinuierlichen Fall; $f_{\rm K}$ differenzierbar). Diese Definitionen gelten allgemein für marginale Grössen in der Ökonomie, weitere Beispiele sind etwa "Grenzerlös", "Grenzsteuer".

Gewinnmaximierung

Sei nun $f_{\rm N}$ die Nachfragefunktion und $f_{\rm K}$ die Kostenfunktion; dann bezeichnet man das Produkt aus verkaufter Warenmenge x und Preis $f_{\rm N}({\rm x})$ als **Erlös**: $f_{\rm E}({\rm x}) = {\rm x} \cdot f_{\rm N}({\rm x})$. Die **Gewinnfunktion** lautet dann $f_{\rm G} = f_{\rm E} - f_{\rm K}$.

Bedingung für maximalen Gewinn ist
$$f'_{\rm G}=f'_{\rm E}-f'_{\rm K}=0$$
 (und $f''_{\rm G}<0$) oder $f'_{\rm E}=f'_{\rm K}$

("Grenzerlös = Grenzkosten")

Beispiel 4 Ein Monopolist rechnet bei der Herstellung eines Produktes mit der Kostenfunktion $f_{\rm K}({\rm x})={\rm x}^3$ - 15 x² + 79 x + 20 und der Nachfragefunktion $f_{\rm N}({\rm x})=-1.5{\rm x}+55$.

Die Erlösfunktion lautet $f_{\rm E}({\rm x})={\rm x}\cdot f_{\rm N}({\rm x})=-1,5$ x $^2+55{\rm x}$, der Grenzerlös ist demnach $f'_{\rm E}({\rm x})=-3{\rm x}+55$ und die Grenzkosten $f'_{\rm K}({\rm x})=3{\rm x}^2-30{\rm x}+79$. Schliesslich findet man für die Gewinnfunktion $f_{\rm G}=f_{\rm E}-f_{\rm K}=-{\rm x}^3+13,5$ x $^2-24$ x-20. Die Bedingung "Grenzerlös = Grenzkosten" liefert die Gleichung $-3{\rm x}+55=3{\rm x}^2-30{\rm x}+79$ mit den Lösungen x $_1=1$ und x $_2=8$. Nach der zweiten Bedingung $f''_{\rm G}<0$ wird das Maximum bei x $_2=8$ erreicht. Dies ergibt den Monopolpreis $f_{\rm N}(8)=43$ und den maximalen Gewinn $f_{\rm G}(8)=140$.

Zusammenfassung:

Im Marktmodell des Monopols muss der Anbieter die Nachfragefunktion und die Kostenfunktion kennen. Daraus kann er die Angebotsmenge bestimmen, für die "Grenzerlös = Grenzkosten" gilt. Über die Nachfragefunktion bestimmt er dann den Preis und über die Gewinnfunktion den maximalen Gewinn.

5. Preisbildung im Polypol (d.h. bei vollständiger Konkurrenz)

Ein einzelner Anbieter (Polypolist) kann den Preis seiner Ware nicht beeinflussen, da sein Anteil am gesamten Markt zu klein ist; für ihn ist also der Marktpreis eine Konstante p, das heisst die Nachfragefunktion $f_{\rm N}$ ist konstant für alle x bis zur höchsten nachgefragten Menge x_{max} :

Marktpreis: $y_N = f_N(x) = p$ im Intervall $[0, x_{max}]$

Erlös: $y_E = f_E(x) = y_N \cdot x = p \cdot x$

Gewinn: $f_{G} = f_{E} - f_{K}$, Maximum: $f'_{G} = f'_{E} - f'_{K} = 0$ (und $f''_{G} < 0$)

 $p - f'_{K} = 0$

oder $p = f'_{K}$

("Preis = Grenzkosten")

Im Normalfall ist $f_{\rm K}$ eine Polynomfunktion 3. Grades; dann erlaubt die obige Bedingung die Berechnung der optimalen Angebotsmenge x. (Die Aussage bleibt richtig, wenn $f_{\rm K}$ vom 2. Grad ist; für die Fälle $f_{\rm K}({\rm x})={\rm ax}+{\rm b}$ bzw. $f_{\rm K}({\rm x})={\rm konstant}$ siehe die Bemerkungen auf Seite 11.)

Beispiel 5 Überträgt man Beispiel 4 auf den Fall des Polypols, dann kann man mit derselben Kostenfunktion $f_{\rm K}({\rm x})={\rm x}^3$ - 15 ${\rm x}^2$ + 79 x + 20 rechnen; die Nachfragefunktion ist jetzt aber eine Konstante, zum Beispiel $f_{\rm N}({\rm x})=30$.

Die Gewinnfunktion lautet nun $f_{\rm G}=f_{\rm E}-f_{\rm K}=30~{\rm x}-({\rm x}^3-15~{\rm x}^2+79~{\rm x}+20)$. Die Bedingung "Preis = Grenzkosten" ergibt die Gleichung $30=3{\rm x}^2-30~{\rm x}+79$ mit den Lösungen $x_1=7,94$ und $x_2=2,06$. Die zweite Bedingung $f_{\rm G}^*<0$ ist für $x_1=7,94$ erfüllt, das heisst bei einem Polypolpreis von 30 ist die optimale Produktionsmenge x=7,94; sie liefert den maximalen Gewinn $f_{\rm G}(7,94)=36$.

Bemerkungen:

1. Sollte $f_{\rm K}$ vom 1. Grad sein, dann wird die Grenzkostenfunktion $f_{\rm K}'$ konstant und das Kriterium "Preis = Grenzkosten" ist nicht anwendbar. Sei $f_{\rm K}({\rm x})={\rm ax}+{\rm b}$, dann beträgt der Gewinn $f_{\rm G}={\rm px}-({\rm ax}+{\rm b})$. Liegt der Preis p über dem Wert der Konstante $f_{\rm K}'={\rm a}$, dann wird der maximale Gewinn für die höchste zulässige Menge ${\rm x}_{max}$ erreicht.

Der Konkurrenzkampf wird jedoch dafür sorgen, dass der Preis fällt - bis er den Grenzkostenwert erreicht. Da sich in diesem Fall die optimale Angebotsmenge nicht wie im Normalfall ableiten lässt, wird jeder Anbieter so viel wie möglich produzieren. Die Grenzen sind gegeben durch die jeweilige Produktionskapazität und die Beschränktheit der Nachfrage.

2. Im Extremfall sind die Grenzkosten konstant. Die zu 1. analoge Überlegung führt zum Polypolpreis null! Dieser Fall bedeutet - ökonomisch gesprochen - dass bei der Produktion nur fixe Kosten entstehen; die variablen (von der Warenmenge x abhängigen) Kosten fallen also weg.

Durch die grafische Darstellung der Kosten- und Erlösfunktion kann man sich die Zusammenhänge anschaulich klar machen.

Zusammenfassung:

Im Marktmodell des Polypols hat der einzelne Anbieter im Gegensatz zum Monopol keinen Einfluss auf die Preisbildung. Aus der Kenntnis seiner Kostenfunktion kann er lediglich jene Angebotsmenge bestimmen, die ihm den höchsten Gewinn einbringt: Für diese Menge muss die Bedingung "Preis = Grenzkosten" erfüllt sein.

6. Preisbildung im Oligopol

Mehrere Anbieter bringen dieselbe Ware auf den Markt. Preisabsprachen sind ausgeschlossen (solche bedeuten eine Kartellbildung, diese wiederum entspricht einer monopolähnlichen Situation). Ebenso wird vollständige Konkurrenz vermieden (Fall des Polypols).

Nun wird sich der Preis auf Grund von Annahmen einstellen, die jeder Oligopolist über die anderen macht. Als einfachsten Fall betrachten wir den **Duopol**:

Modellannahmen (Beispiel 6):

- Die beiden Anbieter stellen genau dasselbe Produkt her.
- Die zu produzierende Menge x wird aufgeteilt: $x = x_1 + x_2$.
- Die Nachfragefunktion lautet $f_N(x) = 100 x$
- Die Produktionskosten sind unabhängig von der produzierten Menge x:

$$f_{K}(x) = c = \text{konstant, also sind die Grenzkosten} \quad f'_{K} = 0$$
.

- Die Erlösfunktion lautet $f_{E}(x) = x \cdot f_{N}(x) = 100x - x^{2}$.

Um die Unterschiede zu den bereits behandelten Fällen (Monopol und Polypol) klar zu machen, vorerst die Lösungen in diesen Marktmodellen:

a) Preisbildung bei Absprache (monopolistisches Verhalten)

Bedingung für Gewinnmaximum: Gre

(wie im Monopol für die Gesamtmenge x)

$$f'_{\mathsf{E}} = f'_{\mathsf{K}}$$

$$100 - 2x = 0$$

produzierte Menge:

$$x = 50$$

Verkaufspreis:

$$p = f_N(50) = 50$$

Gesamterlös:

$$f_{\rm E}(50) = 2500$$

Jeder Anbieter produziert 25 Mengeneinheiten zum Preis 50.

b) Preisbildung bei Konkurrenz (polypolistisches Verhalten)

Für diesen Fall muss - entgegen den Modellannahmen - die Nachfragefunktion eine Konstante sein, die auf das Intervall [0, 100] beschränkt ist. Da die Produktionskosten ebenfalls konstant sind, wird sich nach Bemerkung 2, Seite 11, der Extremfall p = 0 einspielen:

maximal produzierte Menge:

$$x = 100$$

Gesamterlös:

$$x \cdot p = 0 \quad (!)$$

Jeder Anbieter produziert möglichst viel zu einem Preis, den er nicht beeinflussen zu können glaubt - im obigen Extremfall also 50 Mengeneinheiten zum Preis 0!

c) Preisbildung im Duopol nach Cournot

Jeder Anbieter rechnet damit, dass die Erhöhung der Produktionsmenge den Preis drücken kann, betrachtet aber den Entscheid des andern als gegeben.

(1) Für den Anbieter 2 stellt sich die Situation so dar:

Nachfragefunktion:

$$f_{N}(x) = 100 - x$$

berücksichtigt man die Aufteilung $x = x_1 + x_2$, so wird daraus $f_N(x_1, x_2) = 100 - x_1 - x_2$; Anbieter 2 betrachtet jedoch nur x_2 als variabel:

$$f_{N_2}(x_2) = 100 - x_1 - x_2$$

Erlösfunktion:

$$f_{E_2}(x_2) = x_2.f_{N_2}(x_2) = x_2.(100 - x_1 - x_2)$$

Bedingung für Gewinnmaximum:

Grenzerlös = Grenzkosten

(wie im Monopol für die Menge x2)

$$f'_{E_2} = f'_{K}$$

$$100 - x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 50 - \frac{x_1}{2}$$

Die von Anbieter 2 zu produzierende Menge x_2 , dargestellt als Funktion der von Anbieter 1 produzierten Menge x_1 , heisst Reaktionsfunktion f_{R_2} :

$$x_2 = f_{R_2}(x_1) = 50 - \frac{x_1}{2}$$

(2) Analog bestimmt Anbieter 1 seine Reaktionsfunktion $f_{\rm R_1}$:

$$x_1 = f_{R_1}(x_2) = 50 - \frac{x_2}{2}$$

(3) Das Gleichgewicht ergibt sich als Lösung des Systems, gebildet durch die beiden letzten Gleichungen:

$$x_1 = x_2 = 33\frac{1}{3}$$

 $x = x_1 + x_2 = 66\frac{2}{3} \implies p = f_N(66\frac{2}{3}) = 33\frac{1}{3}$

Jeder Anbieter produziert $33\frac{1}{3}$ Mengeneinheiten zum Preis $33\frac{1}{3}$.

d) Preisbildung im Duopol nach Stackelberg

Anbieter 1 legt seine Produktionsmenge x_1 fest unter der Annahme, dass Anbieter 2 die Cournot-Reaktionsfunktion $f_{\rm R_2}$ wählt. Anbieter 1 wird als "Preisführer", Anbieter 2 als "Preisfolger" bezeichnet.

Im Beispiel rechnet nun der Preisführer mit $x_2 = f_{R_2}(x_1) = 50 - \frac{x_1}{2}$

Damit setzt er den Preis fest:

$$p = f_N(x) = 100 - x$$

$$= 100 - x_1 - x_2 = 100 - x_1 - (50 - \frac{x_1}{2}) = 50 - \frac{x_1}{2}$$

Sein Erlös wird

$$f_{E_1}(x_1) = p \cdot x_1 = (50 - \frac{x_1}{2})x_1.$$

Bedingung für Gewinnmaximum:

Grenzerlös = Grenzkosten

$$f'_{E_1} = f'_{K}$$

 $50 - x_1 = 0$
 $x_1 = 50$
 $x_2 = 25$, $p = 25$

Der Preisführer produziert 50 Mengeneinheiten zum Preis 25; der Preisfolger produziert 25 Mengeneinheiten zum Preis 25.

e) Allgemeinere Annahmen für die Nachfrage- und Kostenfunktion(en) lauten:

$$f_{N}(x) = mx + q$$
, $f_{K_{i}}(x_{i}) = a_{i}x_{i}^{3} + b_{i}x_{j}^{2} + c_{i}x_{j} + d_{i}$ (für die Anbieter i = 1, 2)

Die Cournot-Lösung führt dann allerdings auf ein System von zwei Gleichungen zweiten Grades mit den Unbekannten x_1 und x_2 .

Zusammenfassung:

Das in diesem Abschnitt für verschiedene Modelle durchgerechnete Beispiel zeigt, dass

- 1. von der Anbieterseite her gesehen das Monopol (Kartell) die günstigste Marktform ist: es bringt den höchsten Erlös (für jeden Anbieter 1250) und den höchsten Preis (50);
- 2. für die Konsumenten vollständige Konkurrenz die günstigste Lösung bedeutet: sie liefert den tiefsten Preis (im Extremfall des Beispiels p = 0).
- die oligopolistischen Lösungen zwischen den genannten Extremfällen liegen mit Preisen zwischen 0 und 50. Sie dürften in Wirtschaftssystemen auftreten, in denen zwar mehrere Anbieter zugelassen sind, Kartellbildung aber verboten ist.

Literatur:

Dürr R. / Ziegenbalg J.: Dynamische Prozesse; F. Schöningh 1984

Friedman J.W.: Oligopoly and the Theory of Games; North-Holland 1977

Hirshleifer J.: Price Theory and Applications; Prentice-Hall 1984

Rommelfanger H.: Differenzen- und Differentialgleichungen; Bibliographisches Institut 1977

Schick K.: Probleme aus der Preistheorie; Diesterweg Salle (5334) 1980

Schick K.: Probleme aus der Produktionstheorie; Diesterweg Salle (5335) 1980

Berichte über Mathematik und Unterricht

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90-01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90-02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90-03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91-02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91-03	M. Federer	Preistheorie