Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze*

von

U. Kirchgraber

Departement Mathematik

ETH-Zürich

und

N. Sigrist

Kantonale Maturitätsschule für Erwachsene

Zürich

August 1995

Zusammenfassung

Das Feigenbaum-Diagramm kennt heute fast jeder. Und viele haben das Phänomen der Universalität mithilfe eines kleinen Computer-Programms auf ihrem PC selber experimentell verifiziert. Nur - was steckt wirklich dahinter?

Die Antwort ist: Ein schöner geometrischer Satz, der im Kern auf Poincaré zurückgeht! In diesem Artikel machen wir Sie, liebe Leserin, lieber Leser, mit diesen Ideen, die von M. Feigenbaum stammen, bekannt.

1 Periodenverdoppelung und Universalität

1.1 Eindimensionale diskrete dynamische Systeme

Betrachten wir die Rekursion

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2 =: F(x_n) \tag{1}$$

Wir untersuchen also die durch die Gleichung (1) definierten Zahlfolgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Eine solche Folge nennen wir eine *Bahn* des durch Gl. (1) definierten *diskreten dynamischen Systems*. Dabei ist eine Bahn durch ihren *Anfangs-* oder *Startpunkt* x_0 eindeutig bestimmt. Die Funktion F nennen wir das *Bewegungsgesetz* des dynamischen Systems.

*Ausgearbeitete Fassung eines Vortrags des zweiten Autors, gehalten am 7. 11.1991 im Seminar über Mathematik und Unterricht der ETH-Zürich. Diese Arbeit entstand während eines Gastaufenthalts von N.S. an der ETH-Zürich im Rahmen des Programms "ETH für die Schule".

Allgemein werden auf diese Weise einfache, aber dennoch sehr interessante dynamische Systeme definiert. Die grundlegende Frage lautet: Wie verhalten sich ihre Bahnen?

Bezeichnet F^n die n-te Iterierte von F, so können wir anstelle von Gl. (1) auch $x_n = F^n(x_0)$ schreiben. Im allgemeinen ist es nicht möglich eine explizite Formel für $F^n(x)$ anzugeben. Aus diesem Grund müssen sog. *geometrische* Methoden benützt werden, um die *qualitativen* Eigenschaften der Bahnen zu beschreiben.

Wir diskutieren zunächst einige einfache Bahntypen des Beispiels (1):

- Ist eine Folge x_n konvergent, so ist ihr Grenzwert eine Lösung der Gleichung $x = F(x)$, d.h. ein Fixpunkt der Funktion F (weil F stetig ist). Die beiden Fixpunkte von $F(x) = 1 - x^2$ sind $x^* \approx 0.62$ und $x^* \approx -1.62$. Zum Startpunkt $x_0 = x^*$ gehört die Bahn $x_0 = x^* = x_1 = x_2 = \ldots$, d.h. es handelt sich um eine *Gleichgewichtslösung*, kurz um ein *Gleichgewicht.*

- Für $x_0 = 0$ ergibt sich $x_1 = F(0) = 1, x_2 = F(1) = 0, x_3 = 1, \ldots$. Diese Bahn ist *periodisch* mit Periode 2.

- Für $x_0 = 0.5$ findet man folgende Bahn: 0.5, 0.75, 0.4375, 0.808..., 0.346..., 0.88..., 0.22..., 0.94..., 0.098..., 0.99..., 0.019..., 0.999..., 0.0075..., ... Es macht den Anschein, dass diese Bahn gegen die vorher gefundene 2-periodische Bahn 0, 1, 0, 1, ... strebt.

Die Funktion $F = 1 - x^2$ bildet das Intervall $I = [-1, 1]$ in sich ab, aber sie ist nicht invertierbar. Betrachten wir für einen Augenblick eine stetige Funktion F die ein Intervall I in sich abbildet und auf I monoton ist. Sei $x_0, x_1, \ldots$, mit $x_0 \in I$, eine von F erzeugte Bahn. Dann sind auf jeden Fall die Teilfolgen $x_0, x_2, x_4, \ldots$ und $x_1, x_3, x_5, \ldots$ monoton und daher konvergent. Hieraus folgt: Jede Bahn nähert sich einer Gleichgewichts- oder einer 2-periodischen Lösung. Damit ist das Verhalten des durch ein solches F definierten Systems qualitativ erschöpfend beschrieben; es ist offenbar nicht sonderlich aufregend.

Wir betrachten deshalb von nun an nur noch nicht-monotone Funktionen F. Speziell beschäftigen wir uns mit der folgenden Klasse von Bewegungsgesetzen.

Definition 1 (Grundmenge G) *Ein Bewegungsgesetz F gehört zur Menge* **G**, *wenn sie folgende Eigenschaften hat.*

1. *F bildet das Intervall $I := [-1, 1]$ in sich ab und ist auf I beliebig oft differenzierbar.*

2. *F ist gerade, d. h. es gilt $F(-x) = F(x)$ für alle $x \in I$.*

3. *F ist monoton wachsend für $x < 0$ und monoton fallend für $x > 0$.*

4. *F erfüllt die Normierungsbedingung $F(0) = 1$.*

Eine Funktion F, die den Bedingungen 1., 2. und 3. genügt heisst symmetrisch-unimodal.

Wir diskutieren kurz die Normierungsbedingung 4. Sind für ein F die Bedingungen 1. - 3. von Definition 1 erfüllt und ist $0 < F(0) =: \lambda < 1$, so führt die Streckung $x \longrightarrow \lambda^{-1}x$ die Funktion F in die Funktion $G(x) = \lambda^{-1}F(\lambda x)$ über. Die Funktion G gehört offenbar zur Menge **G**. Die dynamischen Systeme $x_{n+1} = F(x_n)$ und $x_{n+1} = G(x_n)$ stimmen zudem bis auf eine Streckung überein und sind somit *äquivalent.* Daher kann man ohne Verlust an Allgemeinheit die Normierung $F(0) = 1$ fordern. Wir kommen später auf diesen Punkt zurück.

1.2 Das Phänomen der Universalität

Im folgenden betrachten wir ganze *Familien* von eindimensionalen Rekursionen. Das in der Literatur am meisten diskutierte Beispiel ist

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 =: F_\mu(x_n) \tag{2}$$

Dabei ist μ der Parameter der Familie. Die Funktionen F_μ liegen für $0 < \mu \leq 2$ in der Grundmenge **G** von Definition 1.

(Häufig wird auch die Rekursion

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n) \tag{3}$$

betrachtet. Für $2 < a \leq 4$ können die dynamischen Systeme (2) und (3) durch die Transformation $y = \frac{1}{4}(a-2)x + \frac{1}{2}$ ineinander übergeführt werden, wobei die Parameter durch die Beziehung $\mu = \frac{1}{4}a(a-2)$ miteinander verknüpft sind.)

Das folgende, häufig beschriebene Computerexperiment erlaubt es, einen vorläufigen Überblick über das Verhalten der Bahnen von Gl. (2) zu gewinnen. Man wählt einen Parameterwert μ und einen Startpunkt x_0. Man berechnet x_n etwa für $n \in [1, 500]$ und zeichnet x_n z. B. für $n \in [300, 500]$. Man hofft, dass das asymptotische Verhalten für $n \longrightarrow \infty$, das am meisten interessiert, unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes ist und bereits für $n \in [300, 500]$ in Erscheinung tritt. Stellt man die Resultate im $\mu - x-$Koordinatensystem dar, bekommt man das wohlbekannte Bifurkationsdiagramm.

Dieses Experiment ermöglicht es interessante Beobachtungen zu machen, auf die wir im folgenden teilweise genauer eingehen werden:

Es gibt eine Folge von Parameterwerten

$$\mu_1 \approx 0.74, \quad \mu_2 \approx 1.25 < \mu_3 < \mu_4 < \ldots$$

mit folgenden Eigenschaften

1. *Für jedes $\mu \in (\mu_i, \mu_{i+1}), i \geq 1$, besitzt das diskrete dynamische System (2) eine periodische Bahn der Periode 2^i (die überdies attraktiv ist, d.h. sie zieht benachbarte Bahnen an). Weil die Periode im Intervall (μ_i, μ_{i+1}) doppelt so gross ist, wie im Vorgängerintervall (μ_{i-1}, μ_i) sagt man, die Familie $F_\mu = 1 - \mu x^2$ durchlaufe eine* Periodenverdoppelungs-Sequenz.

2. *In jedem Intervall (μ_i, μ_{i+1}) gibt es einen Wert μ_i^* mit folgender Eigenschaft: Für $\mu = \mu_i^*$ läuft die in 1. genannte periodische Bahn durch den Punkt $x = 0$, oder anders ausgedrückt: der Startpunkt $x_0 = 0$ erzeugt eine periodische Bahn der Periode 2^i. 0 heisst 2^i-periodischer Punkt.*

3. *Die Folge μ_i (und mit ihr die Folge μ_i^*) konvergiert für $i \to \infty$ gegen $\mu_\infty \approx$* 1.40.

(Für $\mu > \mu_\infty$ ist das Verhalten des dynamischen Systems (2) ebenfalls interessant, da es teilweise "chaotisch" ist, wir gehen jedoch darauf nicht näher ein.)

Das Verhalten der Folge μ_i^*, genauer gesagt ihre Konvergenzgeschwindigkeit, ist das Thema der weiteren Ausführungen. Zur Vereinfachung der Notation werden wir von nun an μ_i statt μ_i^* schreiben. Wir verwenden also die folgende Definition.

Definition 2 *μ_i ist derjenige Wert von μ, für den 0 eine 2^i–peridische Bahn des diskreten dynamischen Systems $x_{n+1} = F_\mu(x_n)$ erzeugt, i. e. es gilt $F_{\mu_i}^{2^i}(0) = 0$, aber $F_{\mu_i}^k(0) \neq 0$ für alle $k < 2^i$.*

Zur Einführung des Phänomens, das man *Universalität* nennt, berechnen wir einige μ_i numerisch, und zwar für verschiedene Familien von Bewegungsgesetzen. Wir beginnen mit der Standardfamilie $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2$. Gemäss Definition 2 geht es darum für $i = 1, 2, 3, \ldots$ die Parameterstellen μ_i zu finden, für die $F_\mu^{2^i}(0) = 0$ gilt. Für $i = 1$ liefert die Bedingung

$$F_\mu^{2^i}(0) = F_\mu^2(0) = F_\mu(1) = 1 - \mu = 0$$

den Wert $\mu_1 = 1$. Für $i = 2$ findet man

$$F_\mu^{2^2}(0) = F_\mu^4(0) = 1 - \mu(1 - \mu(1 - \mu)^2)^2 = (1 - \mu)(1 + 2\mu^2(1 - \mu) - \mu^3(1 - \mu)^3) = 0$$

Es ist $F_1^2(0) = 0$ und deshalb $F_1^4(0) = 0$, wie der Faktor $1 - \mu$ deutlich macht. Die verbleibende Gleichung

$$1 + 2\mu^2(1 - \mu) - \mu^3(1 - \mu)^3 = 0$$

löst man z. B. mit dem Newton-Verfahren. Man erhält $\mu_2 \approx 1.310702641$.

Für $i \geq 3$ muss man die μ_i erst recht numerisch berechnen. Will man z. B. μ_6 bestimmen, so hat man die Gleichung $F_\mu^{2^6}(0) = 0$ nach μ zu auflösen. Dabei ist zu beachten, dass diese Gleichung bereits an den Stellen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_5$ erfüllt ist. Wir schlagen folgendes Vorgehen vor. Wir beginnen etwa mit $\mu = 0.9$, erhöhen μ in Schritten $\Delta\mu$, z. B. $\Delta\mu = 0.03$ und berechnen für jedes μ die Zahl $x(\mu) := F_\mu^2(0)$, bis erstmals $x(\mu)$ und $x(\mu + \Delta\mu)$ verschiedene Vorzeichen haben. Weil $x(\mu)$ stetig von μ abhängt, haben wir damit zwei Parameterwerte gefunden, zwischen denen μ_1 liegt. Nun wird μ_1 mit dem Bisektionsverfahren mit der gewünschten Genauigkeit berechnet. Dann fährt man mit $\mu = \mu_1$ und einem z. B. um den Faktor 5 verkleinerten $\Delta\mu$ und mit $x(\mu) := F_\mu^{2^2}(0)$ fort, usw.

Die Resultate für die Standardfamilie $F_\mu = 1 - \mu x^2$ sind in Tabelle 1 enthalten. Überdies ist der Wert von

$$\delta_i := \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i}$$

für $i = 2, 3, \ldots, 11$ angegeben. Tabelle 1 lässt vermuten, dass nicht nur die Folge μ_i gegen einen gewissen Grenzwert μ_∞ konvergiert, sondern auch die Folge δ_i. Bezeichnen wir deren Grenzwert mit δ, so gilt $\delta \approx 4.66920$. Die δ_i, und somit auch δ,

i	μ_i	δ_i
1	1.0	
2	1.310702641336833	4.39
3	1.381547484432061	4.60095
4	1.396945359704561	4.65514
5	1.400253081214783	4.666108
6	1.400961962944841	4.6685505
7	1.401113804939776	4.6690605
8	1.401146325826946	4.6691715
9	1.401153290849924	4.6691951
10	1.401154782546618	4.669200231
11	1.401155102022464	4.669201331
12	1.401155170444411	

Tabelle 1: Standardfamilie $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2$

sind ein Mass für die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge μ_i. Der experimentelle Befund ist daher: *Die Folge μ_i konvergiert mit Geschwindigkeit $\delta \approx 4.66920$.*

Untersuchen wir einige weitere Beispiele! Betrachten wir zunächst die folgende Schar von Bewegungsgesetzen:

$$F_\mu(x) = 1 - \mu x^2 + ax^4$$

Für $a = 0$ erhalten wir wieder die Standardfamilie (2). Wählen wir einige weitere Werte für a. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Der Wert von μ_∞ hängt ganz offenbar von der gewählten Familie F_μ ab. *Hingegen ist δ_9 überraschenderweise mit grosser Genauigkeit unabhrigig von der Wahl von F_μ.* Dieses Phänomen nennt man *Universalität.*

Einige weitere Beispiele untermauern diese Beobachtung, cf. Tabellen 3, 4.

Betrachtet man hingegen die Familie

$$F_\mu = 1 - \mu x^4$$

so tritt zwar ebenfalls eine Periodenverdoppelungs-Sequenz auf, und die δ_i konvergieren, aber der Grenzwert ist nicht 4.669... sondern etwa 7.28. Der Unterschied zwischen dem letzten und allen früheren Beispielen liegt offenbar im Charakter des Maximums, das bei $x = 0$ vorliegt. Die bisherigen Überlegungen geben Anlass zu folgender

Vermutung 1 (Universalität) *Durchläuft eine Familie von Funktionen F_μ der Klasse* **G** *mit quadratischem Maximum (d .h. $\frac{d^2F_\mu}{dx^2}(0) \neq 0$) eine Periodenverdoppelungs-Sequenz, so ist die Geschwindigkeit δ_i, mit der die Folge der entsprechenden Parameterstellen μ_i konvergiert* unabhängig *von der betreffenden Familie.*

	$a = 0.05$	$a = 0.1$	$a = 0.2$	$a = -0.1$
$\mu_1 =$	1.05	1.1	1.2	0.9
$\mu_2 =$	1.360162	1.409951	1.510427	1.212854
$\mu_3 =$	1.430435	1.479571	1.578517	1.284593
$\mu_4 =$	1.445692	1.494669	1.593243	1.300214
$\mu_8 =$	1.4498535495	1.4987862602	1.5972575155	1.3044773207
$\mu_9 =$	1.4498604495	1.4987930866	1.5972641707	1.3044843894
$\mu_{10} =$	1.4498619272	1.4987945486	1.5972655961	1.3044859032
$\mu_\infty \approx$	1.449862	1.498795	1.597266	1.304486
$\delta_9 =$	4.669195498	4.669195846	4.669196602	4.669194497

Tabelle 2: Familie $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2 + ax^4$

	$a = 0.0, b = 0.1$	$a = b = 0.1$	$a = b = -0.1$
$\mu_1 =$	1.10	1.20	0.8
$\mu_\infty \approx \mu_{10} =$	1.4987945486	1.6031476503	1.2029081478
$\delta_9 =$	4.66919585	4.66919873	4.66919227

Tabelle 3: Familie $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2 + ax^4 + bx^6$

$F_\mu =$	$1 - \mu(1 - \cos(\frac{\pi}{2}x))$	$\cos(\mu\frac{\pi}{2}x)$	$2\exp(-\mu x^2) - 1$
$\mu_1 =$	1.0	1.0	$\ln 2 \approx 0.693$
$\mu_\infty \approx \mu_{10} =$	1.394698858	1.256773190	1.177300210
$\delta_9 =$	4.66919971	4.66920424	4.66919500

Tabelle 4: Verschiedene Familien

Das Phänomen der Universalität hat eine gewisse erkenntnistheoretische Bedeutung. Die Frage, wie gut ein mathematisches Modell eine reale Situation beschreibt, stellt sich in der Angewandten Mathematik ständig. Oft betrachtet man deshalb nicht nur ein Modell, sondern auch alle benachbarten. Man ist dann bereits glücklich, falls diese Modelle das gleiche *qualitative* Verhalten zeigen. Dass eine grosse Klasse von Modellen sogar *quantitative* Gemeinsamkeiten hat, erscheint ganz unwahrscheinlich. Aber genau dieser Fall tritt im Zusammenhang mit dem Phänomen der Universalität auf.

Periodenverdoppelungs-Sequenzen und die Eigenschaft der Universalität sind übrigens nicht nur bei eindimensionalen diskreten dynamischen Systemen, sondern z. B. auch bei ebenen diskreten Systemen, die durch flächentreue Abbildungen erzeugt werden, s. [4], und bei gewöhnlichen Differentialgleichungen beobachtet worden. Das Phänomen ist auch in realen Situationen nachgewiesen worden. W. Szczygielski [8] hat Anstreifvorgänge eines schnell um seine Achse rotierendes Pendels, das mit einer Wand in Kontakt treten kann, untersucht und universelles Verhalten gefunden.

Die universellen Aspekte von Periodenverdoppelungs-Sequenzen wurden um 1975 von Mitchell J. Feigenbaum [5] entdeckt. Überdies hat Feigenbaum den Mechanismus gefunden, der hinter diesem Phänomen steckt: Es zeigt sich, dass ein sog. *hyperbolischer Fixpunkt* eines gewissen nichtlinearen Operators für die Universalität verantwortlich ist. Die tatsächliche Ausgestaltung von Feigenbaums Ideen zu einem rigorosen mathematischen Beweis ist nicht trivial, s. [1, 7, 4, 3]. Darauf wird in diesem Artikel nicht eingegangen. Hingegen werden wir im nächsten Abschnitt Feigenbaums Hypothesen vorstellen. Sie gestatten es, das Phänomen der Universalität im Prinzip zu verstehen. Anstelle der schwierigen Verifikation der Feigenbaum-Hypothesen wird im übernächsten Abschnitt mithilfe von gewissen Näherungen gezeigt, dass es jedenfalls plausibel ist, dass sie richtig sind.

Wir möchten mit diesem Beispiel zeigen, wie weit der Weg von einem per Computer entdeckten Phänomen bis zu einer befriedigenden Erklärung i. a. ist. Wir halten das in einer Zeit, in der Computerexperimente einen immer grösseren Stellenwert haben, für einen Punkt, der verdient, hervorgehoben zu werden.

2 Die Feigenbaum-Hypothesen

Um das Phänomen der Universaltät bei Periodenverdoppelungs-Sequenzen erklären zu können, muss man das *geometrische Problem* verstehen, das sich dahinter verbirgt.

2.1 Der Verdoppelungsoperator τ

Abb. 1 zeigt Resultate der in Abschnitt 1.2 beschriebenen Berechnungen, wie sie auszugsweise in den Tabellen 1, 2 zusammengefasst sind. Jeder Punkt im $a_1 - a_2$–Koordinatensystem stellt genau eine Funktion des Typs

$$F(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4$$

dar. Die Menge aller dieser biquadratischen Funktionen, die überdies in der Grundmenge $\mathbf{G}$, cf. Definition 1, liegen, nennen wir $\mathbf{G_2}$.[1]

Man sieht in Abb. 1, dass die Punkte (a_1, a_2), für welche $x = 0$ ein 2^i–periodischer Punkt ist[2], gut organisiert sind. Dies gibt Anlass zur folgenden wichtigen Definition.

Definition 3 (Die Mengen Σ_i) *Für $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist Σ_i die Menge aller Funktionen F aus $\mathbf{G}$, für welche 0 ein 2^i–periodischer Punkt von F ist.*

Die Funktionen aus $\mathbf{G_2} \cap \Sigma_i$ erfüllen die Bedingung

$$F^2(0) = F(1) = 1 + a_1 + a_2 = 0,$$

d. h. sie werden durch eine Gerade in der $a_1 - a_2$–Ebene dargestellt. Allgemeiner gilt: Die Linien in Abb. 1 gehören zu $\mathbf{G_2} \cap \Sigma_i$, wir bezeichnen sie mit $\Sigma_{i,2}$. Die Funktionen $F(x) = 1 - \mu_i x^2$ sind für $i = 1, 2, 3, \ldots$ Elemente von $\Sigma_{i,2}$.

Nach diesen Vorbemerkungen ergeben sich erste Anhaltspunkte für den gesuchten geometrischen Zugang. Die Menge Σ_i ist eine Fläche der Co-Dimension 1 in $\mathbf{G}$, da sie durch die *eine* Bedingung $F^{2^i}(0) = 0$ definiert ist. Eine 1-parametrige Familie F_μ von Funktionen aus $\mathbf{G}$ mit einer Periodenverdoppelungs-Sequenz ist eine Kurve in $\mathbf{G}$, welche die Flächen Σ_i schneidet. (Vergl. in Abb. 1 die Geraden a_2 =konstant.)

Es war der grundlegende Gedanke von Feigenbaum, einen Operator τ einzuführen, der jeder Funktion F (aus einer geeigneten Teilmenge von $\mathbf{G}$) eine Bildfunktion τF zuordnet, und zwar so, dass dabei die Flächen Σ_i ineinander abgebildet werden.

Wie soll man diesen Operator τ definieren? Sei F eine Funktion aus Σ_i, d. h. es gilt $F^{2^i}(0) = 0$. Daraus folgt $(F^2)^{2^{i-1}}(0) = 0$, d. h, 0 ist ein 2^{i-1}–periodischer Punkt der Funktion F^2. Das scheint die Zuordnung $F \to F^2$ nahezulegen.

Betrachten wir ein Beispiel, s. Abb. 2. Der Teil a) dieser Figur zeigt das Bild von

$$F(x) = 1 - \mu_3 x^2 \approx 1 - 1.3815x^2.$$

Man sieht, 0 ist 2^3–periodischer Punkt (wie es sein soll, s. Tabelle 1). Die Funktion liegt somit in Σ_3. Teil b) von Abb. 2 zeigt das Bild von F^2. Man sieht, 0 ist 2^2–periodischer Punkt von F^2 (wie erwartet).

Es geht immer noch um die Frage, wie man den Operator τ definieren soll. Die Bildfunktion τF soll in der Grundmenge $\mathbf{G}$ liegen. Betrachten wir die Funktion F^2 in Teil b) von Abb. 2. Sie erfüllt die ersten beiden Bedingungen von Definition 1, aber nicht die beiden übrigen. Um dies zu beheben definieren wir

$$-a := F^2(0) = F(1),$$

beschränken uns in Teil b) von Abb. 2 auf das Intervall $-a \leq x \leq a$ und unterwerfen das Rechteck $\{(x, y) | -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq b\}$ der Streckspiegelung

$$x \longrightarrow a^{-1}x, \qquad y \longrightarrow -a^{-1}y.$$

[1] Eine Funktion $F(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4$ liegt in $\mathbf{G_2}$ falls $a_1 < 0, F(1) = 1 + a_1 + a_2 \geq -1$, und $F'(1) = 2a_1 + 4a_2 \leq 0$, d. h. falls $a_1 < 0, a_2 \geq -a_1 - 2$ und $a_2 \leq -\frac{1}{2}a_1$ gilt. Somit ist $\mathbf{G_2}$ in der $a_1 - a_2$–Ebene ein dreieckiges Gebiet mit den Ecken $(0, 0), (0, -2)$ und $(-4, 2)$.

[2] Sie sind in Abbildung 1 durch kleine Kreise markiert.

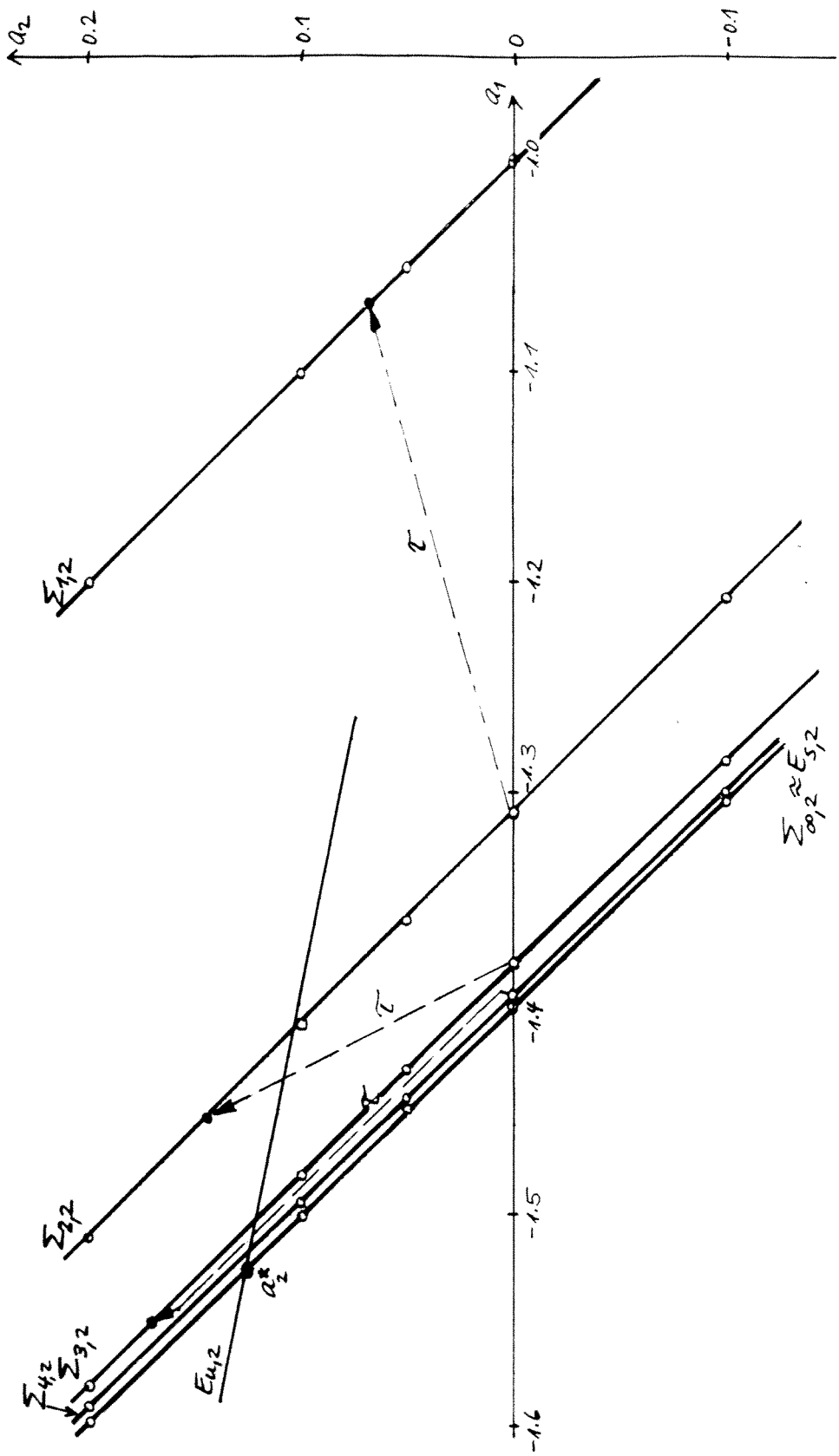

Abbildung 1: Die $a_1 - a_2$–Ebene

$\mu = \mu_2$	$\tau F(x) = 1 - 1.0675x^2 + 0.0675x^4$
$\mu = \mu_3$	$\tau F(x) = 1 - 1.4565x^2 + 0.1465x^4$
$\mu = \mu_4$	$\tau F(x) = 1 - 1.5492x^2 + 0.1705x^4$
$\mu = \mu_\infty$	$\tau F(x) = 1 - 1.57x^2 + 0.07x^4$

Tabelle 5: τF für $F(x) = 1 - \mu x^2$ und $\mu = \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_\infty$

Das Kurvenstück $y = F^2(x) = F(F(x)), -a \leq x \leq a$, geht über in die Kurve

$$y = -a^{-1}F(F(ax)), \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Das ist die Kurve von Teil c) in Abb. 2. Es macht den Anschein, dass nun auch die beiden weiteren Bedingungen der Definition 1 erfüllt sind. Damit ist die Definition des Operators τ vorbereitet.

Definition 4 (Der Verdopplungsoperator τ) *Sei $F \in \mathbf{G}$, und es gelte*

$$a := -F(1) > 0. \tag{4}$$

Dann setzen wir

$$(\tau F)(x) = -a^{-1}F(F(ax)) \tag{5}$$

Betrachten wir ein Beispiel. Es sei, wieder einmal, $F(x) = 1 - \mu x^2$. Dann ist $a = -F(1) = \mu - 1$ und

$$(\tau F)(x) = -a^{-1}F^2(ax) = -a^{-1}(1 - \mu[1 - \mu(ax)^2]^2) = 1 - 2\mu^2 ax^2 + \mu^3 a^3 x^4$$

In Tabelle 5 ist τF für verschiedene Werte von μ, vergl. Tabelle 1, angegeben. In Abb. 1 sind die ersten drei Beispiele aus Tabelle 5 eingezeichnet und die Wirkungsweise des Operators τ durch gestrichelte Pfeile markiert.

Es folgen einige Bemerkungen über Eigenschaften des Operators τ.

a) Für $F \in \Sigma_1$ ist $a = 0$ und damit τ nicht definiert. Hingegen ist die Voraussetzung (4) erfüllt für alle $F \in \Sigma_i$ für $i \geq 2$. Ist nämlich $F(1) > 0$, so ist $F(x) > 0$ für $x \in [-1, 1]$ und $x = 0$ kann nicht eine periodische Bahn erzeugen.

b) Es ist nicht für jede Funktion F aus der Grundmenge $\mathbf{G}$ auch τF in $\mathbf{G}$. Man muss den Definitionsbereich von τ geeignet einschränken, vergl. [7], p. 245. Für $F_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ liegt τF_μ für $\mu \in (1, 1.54)$ in $\mathbf{G}$.

c) *τ bildet für $i \geq 2$ die Menge Σ_i in die Menge Σ_{i-1} ab.*

Zum Beweis schreiben wir τF als Verkettung $\tau F = \sigma^{-1} \circ F^2 \circ \sigma$ mit[3] $\sigma(x) = -ax$. Dann gilt

$$(\tau F)^2 = \sigma^{-1} \circ F^2 \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ F^2 \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ F^4 \circ \sigma$$

und offensichtlich gilt allgemein $(\tau F)^n = \sigma^{-1} \circ (F^2)^n \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ (F^{2n}) \circ \sigma$, also[4]

$$(\tau F)^n(x) = -a^{-1}(F^{2n})(ax). \tag{6}$$

[3]Man beachte, dass $F(ax) = F(\sigma(x))$ gilt, weil F eine gerade Funktion ist.

[4]Man beachte, dass i. a. $(\tau F)^n$ verschieden von $\tau^n(F)$ ist.

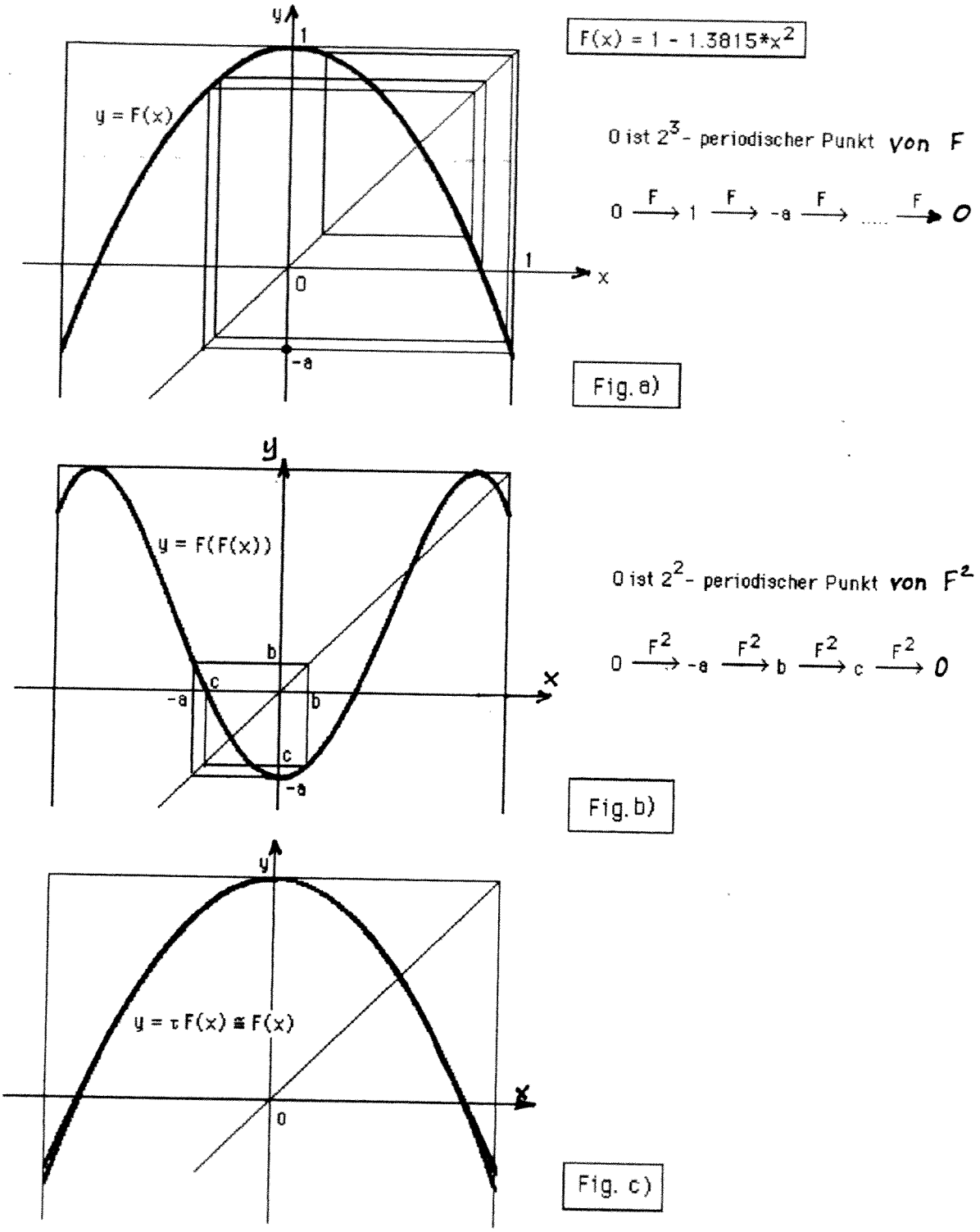

Abbildung 2: $F, F^2, \tau F$

Für $F \in \Sigma_i$ gilt $F^{2^i}(0) = 0$ und $F^j(0) \neq 0$ für $1 \leq j < 2^i$. Aus der ersten Gleichung und (6) folgt

$$(\tau F)^{2^{i-1}}(0) = -a^{-1}(F^{2^i})(0) = 0.$$

Wäre $(\tau F)^k(0) = 0$ für ein k mit $1 \leq k < 2^{i-1}$, so wäre, wegen Gl. (6), auch $F^{2k}(0) = 0$, mit $2k < 2^i$, im Widerspruch zur Voraussetzung über F. Somit ist 0 ein 2^{i-1}–periodischer Punkt von τF und deshalb $\tau F \in \Sigma_{i-1}$.

d) Zeichnet man für $F(x) = 1 - \mu_3 x^2$ zum Graphen von $(\tau F)(x)$ auch noch denjenigen von $F(x)$ ein, wie in Teil c) von Abb. 2 gemacht, so zeigt es sich, dass die beiden Kurven fast zusammenfallen. Offenbar ist also

$$\tau F(x) \approx F(x) \quad \text{für} \quad x \in [-1, 1].$$

Man erkennt im Nachhinein nochmals den Zweck der Normierung $F(0) = 1$ und der Renormierung $\tau F(0) = 1$: Ähnliche Kurvenstücke werden auf gleiche Grösse gebracht, damit man sie miteinander vergleichen kann. Man kann sich nun fragen, ob es eine Funktion F gibt, welche die Bedingung

$$\tau F(x) = F(x) \quad \text{für} \quad x \in [-1, 1]$$

exakt erfüllt. Eine solche Funktion wäre ein Fixpunkt des Operators τ. Darum geht es u. a. bei den Feigenbaumhypothesen.

2.2 Aus den Feigenbaum-Hypothesen folgt Universalität

Die folgenden von Feigenbaum aufgestellten Hypothesen, vergl. [5], haben ihn berühmt gemacht.

Feigenbaum-Hypothese 1 *Der Verdoppelungsoperator τ hat einen Fixpunkt, die sog.* universelle *Funktion $g(x)$. Diese liegt in* **G**.

Feigenbaum-Hypothese 2 *Für die Linearisierung $D\tau_g$ von τ im Fixpunkt g gilt: $D\tau_g$ hat genau einen Eigenwert δ, der grösser als* 1 *ist. Dieser Eigenwert ist einfach und es gilt*

$$\delta \approx 4.669.$$

Alle übrigen Eigenwerte sind dem Betrage nach kleiner als 1.[5]

Die Hypothese 2 lässt vermuten, dass die in Abschnitt 1.2 experimentell entdeckte universelle Konstante (für die Konvergenzgeschwindigkeit der Parameterwerte bei Periodenverdoppelungs-Sequenzen) gerade gleich dem Eigenwert δ ist. Im folgenden geht es darum, diese Vermutung zu begründen, und damit das Phänomen der Universalität zu erklären.

Die Feigenbaum-Hypothesen 1, 2 ermöglichen den angekündigten geometrischen Zugang zum Problem der Universalität. Die Situation ist in Abb. 3 schematisch dargestellt. g ist der Fixpunkt von τ, und E_u der 1–dimensionale Eigenraum von

[5] Ein Fixpunkt mit dieser Eigenwertstruktur (d. h. mit Eigenwerten die betragsmässig grösser als 1, und solchen, die betragsmässig kleiner als 1 sind) heisst *hyperbolisch*.

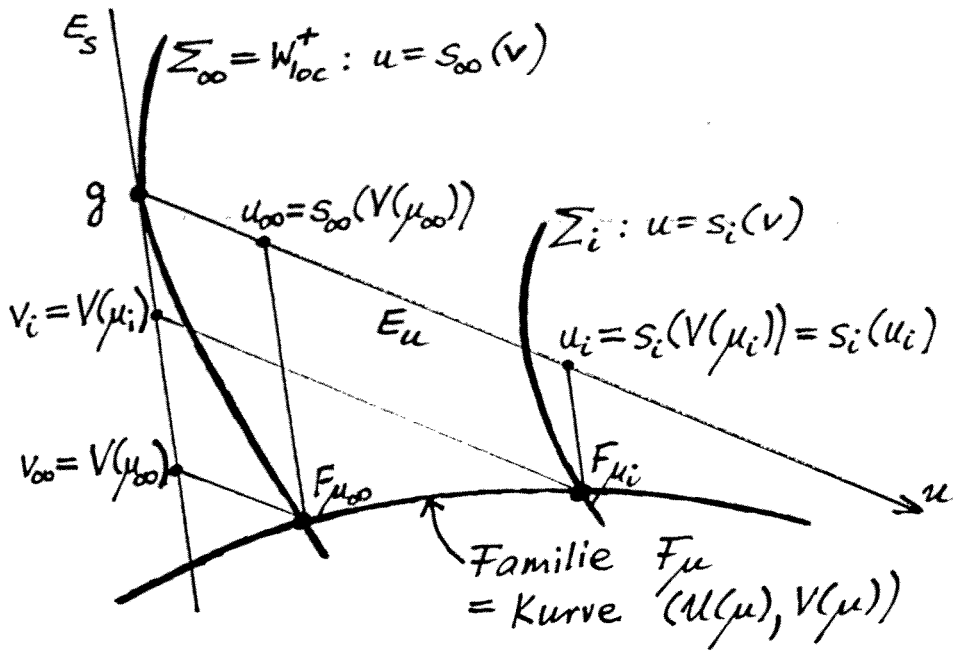

Abbildung 3: Die Geometrie der Universalität

$D\tau_g$ zum Eigenwert δ, die sog. unstabile Richtung (weil $D\tau_g$ auf E_u expandierend ist). Weiter ist E_s der lineare Raum zu den übrigen Eigenwerten von $D\tau_g$ (deren Beträge alle kleiner als 1 sind). E_s hat Codimension 1; weil $D\tau_g$ auf E_s kontrahierend ist, heisst E_s stabiler Eigenraum. Die Gerade E_u machen wir zur $u-$Koordinatenachse mit Nullpunkt in g. Die Ortsvektoren im (unendlich-dimensionalen) stabilen Raum E_s mit g als Nullpunkt bezeichnen wir mit v. Jedes Element F aus $\mathbf{G}$ wird dementsprechend durch ein Paar (u, v) dargestellt.

Weiter ist in Abb. 3 eine der Flächen Σ_i angedeutet. Wir stellen uns vor, dass sie eine Darstellung der Form

$$u = s_i(v)$$

besitzt.

Wir zerlegen die folgenden Überlegungen in drei Schritte.

a) g ist ein *hyperbolischer* Fixpunkt des Operators τ. Hyperbolische Fixpunkte spielen eine wichtige Rolle und sind gut untersucht. Eine Einführung zu diesem Thema findet man in [6], im Zwillings-Artikel zu den Ausführungen hier. Die folgenden Darlegungen stützen sich auf [6].

Ein hyperbolischer Fixpunkt einer Abbildung besitzt eine (lokale) stabile Mannigfaltigkeit W^+_{loc} (und ebenso eine (lokale) instabile Mannigfaltigkeit W^-_{loc}). Nach Hadamard, s. [6], kann W^+_{loc} wie folgt konstruiert werden. Man beginnt mit einer Fläche, die bezüglich des stabilen Eigenraums hinreichend flach ist und betrachtet deren Urbild bezüglich der gegebenen Abbildung, und davon wieder das Urbild usw. Auf diese Weise entsteht eine Folge von Flächen. Diese konvergieren gegen die stabile Mannigfaltigkeit W^+_{loc}.

Die Pointe ist nun, dass wir zum Fixpunkt g und der Abbildung τ ja eine solche Folge von Flächen schon haben: Nämlich die Σ_i aus Definition 3, s. Bemerkung c), in

Abschnitt 2.1. Daraus schliessen wir, dass die Flächen Σ_i gegen die stabile Mannigfaltigkeit $W^+_{loc} = \Sigma_\infty$ von g konvergieren. So wie die Σ_i als Graphen von Funktionen s_i dargestellt werden, beschreiben wir Σ_∞ durch

$$u = s_\infty(v).$$

b) Weil die instabile Richtung E_u des Fixpunktes g von τ eindimensional ist, s. Hypothese 1, lässt sich die Konvergenzgeschwindigkeit mit der die Funktionen s_i gegen die Funktion s_∞ streben, gut beschreiben. Es gilt, s. [6], Abschnitte g), i), das folgende Resultat.

Lemma 1 (Konvergenzgeschwindigkeit der Flächen Σ_i) *Die Folge*

$$\sigma_i(v) := \delta^i[(s_\infty(v) - s_i(v)]$$

konvergiert für $i \to \infty$ (gleichmässig) gegen eine (stetige) Grenzfunktion $\sigma_\infty(v)$. Dabei bezeichnet $\delta > 1$ den Eigenwert von $D\tau_g$ in Richtung E_u .

c) Sei jetzt F_μ eine einparametrige Familie von Bewegungsgesetzen mit einer Periodenverdoppelungs-Sequenz. In Abb. 3 ist dies eine Kurve, welche die Fläche Σ_i für den Parameterwert $\mu = \mu_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ durchstösst.

Satz 1 (Universalität) *Die Differenzen-Quotienten-Folge*

$$\delta_i := \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i}$$

konvergiert für $i \to \infty$ gegen den Eigenwert δ von $D\tau_g$, d. h. der Grenzwert ist unabhängig *von der gewählten Familie F_μ.*

Zum Beweis beschreiben wir die Familie F_μ durch die Parameterdarstellung

$$u = U(\mu), \quad v = V(\mu) \tag{7}$$

Weiter setzen wir

$$u_i = U(\mu_i), \quad v_i = V(\mu_i) \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \tag{8}$$

Wir nehmen an, die Funktion $\mu \to u = U(\mu)$ sei umkehrbar und bezeichnen die Umkehrfunktion mit $\mu = M(u)$. Für die u_i, v_i gilt wegen Gl. (7), (8) und $(u_i, v_i) \in \Sigma_i$, s. Abb. 3

$$v_i = V(M(u_i)), \quad u_i = s_i(v_i) = s_i(V(M(u_i))) \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \infty. \tag{9}$$

Nun untersuchen wir den Ausdruck $\delta^i(u_\infty - u_i)$. Es gilt, s. Gl. (9)

$$\begin{aligned} \delta^i(u_\infty - u_i) &= \delta^i[s_\infty(V(M(u_\infty))) - s_i(V(M(u_i)))] \\ &= \delta^i[s_\infty(V(M(u_\infty))) - s_\infty(V(M(u_i)))] + \delta^i[s_\infty(v_i) - s_i(v_i)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Der zweite Summand ist $\sigma_i(v_i)$ gemäss Lemma 1.

Die Funktion $u \to f(u) := s_\infty(V(M(u)))$ ist eine reellwertige Funktion der reellen Variablen u. Es ist

$$s_\infty(V(M(u_\infty))) - s_\infty(V(M(u_i))) = f(u_\infty) - f(u_i) = f'(u_\infty)(u_\infty - u_i) + O((u_\infty - u_i)^2),$$

und daher mit Gl. (10)

$$\delta^i(u_\infty - u_i) = f'(u_\infty)\delta^i(u_\infty - u_i) + \delta^i(u_\infty - u_i)O(u_\infty - u_i) + \sigma_i(v_i).$$

Daraus folgt

$$\delta^i(u_\infty - u_i) = \frac{\sigma_i(v_i)}{1 - f'(u_\infty) + O(u_\infty - u_i)}. \tag{11}$$

Für $i \to \infty$ konvergiert die Folge $\sigma_i(v_i)$ dank Lemma 1 gegen $\sigma_\infty(v_\infty)$. Im Nenner von Gl. (11) strebt der letzte Summand gegen 0. Somit folgt

$$\lim_{i\to\infty} \delta^i(u_\infty - u_i) = \frac{\sigma_\infty(v_\infty)}{1 - f'(u_\infty)}. \tag{12}$$

Man beachte, dass $f'(u_\infty)$ in der Nähe des Fixpunktes g klein ist, weil die Fläche Σ_∞ den stabilen Eigenraum E_s berührt, cf. Fig. 3. Der Nenner $1 - f'(u_\infty)$ verschwindet deshalb in hinreichender Nähe des Fixpunktes nicht.

Wir übertragen schliesslich das Resultat auf die Konvergenz der Parameterstellen μ_i. Die Taylorentwicklung der Funktion $\mu = M(u)$ an der Stelle u_∞ lautet

$$\mu = \mu_\infty + M'(u_\infty)(u - u_\infty) + O((u - u_\infty)^2).$$

Für $u = u_i$ folgt daraus

$$\delta^i(\mu_\infty - \mu_i) = M'(u_\infty)(\delta^i(u_\infty - u_i)) + O(\delta^i(u_\infty - u_i)(u_\infty - u_i))$$

und damit das Ergebnis

$$\lim_{i\to\infty} \delta^i(\mu_\infty - \mu_i) = \frac{M'(u_\infty)\sigma_\infty(v_\infty)}{1 - f'(u_\infty)} =: H. \tag{13}$$

Der Wert von H hängt von der gewählten Familie F_μ ab. Für die Differenzen-Quotienten-Folge δ_i ergibt sich

$$\delta_i := \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} = \frac{(\mu_i - \mu_\infty) + (\mu_\infty - \mu_{i-1})}{(\mu_{i+1} - \mu_\infty) + (\mu_\infty - \mu_i)} = \frac{\delta^i(\mu_i - \mu_\infty) + \delta\delta^{i-1}(\mu_\infty - \mu_{i-1})}{\delta^{-1}\delta^{i+1}(\mu_{i+1} - \mu_\infty) + \delta^i(\mu_\infty - \mu_i)}$$

Der letzte Quotient konvergiert für $i \to \infty$ gegen

$$\frac{-H + \delta H}{-\delta^{-1}H + H} = \delta.$$

Damit ist der Beweis von Satz 1 vollständig und es ist skizziert, wie aus den Hypothesen von Feigenbaum das Phänomen der Universalität folgt.

3 Niedrigdimensionale Näherungen

3.1 Die Abbildungen τ_d

Wie kann man den Fixpunkt g des Operators τ finden, bzw. seine Existenz begründen? g ist gewiss kein Polynom, denn: ist F ein Polynom vom Grad n, so ist τF ein Polynom vom Grad n^2.[6] Man muss deshalb den Operator τ in einem grösseren Funktionenraum betrachten und dort den Fixpunkt suchen. Ist F eine Funktion aus der Grundmenge $\mathbf{G}$, so kann man sie an der Stelle $x = 0$ jedenfalls in eine formale Potenzreihe

$$F(x) = 1 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6 + \dots$$

entwickeln. Es liegt nahe, *näherungsweise* mit *abbrechenden* Potenzreihen, d. h. mit Polynomen zu arbeiten.

Wir wählen dazu eine natürliche Zahl d. Für Polynome der Art

$$F(x) = 1 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6 + \dots + a_dx^{2d}$$

hat τF die Form

$$(\tau F)(x) = 1 + b_1x^2 + b_2x^4 + b_3x^6 + \dots + b_dx^{2d} + [b_{d+1}x^{2d+2} + \dots + b_{2d^2}x^{4d^2}]$$

Wir vernachlässigen die Terme in der eckigen Klammer. Damit ist durch τ eine Zuordnung der Koeffizienten

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_d) \longrightarrow (b_1, b_2, b_3, \dots, b_d)$$

definiert, die wir als Abbildung eines gewissen Bereichs $D \subseteq \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ auffassen können. Die so definierte Abbildung τ_d nennen wir die *d-dimensionale Näherung* an τ.

3.2 Der Fixpunkt und die Linearisierung von τ_d

Eindimensionale Näherung. Wir gehen aus von $F(x) = 1+a_1x^2$, bilden $(\tau F)(x)$, vergl. Abschnitt 2.1 und lassen den Term 4. Grades in x weg. Man findet

$$\tau_1 : a_1 \to b_1 = \tau_1(a_1) = 2a_1^2(1 + a_1).$$

Die Fixpunktbedingung in der vorliegenden Näherung lautet

$$\tau_1(a_1) = a_1 = 2a_1^2(1 + a_1).$$

Diese kubische Gleichung hat die Lösungen $a_1 = 0$ und $a_1 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$. Von diesen ist nur

$$a_1 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \approx -1.366$$

von Interesse, da $a_1 < 0$ sein muss damit $F \in \mathbf{G}$ ist.

[6] Die Wahl $n = 1$ kommt als Lösung nicht in Frage, weil die linearen Funktionen nicht unimodal sind.

Für die Parameterstellen μ_i bei der Periodenverdoppelungs-Sequenz der Familie $F_\mu = 1 - \mu x^2$ gilt $\lim_{i\to\infty} \mu_i \approx 1.40$, wie wir wissen, vergl. Tabelle 1. Die Funktion F_{μ_∞} liegt recht nahe bei der Funktion $F(x) = 1 - 1.366x^2$. Damit zeichnet sich im Funktionenraum die "Gegend" ab, wo der Fixpunkt von τ liegt.

Zweidimensionale Näherung. Nun gehen wir aus von einer Funktion

$$F(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4,$$

wenden τ darauf an und lassen in $\tau F = 1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + O(x^6)$ alle Terme 6. und höheren Grades weg. Für die Koeffizienten $b_1(a_1, a_2), b_2(a_1, a_2)$ ergibt sich

$$\begin{cases} b_1 &= 2a_1(a_1 + 2a_2)(1 + a_1 + a_2) \\ b_2 &= [a_1(2a_2 + a_1^2) + 2a_2(2a_2 + 3a_1^2)](1 + a_1 + a_2)^3 \end{cases} \tag{14}$$

Die Fixpunktgleichungen

$$b_1(a_1, a_2) = a_1, \quad b_2(a_1, a_2) = a_2 \tag{15}$$

bilden ein System von zwei nichtlinearen Gleichungen für a_1 und a_2. Wir versuchen gar nicht erst, dieses System algebraisch aufzulösen, denn für $d \geq 3$ wird dies ohnehin nicht möglich sein.

Wie kann man die Lösung des Systems (15) bestimmen? Wir schlagen vor, das Newton-Verfahren zu benützen[7]. Wir setzen $\vec{a} =: (a_1, a_2)^\top$, führen die Jacobi-Matrix $D\tau_2(\vec{a})$, wie üblich, mithilfe der partiellen Ableitungen

$$D\tau_{2,pq}(\vec{a}) = \frac{\partial b_p}{\partial a_q}(\vec{a}) \quad (p, q = 1, 2)$$

ein, und definieren das Newton-Verfahren durch

$$\vec{a}_{n+1} = \vec{a}_n + [D\tau_2(\vec{a}_n) - I]^{-1}(\vec{a}_n - \tau(\vec{a}_n)),$$

dabei bezeichnet I die 2×2–Einheitsmatrix. Mit dem Startvektor $\vec{a}_0 = (-1.366, 0)^\top$ erhält man nach 7 Schritten

$$a_1 = -1.522241561779241 \quad a_2 = 0.1276132572115043 \tag{16}$$

und bei weiterer Anwendung des Verfahrens bleiben diese Werte unverändert.

In Tabelle 2, s. Abschnitt 1.2, sind für die Familie $F_\mu = 1 - \mu x^2 + 0.1x^4$ (man beachte: $0.1 \approx a_2 = 0.1276$) einige Resultate zum Periodenverdoppelungsprozess angegeben, insbesondere wurde gezeigt, dass die μ_i gegen $\mu_\infty \approx 1.50$ streben. Dies entspricht recht gut dem Wert $a_1 = -1.5222$.

Höherdimensionale Näherungen. Das Vorgehen wiederholt sich nun. Für $d = 3$ gehen wir aus von $F(x) = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6$, bilden $(\tau F)(x) = 1 + b_1 x^2 +$

[7] Weil es ja um die Bestimmung eines Fixpunktes geht, könnte man auf die Idee kommen diesen einfach durch Iteration bestimmen zu wollen. Weil der Fixpunkt g der Abbildung τ hyperbolisch ist, s. Hypothese 2, wird auch der zu bestimmende Fixpunkt der Näherung τ_2 hyperbolisch sein, d. h. er kann nicht durch gewöhnliche Iteration bestimmt werden.

	$d=3$	$d=5$	$d=7$	$d=10$
$a_{d,1}=$	-1.5218434	-1.5277465	-1.527632	-1.52763299
$a_{d,2}=$	0.072931	0.105178	0.10481	0.10481519
$a_{d,3}=$	0.045508	0.026417	0.02670	0.02670568
$a_{d,4}=$		-0.003388	-0.003528	-0.00352742
$a_{d,5}=$		$3.02*10^{-5}$	$8.21*10^{-5}$	$8.161*10^{-5}$
$a_{d,6}=$			$2.5*10^{-5}$	$2.528*10^{-5}$
$a_{d,7}=$			$-2.5*10^{-6}$	$-2.55*10^{-6}$
$a_{d,8}=$				$-9.8*10^{-8}$
$a_{d,9}=$				$2.9*10^{-8}$
$a_{d,10}=$				$\approx 5*10^{-10}$

Tabelle 6: Berechnung des Fixpunktes für verschiedene Dimensionen

$\ldots + b_3x^6 + O(x^8)$ und lassen die Terme der Ordnung 8 und höher weg. So gewinnt man die Abbildung $(a_1, a_2, a_3) \to (b_1, b_2, b_3)$, die wir hier nicht explizit protokollieren. Der Fixpunkt, d. h. die Lösung des Systems $b_i(a_1, a_2 a_{,3}) = a_i, \quad i = 1,2,3$ wird wieder mit der Newton-Methode berechnet. Der Aufwand für die Bestimmung der partiellen Ableitungen $\frac{\partial b_p}{\partial a_q}$ ist bereits recht gross, und deshalb wurden alle algebraischen und numerischen Berechnungen ab dieser Stelle mit dem Algebra-Programm "Mathematica" ausgeführt[8]. Als Startwert für das Newton-Verfahren nehmen wir für a_1 und a_2 die Werte aus Gl. (16) und $a_3 = 0$.

Die Resultate für den Fixpunkt $\vec{a}_d = (a_{d,1}, a_{d,2}, \ldots, a_{d,d})$ für $d = 3,5,7,10$ sind in Tabelle 6 zusammengestellt. Man beachte, dass sich die Erhöhung der Dimension auf alle Koeffizienten auswirkt.

Man sieht, dass sich die Koeffizienten zeilenweise stabilisieren. Die Funktion

$$F(x) = 1 - 1.52763299x^2 + 0.10481519x^4 + 0.02670568x^6 + \ldots + 5*10^{-10}x^{20} \quad (17)$$

ist der Fixpunkt von τ_{10} und es ist zu hoffen, dass F eine gute Näherung für den Fixpunkt von τ ist.

3.3 Die Eigenwerte von $D\tau_d$

In Feigenbaums Hypothesen spielen die Eigenwerte von $D\tau$, der Linearisierung des Operators τ in seinem Fixpunkt (der universellen Funktion) g, eine wichtige Rolle. Es liegt deshalb nahe, zu den endlich-dimensionalen Abbildungen τ_d die Linearisierung $D\tau_d$ im jeweiligen Fixpunkt $\vec{a}_d$ zu betrachten und die Eigenwerte von $D\tau_d$ zu berechnen. Tatsächlich wurden die Abbildungen $D\tau_d$ bereits im vorangegangenen Abschnitt verwendet (um mit der Newton-Methode die Fixpunkte zu berechnen).

Wir diskutieren kurz den Fall $d = 2$. Die Abbildung τ_2 wird durch Gl. (14) gegeben, für den Fixpunkt fanden wir $\vec{a}_2 \approx (-1.5222, 0.1276)^\top$, s. Gl. (16). Für die

[8]Die Autoren danken Frau S. Ketterer für die Ausführung dieser Arbeit.

	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=5$	$d=7$	$d=10$
$\lambda_1 \approx$	5.73	4.8442	4.51651	4.6704	4.6692	4.669202
$\lambda_2 \approx$		-0.4856	-0.08902	0.2076	0.2790	0.1596
$\lambda_3 \approx$			0.51000	-0.0755	0.1579	-0.2400
$\lambda_4 \approx$				0.2902	-0.1236	-0.1236
$\lambda_5 \approx$				-0.1286	0.0322	-0.0573
$\lambda_6 \approx$					-0.0539	0.0258
$\lambda_7 \approx$					-0.0331	-0.0100
$\lambda_8 \approx$						-0.0036
$\lambda_9 \approx$						$0.0084 + 0.0021i$
$\lambda_{10} \approx$						$0.0084 - 0.0021i$

Tabelle 7: Eigenwerte von $D\tau_d(\vec{a}_d)$ für $d = 1, 2, 3, 5, 7, 10$

Jacobi-Matrix am Fixpunkt findet man

$$D\tau_2 \approx \begin{pmatrix} 6.0588 & 6.2603 \\ -1.2698 & -1.7002 \end{pmatrix}.$$

Sie hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 \approx 4.8442, \quad \lambda_2 \approx -0.4856.$$

Man konstatiert, dass λ_1 recht nahe bei der universellen Konstanten $\delta \approx 4.669$ liegt.

Die Eigenvektoren sind

$$\vec{e}_1 \approx (1.0, -0.194)^\top, \quad \vec{e}_2 \approx (1.0, -1.045)^\top.$$

Der Eigenvektor $\vec{e}_1$ zu λ_1 spannt den 1−dimensionalen, unstabilen Eigenraum $E_{u,2}$ auf. Das ist eine Gerade in der $a_1 - a_2$−Ebene durch $\vec{a}_2$ mit dem Richtungsvektor $\vec{e}_1$. Auf $E_{u,2}$ ist $D\tau_2$ expandierend. Der Eigenvektor $\vec{e}_2$ zu λ_2 spannt den 1−dimensionalen, stabilen Eigenraum $E_{s,2}$ auf. $E_{s,2}$ ist eine Gerade durch $\vec{a}_2$ mit dem Richtungsvektor $\vec{e}_2$. Die beiden Geraden $E_{u,2}$, $E_{s,2}$ sind in Abb. 1 eingezeichnet. $E_{s,2}$ fällt fast mit $\Sigma_{\infty,2}$ zusammen. Damit ist die Richtung von $\Sigma_{\infty,2}$ mit $D\tau_2$ in Verbindung gebracht.

Diese Überlegungen lassen sich auch für andere Werte von d durchführen. In Tabelle 7 sind die Eigenwerte zu $D\tau_d(\vec{a}_d)$ für verschiedene Werte von d angegeben. Offenbar gibt es nur einen Eigenwert mit Betrag > 1. Er unterscheidet sich mit wachsendem d immer weniger von der universellen Konstanten δ. Alle übrigen Eigenwerte sind betragsmässig kleiner als 1.

Diese Rechnungen stützen die Feigenbaum-Hypothesen.

3.4 Zum *Beweis* von Feigenbaums Hypothesen

Lanford, [7], hat einen Computer gestützten Beweis für die Richtigkeit der Feigenbaum-Hypothesen gegeben, s. auch [4]. Weil sich gewisse Querverbindungen zu den

voranstehenden Erörterungen herstellen lassen, referieren wir den Gedankengang summarisch.

Zunächst muss die *Existenz* des Fixpunktes g des Verdoppelungsoperators τ (s. Abschnitt 2.2, Hypothese 1) bewiesen werden. Lanford gibt dazu ohne weitere Angaben ein Polynom $g_0(x)$ vom Grad 20 an, das fast Fixpunkt ist, d. h. es ist $g_0 - \tau(g_0) \approx 0$. Die Koeffizienten von g_0 stimmen mit jenen des Polynoms F von Gl. (17) überein (ev. mit Ausnahme der letzten dort angegebenen Ziffer).

Nun denken wir uns die Newton-Methode mit der Startfunktion g_0 angewandt. Das ist analog zu dem, was wir in Abschnitt 3.2 unternommen haben, jedoch nun in einem unendlich dimensionalen Funktionenraum. Die Rekursionsgleichung lautet

$$g_{n+1} := g_n + [D\tau_{g_n} - I]^{-1}(g_n - \tau(g_n)) =: \Phi(g_n).$$

Hier steht $D\tau_{g_n}$ für die (Fréchet-) Ableitung von τ an der Stelle g_n. $D\tau$ ist also die Verallgemeinerung der Jacobi-Matrix auf den unendlich-dimensionalen Fall.

Damit ist der Operator Φ definiert. Die Existenz eines Fixpunktes g von Φ, und damit von τ, ergibt sich aus einem Fixpunktsatz der folgenden Art. Es sei $\|.\|$ eine geeignete Norm.

Satz 2 Voraussetzung. *Es gibt Zahlen $\epsilon > 0, \beta > 0$ und $0 < \rho < 1$ sodass gilt*

1. $\|\Phi(g_0) - g_0\| < \epsilon$
2. *Aus* $\|F - g_0\| < \beta$ *folgt* $\|D\Phi_{g_0}(F - g_0)\| \leq \rho$
3. $\beta > \frac{\epsilon}{1-\rho}$

Behauptung. *Die Gleichungen $\Phi(F) = F$ bzw. $\tau(F) = F$ haben eine Lösung g mit*

$$\|g - g_0\| < \frac{\epsilon}{1-\rho} < \beta.$$

Unter allen Funktionen F mit $\|F - g_0\| < \beta$ ist g der einzige Fixpunkt von Φ bzw. τ.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt mit dem Kontaktionsprinzip.

Bemerkungen zu den Voraussetzungen: 1. ist eine Bedingung über die Güte von g_0 als "Fast-Fixpunkt". Aus *2.* folgt, dass Φ kontrahierend ist. Die Voraussetzung *3.* sorgt dafür, dass die Anwendung von Φ auf ein F mit $\|F - g_0\| < \frac{\epsilon}{1-\rho}$ nicht aus dieser Kugel herausführt.

Zurück zum Beweis von Lanford. Es musste gezeigt werden, dass die Voraussetzungen von Satz 2 tatsächlich erfüllt sind. Die Schranken ϵ, β, ρ wurden zum Teil numerisch mit dem Computer berechnet. Dabei wurden die Rundungsfehler durch sog. intervall-arithmetische Methoden (d. h. durch per Computer berechnete, aber sichere Abschätzungen) kontrolliert[9]. Der Fixpunktsatz liefert so die behauptete universelle Funktion g, den Fixpunkt von τ. Die Taylorentwicklung von g stimmt bis zum Glied x^{20} fast mit g_0 bzw. unserem F, s. Gl. (17) überein. Aus den obigen und weiteren Abschätzungen ergeben sich dann auch noch die einschlägigen Aussagen über die Eigenwerte von $D\tau$ am Fixpunkt g.

[9]Man spricht in diesem Zusammenhang von einem Computer gestützten Beweis (computer assisted proof).

Literatur

[1] Collet, P., Eckmann, J.P.: *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, 1980.

[2] Cvitanovic, P. (Ed.): *Universality in Chaos*, 1989.

[3] de Melo, W., van Strien, S. : *One-dimensional Dynamics*, 1993.

[4] Eckmann, J.P., Koch, H., Wittwer, P.: *A computer-assisted proof of universality for area-preserving maps*, Mem. AMS Vol. 47, No. 289, 1984.

[5] Feigenbaum, M.J.: *Universal Behaviour in Nonlinear Systems*, Los Alamos Science 1, 1980. S. auch [2] p. 49-84.

[6] Kirchgraber, U.: *Als Poincaré, Hadamard und Perron die invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten*, s. vorangehenden Artikel.

[7] Lanford, O.E.: *A Computer-assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures*, Bull. Am. Math. Soc. 6, 1982, 427-434. S. auch [2] p. 245-252.

[8] Szczygielski, W. M.: *Dynamischer Verhalten eines schnell drehenden Rotors bei Anstreifvorgängen*, Dissertation Nr. 8094, ETH-Zürich, 1986.