ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht
Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 95–03
September 1995

Infinitesimalgeometrie
am Beispiel der Kreisevolvente

A. Gächter, Gossau

Eidgenössische Technische Hochschule
CH–8092 Zürich

INFINITESIMALGEOMETRIE

am Beispiel der Kreisevolvente

ABBE AOUST/ DIDEROT/ EULER/ BERNOULLI/ MANNHEIM/ CESARO/ WHEWELL DE LA HIRE/ ROBERVAL/ STEINER/ KRAUSE/ SYLVESTER/ HUYGENS/ LEIBNIZ/ DESCARTES/ CAYLEY/ DÜRER/ CHASLES/ TERQUEM/ SAVARY/ ARCHIMEDES/ CO

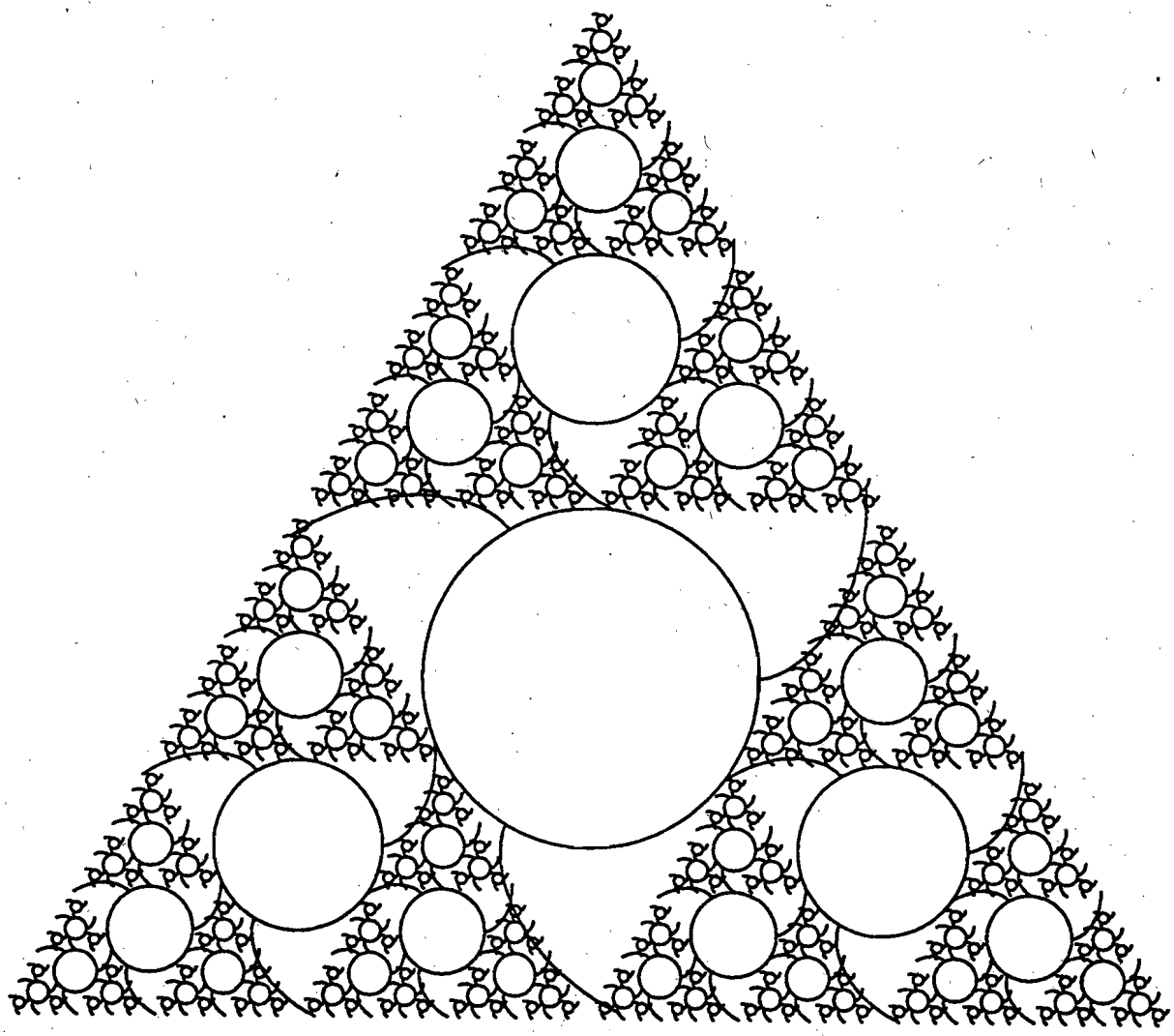
Albert A. Gächter

Geometrie braucht Werbung

0

I have tried to get across it that geometry is not so much a branch of mathematics as a way of thinking that permeates all branches.

Michael Atiyah



GRAPHIK 1
Sierpinski-Monster mit Evolventenhörnern

Geometrie braucht Werbung. Zwar hat kaum ein anderes Thema der gymnasialen Mathematik in den letzten Jahrzehnten soviele verschiedene Gesichter gezeigt. Das didaktische Wechselbad bekam der Geometrie jedoch schlecht. Es hinterliess ein methodisches Vakuum. Hinter der sich schnell wechselnden Fassade blieben die Stockwerke des Gebäudes der Schulgeometrie stets dieselben: im 1. Stock liegen die Räume der Kongruenz, im 2. Stock jene der Ähnlichkeit und im eher selten betretenen 3. Stock die Zimmer der Affinität. Ein Luftschutzraum im Keller dient der Stereometrie. Im 4. Stock befinden sich die Zimmer mit Untermietern: Analytische Geometrie, Differentialgeometrie u.s.w. Wie sollen nun die in diesen Räumen schwebenden geometrischen Ideen vermittelt werden? Kommt man der Sache wirklich näher, wenn man die abgestandenen Anwendungen (es lebe das Försterdreieck...) mit einigen Farbbildern garniert? Oder die Liste der Pythagorasbeweise um 2 weitere aufstockt, ohne jemals auf die Bedeutung des Beweisens einzugehen? Oder minutiöse, mit kyrillischen Symbolen angereicherte Beschreibungen für banale Konstruktionen verlangt, um anschliessend die gelangweilte Schülerschaft mit einem Schuss "Cabri" wieder zum Leben zu erwecken?

Ab September 1994 durfte ich auf Einladung von Prof. Kirchgraber für 5 Monate am Projekt ETH FÜR DIE SCHULE teilnehmen. Es hat mich ausserordentlich gefreut, dass ich diese Zeit für ein geometrisches Thema einsetzen konnte. Seit einigen Jahren war mir aufgefallen, wie sehr wir in der Schule den Steigungsbegriff pflegen, den **Krümmungsbegriff** aber vernachlässigen. Dieses Heft möchte zeigen, dass sich mit bescheidenen Mitteln neue Perspektiven für die Vermittlung der zentralen Idee "Krümmung" eröffnen.

Um sich begreiflich zu machen, muss man zum Auge reden **(J.G. Herder).**

Die meisten Graphiken in diesem Heft sind neu und mit der beschriebenen Technik erstellt. Leider musste auf Farbe und Bewegung verzichtet werden. Zahlreiche geometrische Phänomene lassen sich durch Animationen viel besser vermitteln. Das Aufgabenmaterial enthält mannigfaltige Aktivitäten und erlaubt Ergänzungen nach allen Seiten. Betrachten Sie das Heft nicht als Leitfaden, sondern eher als ein Leseheft. Ich habe mich ganz bewusst auf eine einzige Kurve, die Kreisevolvente, beschränkt. Es wäre einfacher gewesen, ein spektakuläreres Beispiel auszuwählen oder einen ganzen "Kurvenzoo" auffahren zu lassen. Die Beschäftigung mit der stark vernachlässigten Kreisevolvente hat sich für mich gelohnt. Einmal mehr zeigte es sich, dass wir beim Graben an beliebigen Stellen fündig werden können und sich gewaltige Beziehungsgeflechte entwickeln. Auf diese Weise ist hier die wohl grösste Aufgabensammlung zur Kreisevolvente entstanden.

Echte Anwendungen motivieren. Solche zu finden, bleibt eine Lebensaufgabe. Oft ist es unheimlich mühsam, an entsprechendes Datenmaterial

heranzukommen. Wenn auch die 1. Näherung leicht zu erhalten ist, für alle weiteren reduziert sich der Kreis der kompetenten Ansprechpartner deutlich. Meine Recherchen über die 400m-Bahnen, verbunden mit Plänebeschaffung und Begehungen an Ort, verschlangen viel Zeit. Dasselbe gilt für das Aufspüren alter Dokumente in Zeitschriften und historischen Werken. Dennoch: der gewaltige Schatz an Büchern in der ETH - Bibliothek und an der ZB vermochte mich zu begeistern. Das Heft enthält einige Informationen, um Ihnen möglicherweise gewisse Wege zu ersparen. Sie finden auch etwas schwieriger zugängliche Biographien. Im "Lexikon bedeutender Mathematiker" fehlen zum Beispiel Aoust, Krause und Whewell.

Die Thematik lässt beliebige Tiefe zu. In einem speziellen Kapitel sind mögliche Ausblicke zusammengefasst (es gibt noch viel zu tun!). Sonst habe ich mich bemüht, nur die übliche gymnasiale Mathematik zu investieren.

Der Name **Infinitesimalgeometrie** stammt von Aoust und Mannheim. Aus ihren Arbeiten wird klar, was sie damit meinen: *natürliche* (intrinsische) *Geometrie*, verwoben mit Ideen der *kinematischen Geometrie* (momentanes Drehzentrum, Zusammensetzung von Bewegungen u.s.w.) und gewürzt mit einer gehörigen Prise lokaler *Differentialgeometrie*. In diesen drei Gebieten werden wir unter dem Aspekt der Krümmung auf Reisen gehen.

Ein weiterer Baustein zum hier vorliegenden Thema bildet die Arbeit von Georg Schierscher über "Verfolgungskurven". Er berichtet in einem eigenen Heft über sein interessantes Projekt. Die kollegiale Zusammenarbeit mit ihm ist stets eine Bereicherung.

Mein Dank geht zum Schluss vor allem an Prof. Kirchgraber für die Einladung und seine wohlwollende Begleitung. Da wir an unserer Schule keine Weiterbildungssemester kennen, habe ich dieses Ausbrechen aus dem Schulalltag sehr geschätzt. Die Infrastruktur der ETH, mannigfaltige Kontakte, alte Erinnerungen, der Besuch von Vorlesungen, die konzentrierte Beschäftigung mit einem einzigen Thema: kleine Meilensteine in den vergangenen 5 Monaten. Herzlichen Dank.
Für Anregungen in zahlreichen Gesprächen und Artikeln bedanke ich mich bei Prof. Stowasser in Berlin und Prof. Baptist in Bayreuth.
Da jedoch allfällige Fehler auf mein Konto gehen, bin ich für Kritik und Verbesserungsvorschläge sehr dankbar.

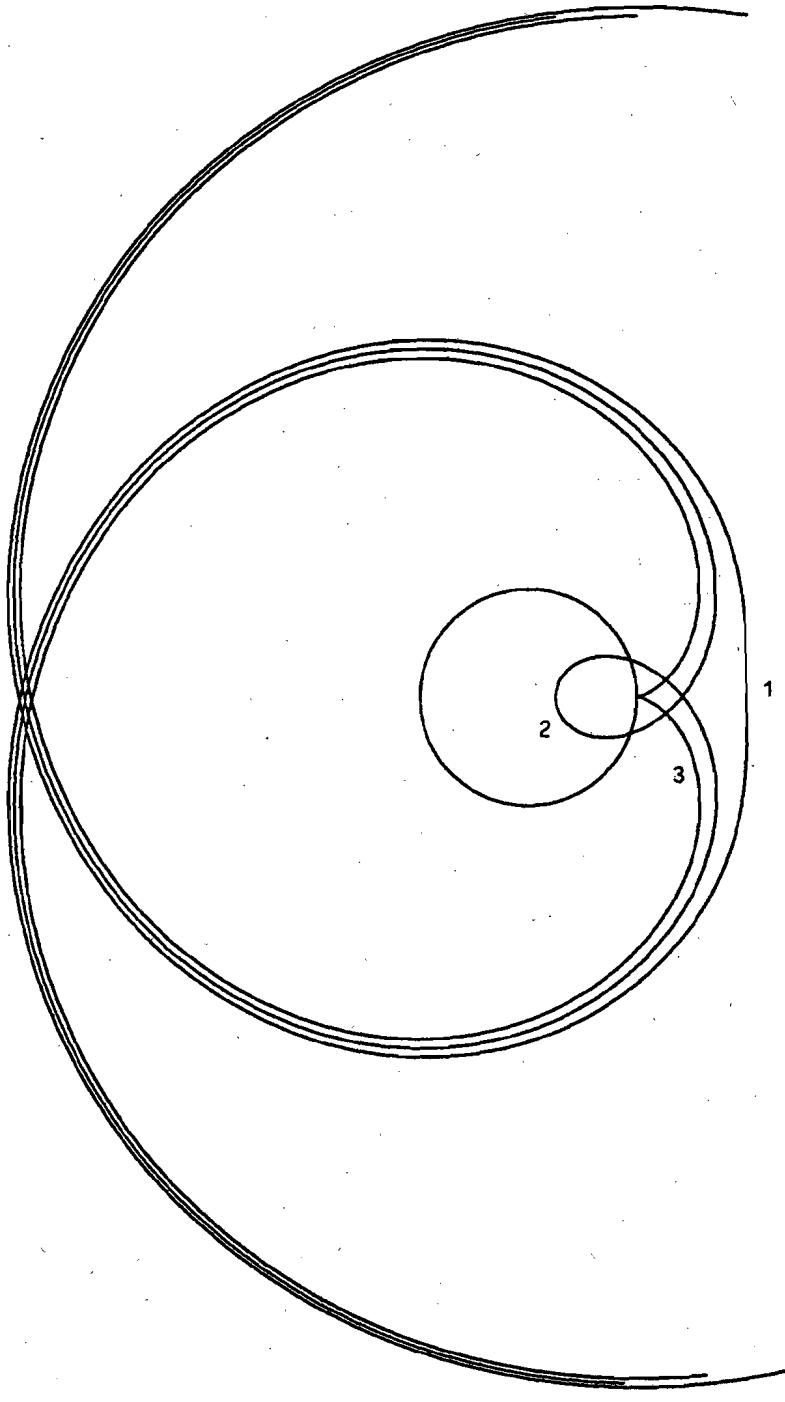
März 1995 Albert A. Gächter

Weltklasse in Zürich

1

ē-volvere, ēvolvō, ēvolvī, ēvolūtum 1.
hervor-, hinauswälzen, herausrollen;

Pons, Standardwörterbuch



GRAPHIK 2
(1) gestreckte, (2) verschlungene und (3) gespitzte (normale) Kreisevolvente

Gedanken eines Aussenseiters

17. August 1994. Grosse Leichtathletik-Gala in Zürich auf dem Letzigrund. Gute Stimmung trotz schlechtem Wetter. 21 Uhr 35: Start zum 800m - Lauf der Männer. Stille herrscht. Ein letzter prüfender Blick des Starters. Die Läufer stehen auf einer leicht gekrümmten Linie. Sofort nach dem geglückten Start streben die Athleten auf den äusseren Bahnen tangential nach innen zur Bahn 1. Wer hat schon Lust, pro Runde eine bis zu 53m längere Distanz zu laufen? Klar also: die krumme Startlinie muss eine Kreisevolvente sein. Wilson Kipketer aus Kenia gewinnt in 1:46,12 vor seinem Landsmann William Tanui.
Bis zum nächsten Lauf habe ich Gelegenheit, die gesamte Anlage etwas genauer unter die Lupe zu nehmen. Es fällt mir auf, dass es sich nicht um eine gewöhnliche Kreisbogenbahn aus einem Rechteck mit aufgesetzten Halbkreisen handeln kann. Bereits vor der Start- und Ziellinie beginnt nämlich die Bahnkrümmung. Um den Athleten einen stetigen Krümmungswechsel zu bieten, sind Klothoiden als Übergang zwischen Kreisbogen und Gerade eingebaut. Genau wie bei den Autobahnen. Dies erhöht den Laufkomfort, da die Ideallinie immer im gleichen Abstand von der linken Begrenzung liegt. Halt! Wie war das eben noch mit den "Kreis"-Evolventen? Das muss ich mir später einmal genauer ansehen...
Venuste Nyongabe, der Newcomer der Saison, legte vor einer knappen Stunde einen tollen 1500m - Lauf hin. Der Start erfolgte eingangs der Gegengerade, ebenfalls auf einer krummen Linie. Wie berechnet sich nun diese? Was heisst hier tangential nach innen laufen? Fragen über Fragen. Ich beschliesse, mich für den Rest des Abends wie die übrigen Zuschauer nur noch den sportlichen Aspekten zu widmen. In 5 Minuten ist ein weiterer Höhepunkt angesagt: 100m Hürden der Damen. Ich freue mich auf Julie Baumann.

Gedanken eines Insiders

Sommer 1693. **HUYGENS** veröffentlicht sein Werk *Horologium oscillatorium*. Darin schildert er die wichtigen Etappen der Erfindung seiner Pendeluhr:

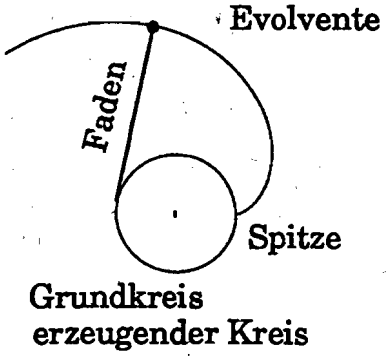
> Mit Hilfe der Geometrie habe ich aber eine bisher unbekannte Aufhängungsweise des Pendels gefunden; ich habe nämlich die Krümmung einer gewissen Kurve untersucht, die in geradezu wunderbarer Weise geeignet ist, die erwünschte Gleichmässigkeit herbeizuführen... Um meine Entdeckung praktisch zu verwerten, musste ich noch eine neue Untersuchung über die Abwicklung von krummen Linien durchführen.

Im 3. Teil über die Abwicklung und die Ausmessung von Kurven definiert er wie folgt:

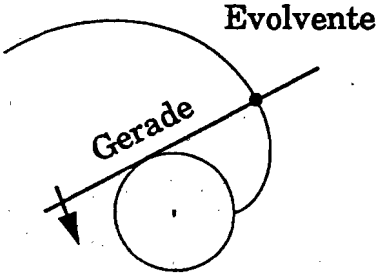
Definition 3.
Denkt man sich um eine Kurve, die nach einer Seite konkav ist, einen Faden oder eine biegsame Linie gelegt, und wird, während das eine Ende des Fadens ihr anliegt, das andere Ende von ihr entfernt, so dass der abgewikkelte Teil stets gespannt bleibt, so wird offenbar dieses Ende des Fadens eine neue Kurve beschreiben; diese heisse ***Evolvente.***

Definition 4.
Jene Kurve aber, um die der Faden gelegt war, heisse ***Evolute.***

Für den Kreis ergibt sich die nachfolgende Situation (anstatt einen Faden abzuwickeln, kann auch eine Gerade auf einem Kreis abgerollt werden; damit ordnet sich die Kreisevolvente unter die Rollkurven ein).



FADENABWICKLUNG



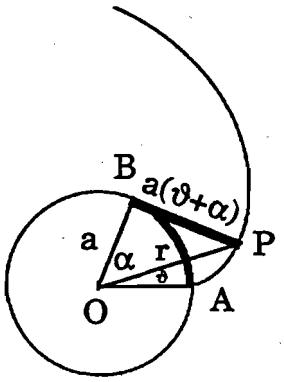
ABROLLEN EINER GERADEN

Huygens bestimmt und rektifiziert unter anderem die Evoluten der Zykloide, der Parabel, Ellipse und Hyperbel.
Hervorzuheben bleibt noch, dass Huygens Probleme der Analysis, Optik, Mechanik und Astronomie stets mit elementaren geometrischen Konstruktionen anging und bedeutsame Resultate erhielt.

Altbewährte Werkzeuge

Versuchen wir nun, die Kreisevolvente formelmässig in den Griff zu bekommen. Da sie sich bei theoretisch unendlich langem Faden auch unendlich oft um den Grundkreis herumwindet, kommt eine Darstellung in kartesischen Koordinaten nicht in Frage. Bewähren sich in solchen Fällen nicht Polarkoordinaten?

P sei Laufpunkt der Kreisevolvente mit den Koordinaten ϑ und r. Der Kreisbogen AB ist gleich lang wie die Strecke BP (Faden). $\alpha+\vartheta$ nennt man oft auch den Wälzwinkel.
Nach der Elimination von α aus den beiden folgenden Gleichungen steht das Ergebnis fest:

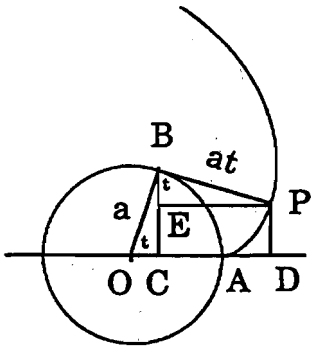


$$r = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$r^2 = a^2 + a^2\,(\vartheta+\alpha)^2$$

$$\boxed{r^2 - a^2 = a^2\left(\vartheta + \arccos\frac{a}{r}\right)^2}$$

Die Begeisterungsstürme halten sich in Grenzen. Womit hat unsere sehr einfache Kurve eine so "wilde" Gleichung verdient? Versuchen wir es noch mit einer Parameterdarstellung.
Als Parameter t empfiehlt sich der Wälzwinkel.



$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD}$$

$$\boxed{x = a\cos t + at\sin t}$$

und entsprechend

$$\boxed{y = a\sin t - at\cos t}$$

Damit lässt sich leben. Der kundige Leser stellt fest, dass die Kreisevolvente als Überlagerung einer Kreisbewegung mit einer archimedischen Spirale entstehen kann.
Positives t liefert den Ast im Gegenuhrzeigersinn, negatives t denjenigen im Uhrzeigersinn.
Das nächste Kapitel zeigt einen ganz anderen Zugang zur Kreisevolvente.

Das Thema "Sport und Mathematik" birgt zahlreiche neue Arbeitsfelder, welche Schülerinnen und Schüler zu faszinieren vermögen. Es genügt, an den Start zu gehen. Weltklasse in Zürich. Sind Sie dabei?

Aktivitäten

Hinweis: Leichtathletikaufgaben beziehen sich auf die Kreisbogen-Normbahn (vergl. Datenblatt).

1.1 Der Kreis mit Radius a erhält bekanntlich als Krümmung κ den Wert 1/a. Bestimme die Krümmungen der Bahnen 1 bis 8 für die jeweilige Lauflinie. Welche Konsequenzen ergeben sich für die Athletinnen und Athleten?

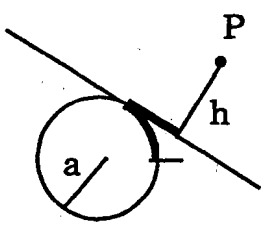
1.2 Zeichne den Krümmungsverlauf der Bahn 1 auf. Wie äussert sich graphisch der "Krümmungsruck"? Mit welchen Massnahmen vermeidet der Leichtathlet diesen Ruck?

1.3 Bei wichtigen Wettkämpfen misst man auf Hundertstel Sekunden genau. Der Weltrekord von Reynolds (USA) über 400m liegt bei 43,29s. Lohnt sich eine solche präzise Zeitmessung?

1.4 Zeichne näherungsweise eine Kreisevolvente, indem Du den Faden von einem geeignet gewählten regelmässigen Vieleck abwickelst.

1.5 Lese in Christiaan Huygens Werk *Horologium oscillatorium* den 3. Teil "Über die Abwicklung und die Ausmessung von Kurven" (vergl. Literaturliste).

1.6 Bei einer (idealisierten) Kinderschaukel mit Brett und kreisrundem Baumstamm beschreibt jeder Brettpunkt ein Kreisevolventenstück. Punkte oberhalb des Brettes ergeben gestreckte, solche unterhalb des Brettes verschlungene Kreisevolventen (vergl. GRAPHIK 2).



Leite für den Laufpunkt P die folgende Formel her:

$$x = (a + h)\cos t + at \sin t$$

$$y = (a + h)\sin t - at \cos t$$

Welche Kurve entsteht für h = - a?
Führe in einer Animation, in welcher h von -a bis +a variiert, die verschiedenen Formen von Kreisevolventen vor.

1.7 Zeige, dass der Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Windungen der Kreisevolvente konstant ist und berechne diese Konstante.

1.8 Ist eine Kreisevolvente durch die Angabe des Mittelpunktes O und zweier Punkte A und B festgelegt?

1.9 Mache Dir mit einem kleinen Modell klar: Der geom. Ort für alle Spurpunkte in der xy-Ebene der Tangenten an eine gewöhnliche Schraubenlinie ist eine Kreisevolvente.

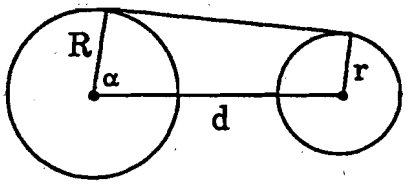
1.10 Leite die Formel für die Kreisevolvente aus jener für die Epizykloide her, indem Du den Radius des rollenden Kreises unendlich gross werden lässt.

1.11 Stufenscheiben

Bei gewissen mechanischen Drehzahlreglern werden oft Stufenscheiben eingesetzt. Auf zwei festbleibenden Achsen sind Scheiben mit verschiedenen Durchmessern angebracht. Da der Antriebsriemen stets dieselbe Länge beibehalten muss, sind die zwei gewählten Scheiben richtig aufeinander abzustimmen.

geg.: Achsabstand d
Riemenlänge 2L

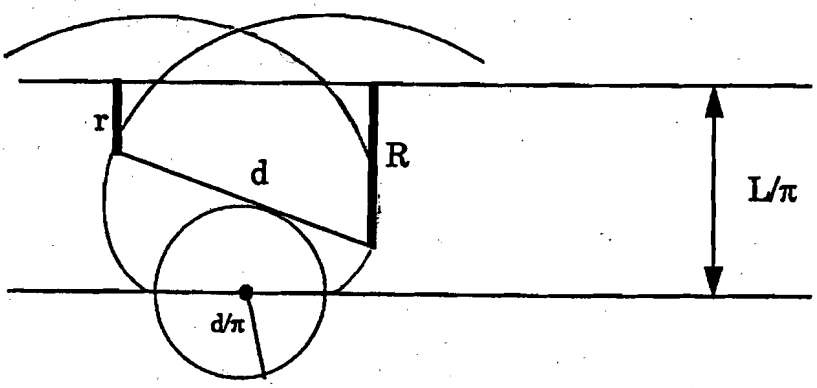
ges.: Radien R und r von zueinander passenden Scheiben



Beweise für r und R die Formeln

$$r = R - d \cdot \cos\alpha \qquad R = \frac{L}{\pi} - \frac{d}{\pi}\,(\sin\alpha - \alpha \cdot \cos\alpha)$$

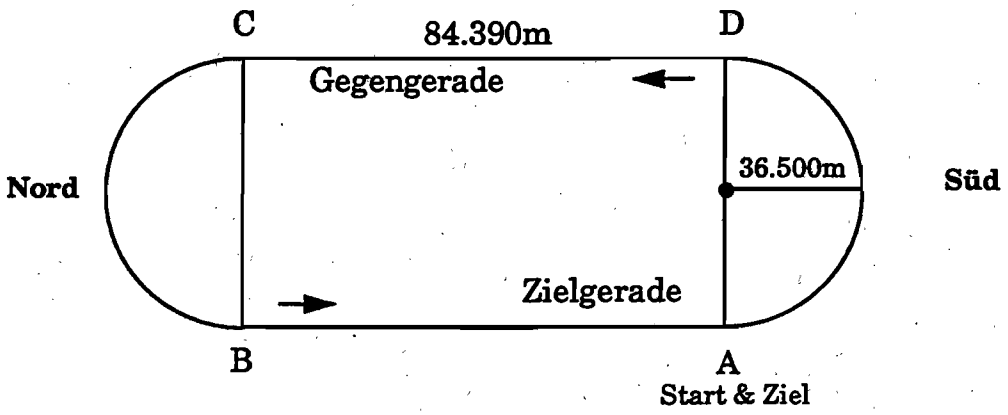
Die rechte Seite der Formel für R erinnert an die Parameterdarstellung der Kreisevolvente. Zeige, dass r und R graphisch aus folgender Zeichnung gewonnen werden können:

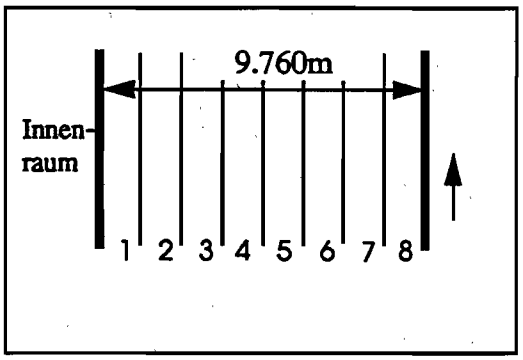


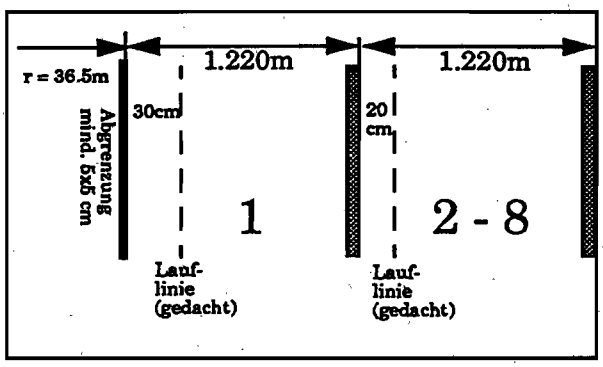
DATENBLATT

400m - KREISBOGEN - NORMBAHN

(DIN 18035, weltweit die Normbahn)







Laufrichtung linksherum, Messrichtung rechtsherum

Ausrichtung:

normalerweise Längsachse in N - S Richtung (geringste Sonnenblendung); Abweichungen bis gegen NNW - SSO möglich

Strich zur Linken darf nicht betreten werden (gehört zur Bahn links)

Startlinien rechnen zur Laufstrecke

KURVENVORGABE für Läufe in Bahnen (Ausgleich für längere Bahnen)

GEKRÜMMTE STARTLINIEN für Start in Bahnen, aber Lauf auf Innenbahn (Länge der Tangente zur Innenbahn = Länge der Lauflinie von Bahn 1; gekrümmte Linie ist eine Evolvente)

Bahnneigung:

gegen innen kleiner oder gleich 1% (1 : 100)

in Laufrichtung kleiner oder gleich 0.1% (1 : 1000)

Genauigkeit:

Zeitmessung: auf 0.01s genau

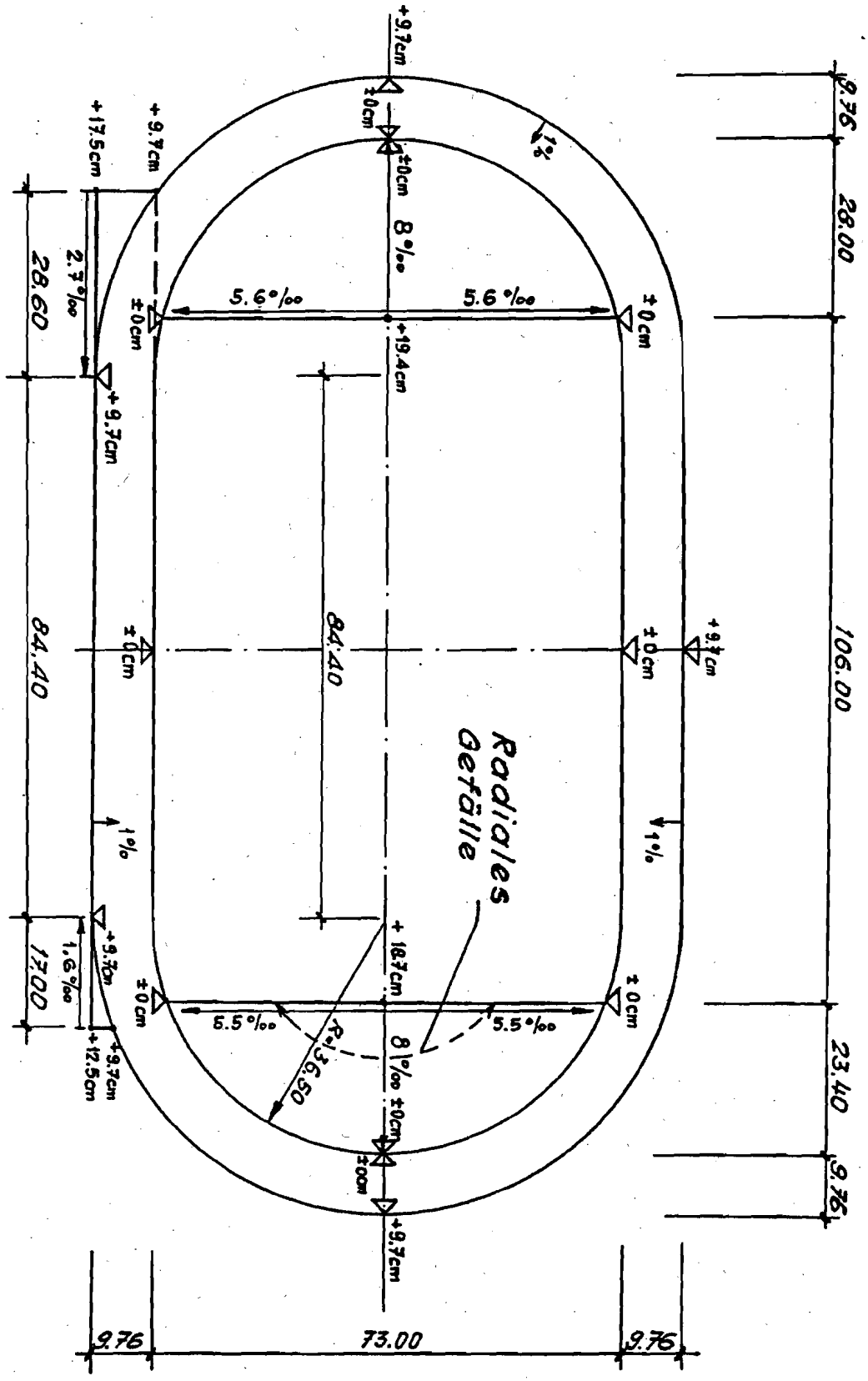
Längen in Metern auf 3 Stellen nach dem Komma genau

Winkel in Neugrad auf 4 Stellen nach dem Komma genau

Bahnlängen (auf der Lauflinie gemessen):

(1) 400.000, (2) 407.038, (3) 414.704, (4) 422.370, (5) 430.034
(6) 437.700, (7) 445.366, (8) 453.032

Situation

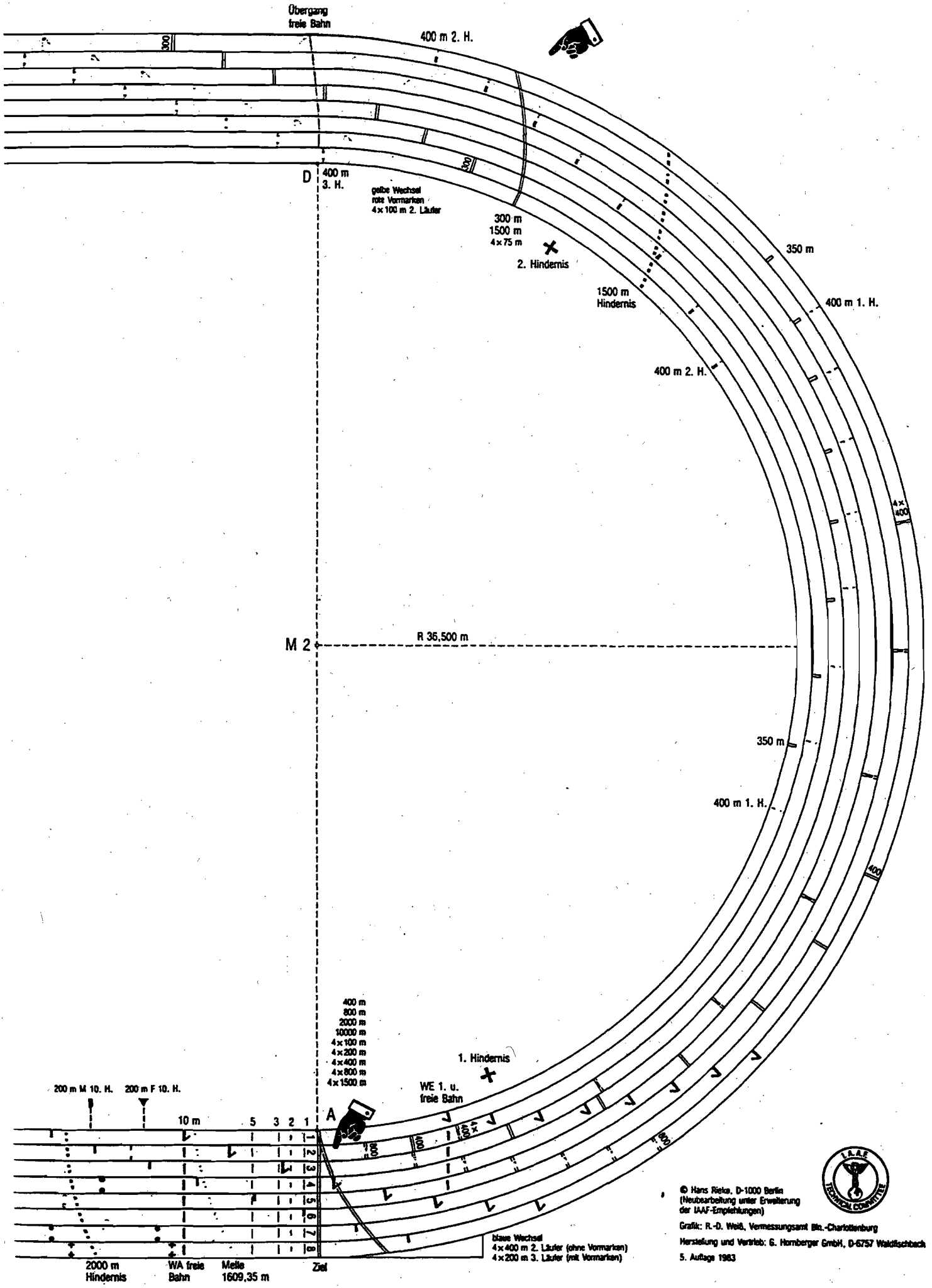


Beispiel

SLV Schweizerischer Leichtathletik Verband

Oberflächengefälle Anlage Typ A = 8 Laufbahnen; R = 36.50 m

gez.: M.B gepr.: Kontr.	Dat. 1.2.86 Rev.	Mst. 1:1000	4.2.5.1



© Hans Rieke, D-1000 Berlin
(Neubearbeitung unter Erweiterung
der IAAF-Empfehlungen)

Grafik: R.-D. Weiß, Vermessungsamt Bln.-Charlottenburg

Herstellung und Vertrieb: G. Hornberger GmbH, D-6757 Waldfischbach

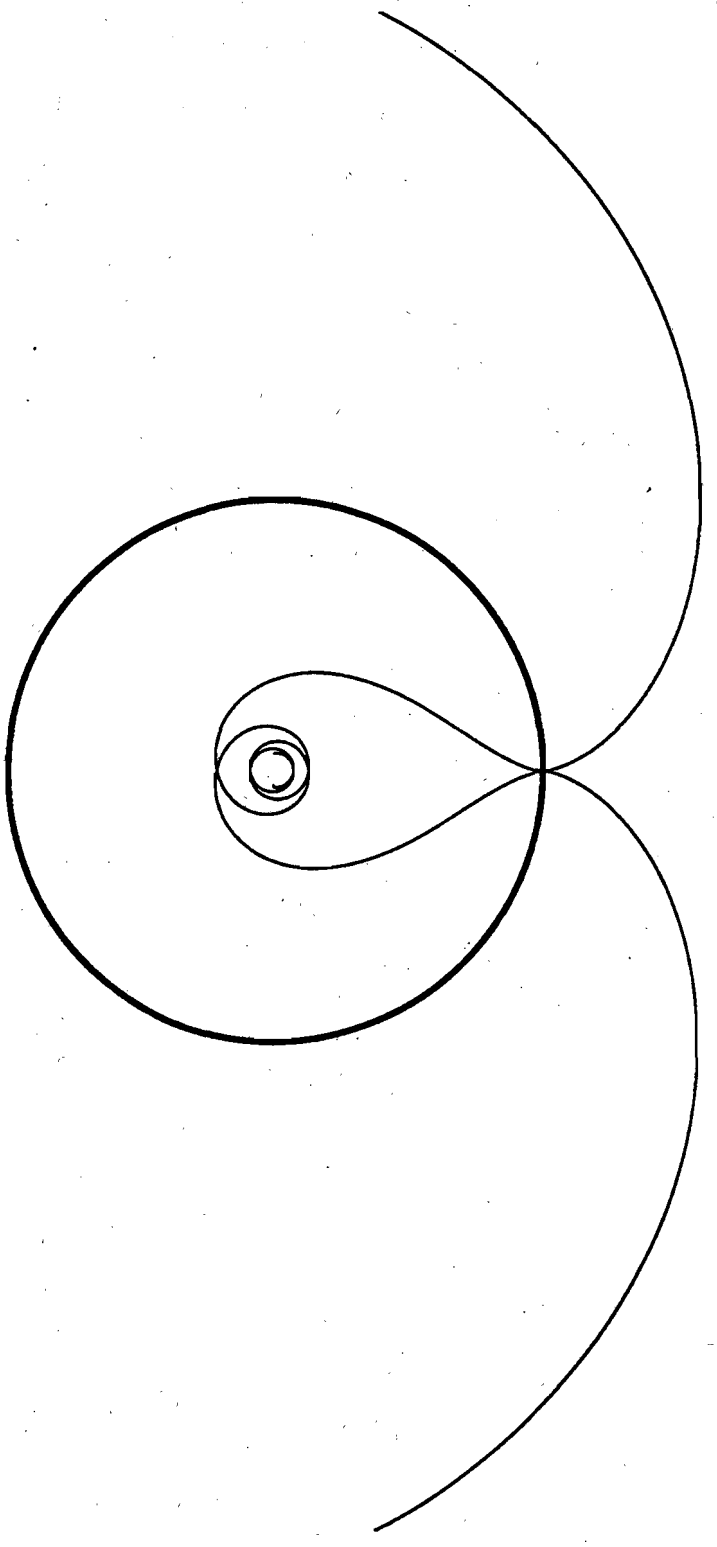
5. Auflage 1983

Euler, 2 Philosophen und 1 Abbé

2

Eine mächtige Wirkung und zwar auf die ganze Mathematik kann nicht ausbleiben, geschehe sie nun früher oder später; um dieses einzusehen, bedarf es keines Prophetenblickes.

Henricus Schroeder, 1835
(Vorwort zu C.F. Krause)



GRAPHIK 3
Die inverse Kurve der Kreisevolvente bezügl. dem Grundkreis: Tractrix complicata (Cotes 1722).

Natürliche Geometrie

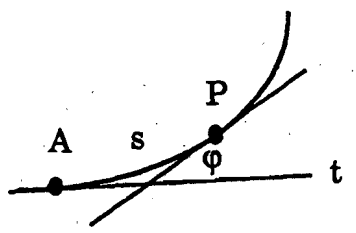
Die Koordinatenmethode von Descartes erlaubt es, die Lage jedes Punktes der Ebene in bezug auf zwei Achsen festzulegen. Dadurch wird es möglich, Kurven durch Gleichungen zu beschreiben. Dieselbe Kurve erhält je nach ihrer gewählten Lage leider unterschiedliche Gleichungen. Hinzu kommt, dass Kurven mit einfachem Bildungsgesetz oft recht komplizierte Gleichungen aufweisen können. Der Gedanke liegt nahe, Kurven nur noch mit Grössen zu beschreiben, welche zur Kurve gehören und nicht künstlich eingeführt worden sind. Solche Grössen sind zum Beispiel die Bogenlänge s, der Krümmungsradius R, der Tangentenwinkel φ u.s.w. Diese bleiben erhalten, wenn die Kurve ihre Lage in der Ebene ändert.

Aus praktischen Gründen verwendete Leonhard **EULER** bereits 100 Jahre vor den eigentlichen "Erfindern" solche Bestimmungsstücke, welche man später auf Vorschlag von Aoust **natürliche Koordinaten** nannte. Sie dienten als Parameter für kartesische Koordinaten oder auch dazu, die Kurve durch eine Differentialgleichung zu definieren. Bemerkenswerte Abhandlungen sind:

Investigatio curvarum quae evolutae sui similes producunt, 1739
(enthält auch Vorarbeiten zur Lösung der linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten)

Investigatio curvarum, quae similes sint suis evolutis vel primis vel secundis vel tertiis vel adeo ordinis cuiuscunque, 1775
(hier verwendet er insbesondere die Koordinaten [φ,R])

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts stellte der Philosoph Karl Christian Friedrich **KRAUSE** seine durch die Philosophie gewonnene Methode vor, um Kurven zu bestimmen und zu diskutieren. Eine Verfahren, welche der Natur der Kurve Rechnung trägt und - im Unterschied zur herkömmlichen Koordinatenmethode - keine fremden Elemente enthält. In seinem Hauptwerk *Novae theoriae linearum curvarum* 1835, verwendet er die Bestimmungsstücke φ und s: die von einem festen Kurvenpunkt A an gemessene Bogenlänge s als das Mass für die ***fortschreitende*** Bewegung und der Winkel φ der Tangente gegen die feste Tangentenrichtung in A als das Mass für die ***drehende*** Bewegung.

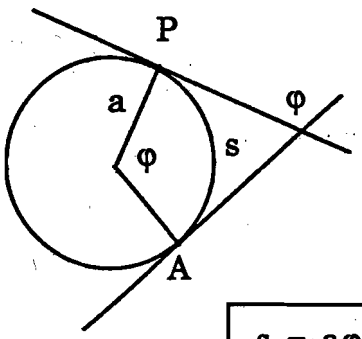


A: Anfangspunkt;
Tangente t in A bildet die Anfangsrichtung

P: bel. Kurvenpunkt;
s Bogenlänge und
φ Tangentenwinkel

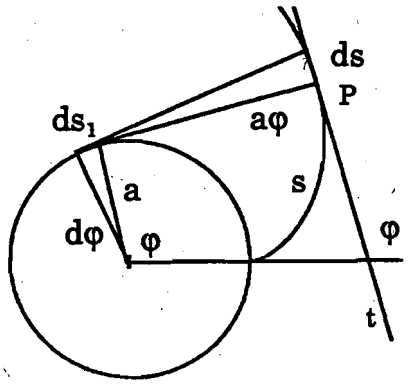
Je ein eigenes Kapitel widmete er der Kreisevolvente *De circuli linea evoluta atque evolvente* und der von ihm gefundenen Antiloga.
In den Koordinaten φ und s ergeben sich die Gleichungen für den Kreis und die Kreisevolvente ausserordentlich bequem:

Kreis



$s = a\varphi$

Kreisevolvente



$\frac{ds}{ds_1} = \frac{a\varphi}{a}$

$ds = \varphi a d\varphi$

$s = \frac{1}{2} \cdot a\varphi^2$

Grosse Wellen warfen die beiden Artikel von William **WHEWELL** 1849/50 *Of the Intrinsic Equation of a Curve, and its Application* und *Second Memoir on the Intrinsic Equation of a Curve and its Application.* Darin zeigt er (im Unterschied zu Krause) mit einer wohltuend einfachen und klaren Sprache die geballte Kraft der natürlichen Geometrie, welche er **intrinsisch** nennt: "I was not able to find any other name for the equation which I have employed".
In dieser Sprache bekommt der Krümmungsbegriff eine kinematische Komponente und lässt sich wie folgt definieren:

Definition.
Die Krümmung ist die Änderungsgeschwindigkeit der Tangentenrichtung, wenn die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird.

Wird s als Parameter gewählt, ist die konstante Geschwindigkeit immer gewährleistet. Aus φ und s berechnet sich R also sofort:

Krümmungsradius R: $R = \frac{ds}{d\varphi}$

Für die Kreisevolvente wird $R = a\varphi$ (Interpretation?).

Ein starker Promotor war der bereits erwähnte Abbé Louis - Stanislas - Xavier - Barthélemy **AOUST**. In didaktisch hervorragend aufgebauten Büchern aus den Jahren 1869/73/76 demonstriert er unter Verwendung der Koordinaten φ und R die Leistungsfähigkeit der natürlichen Geome-

trie. Leider sucht man den Namen Aoust in vielen einschlägigen Biographien vergebens und seine Werke sind heute weitgehend unbekannt. Zitate aus der Einleitung zu seinem Buch *Analyse infinitésimale des courbes planes* zeugen von der Begeisterung und sprachlichen Intensität:

> Cette Géométrie se montre alors comme un seul et majestueux édifice ou tout est ordonné suivant les règles d'une architecture sublime...
>
> Résumons les avantages principaux de cette Analyse des courbes.
> Elle est **une** dans son principe, dont la traduction analytique donne l'équation élémentaire de la courbe.
> Elle est **simple** par sa méthode, qui rejette tout auxiliaire étranger à la nature de la courbe.
> Elle est **générale**, également applicable aux courbes planes et aux courbes tracées sur une surface quelconque.
> Elle est **directe**, parce qu'elle établit logiquement les propriétés les plus intimes de la courbe, les faisant toutes dériver sans effort de l'équation naturelle.
> Enfin, et ce n'est pas son moindre avantage, elle est **géométrique**, non-seulement en ce sens qu'elle donne toute la Géométrie de la courbe, mais parce qu'elle apprend quelles sont sa position, son importance, ses affinités dans la Géométrie universelle des courbes.

Den eigentlichen Durchbruch schaffte 1896 Ernesto **CESARO** mit seinem 1901 auch in deutscher Sprache erschienenen Werk *Lezioni di geometria intrinseca*. Sein grossartiges Gebäude der natürlichen Geometrie stellt er auf die Pfeiler Bogenlänge s, Krümmungsradius R und das bewegliche Koordinatensystem *Tangente-Normale*. "Die Natur der Kurve wird erschlossen aus dem wechselnden Bild der geometrischen Aussenwelt, die man auf diese gleitenden Achsen bezieht." (Kowalewski)
Mit den daraus resultierenden Formeln bewältigt Cesàro zahlreiche Probleme der Kurventheorie auf bestechend einfache Weise.

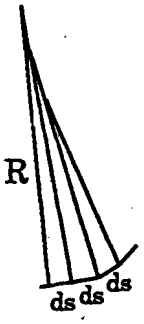
> Ersetzt man φ mittels $ds = Rd\varphi$ durch R, so schreibt sich die Kreisevolvente als $R^2 = 2as$.

Ein notwendiger Seitenblick

Einige Programmiersprachen verfügen über eine sog. Turtle-Graphik. Die Idee geht auf Seymour Papert und sein Team am MIT zurück. Den Kindern soll eine altersgerechte Möglichkeit geboten werden, um anhand eines kleinen Roboters auf dem Fussboden oder einer abstrakten Schildkröte auf dem Bildschirm programmieren zu lernen. Die Turtle erfüllt somit "keinen andern Zweck als den, gut zu programmieren und gut zum 'Damitdenken' zu sein" (Papert).
Die Turtle-Graphik hat sich vom oft kritisierten Kinderspielzeug zu einem

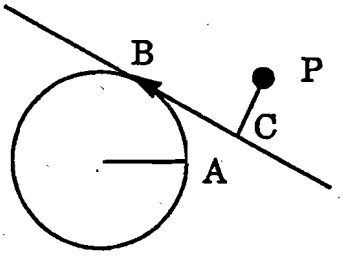
gewaltigen Werkzeug der diskreten Mathematik und in der Physik entwickelt. Der Gebrauch der Turtle ist in keiner Art und Weise auf das Zeichnen eingeschränkt. Durch die Bestückung mit Zusatzgeräten lässt sich der Aktionsradius drastisch erhöhen. Beispiele sind ein Peilgerät (Vermessung), Sensoren, Weglängen- und Krümmungsmessgeräte u.v.m. Wie andere mächtige Ideen zeigt sich die Turtle-Graphik als eine faszinierende Mischung von Einfachem mit Tiefgründigem.
An dieser Stelle interessiert die Feststellung, dass die Turtle eine koordinatenfreie, intrinsische Geometrie erlaubt. Der fortschreitenden Bewegung s entspricht der Turtle-Befehl *forward* und zur drehenden Bewegung φ gehören die Befehle *left* und *right*.
Dadurch eröffnet sie oft einen einfachen Zugang zu schwierigen Problemen (z.B. Zeichnung der Klothoide; Darstellung von Fusspunkt- und Verfolgungskurven; Fraktale und insbesondere L-Systeme).

Einige Möglichkeiten am Beispiel der Kreisevolvente seien skizziert:



Aus der Evolventengleichung $R^2 = 2as$ und der Beziehung $d\varphi = ds/R$ ergibt sich sofort:

forward (ds)
s = s + ds
left (Winkelmass von ds/R)



Welche Kreisevolvente beschreibt der Punkt P?
Da $\overset{\frown}{AB} = \overline{BC}$, läuft die Turtle von B aus rückwärts bis C, dreht sich um 90 Grad nach rechts, geht $\overline{CP}$ vorwärts und zeichnet den Punkt. Dann kehrt sie zum gespeicherten Standort B zurück u.s.w.

LOGO und COMAL enthalten bereits eine Turtle-Graphik. Sie lässt sich jedoch ohne weiteres auch selber in anderen Sprachen programmieren. Ich habe mit Schülern eine Turtle in C geschrieben. Anregungen für die Umsetzung in PASCAL gibt *Uwe Beck, Computergraphik, Birkhäuser.* Sogar mit MAPLE und MATHEMATICA muss man nicht auf Turtle-Geometrie verzichten. Das ausgezeichnete Buch von *Stan Wagon, Mathematica in Aktion, Spektrum*, enthält eine vollständige Anleitung. Objektorientierte Sprachen erlauben den mühelosen Einsatz mehrerer Turtles.

Aktivitäten

2.1 Zeichne mit Turtle-Graphik einige Kurven in natürlichen Koordinaten (Datenblatt). Wähle verschiedene Schrittweiten.

2.2 Wie ändert sich die Kreisevolvente, wenn statt $R^2 = 2as$ die Gleichung $(R + b)^2 = 2as$ verwendet wird?

2.3 Erzeuge mit der Turtle die GRAPHIK 2 des 1. Kapitels.

2.4 Vergleiche die mit Turtle-Graphik gezeichneten Kurven mit den entsprechenden durch MAPLE oder MATHEMATICA erzeugten.

2.5 Leite die Formel für die Krümmung in x-y-Koordinaten her.

2.6 Jeder Punkt des abgewickelten Fadens beschreibt eine Evolvente. Zeige dies mit einer kleinen Animation.

2.7 Moderne Tabellenkalkulationen eignen sich vorzüglich, um aus Wertetabellen die zugehörigen Graphen zu erzeugen. Lasse die Werte im Hintergrund berechnen und auf dem Bildschirm lediglich zwei Fenster erscheinen:
Textfenster: Möglichkeit, den Radius a zu verstellen.
Graphikfenster: Darstellung der zugehörigen Kreisevolvente.

2.8 Statte die Turtle mit einem Hodometer (Weglängenmesser) aus und vergleiche damit die gemessenen mit den berechneten Werten.

2.9 Studiere die Biographien von Whewell, Aoust und Cesàro. Lese die Biographie von Krause z.B. in *"Allgemeine Enzyklopädie der Wissenschaften und Künste"*, Graz, 1984 .

2.10 Newton hat gezeigt, dass der Krümmungsmittelpunkt im Punkt P einer Kurve der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Normalen ist (*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, 1671).
Weise dies nach für die Kreisevolvente.
Lese den Text bei Newton (Arbeitsgemeinschaft Latein - Englisch - Mathematik?)

2.11 Konstruiere die von einem Punkt S aus an die Kreisevolvente gezogene(n) Tangente(n).

2.12 Gegeben ist eine Kreisevolvente und eine Gerade g. Gesucht wird ein Punkt auf g, von welchem aus zwei senkrecht stehende Tangenten an die Evolvente gezeichnet werden können. Gibt es immer solche Punkte?

DATENBLATT

KURVEN IN NATÜRLICHEN KOORDINATEN

Kurve	*Whewell*	*Cesàro*
Antiloga	$s = a/\varphi$	$R = -s^2/a$
Astroide	$s = a \cdot \cos 2\varphi$	$R^2 = 4(a^2 - s^2)$
Cardioide	$s = a \cdot \cos(\varphi/3)$	$s^2 + 9R^2 = a^2$
Kettenlinie	$s = a \cdot \tan\varphi$	$R = a + s^2/a$
Klothoide	$s^2 = 2a^2\varphi$	$R\,s = a^2$
Kreis	$s = a \cdot \varphi$	$R = a$
Kreisevolvente	$s = a \cdot \varphi^2/2$	$R^2 = 2as$
Log. Spirale	$s = a(e^{m\varphi} - 1)$	$R = m(s + a)$
Nierenkurve	$s = 6a \cdot \sin(\varphi/2)$	$4R^2 + s^2 = 36a^2$
Rollkurven	$s = a \cdot \sin(b\varphi)$	$s^2/a^2 + R^2/b^2 = 1$
Steiner-Kurve (Deltoid)	$s = (8/3)a \cdot \cos(3\varphi)$	$R^2 = 64a^2 - 9s^2$
Zykloide	$s = a \cdot \sin\varphi$	$s^2 + R^2 = a^2$

BIOGRAPHIE

WILLIAM WHEWELL (1794 - 1866)

geboren 24. Mai 1794 in Lancaster
gestorben 6. März 1866 in Cambridge

Als ältestes von 7 Kindern trat William sehr jung in die "Blue School" in Lancaster ein. Er machte schnell riesige Fortschritte. Privatstunden und der Schulbesuch in Heversham erlaubten ihm, 1812 nach Cambridge zu gehen, wo er die nächsten 54 Jahre blieb. Im College bestand er Prüfungen mit Erfolg und gewann mehrfach Preise. Nach dem Tode seines Vaters 1816 verdiente Whewell seinen Lebensunterhalt mit dem Erteilen von Privatstunden. Unter seinen Freunden befanden sich William Herschel und Charles Babbage. Ein Stipendium und die Stelle als Hilfsassistent halfen ihm, sich finanziell über die Runden zu bringen. In den folgenden Jahren wurde er Mitglied verschiedenster Vereinigungen (Cambridge Philosophical Society, Royal Society, Geological Society u.s.w.). Seine Vorlesungstätigkeit begann mit der Stelle eines Tutors im Jahre 1823. Ausgedehnte Reisen brachten ihn nach Deutschland, Frankreich, Irland und in die Schweiz. Sein Interesse galt der kirchlichen Architektur. Mit grosser Energie lernte er Deutsch, las Kant und übersetzte u.a. Goethes *Hermann und Dorothea*. Als Whewell 1825 zum Priester geweiht wurde, soll eine Persönlichkeit ausgerufen haben: "What a man was lost when they made you a parson!" Während 4 Jahren (1828-32) besetzte er den Lehrstuhl für Mineralogie. Er veröffentlichte eine mineralogische Klassifikation und untersuchte, zusammen mit Biddell Airy, die Dichte der Erde in den Minen von Cornwall. Für seine Schriften über die Gezeiten erhielt er eine Goldmedaille der Royal Society. 1837 erschien das Hauptwerk von Whewell mit dem Titel *History of the Inductive Sciences* und 3 Jahre später *Philosophy of the Inductive Sciences*. Die Übernahme der Professur für Moralphilosophie gab ihm die Chance, diesen stark vernachlässigten Bereich in Cambridge kräftig auszubauen. Andererseits machte sich bei ihm eine gewisse Müdigkeit breit. Viele Reformen und seine grossen Publikationen hatten Whewell ausgelaugt. Neuen Auftrieb gaben ihm 1841 die Heirat mit Cordelia Marshall und die Ernennung zum Vizekanzler. Trotz seiner sprichwörtlichen Heftigkeit und Ungeduld führte er ein vorbildliches Eheleben. Der Tod seiner Frau 1855 traf ihn schwer. Gestärkt an Körper und Seele kehrte er aus einem längeren Rom-Aufenthalt nach Cambridge zurück. Im Jahre 1858 heiratete Whewell die Witwe Everina Affleck. Nunmehr ein reicher Mann, baute er zwei Studentenhäuser für das Trinity College. Nach nur 7 Jahren verschied auch seine zweite Frau. Auf einem Ausflug brannte sein Pferd durch. Whewell stürzte so unglücklich, dass er gelähmt war. 1866 starb er und wurde in der Kapelle des College begraben. Cambridge verlor eine Persönlichkeit, welche sich ein Leben lang für die Belange der Studenten eingesetzt hatte und im In- und Ausland einen hervorragenden Ruf als Wissenschaftler genoss. Darwin stufte Whewell unter die grössten Gezeitenforscher ein. Daneben gab Whewell der mathematischen und philosophischen Fakultät wichtige Impulse.

A.A.G.

BIOGRAPHIE

ABBÉ BARTHÉLEMY AOUST (1811 - 1885)

geboren 19. April 1811 in Béziers
gestorben 20. November 1885 in Marseille

Louis-Stanislas-Xavier-Barthélemy Aoust trat ins Seminar von Montpellier ein mit der Absicht, Theologie zu studieren. 1833 erhielt er die Priesterweihe und unterrichtete anschliessend am kleinen Seminar von Montpellier. Da er sich von den exakten Wissenschaften besonders angezogen fühlte, bildete er sich selbständig weiter. 1844 erwarb er das Physiklizenziat und doktorierte mit Erfolg. Auf Grund dieser Titel erfolgte eine Berufung ans Collège Stanislas in Paris. Hier bereitete er sich auf eine Professur in Mathematik vor. In einem Wettbewerb, wo Catalan den ersten Platz belegte, erreichte er den 7. Rang. 1847 wechselte er als Professor ans Lyzeum von Strassburg, um aber zwei Jahre später den Lehrstuhl für Mathematik an der Fakultät der Wissenschaften von Besançon zu übernehmen. Der 1854 neugeschaffene Lehrstuhl für Mathematik in Marseille brachte ihn wieder in eine Gegend, wo er sich gesundheitlich besser fühlte als im Osten. Seine Vorlesungen über Infinitesimalrechnung und Astronomie waren weitherum berühmt wegen der hervorragenden Didaktik. Für seinen guten Unterricht wurde er mit einem Orden der Ehrenlegion belohnt. Abbé Aoust war nicht nur gern gesehenes Mitglied der Akademie der Wissenschaften von Marseille, sondern sogar zweimal deren Präsident. Er genoss den Ruf eines ésprit cultivé, welcher sich auch gerne der Belletristik widmete. Die wissenschaftlichen Publikationen erstrecken sich über soviele Themen, dass sein Nachfolger in der Akademie meinte, dass nur eine Vereinigung von Spezialisten dem Werk von Aoust gerecht werden könne. Die Hauptverdienste liegen sicher in der natürlichen Geometrie von Kurven auf beliebigen Oberflächen und im Raum.

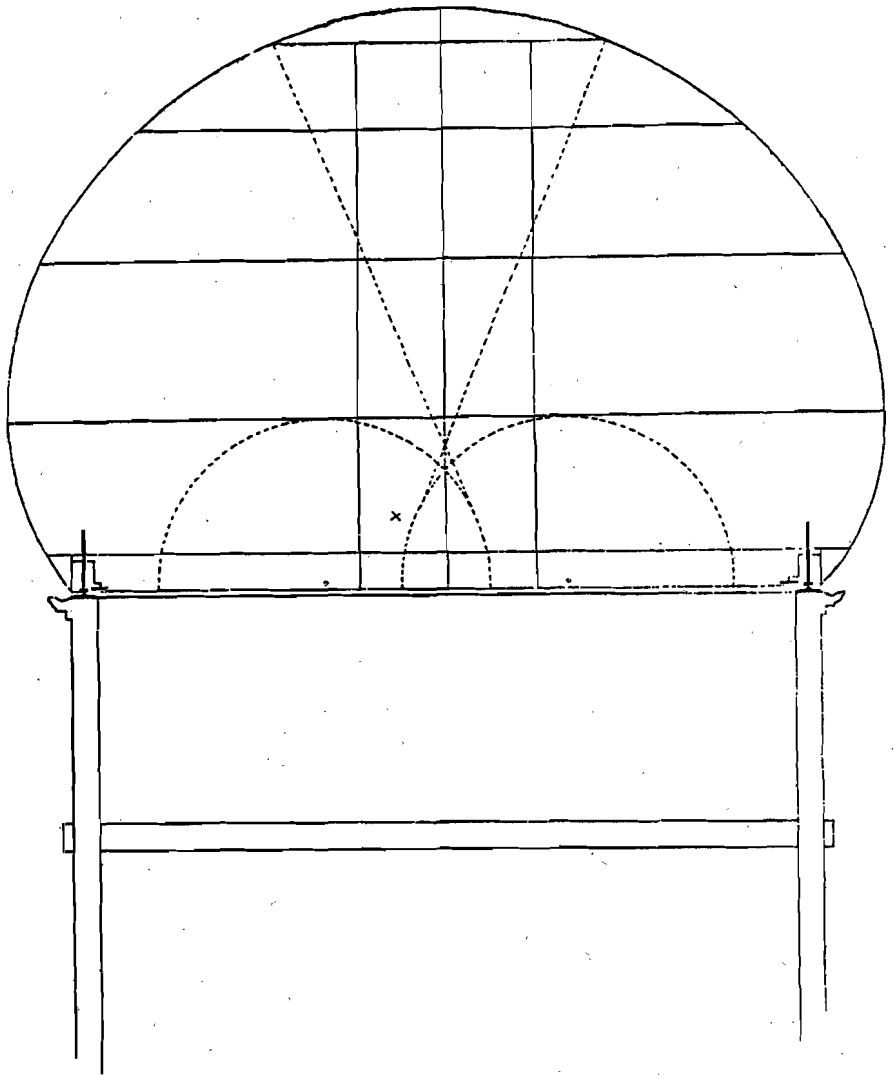
A.A.G.

Hommage à Diderot

3

Si vous enveloppez un cercle de cuivre ou d'acier d'une chaine fort mince; l'extrémité de cette chaine tracera, soit en s'enveloppant, soit en se développant, une courbe dont personne, à ce que je crois, n'a encore recherché les propriétés.

Denis Diderot



In order to accommodate the new 28-inch refractor of 28 feet focal length, a dome of 36 feet diameter is desirable; but as the external diameter of the circular wall-plate on which the dome runs is only 31 feet 4 inches, a peculiar form of dome is necessary. The form adopted is the surface generated by the revolution of an involute of a circle, 7 feet in diameter, with its centre in the plane of the rail, and 5 feet from the axis, the curve being completed near the apex by an arc of a circle (of 13 feet 3 inches radius) so that it cuts the axis at right angles. The diameter of the dome is 36 feet at a height of 7 feet above the rail, contracting to 31 feet at the plane of the rail. The varying curvature of the involute appears to be well adapted to the conditions, the contraction in the lower part of the dome to the diameter of 31 feet being rapid, owing to the sharp curvature, while the increasing curvature towards the apex gives ample height, and improves the appearance of the dome.

(Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1891)

GRAPHIK 4
The Royal Observatory, Greenwich, 1891

Die Idee eines Enzyklopädisten

Denis **DIDEROT** (1713 - 1784), Sohn eines Messerschmieds, Autodidakt und Meister der Erzählkunst, war Herausgeber und Mitautor der berühmten "Encyclopédie". Nebst zahlreichen philosophischen und literarischen Werken verfasste er in jungen Jahren auch seine *Mémoires sur différens sujets de mathématiques* (1748). Im 2. Teil findet sich eine schöne Abhandlung über die Kreisevolvente: *Examen de la dévelopante du Cercle.* In der Einleitung macht er sich stark für ein neues Werkzeug:

> **Si l'on augmentoit le nombre de ces instruments d'un nouveau compas qui fût d'un usage aussi sûr & aussi exact que celui dont on se sert pour tracer le cercle & qui facilitât un grand nombre d'opérations, seroit-elle bien fondée à le rejetter?...**
> **C'est la facilité qu'on a de tracer cette dévelopante, & la multitude des cas ou sa description peut avoir lieu qui m'ont déterminé à en examiner les propriétés.**

Diderot bearbeitet mit Zirkel, Lineal und gezeichneter Kreisevolvente 14 Probleme und 2 Theoreme. Darunter befinden sich:
- Konstruktion beliebiger regelmässiger Vielecke
- Winkeldreiteilung
- Kreisquadratur
- Bestimmung der Länge eines Kreisevolventenbogens (Rektifikation)
- Ermittlung der Fläche eines Kreisevolventenausschnittes (Quadratur)
- Berechnung des Schwerpunktes eines Kreissektors
- Lösung spezieller kubischer Gleichungen.

Als Beispiele seien hier die Probleme VI und VII gezeigt, wo es um die Rektifikation und Quadratur der Kreisevolvente geht:

PROBLEME VI.

Trouver une ligne droite égale à une portion quelconque AEG de la dévelopante du cercle.

Solution.

Soient (Fig.5.) du point E la tangente EF & la perpendiculaire EO à CE; que cette perpendiculaire soit rencontrée en O par la ligne CF prolongée & qui passe par le point de contengence F, Je dis que l'arc AEG est égal à la moitié de la ligne FO.

DEMONSTRATION.

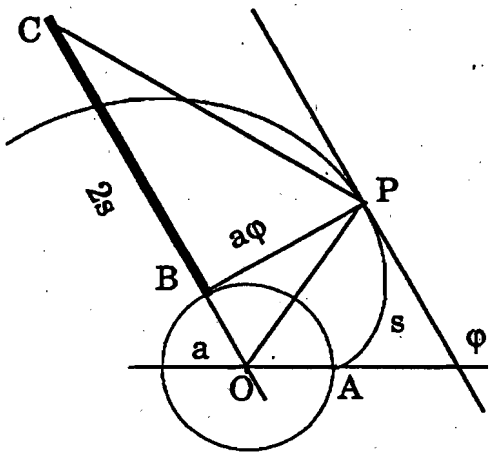
Ayant tiré la tangente ef infiniment proche de EF & nommé CA ou CF, a; l'arc AF, x; l'élement Ff, dx. Les secteurs semblables CFf, Eef donneront CF, a.fF, dx : : EF, x. Ee = $\frac{xdx}{a}$ & intégrant on aura AE = $\frac{xx}{2a}$.
Mais à cause des triangles rectangles semblables CFE, FEO; on a CF, a. FE, x : : FE, x. FO = $\frac{xx}{a}$. Donc FO = 2 AE ou AE = $\frac{FO}{2}$. C.q.f.d.

Beachte: C.q.f.d. heisst *ce qu'il falloit démontrer.*
Die Schreibweise a.2y : : dy.dx geht auf William Oughtred (1575 - 1660) zurück und bedeutet a : 2y = dy : dx . Sein Werk *Clavis mathematicae*, 1631, strotzt von eigenwilligen Bezeichnungen.

Im **Problem VI** berechnet Diderot die Bogenlänge der Kreisevolvente. Das Resultat

$$s = \frac{1}{2} \cdot a\varphi^2$$

ist uns aus Kap. 2 bereits bekannt. Neu wird hier der Bogen als Strecke dargestellt.
Nebenstehende Figur verdeutlicht mit unseren Bezeichnungen die Konstruktion von s als Strecke unter Verwendung des Höhensatzes $a \cdot 2s = (a\varphi)^2$.



Problem VII beschäftigt sich mit mit der Quadratur:

PROBLEME VII.

Trouver un espace rectiligne égal à l'espace AFEG. Voy. Fig.5.

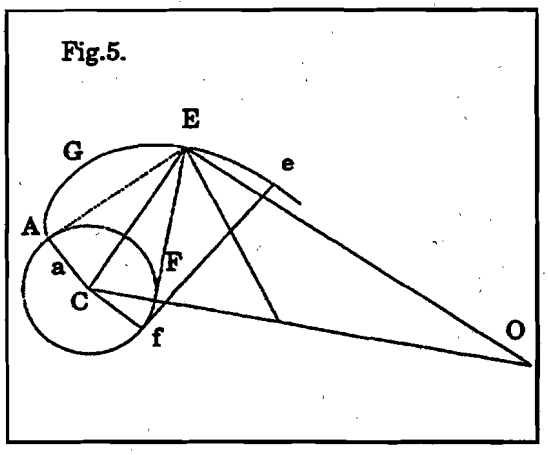
Solution.

Je dis que l'espace AFEG est égal au tiers du triangle EFO.

DEMONSTRATION.

Le secteur élementaire Efe == $\frac{Ee \times EF}{2} = \frac{xxdx}{2a}$, par la proposition précédente, dont l'intégrale donne l'espace AFEG = $\frac{x^3}{2 \cdot 3a}$. Mais le triangle EFO = $\frac{EF \times FO}{2} = \frac{x^3}{2a}$. Donc l'espace AFEG = $\frac{1}{3}$ du triangle EFO. Ce qu'il falloit démontrer.

Fig.5.

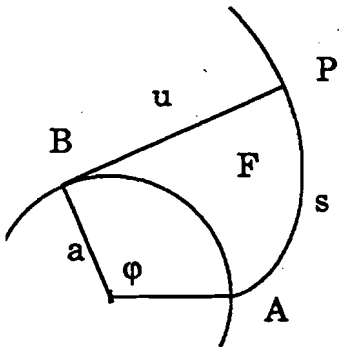


Diderot beweist also, dass (vergl. obige Figur) die Evolventenfläche BAP einen Drittel der Dreiecksfläche BPC ausmacht.

Einen interessanten Vergleich lassen die Lösungen von Joh. Bernoulli 1692 und V.M.A. Mannheim 1859 zu (Unterlagen dazu finden sich in den Aktivitäten).

Bernoulli:

Die Kreisevolventenfläche ist gleich dem Kubus der begrenzenden Kreistangente dividiert durch den sechsfachen Kreisradius.



$$F = \frac{u^3}{6a} = \frac{a^2 \cdot \varphi^3}{6}$$

$$F = \frac{1}{3} s \cdot a\varphi$$

Mannheim:

Die Kreisevolventenfläche ist gleich einem Drittel des Produktes aus dem Evolventenbogen (AP) und dem zugehörigen Kreisbogen (AB).

Starten wir bei der Flächenformel von Diderot, so ergeben sich durch schrittweises Eliminieren von s die Beziehungen von Mannheim und Bernoulli.

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\, a\varphi 2s = \frac{1}{3} \cdot a\varphi s = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot \varphi^3$$

Mannheim Bernoulli

Der Schluss seiner Abhandlung hebt die Bedeutung des Erreichten hervor:

> Puisque l'on peut considérer une courbe quelconque comme composée d'une infinité de très-petits arcs circulaires, il s'ensuit que tout ce que nous avons démontré du cercle & de sa développante, l'est aussi de ces petits arcs & de leurs développantes.

Aktivitäten

3.1 Die Gerade g rollt auf der Peripherie des Kreises mit Radius a einmal vollständig ab. Berechne die Bogenlänge und die Fläche der entstehenden Kreisevolvente.

3.2 Entwerfe einen Planimeter für die Turtle und vergleiche mit 3.1 .

3.3 Die Kreisevolvente lässt sich auch zur Winkeldreiteilung einsetzen. Studiere den folgenden Ausschnitt aus Diderots Abhandlung und führe einen Beweis:

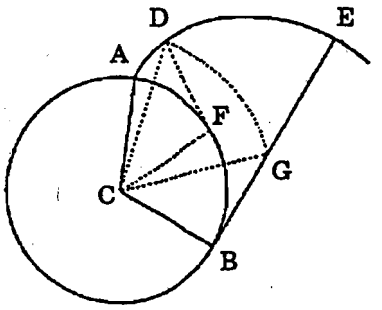
PROBLEME I.

Diviser un arc de cercle AFB (Fig. 1.) en une raison quelconque commensurable ou incommensurable. Soit par exemple, proposé de trouver le point F, tel que AF soit à FB comme 1 à $\sqrt{5}$.

Solution.

Tracez la développante ADE, tirez de l'extrémité B de l'arc donné la tangente BGE; divisez cette tangente au point G en deux parties qui soient entr'elles dans la raison donnée de 1 à $\sqrt{5}$. Décrivez du rayon CG, l'arc GD qui rencontre la développante en D. Achevez sur CD, qui est égale à CG, le triangle CDF entierement égal au triangle CBG. Je dis que le point F est le point cherché.

Fig.1.



3.4 A horse is tethered by a rope, *a* feet long, fastened to a post in a circular fence enclosing a circular piece of ground *b* feet in diameter. If the horse is outside of the fence over how much ground can he feed? If he is inside the fence over how much ground can he feed? $b > a$ in each case *(George Lilley, Portland, AMM 1896).*

3.5 Our great-great- ... great grandfather was an eccentric who left a considerable fortune to be devoted to the upkeep of his mausoleum. The Will ran thus: -
' ... a goat must tethered to the wall of my mausoleum so that it can just keep the wall clear of grass as well as eating half the area of the field. The mausoleum walls must be circular and concentric with the

field, also circular, in which my body lies. The remainder of the field ...'

Now the mausoleum is 58 yd in diameter. How large is the field?
(Kendall, Thomas, Mathematical Puzzles for the Connoisseur, Griffin London, 1962)

3.6 THE COMPLAINING GOAT

This problem was originated by R. A. Harrington, B. F. Goodrich Research Center, Brecksville, Ohio. It seems

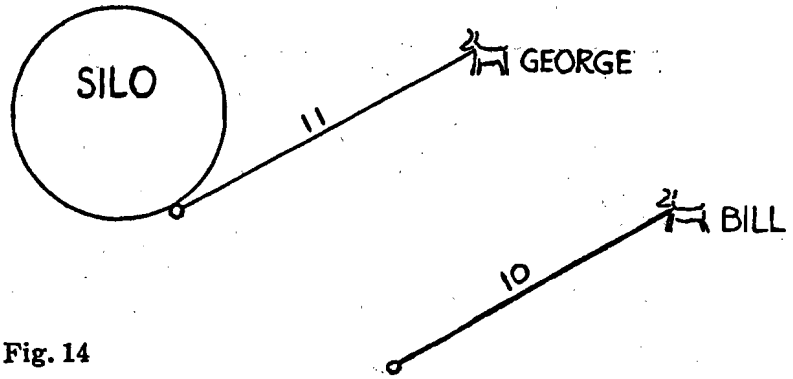


Fig. 14

that George and another goat, Bill, were both tethered in a pasture, and fell to arguing about their relative grazing areas. "It is true," bemoaned George," that my rope is ten per cent longer than yours, but mine is tied to a ring on the outside wall of this circular silo and I can just reach the point on the wall diagonally opposite the ring, so I get no grass at all in that particular direction. You on the other hand are tethered to a stake in the middle of the field and can graze over a complete circle, so it seems you are much better off than I." The problem is to explain to George just how his grazing area compares with Bill's.

(Graham, Ingenious mathematical problems and methods, Dover)

3.7 In der 20. Vorlesung des Buches *Die erste Integralrechnung* von Joh. Bernoulli wird die Fläche der Kreisevolvente wie folgt berechnet:

Zwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Durch das Beispiel, das jetzt folgt, wird klar werden, wie man das Ausmaß der Flächen und Kurven findet, und zwar nicht der gegebenen, sondern derjenigen, die durch die Abwicklung dieser beschrieben werden.

ABE sei ein Kreis, durch dessen Abwicklung die Kurve *AHF* beschrieben wird. *A* ist der Anfang, *F* das Ende der Kurve. Es wird das Ausmaß eines Kurvenstückes *AH* gesucht und seine Fläche *ACHA*.

Man bemerke, daß die Kurve *AHJF* eine Art Spirale ist, ebenso, daß die Strecke *AF* zwischen Anfang und Ende gleich

der Kreisperipherie und senkrecht zur Kurve in den Punkten A und F. Es sei jetzt GH das Differential der Kurve AH, man ziehe die Tangenten HC, GB und die Radien CD, BD. Dann werden HC, GB senkrecht zur Kurve AH sein und gleich den Bogen AC, AB, die ich s nenne, so daß $BC = ds$ ist. Da nun Winkel $GBD = BCD + BDC$ ist und zugleich $GBD = HCD$, weil beides Rechte sind, so wird $HCG = BDC$ sein, folglich das Dreieck BDC ähnlich dem Dreieck HCG, mithin $DC : HC = BC : GH$, d. h. $a : s = ds : GH$, also

$$GH = \frac{s\,ds}{a}.$$

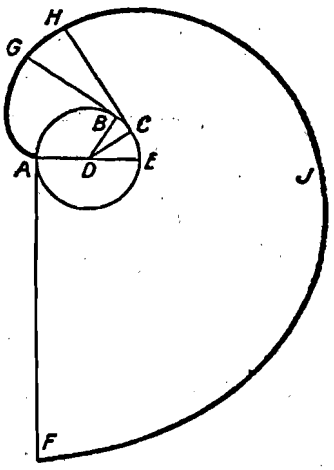


Fig. 69.

Das Integral hiervon $\frac{s^2}{2a}$ ist gleich der Kurve AH. Hieraus geht hervor, daß AH die dritte Proportionale zu dem Durchmesser AE und dem Bogen AC ist, und daher die ganze Kurve $AHJF$ die dritte Proportionale zu AE und AF.

Zur Ausmessung der Fläche $ACHA$ multipliziere man $\frac{1}{2}CH$ mit GH. Dann kommt heraus

$$\frac{s^2 ds}{2a} = \text{Differential der Fläche } ACH,$$

d. h. gleich dem Dreieck GCH. Das Integral hiervon $\frac{s^3}{6a}$ ist gleich der Fläche $ACHA$. Daher ist die ganze Fläche $AHJFAECA$ gleich dem dritten Teil des mit dem Radius AF beschriebenen Kreises, die Kurve $AHJF$ aber gleich dem halben Umfang desselben Kreises.

Beachte besonders die Aussage am Schluss über den Kreisvergleich.

3.8 Formuliere eine Regel, wie man gemäss Diderot eine zum Kreisevolventenbogen gleichlange Strecke konstruiert.

3.9 Lese die Herleitung der Flächenformel von Mannheim in seinem Werk *Principes et développements de géométrie cinématique*, Paris 1894, S. 503ff.

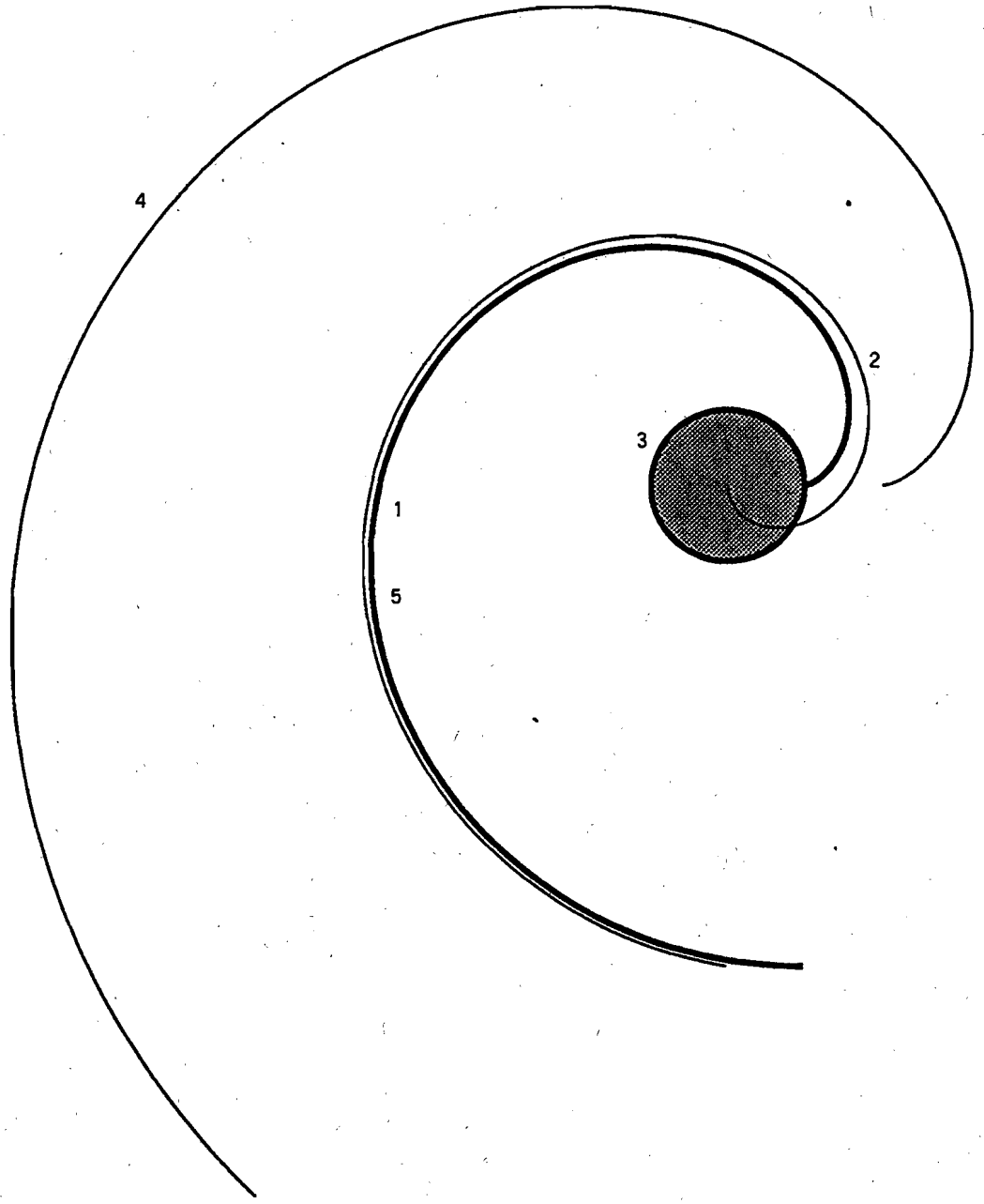
3.10 Zeige: Liegt die Kreisevolvente gezeichnet vor, dann lässt sich jeder Bogen des erzeugenden Halbkreises rektifizieren.

Die 3 grossen E

4

Es würde ganz unmöglich sein, eine derartige Fülle geometrischer Thatsachen, wie sie hier geboten wird, in so eleganter Weise unter Benutzung anderer Methoden zu gewinnen.

Gerhard Kowalewski, 1901
(Vorwort zu E. Cesàro)



GRAPHIK 5

(1) Kreisevolvente, (2) Fusspunktkurve, (3) Gegenfusspunktkurve, (4) Podoide, (5) negative Fusspunktkurve

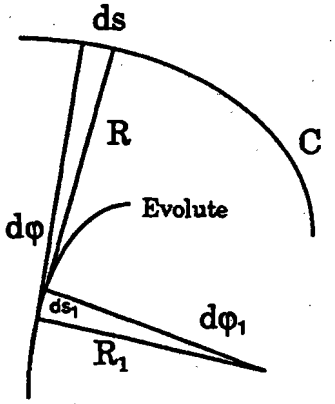
Nach der Saat die Ernte

Die 3 grossen E, welche gerne miteinander verwechselt werden, sind ***E***volute, ***E***volvente und ***E***nveloppe (Einhüllende). Wenn wir auf unserer mit s und R intrinsisch definierten Kurve das begleitende Zweibein *Tangente-Normale* mitführen, so hüllen die Tangenten die gegebene Kurve und die Normalen die zugehörige Evolute ein. Diese lässt sich punktweise erzeugen, indem man auf den Normalen die jeweiligen Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Kurve abträgt. Sie heisst deshalb auch Mittelpunktskurve. Blickwechsel: Rollt nun auf dieser Evolute eine Gerade ab, so beschreibt jeder Punkt dieser Gerade eine Evolvente. Unter diesen unendlich vielen "Parallelkurven" befindet sich auch die gegebene Kurve. Es ist wichtig anzumerken, dass es zu einer (genügend braven) Kurve genau eine Evolute, aber unendlich viele Evolventen gibt.
Die Begriffe Evolute und Evolvente stammen, wie wir bereits wissen, von Huygens. Der Name Einhüllende (Enveloppe) geht auf Leibniz zurück.

Liegt eine Kurve vor, so interessiert man sich für sog. **begleitende** Kurven. Beispiele dazu sind: Parallelkurven, Evolute, Evolventen, Fusspunktkurven, inverse Kurven, ähnliche Kurven u.s.w. Im Rahmen der natürlichen Geometrie sind die Gleichungen von begleitenden Kurven in der Regel bequem zugänglich. Da sich die universelle Methode von Cesàro für die Schule weniger eignet (vergl. Kap. 8 Ausblicke), beschreiten wir hier einen andern Weg, welcher jedoch zum selben Ziel führt. Als Musterbeispiele wählen wir Evolute und Evolvente.

*E*volute

Gegeben sei die Kurve C in den natürlichen Koordinaten s und R. Wir suchen die Gleichung der Evolute ebenfalls in natürlichen Koordinaten, nämlich s_1 und R_1.



In den beiden infinitesimalen Dreiecken gilt $d\varphi = d\varphi_1$.
Da die Evolute aus den Krümmungsmittelpunkten von C gebildet wird, ist $ds_1 = dR$. Daraus folgt durch Integration bereits $s_1 = R$, wenn die Integrationskonstante gut gewählt wird.
Jetzt erhält man noch:

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\varphi_1} = \frac{dR}{d\varphi} = \frac{dR\ R}{ds}$$

Dies ergibt die folgende Evolutenformel:

Evolutenformel:	$s_1 = R$	$R_1 = R\,\frac{dR}{ds}$

Beispiel: Evolute der Kreisevolvente

Es ist klar, dass der erzeugende Kreis herauskommen muss.
Die Kreisevolvente besitzt die Gleichung $R^2 = 2as$. Es folgt schnell:

$$R_1 = R\,\frac{dR}{ds} = R\,\frac{2a}{2\sqrt{2as}} = a$$

dh. ein Kreis mit Radius a.

Evolvente

Gegeben sei wiederum die Kurve C in den natürlichen Koordinaten s und R. Diese Kurve ist für alle ihre Evolventen die Evolute. Durch Umkehrung der Evolutenformel entsteht dann die Evolventenformel.

Evolventenformel:	$R_1 = s$	$s_1 = \int \frac{s}{R} ds$

Beispiel: Evolvente der Kreisevolvente (2. Kreisevolvente)

Ausgangsgleichung: $R^2 = 2as$. Wir erhalten:

$$s_1 = \int \frac{R}{2a} ds = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int \sqrt{s}\, ds \qquad R^3 = \frac{9}{2} a s^2$$

Als sogenannte *Sturmsche Spirale* hat diese Kurve ein spezielles Interesse gefunden.

Namhafte Mathematiker, darunter Euler, Joh. Bernoulli und Sylvester, haben sich mit höheren Kreisevolventen beschäftigt. Auf Vorschlag von Cayley nennt man solche Kurven auch Cycloden. Aus seinem Artikel *On*

successive involutes to circles - second note (1868) spricht doch etwas Stolz, wenn er schreibt:

> Since the appearance of the former Note on this subject, I have enjoyed the inestimable advantage of securing the cooperation of my all-accomplished and omni-capable friend Mr Spottiswoode, to whose kindness and skill my readers are indepted for the beautiful figures given in the following pages, which I shall proceéd briefly to describe, and which, as far as I can learn, offer the first examples of the actual visible representation of any derived involutes of the circle beyond those of the first order.

Gerne zeige ich eine solche Figur:

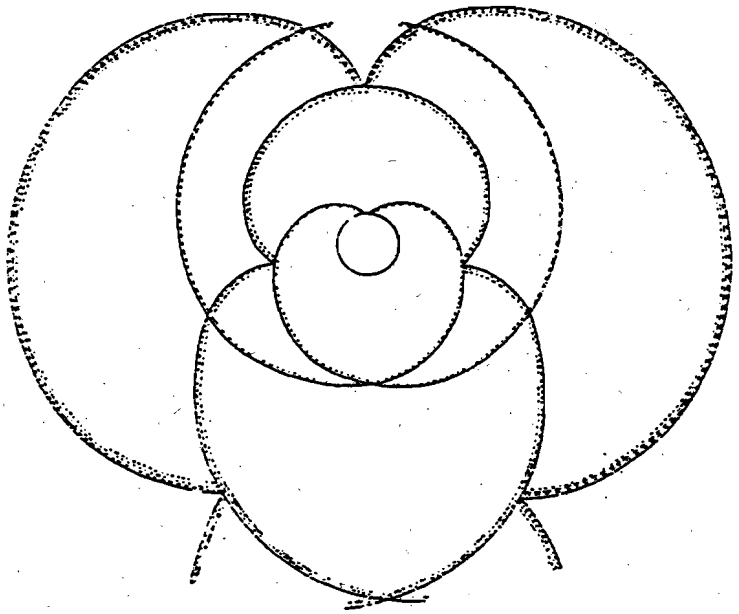


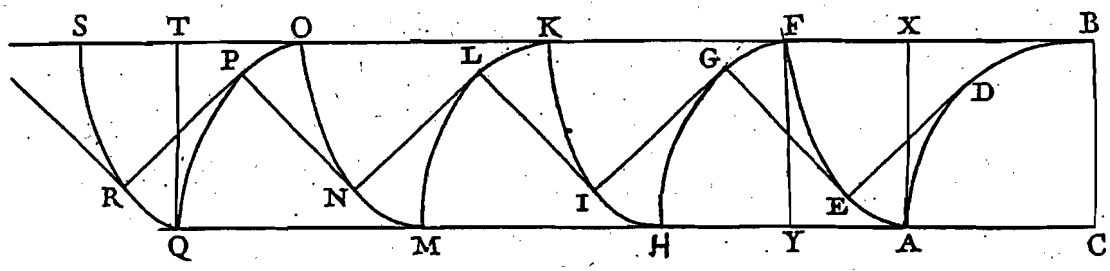
Fig. 2.

Es mag nützlich sein, als ausführlicheres Beispiel den (von mir so benannten) Evolventensatz von Bernoulli und Euler zu skizzieren.

Der Evolventensatz (Bernoulli - Euler)

Wir richten das Augenmerk auf den IV. Band der Werke von Joh. Bernoulli. In der Nr. 165 mit dem Titel *De Evolutione successiva et alternante...* stellt er folgenden Satz auf:
Gegeben ist ein Kurvenbogen, dessen Tangente beim Durchlaufen sich im selben Sinne um 90° dreht, so dass also der Tangentenwinkel zwischen

den Endpunkten 90° beträgt. Zieht man in einem Endpunkt die Tangente, im andern die Normale, so sind die beiden Geraden parallel. Die sukzessiven alternierenden Evolventen zwischen den Parallelen (vergl. Figur) nähern sich dann der Gestalt einer Halbzykloide.



Bernoulli bewies diesen Satz für einen Viertelkreis als Ausgangskurve. Verständlicherweise gibt sich Euler mit einem solchen Teilresultat nicht zufrieden. Am 17. Mai 1762 legt er folgende Arbeit der Petersburger Akademie vor: *Demonstratio theorematis Bernoulliani quod ex evolutione curvae cuiuscunque rectangulae in infinitum continuata tandem cycloides nascantur.*
Darin beweist er den Satz von Bernoulli vollständig, indem er seinen "methodus inveniendi" von Reihen kraftvoll einsetzt. Sobald es gelingt, die gegebene Kurve durch eine Fourier-Reihe darzustellen, ergibt sich der Rest von selbst. Als Zugabe behandelt er noch den Fall, wo der Tangentenwinkel grösser oder kleiner als 90° ist. Die Methode führt dann auf Hypo- oder Epizykloiden, welche allerdings unendlich gross oder klein sind.
Fazit:

Evolventensatz (Bernoulli - Euler):

Die sukzessiven alternierenden Evolventen einer Kurve nähern sich einer Halbzykloide, Hypozykloide oder Epizykloide, falls der Tangentenwinkel bzw. 90°, kleiner als 90° oder grösser als 90° ist.

Einen schönen Beweis mit Mitteln der natürlichen Geometrie findet man bei Whewell. Weitere Beweise stammen von Denis Poisson und Alexandre Puiseux.
Gino Loria setzt in seinem Buch *Spezielle algebraische und transscendente EBENE KURVEN* das Tüpflein aufs i mit der Bemerkung:

> Die analytische Darstellung einer derartigen Kurvenreihe macht sich äusserst elegant, wenn man natürliche Koordinaten anwendet.

Aktivitäten

4.1 Ermittle die Gleichung der 3. Kreisevolvente. Stelle eine Formel für die n-te Evolvente auf und beweise sie mit vollständiger Induktion.

4.2 Zeichne mit der Turtle die Sturmsche Spirale und suche einige Eigenschaften.

4.3 Wie äussern sich Spitzen und Wendepunkte einer Kurve bei ihrer Evolute?

4.4 Liegt eine Kurve in natürlichen Koordinaten s und R vor, so findet man sofort die Gleichungen der zu ihr **ähnlichen** Kurven. Zeige dies.
Sind Kreisevolventen mit verschiedenen Grundkreisen alle ähnlich zueinander?

4.5 Lese die in Kap. 2 erwähnten Abhandlungen von Euler über Kurven, welche zu ihren Evoluten ähnlich sind. Sollte die verwendete Sprache zu grosse Mühe bereiten, versuche zu beweisen, dass die Evolute einer logarithmischen Spirale zu ihr ähnlich (ja sogar kongruent) ist.

4.6 Mit der Turtle lassen sich bequem **Parallelkurven** zu einer gegebenen Kurve zeichnen. Probiere!
Da Parallelkurven dieselbe Evolute besitzen und sich entsprechende Krümmungsradien nur durch eine Konstante u unterscheiden, findet man folgende Formeln:

Parallelkurven:	$R_1 = R - u$	$s_1 = \int \left(1 - \frac{u}{R}\right) ds$

Beweise diese Formeln.
Wende sie auf den Kreis und die Kreisevolvente an.

4.7 Konstruiere wiederum mit Hilfe der Turtle die zur Kreisevolvente **inverse** Kurve bezüglich dem Grundkreis. Die entstehende Kurve heisst gemäss Roger Cotes *Tractrix complicata* (Harmonia mensurarum, 1722).
Weshalb hat Cotes den Namen Tractrix gewählt? (Hinweis: Eigenschaft der Tangente). Vergleiche GRAPHIK 3.

4.8 Empfinde die Freude von Sylvester nach und zeichne einige sukzessive Kreisevolventen mit der Turtle.

4.9 Stelle ausgehend von der Sturmschen Spirale die sukzessiven Evolu-

ten dar und bestätige jeweils die Evolutenformel.
Sehr dankbar in dieser Beziehung ist die logarithmische Spirale.

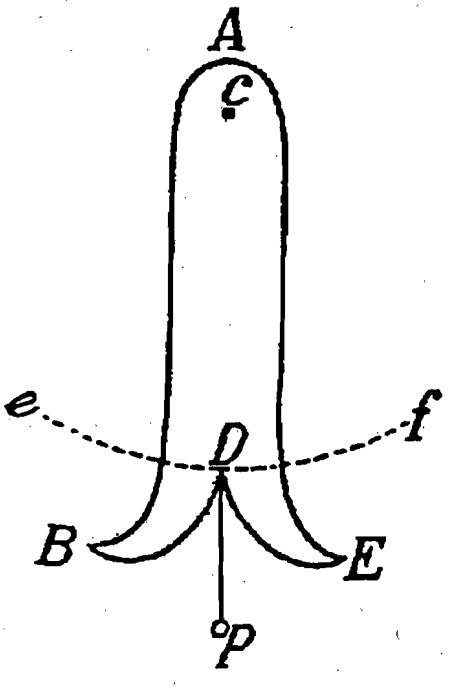
4.10 Sylvester schreibt:

> ... I think, not at all improbable that the successive involutes of the circle would furnish or suggest many patterns available for decorative purposes: the enormous variety of each kind of involute, which of course increases with the order of derivation, adds to the probability of this conjecture.

Nimm Stellung und entwerfe selber einige Muster.

Huygens experimentierte mit verschiedenen Vorrichtungen, um seine Uhren gegen die Störungen des Wellengangs unempfindlich zu machen (dieses Vorhaben ist nicht zu verwechseln mit seinen Anstrengungen im Zusammenhang mit dem Zykloidenpendel). Leider sind wenig Aufzeichnungen darüber erhalten. Aus seinem Briefwechsel (Band X, Oeuvres Complètes, Nr. 2823, 1693) kann eine gewisse Rekonstruktion vorgenommen werden. An oben erwähnter Stelle heisst es:

Fig. 5.



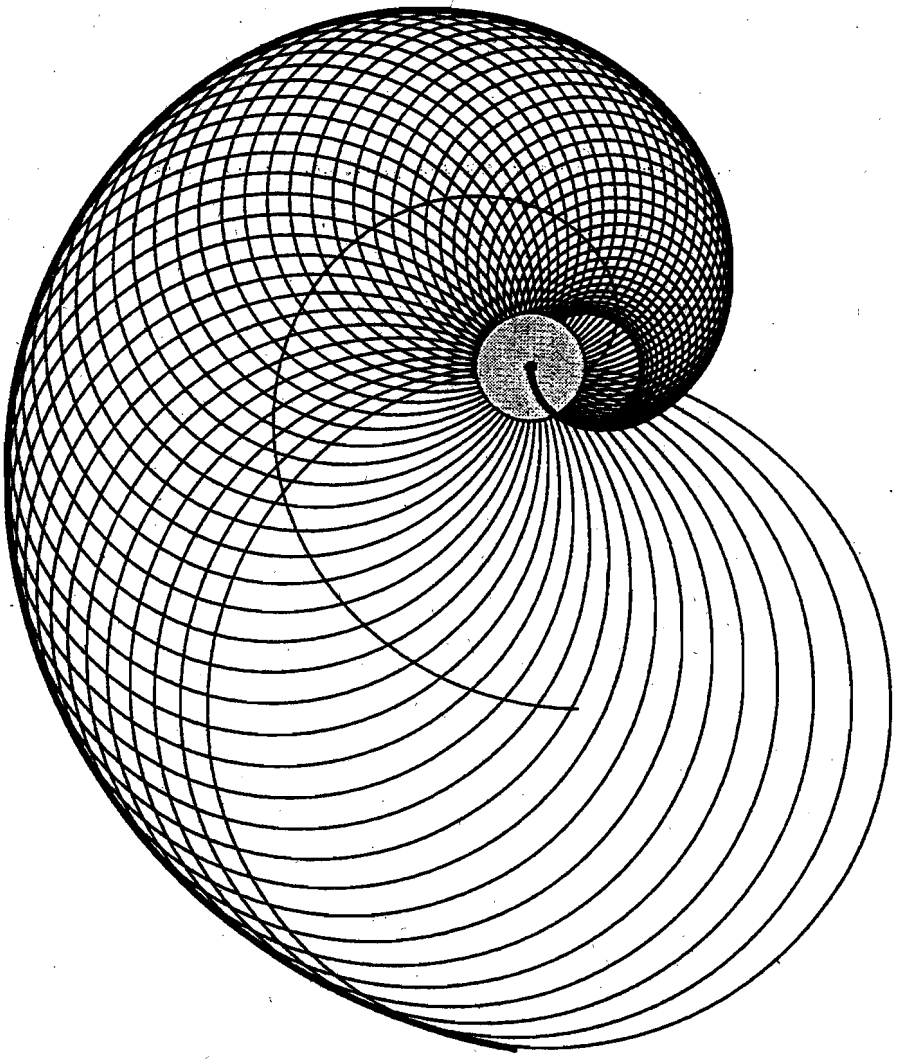
Le 6 mars suivant il parait avoir abandonné ce système pour s'arrèter au suivant. A l'axe d'un balancier (fig. 5) est attachée une languette en métal, de la forme ABDE, dont les bords DB et DE doivent être taillés de manière qu'un poids p suspendu par un fil ou ruban au point D, et qui dans le mouvement oscillatoire du balancier s'enroule ou se déroule sur ces bords, produise à chaque instant un moment de force, par rapport à l'axe C, qui soit proportionnel à l'écart angulaire de la position d'équilibre de la languette. Huygens démontre que la courbe qui satisfait à cette condition est développante du cercle eDf décrit du centre C et que, dans ce cas, le poids p, lorsque le fil reste vertical, décrit une parabole.

Auf den Spuren von Jakob Steiner

5

Diese Sätze sind wegen ihrer Einfachheit und ihres innigen Zusammenhanges unter sich besonders geeignet, beim Unterrichte das Interesse der Schüler zu erwecken und dieselben zur Selbstthätigkeit anzuregen.

Jakob Steiner, 1838

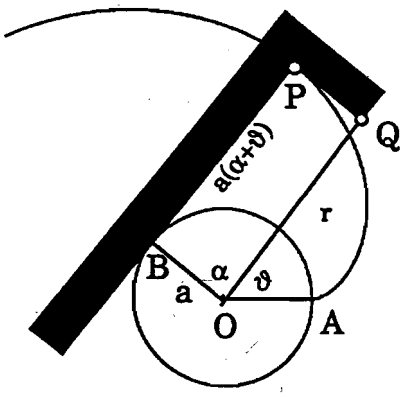


GRAPHIK 6
Fusspunktkurve der Kreisevolvente als Einhüllende: arch. Spirale

Eine vitale Idee

Grosses kommt oft sehr unscheinbar daher. Die Idee der Fusspunktkurve stammt von C. Maclaurin 1718 und der Name "podaire" im Französischen geht auf O. Terquem (1782 - 1862) zurück. Fällt man von einem fest gewählten Punkt O der Ebene Lote auf die Tangenten einer gegebenen Kurve C, so bilden die Lotfusspunkte die Fusspunktkurve F von C bezüglich O. Der Punkt O heisst der Pol und die Kurve C die Directrix .
Damit entspricht jeder Tangente von C ein Punkt der zugehörigen Fusspunktkurve. Es ist klar, dass die besondere Natur der Directrix auf die Eigentümlichkeiten der Fusspunktkurve abfärbt.
Die massgebende Arbeit über diese Thematik verfasste Jakob **STEINER** 1838: *Von dem Krümmungs - Schwerpuncte ebener Curven.* Höhepunkt bildet der Zusammenhang zwischen Rollkurven und bestimmten Fusspunktkurven. Wir kommen darauf zurück.
Mühelos zeichnet die Turtle beliebige Fusspunktkurven, wenn man ihr zusätzlich ein Peilgerät mit auf den Weg gibt: Das momentane Kurvenelement gibt die Tangentenrichtung, in welcher sie sich soweit bewegt, bis sie den festen Punkt O unter einem rechten Winkel sieht.

Betrachten wir wiederum exemplarisch die Fusspunktkurve der Kreisevolvente bezüglich dem Mittelpunkt O:



Lassen wir einen Winkelhaken (Gnomon) auf dem Kreis abrollen, so erzeugt der Punkt P selbstverständlich die Kreisevolvente. Q ist offensichtlich der Laufpunkt für die Fusspunktkurve.
Weil $\overline{OQ} = \overline{BP}$, wird $r = a(\alpha + \vartheta)$. Die Kurve mit dieser einfachen Polarkoordinatengleichung heisst bekanntlich **archimedische Spirale**. Sie geht auf Conon von Samos, einen guten Freund von Archimedes, zurück, trägt aber zurecht den Namen von Archimedes.

Obige Figur suggeriert noch eine Erzeugung der Fusspunktkurve durch Einhüllung. Für den Abrollvorgang des Winkelhakens bildet der Punkt B das momentane Drehzentrum. BQ ist deshalb Normale der archimedischen Spirale. Damit ist auch die Tangente in Q klar. Der Kreis durch O, B, Q und P besitzt in Q ebenfalls diese Tangente. Beim Bewegungsvorgang liegt der Mittelpunkt M der Kreise stets in der Mitte von OP. Der geometrische Ort von M ergibt eine Kreisevolvente im Massstab 1:2.
Also gilt: Die Fusspunktkurve der Kreisevolvente ist die Einhüllende aller

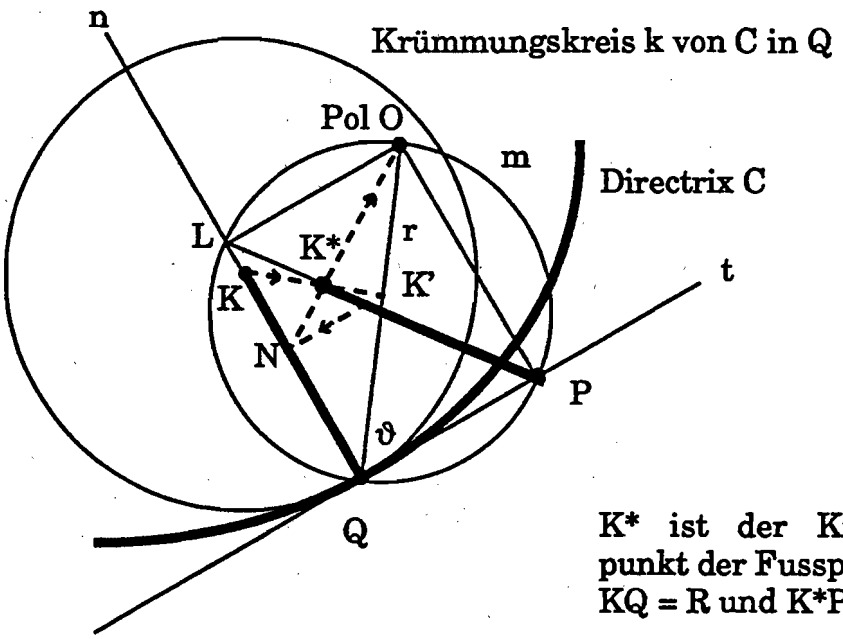
durch O gehenden Kreise, welche man um die von O aus mit dem Faktor 0.5 gestauchte Kreisevolvente schlagen kann. Die GRAPHIK 6 zeigt diese Erzeugungsweise.

Die Konstruktion von Emil Weyr

Der kinematische Gedanke des momentanen Drehzentrums erlaubt die Bestimmung von Normale und Tangente einer Fusspunktkurve. Vom Standpunkt der natürlichen Geometrie interessiert man sich wiederum für die Gleichung der Fusspunktkurve, wenn die Directrix in den Koordinaten s und R vorliegt.
Emil Weyr, Assistent bei der Lehrkanzel für Mathematik am Polytechnikum zu Prag, publizierte 1869 ein Verfahren, um bequem die Krümmungsmittelpunkte von Fusspunktkurven zu konstruieren.
Bewegen wir uns auf der gegebenen Kurve C, so bewegt sich der in der Ebene feste Pol O ebenfalls. Schalten wir im Punkt Q einen Halt ein, so präsentiert sich die Situation wie folgt:

Im begleitenden Zweibein *Tangente-Normale* besitzt der Pol O die momentanen Polarkoordinaten r und ϑ. Wie früher erläutert, bildet LP die Normale im Punkt P der Fusspunktkurve. Auf dieser Normale liegt der Krümmungsmittelpunkt. *Weyrs Konstruktion*:

Vom Krümmungsmittelpunkt K der Kurve C auf die Diagonale OQ das Lot fällen; dies liefert K'. Von da aus das Lot auf QL fällen: N. Im Schnittpunkt von ON mit LP liegt der gesuchte Krümmungsmittelpunkt K*.



K* ist der Krümmungsmittelpunkt der Fusspunktkurve von C. KQ = R und K*P = R_1.

Der feste Punkt O in der Ebene besitzt vom beweglichen Koordinatensystem *Tangente - Normale* aus gesehen die aktuellen Polarkoordinaten r und ϑ. Die momentane Kurvenkrümmung von C ist R. Daraus lässt sich die momentane Krümmung R_1 der Fusspunktkurve berechnen.

O($r\cos\vartheta/r\sin\vartheta$)
N($0/R\sin^2\vartheta$) wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke NQK', QK'K, NK'K
K*($(r - R_1)\cos\vartheta/R_1\sin\vartheta$)
Die Ausnützung der Tatsache, dass N, K* und O auf einer Geraden liegen, ergibt die folgende Formel:

Fusspunktkurve: $$R_1 = \frac{r^2}{2r - R\sin\vartheta}$$

Wie kommt aber Weyr auf seine Konstruktion?

Beweisskizze:

Drei aufeinanderfolgenden Tangenten t, t_1, t_2 der Directrix entsprechen drei aufeinanderfolgende Punkte P, P_1, P_2 der Fusspunktkurve. Durch diese 3 Punkte lässt sich ein Kreis m_1 legen, welcher zum Krümmungskreis der Fusspunktkurve in P wird, wenn P_1 und P_2 gegen P streben. Dies erreicht man, indem t_1 und t_2 gegen t rücken. Gesucht wird also die Grenzlage des Kreises m_1.
Nun kann m_1 auch als Fusspunktkurve einer Ellipse bezügl. eines Brennpunktes gedeutet werden, wobei t, t_1, t_2 Tangenten dieser Ellipse sind. In der Grenzlage wird m_1 zum Krümmungskreis der Fusspunktkurve im Punkte P und die Ellipse wird die Directrix im Berührungspunkt Q der Tangente t berühren.
Resultat: *Berührt die Tangente t die Directrix C im Punkte Q und entspricht dieser Tangente der Punkt P der Fusspunktkurve F, so ist der Krümmungsmittelpunkt K* von F in P der Mittelpunkt jener Ellipse, welche den Pol O zum Brennpunkt hat und die Directrix C im Punkt P berührt.*
Durch Umkehrung einer bekannten Konstruktion der Krümmungsradien einer Ellipse ergibt sich die Konstruktion von Weyr (hier kennt man einen Ellipsenpunkt Q und den zugehörigen Krümmungsradius R, sowie den Brennpunkt O; gesucht wird der Mittelpunkt der Ellipse).

Für die schönen Zusammenhänge *Rollkurve - Fusspunktkurve* siehe das nächste Kapitel.

Aktivitäten

5.1 Wie sehen Fusspunktkurven der Kreisevolvente aus, wenn statt dem Mittelpunkt andere Punkte als Pol gewählt werden?
Animation mit wanderndem Pol?

5.2 Begründe: Berühren sich zwei Kurven in Q, so berühren sich auch ihre Fusspunktkurven in einem Punkt P (Berührungstransformation).

5.3 Zeichne mit der Turtle die Fusspunktkurve der archimedischen Spirale, dh. die zweite Fusspunktkurve der Kreisevolvente.

5.4 Rechne nach, dass aus der Kollinearität der Punkte N, K* und O die Formel für R_1 folgt (vergl. Text).

5.5 Ist C_1 die Fusspunktkurve von C, so kann man wiederum die Fusspunktkurve C_2 von C_1 bilden. Diese heisst **zweite Fusspunktkurve** von C.
Suche die zweite Fusspunktkurve der Kreisevolvente.
(Interessant für sukzessive Fusspunktkurven ist die gleichseitige Hyperbel).

5.6 Besitzt C die Fusspunktkurve C_1, so heisst C auch **negative Fusspunktkurve** von C_1.
Suche die negative Fusspunktkurve der Kreisevolvente. Lässt sich dazu der abrollende Winkelhaken (Gnomon) verwenden?

5.7 Fällt man das Lot nicht von einem Punkt P aus auf sämtliche Tangenten einer Kurve C sondern auf deren sämtliche Normalen, so bildet man die sog. **Gegenfusspunktkurve (Kontrapedale)**.
Ist die Gegenfusspunktkurve also die Fusspunktkurve der Evolute von C?
Zeichne die Gegenfusspunktkurve der Kreisevolvente.

5.8 Wenn man den Ort der Punkte aufsucht, welche symmetrisch bezüglich der Tangenten einer Kurve C zu einem festen Punkt P sind, so erhält man eine Kurve, die ähnlich zur Fusspunktkurve von C bezüglich P ist. Der Faktor beträgt 2. Sie heisst **Podoide**.
Betrachte unter diesem Gesichtspunkt nochmals die GRAPHIK 6.
Setzte für das Zeichnen der Podoide zur Kreisevolvente die Turtle ein.

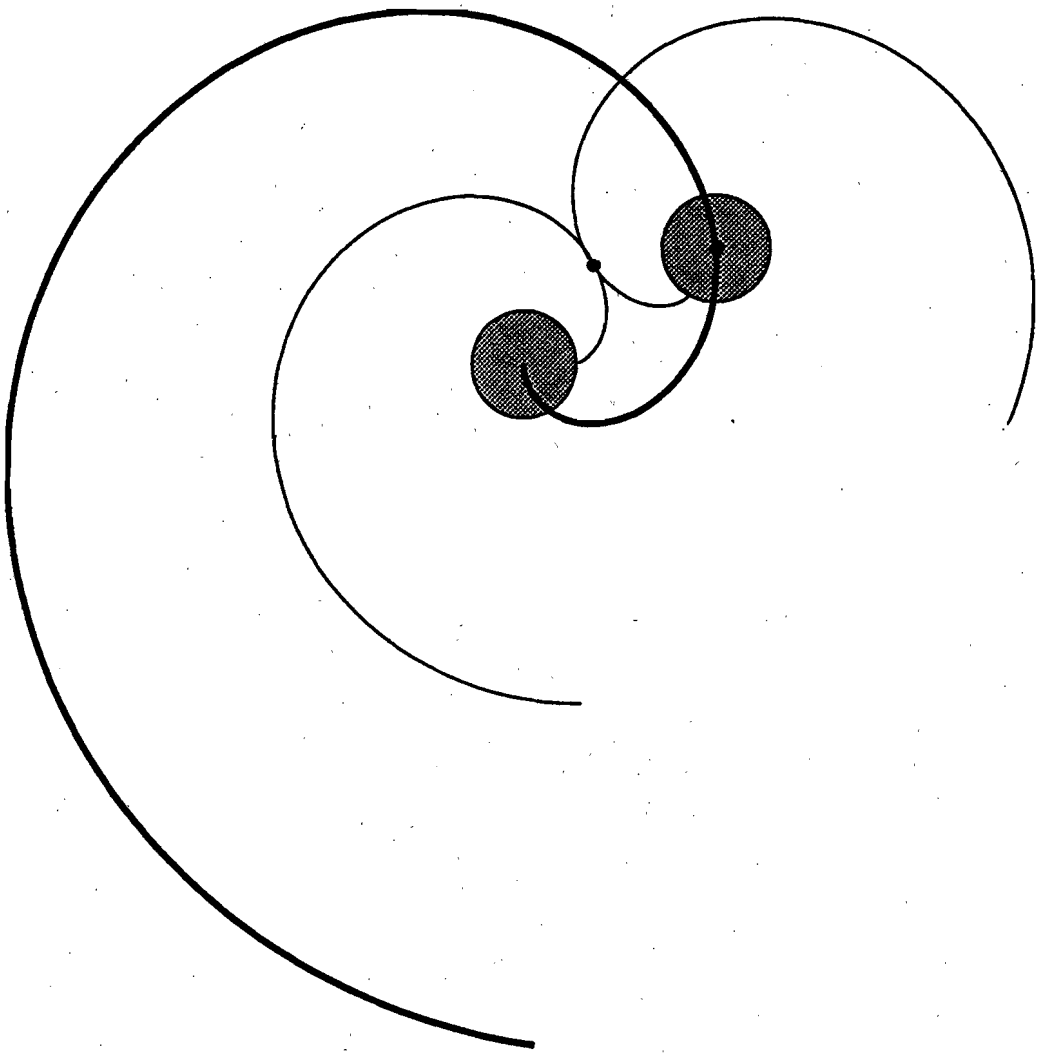
5.9 Konstruiere für die Kreisevolvente die Ellipse von Weyr.
Unter welchen Voraussetzungen versagt die Konstruktion von Weyr?
Diskutiere!

Die Kraft einer ungewöhnlichen Methode

6

Wenn man von der Trivialität einer Sache überzeugt ist, fällt einem nichts mehr dazu ein.

A.A.G.



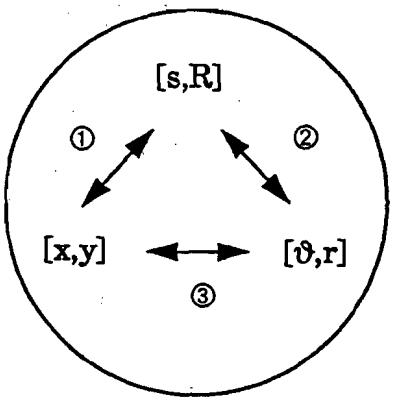
GRAPHIK 7
Kreisevolvente rollt auf einer Kreisevolvente ab

Auf die gute Etikette kommt es an

Eine ungeheuer fruchtbare Methode in der Mathematik bildet das "Umetikettieren". Bereits Henri Poincaré (1854 - 1912) hat sie mit grossem Erfolg eingesetzt. Auch wir wagen an dieser Stelle einen Versuch.
In den letzten Kapiteln lag der Schwerpunkt auf der Verwendung natürlicher Koordinaten. Es ist klar, dass wir diese in kartesische oder polare Koordinaten umrechnen können. Was passiert aber, wenn wir neue Namensschilder verwenden, dh. umetikettieren? Unser Wörterbuch besticht durch Einfachheit:

$$\begin{array}{ccccc} s & \longrightarrow & x & \longrightarrow & \vartheta \\ R & \longrightarrow & y & \longrightarrow & r \end{array}$$

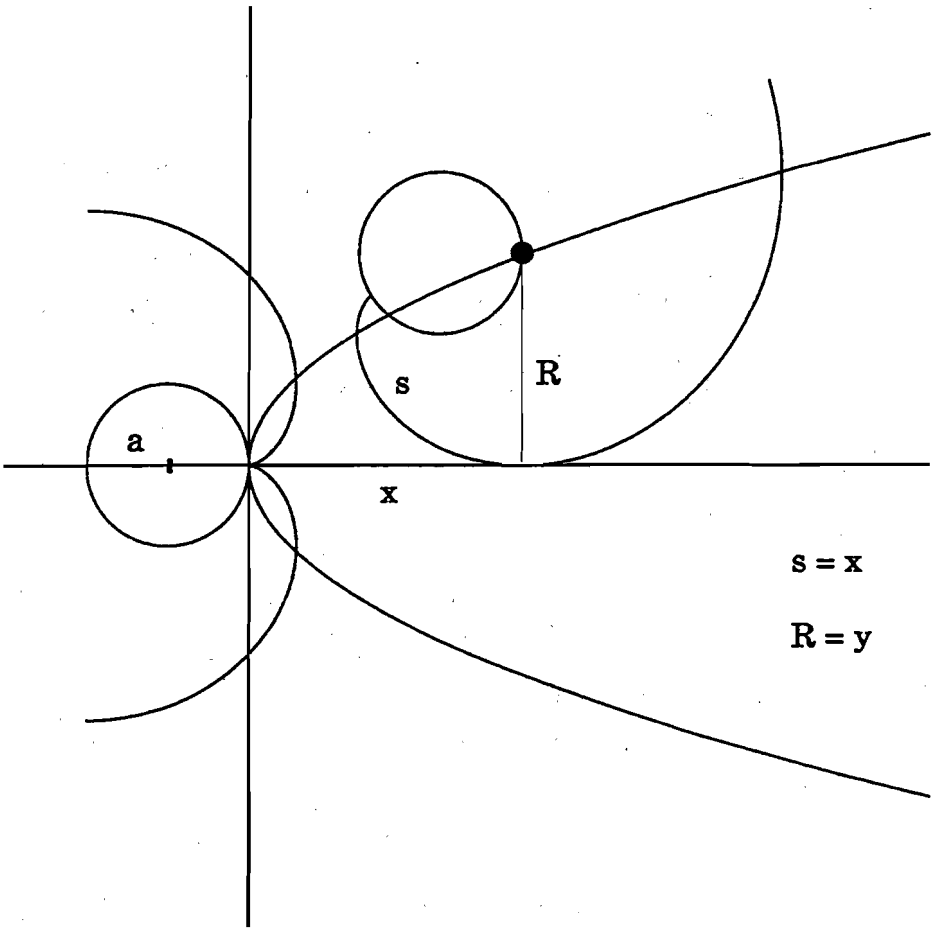
Aus der *Kreisevolvente* $R^2 = 2as$ entstehen so die *Parabel* $y^2 = 2ax$ und die *Fermatsche Spirale* $r^2 = 2a\vartheta$.
Lassen wir es nicht bei dieser formalen Umetikettierung bewenden. Viel zu lernen gibt es aus der dahinter liegenden geometrischen Interpretation. Das folgende Schema diene uns als Orientierungshilfe:



Fall 1: (s,R) ⟷ (x,y)

Da aus der Bogenlänge s die x-Koordinate und aus dem Krümmungsradius die y-Koordinate werden soll, drängt sich gemäss Aoust und Mannheim sofort die in der Figur dargestellte Deutung auf: Mit $s = 0$ beginnend, rollt die gegebenen Kurve auf der x - Achse ab; der Ort des Krümmungsmittelpunktes des jeweiligen Berührpunktes beschreibt dann die gesuchte neue Kurve, welche als zur Kurve [s,R] gehörige **Mannheimsche Kurve** bezeichnet wird. Auf kinematisch-geometrischem Weg untersuchte 1859 Mannheim für verschiedene Kurven diesen geometrischen

Ort. Der Name stammt von Wölffing.
Die Mannheimsche Kurve der Kreisevolvente ist somit eine Parabel. Jeder Ast der Kreisevolvente erzeugt eine Halbparabel. Dem Kreisradius a entspricht der Parameter p der Parabel.



Der fette Punkt beschreibt die Parabel $y^2 = 2ax$.

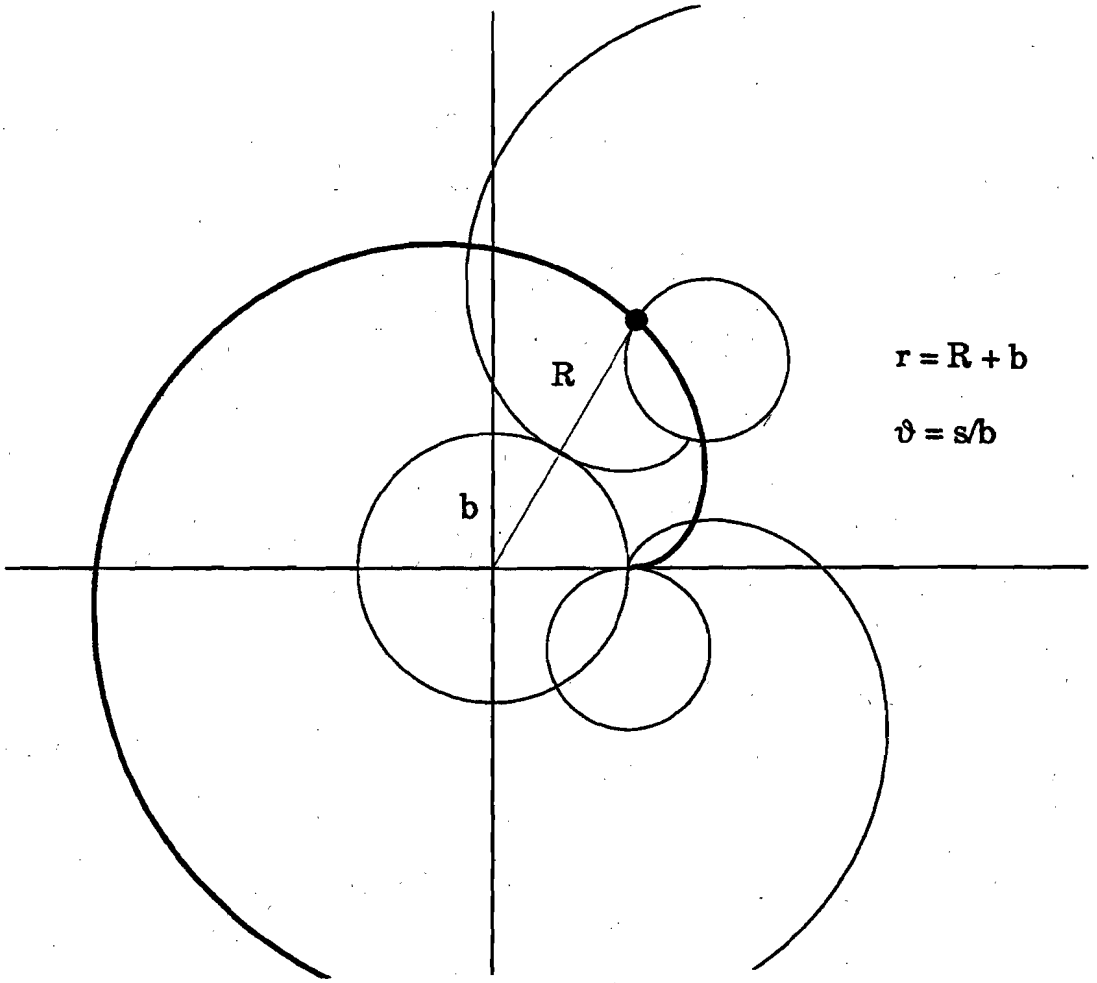
Fall 2: (s,R) ◄► (ϑ,r)

Aus der Bogenlänge s soll der Polarwinkel ϑ und aus dem Krümmungsradius R der Radius r entstehen. Die erste Bedingung ist leicht erfüllbar: wir legen s auf den Umfang eines Kreises mit Radius b, indem wir die gegebene Kurve auf diesem Kreis abrollen lassen. Dies hat zur Konse-

quenz, dass R + b als r zu interpretieren ist. Die genaue Umetikettierung lautet demnach:

$$s \longrightarrow b\vartheta$$
$$R \longrightarrow r - b$$

Es wird in diesem Zusammenhang von **verallgemeinerten Mannheimschen Kurven** gesprochen. Lässt man Kurven mit möglichst einfacher natürlicher Gleichung auf dem Kreis rollen, so entsprechen ihnen nicht die einfachsten Formen in Polarkoordinaten. Folgende Darstellung macht dies deutlich:



Der fette Punkt beschreibt eine parabolische Spirale.

Aus der Kreisevolvente resultiert beim Abrollen auf dem Kreis mit Radius b die sog. parabolische Spirale mit der Gleichung

$$r = \sqrt{2ab\vartheta} + b$$

Würde man $(R + b)^2 = 2as$ abrollen lassen, so käme die Fermatsche Spirale mit der Gleichung $r^2 = 2ab\vartheta$ heraus.

Fall 3: $(x,y) \longleftrightarrow (\vartheta,r)$

Bereits 1704 untersuchte Pierre Varignon diese Umetikettierung. Da sie mit unserer Thematik der natürlichen Geometrie nichts zu tun hat, sei sie hier nur gestreift.
Parallelen zur y-Achse gehen in Geraden durch den Pol über, Parallelen zur x-Achse in konzentrische Kreise um den Pol. Längen in y-Richtung bleiben erhalten, in x-Richtung aber im allgemeinen nicht. Beliebige Geraden transformieren sich in archimedische Spiralen.
Für den Unterricht winken schöne Arbeitsfelder ...

Rollkurven - Fusspunktkurven

In diesem Kapitel rollte die Kreisevolvente sowohl auf einer Geraden wie auch auf einem Kreise ab. In seiner bereits erwähnten bahnbrechenden Schrift behandelt Jakob Steiner ausgiebig die schönen Beziehungen zwischen abrollenden konvexen Kurven und ihren Fusspunktkurven. Für das Abrollen auf einer Geraden formuliert er wie folgt:

> Rollt ein stetig convexer Curvenbogen *AB* auf einer festen Geraden AB, so beschreibt jeder mit ihm verbundene Punct P irgend eine Figur W, die am kleinsten wird, nämlich gleich w, wenn jener Punct der vorgenannte Punct R ist (ein mit dem Krümmungsschwerpunkt des Kurvenbogens *AB* zusammenhängender Punkt; Anmerkung von mir). Puncte P, welche in irgend einer um R beschriebenen Kreislinie liegen, erzeugen Figuren W, deren Inhalt gerade um einen dem Centriwinkel q entsprechenden Sector des Kreises grösser als jener kleinste Inhalt w ist.
> Die Figur W ist allemal gerade doppelt so gross als die dem nämlichen Puncte P entsprechende Fusspuncten-Figur V in Bezug auf den gegebenen Bogen *AB*. Ihr Inhalt wird ein Minimum, gleich v, wenn sie dem ausgezeichneten Puncte R entspricht; für einen beliebigen anderen Punct P ist, wenn PR gleich r gesetzt wird, die Inhalts-Zunahme gerade die Hälfte des Kreissektors, der r zum Radius und q zum Centriwinkel hat.

Schon öffnen sich wieder riesige Arbeitsfelder (vielleicht auch für Facharbeiten). Da Rollkurven hier nicht allgemein thematisiert werden, verzichten wir an dieser Stelle darauf, obigen Satz auf Kreisevolventen anzuwenden.

Aktivitäten

6.1 Zeige, dass sich in den drei Systemen [s,R], [x,y] und [ϑ,r] die Kurven logarithmische Spirale, Gerade, archimedische Spirale entsprechen. Ebenso die Klothoide, hyperbolische Spirale und die gleichseitige Hyperbel.

6.2 Zeichne die Fermatsche Spirale und die parabolische Spirale und diskutiere die Unterschiede.

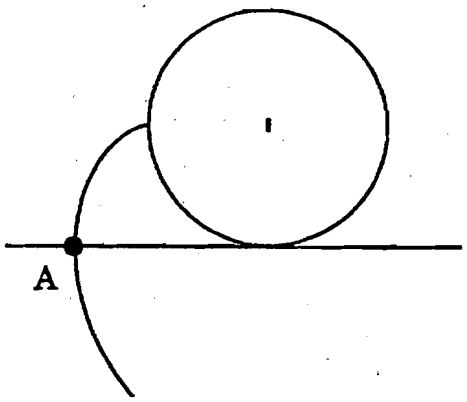
6.3 Eine weitere stark beachtete Umetikettierung lautet [φ,R] ⟶ [ϑ,r]. Untersuche diese Transformation.

6.4 Setzte eine Tabellenkalkulation ein, um die Transformation von Varignon mit verschiedenen einfachen Kurven durchzuführen.

6.5 Berechne die Windungsbreite der Fermatschen Spirale.

6.6 Zeichne mit Turtle - Graphik die inverse Kurve zur Fermatschen Spirale. Es entsteht der *Lituus* oder *Krummstab* (Cotes 1722).

6.7 Beweise, dass beim Abrollen des erzeugenden Kreises auf einer Geraden die zugehörige Kreisevolvente stets durch einen festen Punkt A auf der Geraden läuft.



6.8 Lese im Brief an Mersenne vom 3. Juni 1636 nach, was Fermat über "seine" Spirale schreibt.

6.9 Auf welcher Kurve bewegt sich der Mittelpunkt des Grundkreises, wenn die Kreisevolvente auf einer Geraden abrollt?

6.10 Programmiere Animationen von Abrollvorgängen.

BIOGRAPHIE

ERNESTO CESÀRO (1859 - 1906)

geboren 12. März 1859 in Neapel
gestorben 12. September 1906 in Torre Annunziata

Cesàro studierte in Neapel und an der Ecole des Mines von Liège (Belgien). Nach dem Tode seines Vaters im Jahre 1879 unterbrach Cesàro für einige Zeit sein Studium, um der Familie in wachsenden finanziellen Schwierigkeiten zu helfen. 1881 setzte er seine Ausbildung in Liège fort und publizierte zwei Jahre später sein erstes grösseres mathematisches Werk *Sur diverses questions d'arithmétique*, das einige Beachtung fand. Eugène Catalan erkannte Cesàros Talent und förderte ihn. Nach der Heirat mit der Tochter seines Stiefbruders begleitete er seinen Freund, den Sohn des Prinzen von Soisson, nach Paris. An der Sorbonne wohnte er den Vorlesungen von Hermite, Darboux, Serret und Chasles bei. Darboux inspirierte ihn, seine intrinsische Geometrie zu formulieren. Cesàro beendete die Studien in Liège nicht, sondern nahm ein Stipendium an der Universität von Rom an. Hier entwickelte er in den Jahren 1884-86, oft unter dem Pseudonym "Rosace", eine rege publizistische Tätigkeit, ohne jedoch einen akademischen Titel zu erreichen. 1887 verlieh ihm die Universität von Rom den Ehrendoktor. Bis 1891 besetzte er den Lehrstuhl für höhere Algebra in Palermo, um anschliessend bis zu seinem Tode als Professor für mathematische Analysis in Neapel zu wirken. Cesàro veröffentlichte über 260 Werke in verschiedensten Gebieten der Mathematik und Physik. Neben Lehrbüchern mit vielen neuen Übungen lagen die Schwerpunkte in der Zahlentheorie, den Fourier-Reihen und in der natürlichen Geometrie. Bemerkenswert ist auch seine Bewunderung für Maxwell. In Anerkennung seiner Verdienste ernannten ihn zahlreiche wissenschaftliche Vereinigungen zu ihrem Mitglied. Cesàro starb, als er seinen 17-jährigen Sohn aus der rauhen See vor Torre Annunziata retten wollte.

A.A.G.

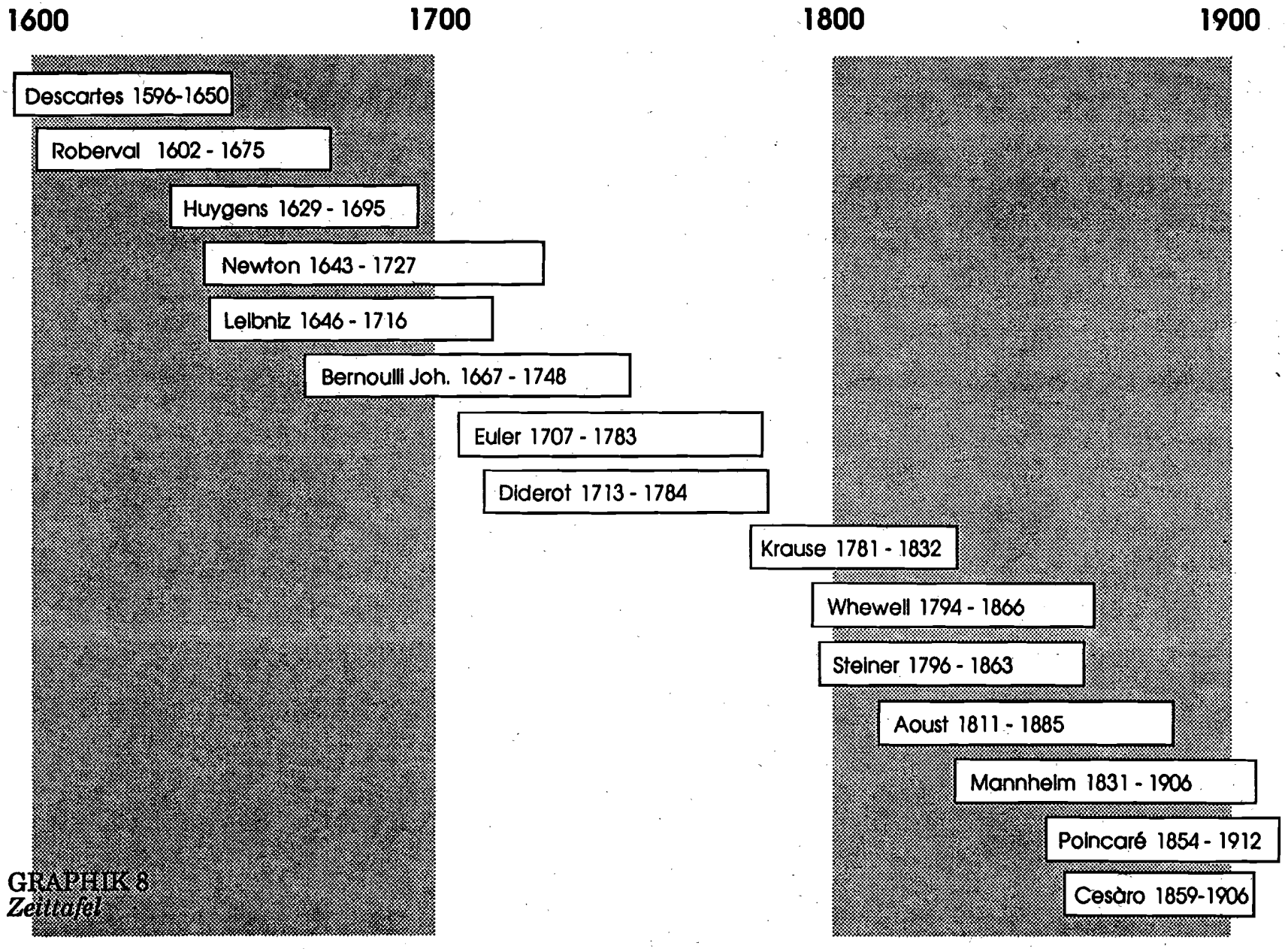
Zahn um Zahn

7

Und staunend hat er bald entdeckt,
Wo überall ein Zahnrad steckt:
Beinah in allem Nützlich-Guten,
Oft dort selbst, wo wir's nicht vermuten.

Eugen Roth

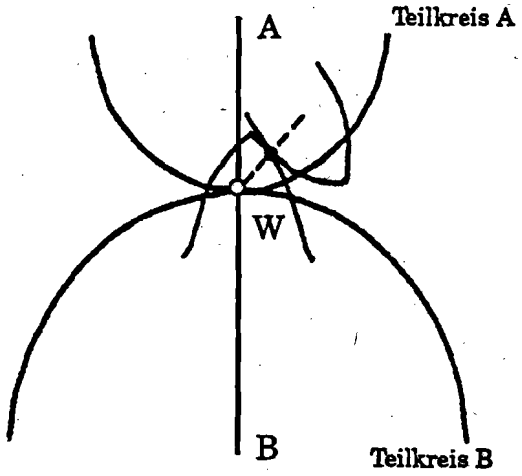
Zeittafel



GRAPHIK 8
Zeittafel

Es ist immer wieder erstaunlich, wie rein mathematische Disziplinen mit wirklich praktischen Anwendungen in Fühlung stehen. Ein schönes Beispiel dafür liefert die Herstellung von Zahnrädern. Die nützliche und interessante Frage nach der "besten aller Zahnformen" braucht zur Beantwortung happige Mathematik und Physik. Falsche Konstruktionen bewirken u.a. gefährliche Materialspannungen, grosse Abnützung und ungleichförmigen Lauf. Euler machte sich bereits um 1760 für die Evolventenverzahnung stark. Diese wurde jedoch erst 100 Jahre später eingesetzt. Die guten Eigenschaften und die leichte Herstellbarkeit überzeugten schliesslich und verdrängten andere Zahnformen weitgehend.

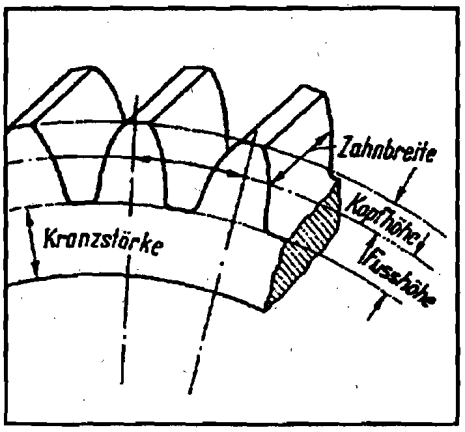
Die Verzahnungstheorie untersucht, wie sich die Umdrehung um eine festgelagerte Achse auf eine zweite ebenfalls festgelagerte Achse durch Druckkräfte mittels Zahnrädern übertragen lässt. Hier beschränken wir uns auf parallele Achsen und zylindrische Zahnräder. In solchen Fällen sind nur die Querschnitte wesentlich und wir haben es daher geometrisch mit einem Problem in der Ebene zu tun.
Damit der mechanische Effekt, den ein Rad auf das andere ausübt, in allen Positionen der gleiche bleibt, ist es notwendig, dass die Normale im Kontaktpunkt die Verbindungsstrecke der Kreismittelpunkte in einem fixen Punkt W, dem Wälzpunkt, schneidet. Dies gewährleistet, dass auch das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten konstant bleibt (wenig Geräusch, Vermeidung von Massenkräften).

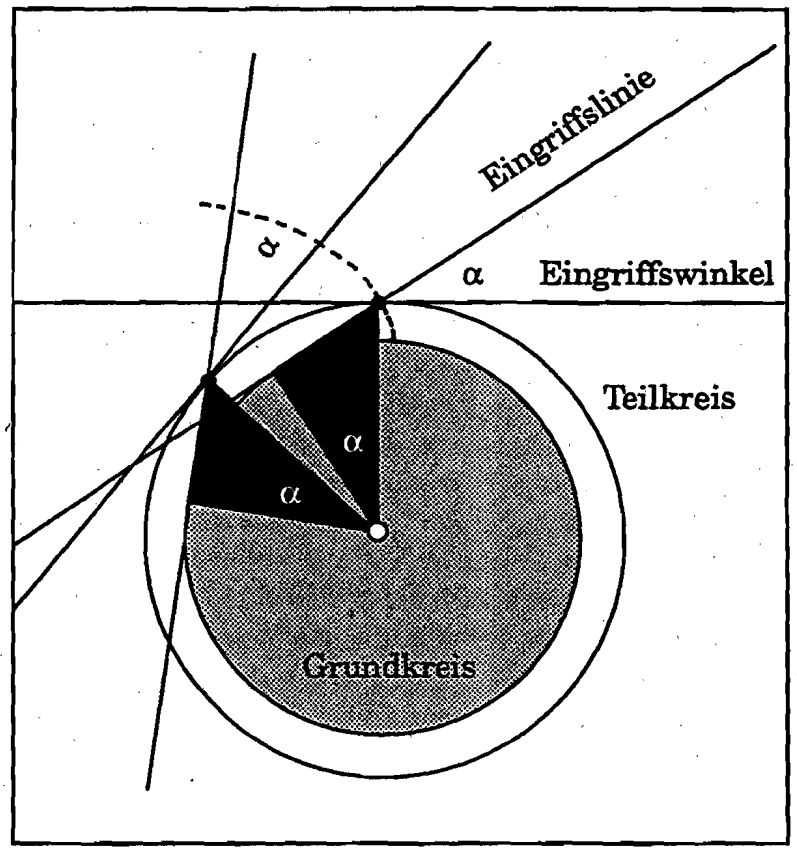


Die beiden gedachten Kreise (Teilkreise A und B) rollen ohne Gleiten aufeinander ab.
Die Kreisradien verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten.
Solche Zahnräder heissen *geradverzahnte Stirnräder.*
Im Unterschied dazu gibt es auch Stirnräder mit schrägen Zähnen, Kegelrad- und Schneckengetriebe u.s.w.

Unter der Fülle der Zahnformen stechen jene heraus, welche symmetrisch sind (Bewegung in beiden Richtungen). Es ist nach dem oben Gesagten naheliegend, solche Zahnflanken zu wählen, deren Normalen gut überblickt werden können. Die Theorie der Evoluten und Evolventen beschreibt den Zusammenhang zwischen Kurven und ihren Normalen. Mit der Kreisevolvente bietet sich eine Flankenform an, bei welcher die Nor-

malen von jedem Punkt des Zahnes gleiche Neigung zu den Tangenten des Teilkreises besitzen. Dieser Winkel heisst Eingriffswinkel und ist auf 20 ° genormt.
Eine solche Konfiguration bleibt stabil gegen leichte Schwingungen der Achsen, was in der Praxis sehr geschätzt wird. Die unkomplizierte Herstellung mit einem Zahnstangenwerkzeug erlaubt eine schnelle und preisgünstige Produktion.

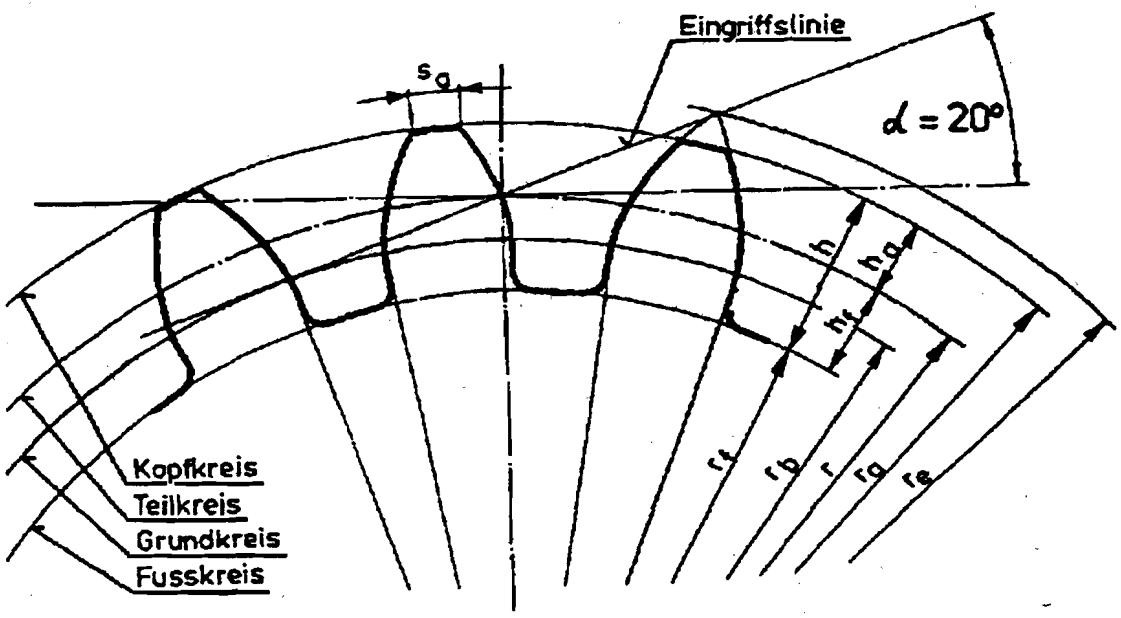




In der Uhrenindustrie sind Zykloiden als Flankenform in Gebrauch. Die Räder haben wenig Zähne und müssen für geringe Abnützung ausgelegt sein. Für die Herstellung benötigt man allerdings ein punktförmiges Werkzeug.
In diesem Kapitel verzichten wir auf Anregungen zu Aktivitäten. In der Literatur gibt es reichlich Übungsaufgaben, welche jedoch ziemlich schnell weitergehende Kenntnisse erfordern.
Lohnend könnte aber das Basteln eines Modells sein, welches deutlich macht, wie ein geradliniger Kamm als Werkzeug auf wunderbare Weise Evolventenflanken erzeugt.
Das Datenblatt über *geradverzahnte Stirnräder mit Evolventenverzahnung* hilft, sich im Dschungel der Bezeichnungen besser zurechtzufinden.

DATENBLATT

GERADVERZAHNTE STIRNRÄDER



Kopfkreisradius r_a	Kopfhöhe h_a	Zahnkopfdicke s_a
Grundkreisradius r_b	Fusshöhe h_f	Eingriffswinkel α
Fusskreisradius r_f	Zahnhöhe h	
Teilkreisradius r	Radius am spitzen Zahn r_e	

Zur Charakterisierung von Zahnrädern kann man folgende Begriffe verwenden: Zähnezahl z, Modul m und Eingriffswinkel α.

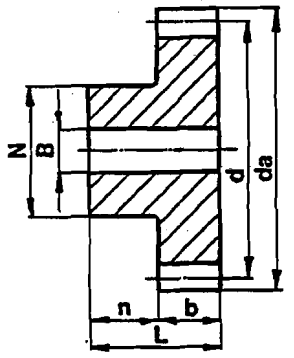
Zähnezahl z: Anzahl der Zähne des Zahnrades

Modul m: Teilkreisdurchmesser d in mm : Zähnezahl z (ganzzahlig gerundet)

Eingriffswinkel α: Neigung der Eingriffslinie zur Horizontalen (die Eingriffslinie berührt dabei einen für jedes Zahnrad charakteristischen Kreis, den sog. Grundkreis)
Der Eingriffswinkel ist auf 20° genormt (DIN 867)

Beispiel:
SG4012N

S Stahl
G geradverzahnt
40 Modul 4.0 (48:12)
12 Zähnezahl
N Nabe



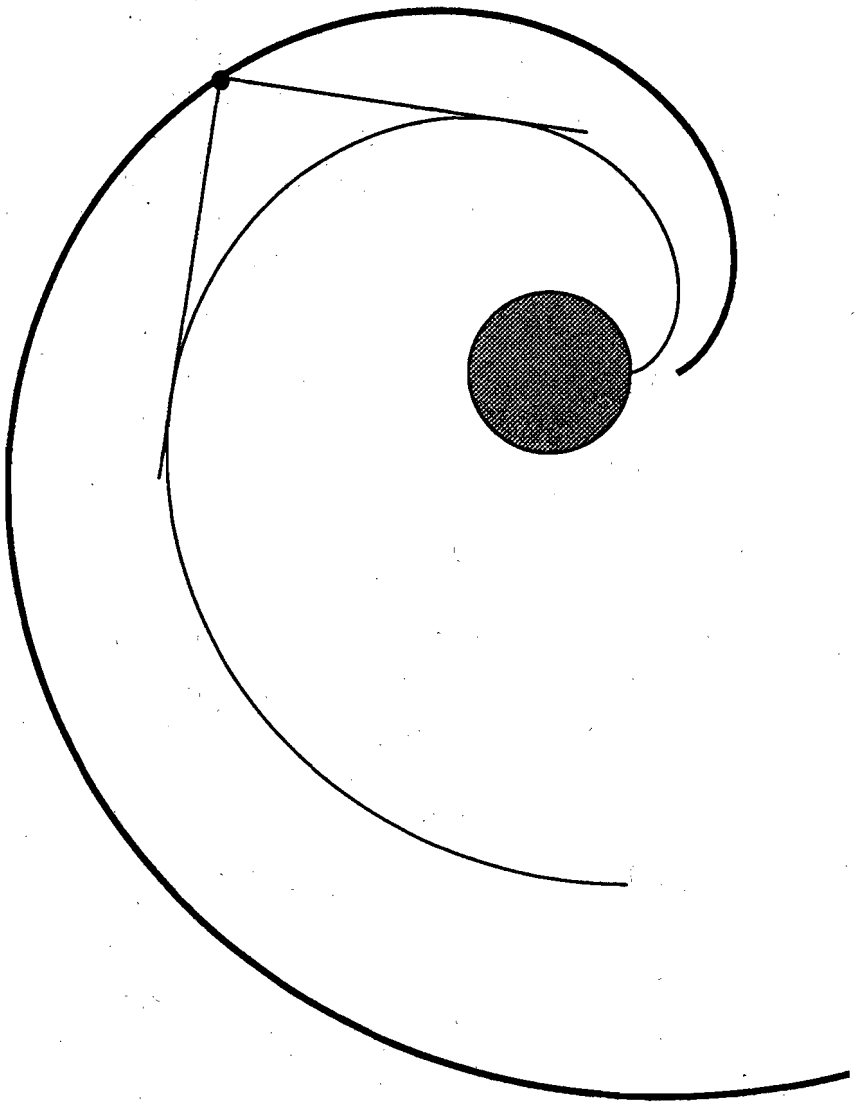
Zähne dents	d	da	N	n	b	L	B-H7
12	48	56	35	20	30	50	15

Ausblicke

8

Schöne Beispiele sind jene, welche einfach sind, aber weite Ausblicke gestatten.

Jürgen Moser, 1995



GRAPHIK 9
Die orthoptische Kurve einer Kreisevolvente ist eine arch. Spirale.

Es gibt noch viel zu tun ...

Vielleicht ist es in diesem Heft gelungen zu zeigen, dass für Kurven die Krümmung ein wichtiges Merkmal darstellt. Die natürliche Geometrie von Cesàro schleust diese intrinsische Eigenschaft in die Kurvengleichung und ergibt damit ein oft sehr komfortables Werkzeug, um die Kurve selbst und daraus abgeleitete Kurven zu beschreiben.
Ausblicke sind in vielen Richtungen denkbar. Wir beschränken uns hier auf solche, welche mit der Kreisevolvente zusammenhängen.

- **Mannheimsche Kurven** für Kreisevolventen höherer Ordnung

- **Evolutoide** (Réaumur 1709, Name von Lancret 1811)
  Die Evolute einer Kurve C ist die Einhüllende ihrer Normalen. Man kann nun die Einhüllende aller jener Geraden betrachten, welche C unter dem konstanten Winkel α schneiden.
  Beispiel: Evolutoide eines Kreises ist ein konzentrischer Kreis.
  Suche Evolutoide der Kreisevolvente.

- **Schiefe Fusspunktkurven**
  Anstatt vom Pol aus das Lot auf die Kurventangente zu fällen, zieht man vom Pol aus eine Gerade, welche die Tangente unter einem Winkel α schneidet.
  Wie sehen schiefe Fusspunktkurven der Kreisevolvente aus?

- **Isoptische Kurven** (De La Hire)
  Bewegt man einen Winkel α so, dass seine beiden Schenkel immer dieselbe Kurve berühren, so beschreibt der Scheitelpunkt eine neue Kurve. Ist $\alpha = 90°$, spricht man von orthoptischen Kurven.
  Vergleiche GRAPHIK 9.

- **Verallgemeinerte Evolventen**
  Ein Faden von der Länge L sei mit dem einen Ende auf einer Kurve C, mit dem andern in einem Punkte O der Ebene befestigt. Suche jene Kurve, welche ein Schreibstift beschreibt, wenn er sich so bewegt, dass er immer beide Teile des Fadens gespannt hält.
  Anstelle des Punktes O kann auch eine zweite Kurve treten.

- **Cesàros geniales Werkzeug**
  Fährt man mit einem Schiffchen der schmalen Wasserstrasse (Kurve C) mit allen ihren Krümmungen entlang, so lässt sich die geometrische Landschaft beobachten. Die Natur der Kurve C ergibt sich aus der scheinbaren Bewegung ruhender Punkte.
  Diese *Unbeweglichkeitsbedingungen* sind Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten.
  Das Buch von Kowalewski gibt eine schöne Einführung.

- **Natürliche Geometrie des Raumes**
  Nimmt man neben der Bogenlänge und der Krümmung noch die Torsion einer Kurve im Raum hinzu, sind die Pforten zur intrinsischen 3D - Geometrie geöffnet.
  Abbé Aoust gibt eine interessante Einführung in diese Thematik.
  Wie lässt sich die Kreisevolvente auf den Raum verallgemeinern?

- **Zusammenhang algebr. Gleichungen - höh. Kreisevolventen**

Literatur

Aus der riesigen Fülle von Artikeln und Büchern seien einige wenige angeführt:

Bernoulli Joh., Die erste Integralrechnung, übersetzt von Kowalewski, Leipzig 1914

Cesàro Ernesto, Vorlesungen über natürliche Geometrie, übersetzt von Kowalewski, Teubner, Leipzig, 1901

Huygens Christiaan, Die Pendeluhr, übersetzt von Heckscher & v.Oettingen, Leipzig, 1913

Loria Gino, Spezielle Algebraische und Transscendente ebene Kurven, Leipzig, 1902

Rieke Hans, Die 400m - Kreisbogenbahn, Homberger, Waldfischbach, 1985

Roth Karlheinz, Zahnradtechnik, Springer, Berlin, 1989

Wieleitner Heinrich, Spezielle ebene Kurven, Leipzig, 1908

Bezugsquellen

Zahnräder aus Stahl oder Kunststoff vertreibt die Firma NOZ AG, Norm-Zahnräder und Ketten AG, Pünten 4, 8602 Wangen b. Dübendorf.

Schluss

Damit hoffe ich, ein bisschen "Faden" abgewickelt zu haben. Vielleicht haben Sie Lust, den roten Faden aufzunehmen?

Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89–01	H. Walser	Fraktale
89–02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89–03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89–04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90–01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90–02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90–03	U. Kirchgraber Niveau der Sekundarstufe II	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91–02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91–03	M. Federer	Preistheorie
91–04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92–01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann,	Der Fallschirmspringer A. Moretti
93–04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93–05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93–06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93–07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94–01	U. Maurer und Ästhetik	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung
94–02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94–03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94–04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95–01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95–02	U.Kirchgraber	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten.
	U. Kirchgraber, N. Sigrist	Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95–03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95–04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
95–05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95–06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme