Geometrie aus Schülersicht: Charakteristika und Probleme

(Horst Struve, Köln)

Einleitung

Nach einer weit verbreiteten Vorstellung unter Mathematiklehrern lernen Schüler in ihrem Unterricht im wesentlichen das, was ihnen, den Lehrern, vorschwebt - natürlich nicht in vollem Umfang, natürlich nicht in allen Details, aber "im wesentlichen". Die folgenden Ausführungen möchten zeigen, daß diese Vorstellung - bezogen auf den Geometrieunterricht - "im wesentlichen" falsch ist. Dazu wird im ersten Teil der Arbeit eine empirische Untersuchung präsentiert, die es erlaubt, das geometrische Wissen von Schülern zu charakterisieren. Im zweiten Teil werden die Untersuchungsergebnisse erklärt. Im letzten Teil werden schließlich Folgerungen für den Unterricht gezogen.

1. Eine empirische Untersuchung

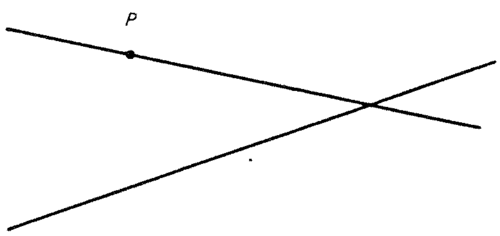
A. Schoenfeld stellt in seinem Buch *Mathematical Problem Solving* (Orlando, 1985) eine empirische Untersuchung vor, in der er das Verhalten amerikanischer Schüler im Alter der Sekundarstufe I beim Lösen geometrischer Probleme analysiert. Das Verhalten der Schüler untersucht Schoenfeld im Hinblick auf die folgenden vier Aspekte.

Resources bezeichnet das Wissen, das jemand zum Problemlösen einsetzen kann, etwa die Kenntnis von Begriffsdefinitionen, von mathematischen Lehrsätzen und Methoden. *Heuristics* wird die Menge der heuristischen Strategien genannt, über die jemand verfügt - beispielsweise "Variation der Aufgabe", "Analogie" (vgl. G. Polya, Schule des Denkens, Bern 1967[2]). Mit *Control* bezeichnet Schoenfeld das Vermögen, sein eigenes Verhalten in einem Problemlöseprozess kontrollieren und beurteilen zu können. Hierzu gehört das Vorgehen nach einem Plan, wie auch die Entwicklung eines Gefühls für die "Nähe" einer Lösung. Das *Belief System* einer Person ist seine "mathematische Weltanschauung". Dies betrifft seine Einschätzung der Bedeutung von Mathematik (etwa als eine Hilfswissenschaft, als eine eigenständige Wissenschaft, als etwas, was auch einen ästhetischen Wert besitzen kann), seine Auffassung von der Natur der mathematischen Objekte, der Charakteristika mathematischer Methoden und sein Verständnis von Beweisen. Das Belief System einer Person liefert den Rahmen für seine Resources, Heuristics und Control und ist in dieser Hinsicht der grundlegende Aspekt. Unser Interesse ist auf das Belief System von Schülern gerichtet.

Um die Ergebnisse von Schoenfeld richtig einschätzen zu können, ist es notwendig, zumindest ein typisches Protokoll eines Problemlöseprozesses wiederzugeben.

Zwei Schüler, A und B, erhalten die folgende *Aufgabe*:

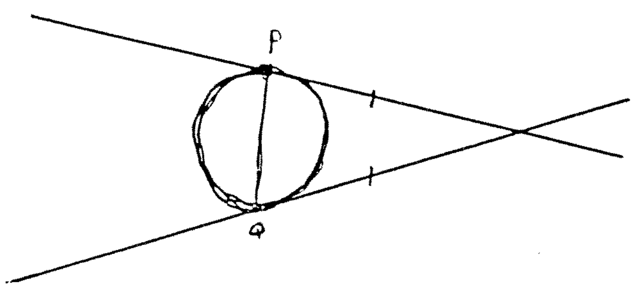
Gegeben seien zwei sich schneidende gerade Linien und ein Punkt P auf einer der beiden.



Zeige, wie man nur mit Hilfe eines Zirkels und eines Lineals einen Kreis konstruieren kann, der die beiden geraden Linien als Tangenten besitzt und P als einen Berührpunkt.

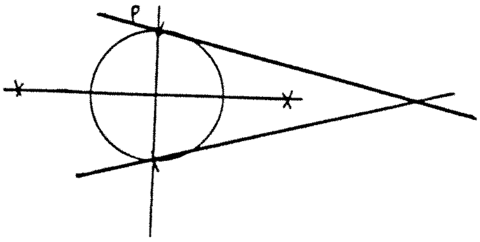
A und B lesen sich die Aufgabe durch. - Eine halbe Minute schweigen sie dann.

1 A: Wir können durch P eine Linie ziehen, so daß ein gleichschenkliges Dreieck entsteht.



Wir halbieren dann PQ und zeichnen dann den Kreis.

Ohne weitere Diskussion beginnen die beiden mit der vorgeschlagenen Konstruktion. Das Resultat ist



2 B: Er scheint die Linien zu schneiden!

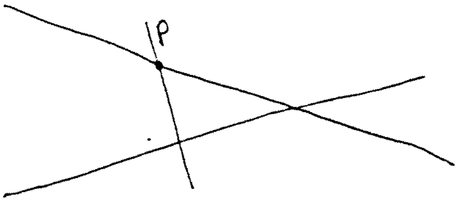
3 A: Ja; ich denke das liegt an ... an ...

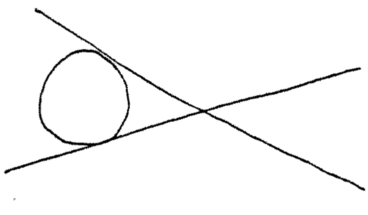
4 B: Möglicherweise liegt das an unserer ungenauen Durchführung ...

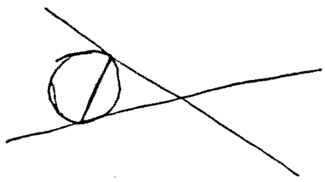
Der Interviewer gibt den beiden einen präziseren Zirkel. Sie führen ihre Konstruktion noch einmal sehr sorgfältig durch und begutachten dann das Ergebnis.

5 A: Er schneidet ... er schneidet ...

Die beiden machen Skizzen auf dem Zeichenblatt, um auf eine Lösungsidee zu kommen.







6 A: Wir müssen eine Senkrechte konstruieren ...

B unterbreitet einen anderen Vorschlag.

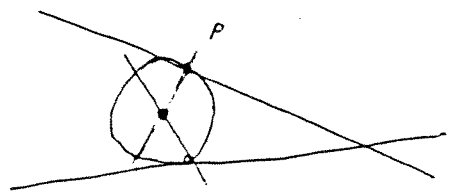
7 B: Geht es um Winkelhalbierende?

8 A: Können wir versuchen.

9 B: In dem Bild *(deutet auf die viertletzte Figur)* sieht es so aus, als ob es sich um eine Winkelhalbierende handelt.

B zeichnet mit einem Finger verschiedene Winkelhalbierende, als A plötzlich aud seinen Vorschlag zurückkommt.

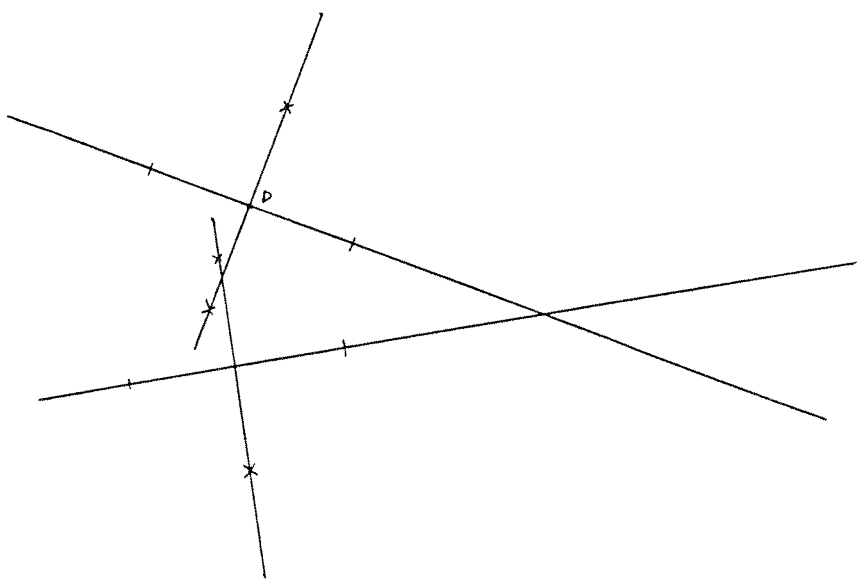
10 A: O.K. - Nehmen wir an, wir haben hier eine Senkrechte und hier eine *(deutet auf die von ihm konstruierte Figur)*



Sie beginnen die - korrrekte - Konstruktion sorgfältig durchzuführen. Der Interviewer unterbricht sie nach einiger Zeit mit der Frage

11 I: Könnt ihr mir erklären, was ihr da macht?
12 A: Wir versuchen hier und hier *(deutet auf P und den gegenüberliegenden Punkt)* eine Senkrechte zu errichten.
13 I: Wie kommt ihr zu diesem Punkt? *(deutet auf den P gegenüberliegenden Punkt)*
14 A: wir haben gemessen.
15 I: Aus welchem Grund denn?
16 A: Er soll denselben Abstand vom Schnittpunkt haben wie P.
17 I: Und warum soll er das?
18 A: Es sieht so aus, als ob er das wäre.

Die Konstruktion wird bis zum Ende durchgeführt mit dem folgenden Resultat.



19 I: Na, klappt's?

20 A: Nein.

21 I: Was ist denn verkehrt?

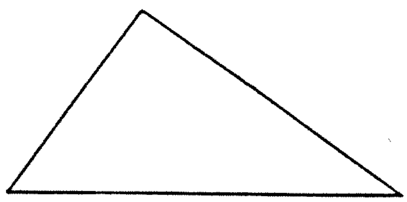
22 A: Dieses Stück hier ist zu kurz *(deutet auf die Verbindungsstrecke von P und dem Schnittpunkt der beiden Orthogonalen - eine zutreffende Beobachtung)*

23 I: Nun gut, gewisse Ungenauigkeiten sind ja durch die Konstruktionsgeräte bedingt. - Könnt ihr mir denn sagen, ob Euer Vorschlag im Prinzip richtig ist oder nicht?

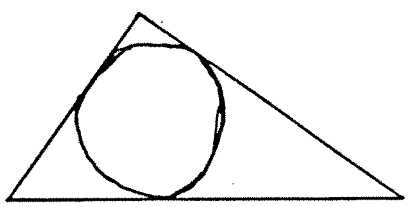
24 B: Unser Fehler liegt wahrscheinlich darin, daß wir den zweiten Punkt *(deutet auf den P gegenüberliegenden Punkt)* im selben Abstand vom Schnittpunkt gewählt haben.

Zur Diskussion des Problemlöseverhaltens der beiden Schüler ist es hilfreich ein alternatives Verhalten als Kontrast gegenüberzustellen. Deshalb gab Schoenfeld einem Mathematiker, dessen Forschungsgebiet nicht die Geometrie ist, eine vergleichbare Aufgabe. Das zugehörige Protokoll ist das folgende:

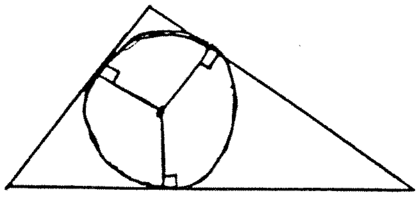
Aufgabe: Konstruiere nur mit Hilfe eines Zirkels und eines Lineals den Inkreis des gegebenen Dreiecks (Der Inkreis ist ein dem Dreieck eingeschriebener Kreis, der die Seiten des Dreiecks als Tangenten besitzt.)



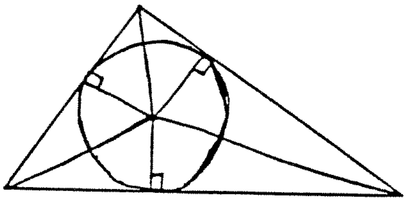
1 Nun gut, das Bild wird so aussehen.



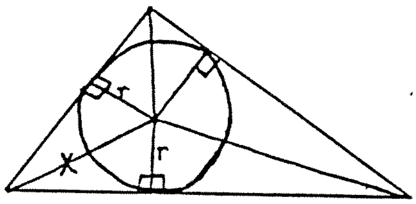
2 Das Problem ist offenbar, den Mittelpunkt zu finden ... Was weiß ich denn über den Mittelpunkt? - Ich benötige noch ein par Hilfslinien. Gut, die Radien stehen senkrecht auf den Tangenten in den Berührpunkten, so daß man folgendes erhält



3 Das sieht aber noch nicht gut aus. Irgendetwas fehlt noch. - wie wäre es, wenn ich die Eckpunkte des Dreiecks mit dem Mittelpunkt des Kreises verbinde?



4 Das ist besser. Da müßten eigentlich kongruente Dreiecke zu entdecken sein. Wollen mal sehen. Alle Radien sind kongruent ... und dies sind alles rechte Winkel ... und diese Linie ist zu sich selbst kongruent *(markiert x in der Zeichnung)*



5 Aha! Diese beiden Dreiecke sind kongruent! *(zeigt auf die beiden Teildreiecke beim Punkt A)* Großartig! Es ist "SSW". Alles klar: Der Mittelpunkt liegt auf den Winkelhalbierenden. *(Dreht sich zum Interviewer um.)* Ich hab's gelöst. - Soll ich die Konstruktion noch durchführen?

Im Hinblick auf die oben genannten vier Aspekte analysiert und vergleicht Schoenfeld das Verhalten der beiden Schüler und des Mathematikers. Auf die ersten drei Aspekte gehen wir nur kurz ein, die unterschiedlichen Belief Systems analysieren wir ausführlicher.

Die beiden Schüler bringen fast kein geometrisches Wissen (*Resources*) in ihren Problemlöseversuch ein. Lediglich die Kenntnis, daß der Mittelpunkt eines Kreises auch Mittelpunkt jedes Durchmessers ist, wird von ihnen benutzt. Demgegenüber verwendet der Mathematiker geometrische Begriffe, z.B. "kongruente Dreiecke", er kennt den Kongruenzsatz SSW und weiß, daß Tangenten eines Kreises im Berührpunkt senkrecht auf dem zugehörigen Radius stehen.

Auch das heuritische Potential (*Heuristics*) der Schüler ist dürftig. Als einzige heuristische Strategie verwenden Sie die Konstruktion von Hilfslinien. Der Mathematiker arbeitet dagegen gemäß der Strategie Nr. 52 aus Polyai Lehrbuch "Schule des Denkens", backwards analysis: Er geht von der Lösung, dem Inkreis des Dreiecks aus und versucht rückwärts geeignete Bestimmungsstücke zu entdecken. Darüberhinaus konstruiert er ebenfalls Hilfslinien und verwendet die spezielle geometrische Strategie, kongruente Dreiecke zu finden.

Auch hinsichtlich des Aspektes *Control* schneiden die Schüler - wie zu erwarten - schlechter als der Mathematiker ab. Ihr Vorgehen ist planlos. Sie präsentieren insgesamt drei verschiedene Lösungsvorschläge. Alle drei stehen aber beziehungslos nebeneinander, sie bauen nicht aufeinander auf. Selbst die richtige Lösung wird am Ende als falsch verworfen. Sie besitzen also kein Gefühl, kein Gespür für die Problemlösung. Der Mathematiker geht dagegen nach einem Plan vor: Von der fertigen Lösung ausgehend, versucht er den Mittelpunkt zu konstruieren. Verschiedentlich zeigt er, daß er ein gutentwickeltes Gespür für die erfolgreiche Konstruktion besitzt - wie die Zitate "Irgendetwas fehlt noch" , "Das ist besser" belegen. Schließlich ist er sich seiner Lösung so sicher, daß er auf die Konstruktion verzichtet.

Das *Belief System* der beiden im obigen Protokoll auftretenden Schülern ist so charakteristisch für Schoenfelds Untersuchung, daß er es mit Hilfe von Axiomen beschreibt. Im Vergleich ist jeweils die entsprechende"weltanschauliche Auffassung" des Mathematikers angeführt.

Axiom 1 (Entwicklung von Hypothesen)

Schüler: Auf Ideen und Vermutungen kommt man ausschließlich durch das Betrachten von Zeichnungen. Je genauer die Zeichnung ist, desto nützlicher ist sie.

Mathematiker: Ideen und Vermutungen beruhen auf Kenntnissen und logischen Schlüssen.

Belege: Die beiden Schüler präsentieren insgesamt drei Lösungsvorschläge: In Zeile 1 konstruieren sie ein gleichschenkliges Dreieck, in Zeile 6 und 10 ff. kommen sie auf eine richtige Konstruktion, in Zeile 7 starten sie einen Versuch mit Winkelhalbierenden. Die Idee zur korrekten Lösung haben sie durch Betrachten einer Zeichnung gewonnen; in Zeile 18 weist Schüler A ausdrücklich darauf hin. Die Vermutung mit der Winkelhalbierenden geht ebenfalls auf eine Skizze zurück, wie Schüler B in Zeile 9 sagt. Wie der Vorschlag mit dem gleichschenkligen Dreieck zustandegekommen ist, geht aus dem Protokoll nicht hervor. Es ist aber naheliegend, daß ebenfalls eine Skizze hierfür verantwortlich ist. - Der Mathematiker hingegen kommt auf seine Vermutungen durch Kenntnisse von mathematischen Sätzen, wie den Kongruenzsatz "SSW" (Zeile 5) oder den Satz, daß die Tangenten eines Kreises in ihren Berührpunkten orthogonal zu den Radien sind (Zeile 2).

Axiom 2 (Überprüfung von Hypothesen)

Schüler: Die Überprüfung einer geometrischen Hypothese geschieht anhand einer Zeichnung. Eine Hypothese ist genau dann wahr bzw. falsch, wenn die Zeichnung sie bestätigt bzw. widerlegt.

Mathematiker: Eine geometrische Behauptung wird verifiziert, indem man sie auf bekannte Sätze, ggf. auf Axiome, zurückführt.

Belege: Die Schüler überprüfen ihren ersten Vorschlag zunächst mit einem ungenauen Zirkel und dann mit einem präziserem Exemplar (Zeile 2 un Zeile 5). Aufgrund der Ergebnisse dieser Konstruktionen wird der Vorschlag abgelehnt. Die zweite Idee wird ebenfalls aufgrund zeichnerischen Umsetzung verworfen, obwohl sie korrekt ist (Zeile 24). Der dritteVorschlag mit der Winkelhalbierenden wird nicht überprüft. - Der Mathematiker hingegen hält eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal für überflüssig (Zeile 5). Er weiß aufgrund seiner logischen Schlüsse, daß seine Vermutung wahr ist.

Axiom 3 (Bedeutung logischer Ableitungen)

Schüler: Logische Ableitungen spielen weder bei der Entdeckung eines Sachverhaltes noch für seine Überprüfung eine Rolle.

Mathematiker: Sowohl bei der Entwicklung von Hypothesen als auch bei deren Überprüfung spielen logische Überlegungen eine wesentliche Rolle.

Belege: Im gesamten Sschüler-Protokoll wird kein einziger logischer Schluß vollzogen. Dagegen beruht die entscheidende Einsicht des Mathematikers auf einem Schluß: Da bestimmte Dreiecke kongruent sind, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Diese Einsicht wird mit einem "Aha" kommentiert (Zeile 5).

Schoenfeld nennt zusammenfassend das Belief System der Schüler *empirical*, das der Mathematiker *mathematical*.

2. Analyse eines Unterrichtswerkes - Probleme der Vermittlung von Geometrie im Unterricht

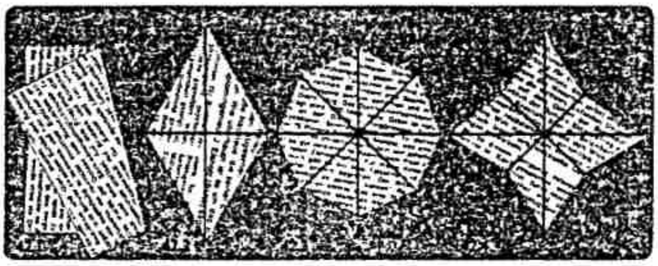
Der Vergleich zwischen den Schülern und dem Mathematiker hinsichtlich der ersten drei von Schoenfeld betrachteten Aspekte trifft vermutlich die Erwartungen des Lesers. Es ist zu erwarten, daß ein Mathematiker ein größeres Wissen als ein Schüler besitzt, daß er über ein umfangreicheres Repertoire an heuristischen Strategien verfügt und daß sein Verhalten bei einem Problemlöseprozess kontrollierter ist. Erstaunen ruft dagegen in der Regel das Belief System der Schüler hervor - und das aus folgendem Grund: Ein Lehrer beabsichtigt im Unterricht, seine eigene mathematische Weltanschauung, nämlich die oben als "mathematisch" bezeichnete, den Schülern zu vermitteln. Wenn ihm das nicht gelingt, wenn Schüler eine "empirische" Auffassung von Mathematik erwerben, so muß unter der Hand und gegen die Absichten des Lehrers im Unterricht irgendetwas passieren, daß seine Intentionen durchkreuzt.

Der Grund hierfür ist, wie wir im folgenden skizzieren werden, ein methodischer: Als standardmäßiges Veranschaulichungsmittel benutzt man im Geometrieunterricht Zeichenblätter. Diese werden dazu verwandt, durch Falten Papierfiguren herzustellen oder durch Zeichnen Zeichenblattfiguren zu konstruieren. Während der Lehrer diese Figuren als Veranschaulichungen für die "eigentlich gemeinten" abstrakten geometrischen Figuren ansieht, sind sie für den Schüler die Objekte, um die es in der Geometrie geht. Wie wir sehen werden, ist dies für Schüler ein naheliegender Schluß, naheliegend aufgrund der Unterrichtsführung. Das unterschiedliche Belief System von Lehrer und Schülern entsteht, kurz gesagt, durch eine unterschiedliche Einschätzung der Bedeutung des Unterrichtsgeschehen. Während Lehrer meinen eine abstrakte geometrische Theorie zu vermitteln, die sie geschickt durch Zeichenblattfiguren veranschaulichen, lernen ihre Schüler in Wirklichkeit eine Theorie dieser Veranschaulichung, nämlich eine empirische Theorie von Zeichenblattfiguren.

Im folgenden sei dies kursorisch belegt, indem der Geometrieunterricht anhand eines in Deutschland bekannten Lehrbuches, GAMMA, beschrieben wird. (Für eine ausführliche Analyse vgl. H. Struve, Grundlagen einer Geometriedidaktik, Mannheim 1990).

Die erste Lerneinheit zur Geometrie (5. Klasse) beginnt folgendermaßen:

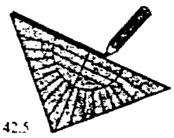
1 Faltlinien



1 Falte Zeitungspapier und erzeuge mit einem einzigen Schnitt Figuren wie in Fig. 42.2, 42.3 und 42.4. Beschreibe die ausgeschnittenen Figuren.

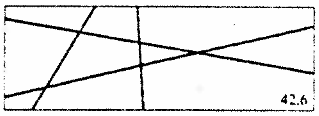
2 Beim Falten wie in Fig. 42.1 entsteht eine Faltlinie. Zeichne mit dem Geodreieck eine gerade Linie in dein Heft. Vergleiche die beiden Linien.

Faltlinien sind **gerade Linien.**
Gerade Linien kann man mit dem Geodreieck oder mit dem Lineal zeichnen.

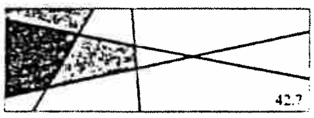


42.5

3



42.6



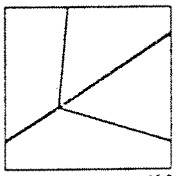
42.7

a) Falte ein Blatt Papier so, daß Faltlinien wie in Fig. 42.6 entstehen. Sie teilen das Blatt in Gebiete ein. Färbe diese wie in Fig. 42.7 dabei sollen benachbarte Gebiete verschiedene Farben erhalten.
b) Wie viele Ecken haben die Gebiete, die nur von Faltlinien begrenzt sind?
c) Falte ein Blatt Papier so, daß ein Fünfeck (ein Sechseck) entsteht.
d) Zeichne mit dem Geodreieck gerade Linien. Die Linien sollen ein Dreieck (Viereck, Fünfeck, Sechseck) begrenzen.

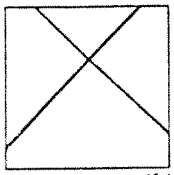
In dieser Unterrichtseinheit werden die Gegenstände der Geometrie vorgestellt: Aus Papier gefaltete oder auf Papier gezeichnete Figuren, also Objekte der Realität. Während der gesamten Sekundarstufe I sind dies die im Unterricht bevorzugt behandelten Objekte. Diese Aussage gilt nicht nur für das hier betrachtete Unterrichtswerk sondern wohl für alle Schulbücher. Die Gründe hierfür sind einerseits methodischer Art - den Umgang mit Papier und Bleistift lernen Schüler relativ leicht -, andererseits didaktischer Art - Zeichenblattfiguren sind eine ideale "Veranschaulichung" geometrischer Figuren.

In der nächsten Lerneinheit (5. Klasse) wird exemplarisch deutlich, wie Begriffe in der Schulgeometrie eingeführt werden.

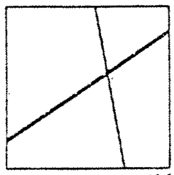
3 Zueinander senkrechte Geraden



45.3



45.4



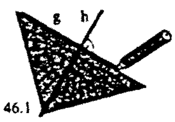
45.5

1 Versuche, durch zweimaliges Falten diese Faltbilder zu erhalten. Du darfst das Blatt zwischendurch aufklappen. Beschreibe, wie du gefaltet hast.

> Liegen zwei gerade Linien wie die Faltlinien in Fig. 45.4, so sagt man: Sie sind **zueinander senkrecht.**

2 Falte eine Zeitungsseite dreimal so, daß du zueinander senkrechte Faltlinien erhältst. Klappe das Blatt wieder auf. Wie viele Paare von zueinander senkrechten Faltlinien zählst du?

> So zeichnet man mit dem Geodreieck zueinander senkrechte Geraden:
>
> **g ist senkrecht zu h.**
> Man schreibt dafür $g \perp h$.
> In der Zeichnung findest du dafür das Zeichen ∟.



46.1

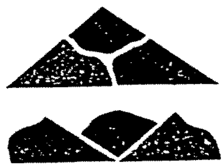
Der Begriff der Orthogonalität wird auf zwei Arten erläutert. Die erste Definition ist eine *ostensive*, bei der ein Begriff durch Aufzeigen von Beispielen und Gegenbeispielen festgelegt wird. Die zweite Definition ist eine *operationale*, in der ein Begriff durch Angabe einer Konstruktionsvorschrift beschrieben wird. Beide Arten der Definition sind typisch für naturwissenschaftliche (empirische) Theorien, bei denen es darum geht, eine Referenzbeziehung zwischen einer Bezeichnung und einem Objekt der Realität herzustellen.

Neben diesen in der Schulpraxis unproblematischen Begriffen gibt es in empirischen Theorien eine dritte Art, die sog. *theoretischen* Begriffe. Diesen kann man nicht auf die beschriebene Weise Referenzobjekte zuordnen sondern sie gewinnen ihre Bedeutung erst im Rahmen der Theorie. Beispiele aus der Geometrie hierfür sind die Begriffe "Gerade", "Ebene" und "geometrische Abbildung" (eine Abbildung mit der gesamten Ebene als Definitions- und Wertebereich). Die Objekte, die ein Kenner der euklidischen Geometrie den Begriffen Gerade, Ebene zuordnet, sind aufgrund ihrer Unendlichkeit weder ostensiv noch operational aufweisbar. Sie entstehen erst durch "Idealisierung" im Sinne der Theorie. Was im Sinne der Theorie liegt, kann man aber erst erahnen, wenn diese zumindest ein Stück weit entwickelt ist. Insofern erscheint es problematisch den Begriff der geometrischen Abbildung als einen Grundbegriff im Aufbau der Geometrie zu wählen, wie es beispielsweise bei der Umsetzung des didaktischen Programms Abbildungsgeometrie in der Schule geschieht.

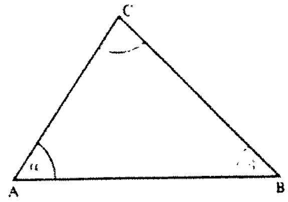
Die folgende Lerneinheit (8. Klasse) zeigt beispielhaft am Satz über die Winkelsumme im Dreieck, wie im Geometrieunterricht argumentiert wird.

6 Winkelsumme im Dreieck und Viereck

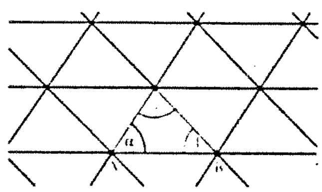
1 Schneide ein Dreieck aus und reiße es wie in Fig. 26.1 in drei Teile. Lege die Winkel α, β und γ wie in Fig. 26.2 aneinander. Was für einen Winkel bilden α, β und γ zusammen?



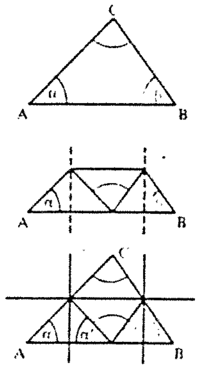
2 Schneide 6 Dreiecke aus, die zum Dreieck in Fig. 26.3 kongruent sind. Markiere jeweils die Winkel α, β und γ. Lege zusammen mit deinem Nachbarn eine Pflasterung.
Welche Winkel stoßen an einer Ecke jeweils aneinander? Wie groß sind diese Winkel zusammen?



3 a) Übertrage die Pflasterung in Fig. 26.4 in dein Heft. Färbe gleich große Winkel mit gleicher Farbe.
•b) Begründe durch Angabe einer passenden Verschiebung und einer passenden Drehung, daß zwei Winkel bei C so groß wie α (wie β) sind.
c) Wie groß sind die 6 Winkel bei C zusammen? Warum sind dann α, β und γ zusammen gerade halb so groß?



4 a) Zeichne auf kariertem Papier ein Dreieck ABC wie in Fig. 26.5. Schneide es aus. Falte es so, daß C auf $\overline{AB}$ fällt. Dabei soll die Faltlinie parallel zu $\overline{AB}$ liegen (Fig. 26.6). Falte dann so, daß alle drei Winkel des Dreiecks zusammen zu liegen kommen. Wie groß sind die Winkel des Dreiecks ABC zusammen?
•b) Begründe mit Hilfe von Achsenspiegelungen:
In Fig. 26.7 sind α und α', β und β', γ und γ' gleich groß. Also sind α, β und γ zusammen 180° groß.



> Im Dreieck sind die Winkel zusammen 180° groß.

Der behandelte Satz wird dreimal "bewiesen". In Aufgabe 1 wird ein Papierdreieck in drei Teile zerlegt und diese werden neu zusammengesetzt. In Aufgabe 2 werden mehrere kongruente Papierdreiecke ausgeschnitten und zu einer Parkettierung der Ebene zusammengelegt. In Aufgabe 4 wird ein Papierdreieck gefaltet. Bei allen drei Beweisen werden Experimente mit den standardmäßig im Geometrieunterricht betrachteten Objekten ausgeführt, mit Papierfiguren. Mit Hilfe von Experimenten und Beobachtungen die *Gültigkeit eines Satzes* nachzuweisen, ist charakteristisch für empirische Theorien.

Weder in einer Naturwissenschaft noch in einem Schulbuch bleibt man allerdings bei Experimenten stehen. Man argumentiert noch, führt Ableitungen durch. Diese haben aber i.a. einen anderen Sinn als die Versuche. Sie sollen die Versuchsergebnisse *erklären*. (Beispielsweise hat Kepler die nach ihm benannten Gesetze durch Beobachtungen gewonnen. Eine Erklärung der Planetenbahnen lieferte dann fünfzig Jahre später Newton, indem er die Gesetze aus den Axiomen seiner Mechanik ableitete.) - Nach Auffassung des Autors liegt in dem beschriebenen Sachverhalt ein wesentlicher Grund für die Beweisproblematik im Schulunterricht, der Problematik, Schüler zum Führen von "Beweisen" im Sinne vom logischen Schließen, zu motivieren. Es ist eben wesentlich leichter, Schüler für die Frage zu interessieren, *ob* etwas gilt, als warum etwas gilt. (Dies gilt, nebenbei bemerkt auch für Erwachsene, etwa Mathematikdidaktiker. Vielfach begnügt man sich mit der Feststellung, daß ein bestimmter Unterichtslehrgang erfolgreich ist, ohne nach einer zufriedenstellenden Erklärung zu forschen. Gerade dieses ist aber für Theoriebildung notwendig.)

Die, hier natürlich nur skizzierte, Schulbuchanalyse sollte erklären, warum Schüler ein empirical Belief System entwickeln. Geometrie wird in der Schule als eine empirische Theorie gelehrt. Objekte des Unterrichts sind Objekte der Realität, nämlich Zeichenblattfiguren. Begriffe werden wie in naturwissenschaftlichen Theorien eingeführt, Argumentationen wie dort geführt. Daher ist es durchaus rational, wenn Schüler eine empirische Weltanschauung von Geometrie entwickeln - auch wenn aus Lehrersicht das Unterrichtsgeschehen anders interpretiert wird, indem zwischen Veranschaulichungen und der eigentlichen Mathematik unterschieden wird.

3. Folgerungen für den Unterricht

Teil 1 und Teil 2 dieser Ausführungen beinhalten eine Diagnose des Geometrieunterrichtes. Wie könnte eine Therapie aussehen? Um diese Frage zu beantworten, muß man sich zunächst überlegen, welche Art von Geometrie man in den einzelnen Schulstufen überhaupt vermitteln möchte. Will man eine Auffassung von Geometrie lehren, die an die moderne formalistische Auffassung von Mathematik angelehnt ist, welche von Hilbert zu Beginn dieses Jahrhunderts, übrigens am Beispiel der Geometrie, entwickelt wurde? Oder möchte man bewußt Geometrie als eine Naturwissenschaft darstellen, die den uns umgebenden physikalischen Raum beschreibt? Die Antworten auf die gestellte Frage werden vermutlich je nach betrachteter Schulart und Schulstufe unterschiedlich ausfallen. Statt an dieser Stelle eine allgemein verbindliche Antwort zu formulieren, seien im folgenden Anmerkungen gemacht, die dem Referenten in diesem Zusammenhang wichtig erscheinen.

(1) Geometrie als eine Naturwissenschaft zu betrachten, hat eine lange Tradition in der Geschichte der Mathematik. Ein Geometer, der sich ausdrücklich hierzu bekannte, war Moritz Pasch. Dieser ist der erste Mathematiker, der das Axiomensystem von Euklid vervollständigte, indem er Axiome der Anordnung formulierte - das bekannteste trägt bis heute seinen Namen. In seinem geometrischen Hauptwerk, den "Vorlesungen über neuere Geometrie" aus dem Jahre 1882 formuliert er explizit den Standpunkt, Geometrie sei eine Naturwissenschaft. Diese Auffassung ist also durchaus nicht "abwegig", sondern tragfähig für einen großen Teil der Mathematik, erst recht der Schulmathematik. - Es sei angemerkt, daß Pasch Geometrie im Stile eines theoretischen Physikers entwickelt, nämlich axiomatisch. Er geht natürlich nicht so naiv-empiristisch vor wie die beiden Schüler in dem oben wiedergegebenen Protokoll.

(2) Es ist interessant zu sehen, wie in der Geschichte der Geometrie mit Problemen der Begriffsentwicklung umgegangen wurde. Oben wurde darauf hingewiesen, daß innerhalb einer empirisch aufgefaßten Geometrie mit dem Begriff der geometrischen Abbildung (hinsichtlich der Refernz) besondere Probleme verbunden sind. Da dieses Geometrieverständnis in der Geschichte unter Geometern weit verbreitet war, waren auch die Fachmathematiker mit diesen Problemen konfrontiert. Wie sind sie damit umgegangen? (Für eine ausführliche historische Analyse sei auf H. Struve, Grundlagen einer Geometriedidaktik verwiesen.)

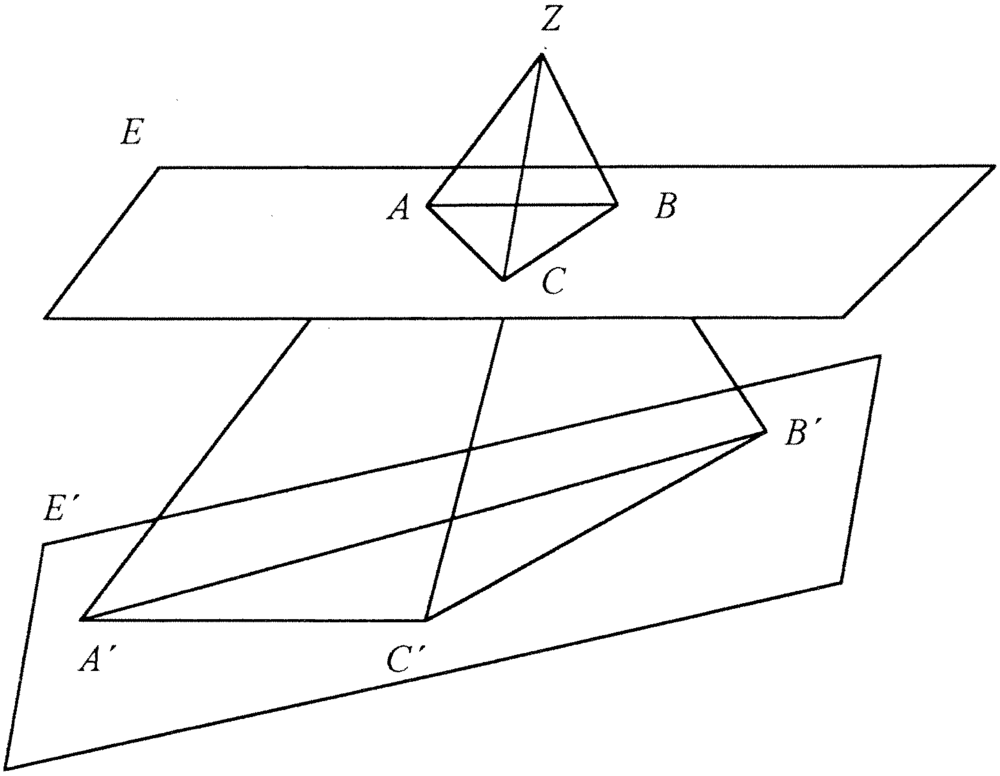
Zum einen stellt man fest, daß beim Aufbau der Geometrie der Begriff der geometrischen Abbildung keineswegs als ein unproblematischer Grundbegriff angesehen wurde. Innerhalb der synthetischen Geometrie wurde dieser Begriff erst in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts eingeführt. Noch 1882 diskutiert Pasch in seinen schon oben zitierten "Vorlesungen ...", welche Grundbegriffe er für seinen axiomatischen Aufbau wählen soll und entscheidet sich gegen alle Begriffe, die sich auf das "Unendliche" beziehen, insbesondere gegen den Geradenbegriff. Diese beziehen sich auf "keine wahrnehmbaren Gegenstände", wie Pasch (S.3) schreibt.

Zum anderen zeigt die Betrachtung der Geschichte der Mathematik in schöner Weise, warum Mathematiker (i.a.) Begriffe einführen: zur Lösung von bestimmten Problemen. Der Begriff der geometrischen Abbildung wurde innerhalb der synthetischen Geometrie zum erstenmal 1827 von A. F. Möbius in seinem Werk "Der baryzentrischen Calcul" verwandt. In diesem behandelt der Autor Verwandtschaften zwischen Figuren. Als Beispiele, wie Möbius solche Verwandtschaften definiert, seien die Definitionen der Kongruenz, bei Möbius "Gleichheit und Ähnlichkeit" genannt, und der Ähnlichkeit zitiert:

"Wenn in zwei Figuren jedem Puncte der einen Figur ein Punct der anderen entspricht, dergestalt, dass der gegenseitige Abstand je zweier Puncte der einen Figur dem gegenseitigen Abstande der entsprechenden Puncte in der anderen Figur gleich ist, so sind die Figuren einander *gleich und ähnlich*.

Zwei Figuren sind einander *ähnlich*, wenn die gegenseitigen Abstände je zweier Puncte der einen Figur in denselben Verhältnissen zueinander stehen, wie die Abstände der entsprechenden Puncte in der anderen."

Möbius benutzt Abbildungen der Punktmenge der einen Figur auf die Punktmenge der anderen Figur, um diese Verwandtschaften festzulegen. Dies sind keine "geometrischen Abbildungen" im oben definierten Sinne, da bei diesen die gesamte Ebene Definitions- und Wertebereich ist. Als letzte Verwandtschaft wird die der "Collineation" definiert. In der "Vorrede" zu seinem Werk schreibt Möbius, was er darunter verstehen möchte: "... die Verwandtschaft, welche zwischen einer ebenen Figur und ihrem perspektivischen Bild stattfindet." In der folgenden Abbildung sind die Dreiecke (A, B, C) und (A′, B′, C′) in perspektiver Lage zueinander.



Man kann sich vorstellen, wie Möbius versucht hat, die "Verwandtschaft der Collineation" analog zu den anderen Verwandtschaften zu definieren: Zwei Figuren heißen "collinear verwandt", wenn jedem Punkt der einen Figur ein Punkt der anderen entspricht, so daß eine gewisse Bedingung erfüllt ist. Diese definierende Bedingung kann nur eine Inzidenzaussage sein, etwa der Art: Kollineare Punkte der einen Fgur entsprechen kollinearen Punkten der anderen Figur. Auf diese Weise läßt sich aber die Verwandtschaft, die Möbius vorschwebte, nicht definieren - es wären Fünfecke "collinear verwandt", die sich nicht aufeinander projizieren lassen. Möbius war also gezwungen, diese Verwandtschaft auf eine neue Art und Weise zu definieren. Dies war der Anlaß, Abbildungen einzuführen, die die gesamte Ebene als Definitions- und -Wertebereich besitzen, also geometrische Abbildungen - mit den Worten von Möbius (S. 266):

"Das Wesen dieser neuen Verwandtschaft besteht also darin, dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen jedem Puncte des einen Raums ein Punct in dem anderen Raum dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raum eine beliebige Gerade zieht, von allen Puncten, welche von dieser Geraden getroffen werden (*collineantur*), die entsprechenden Puncte in dem anderen Raume gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können. Es ist deshalb diese Verwandtschaft die *Verwandtschaft der Collineation* genannt worden. Figuren, zwischen denen sie stattfindet, heissen *collinear verwandte*, oder schlechthin *collineare Figuren*."

Wenn man aus der Geschichte der Geometrie eine didaktische Lehre ziehen möchte, könnte diese lauten: Wenn schon für die Experten für Geometrie, nämlich die Fachmathematiker, der Begriff der geometrischen Abbildung kein unproblematischer Grundbegriff war, sondern erst zur Lösung eines speziellen Problemes eingeführt wurde, dann sollte man diesen Begriff entsprechend in der Schule einführen. "Entsprechend" heißt in diesem Fall: nicht als einen Grundbegriff im Aufbau der Geometrie sondern zur Lösung von speziellen Problemen. Wie solche Probleme für verschieden Schularten und Schulstufen allerdings aussehen könnten, wäre genau zu überlegen.

(3) Soeben haben wir als didaktische Maxime formuliert, daß man einen Begriff nur dann einführen sollte, wenn man ihn auch benötigt. Ersetzt man in dieser Maxime das Wort "Begriff" durch "Auffassung von Geometrie", so ergibt sich das folgende Problem: Wenn man Schülern (auch Hochschülern) das moderne formalistische Verständnis von Mathematik nahebringen möchte, anhand welcher Problemstellungen läßt sich dann die Notwendigkeit oder auch nur Zweckmäßigkeit dieser Auffassung belegen? Sind diese Probleme überhaupt in der Schule formulierbar? An deiser Stelle möchten wir auf diese Problematik nur hinweisen und sie nicht ausführlich diskutieren.

Schlußbemerkung

Nach den obigen Ausführungen beeinflussen die im Unterricht verwendeten "Veranschaulichungsmittel" Papier und Bleistift wesentlich die Auffassung von Geometrie, die Schüler erwerben. Es ist zu erwarten, daß diese Aussage in zwei Richtungen verallgemeinerbar ist. Zum einen gilt eine analoge Aussage wohl nicht nur für die klassische Schulgeometrie sondern auch für andere mathematische Bereiche, etwa die Arithmetik. Zum anderen trifft die obige These wohl auch hinsichtlich anderer "Veranschaulichungsmittel" zu. Ein in jüngerer Zeit vieldiskutiertes Unterrichtsmedium ist der Computer. Eine sorgfältige, umfassende Analyse des Einflusses von Computern auf die Geometrie-Auffassung von Schülern steht noch aus. (Interessante Ansätze hierzu findet man in R. Hölzl: Im Zugmodus der Cabri-Geometrie, Weinheim 1994.)

Die folgenden Fragen sollten bei solch einer Untersuchung beantwortet werden können:

- Welche *Bedeutung* hat Geometrie für die Schüler?

- In welchem *Verhältnis* steht die unterrichtete Geometrie zur traditionellen (Alltags-) Geometrie?
- Was bedeutet *Existenz* von geometrischen Figuren?
- Welchen Sinn haben *Beweise*?
- Welche Bedeutung besitzen *formale Ableitungen*?
- Worauf referieren die geometrischen *Begriffe*?

Für das Verständnis des mathematischen Wissens und damit des Verhaltens von Schülern scheinen solche epistemologischen, d.h. das Wissen betreffende, Fragen von wesentlicher Bedeutung zu sein.