NOTIZEN ZU EINER MATHEMATIK FÜRS LEBEN [1]

CHRISTIAN BLATTER
DEPARTEMENT MATHEMATIK, ETH ZÜRICH

Erste Vorbemerkung: In der Einladung zu diesem Anlaß war unter anderem folgendes zu lesen:

> "Die Mathematik gilt in unserer Kultur als eine Geheimwissenschaft, ihr Gebiet als unzugängliches, von tausend Formeln verbarrikadiertes Terrain. Das ist ein Vorurteil, zu dem alle ihren Teil beigetragen haben: die phantasielose und dröge Schuldidaktik, die intellektuelle Faulheit des Publikums und die selbstisolierende Attitüde vieler Mathematiker." (Hans Magnus Enzensberger im Tages-Anzeiger vom 11. Dezember 1996)

Dieses Zitat hat vielleicht irritiert. Ich kann Ihnen dazu sagen, daß es Enzensberger nicht bei dem Seitenhieb gegen die Schulmeister hat bewenden lassen. Von ihm ist in diesem Frühjahr ein ganz wunderbares Kinderbuch (*Kinder*buch?) erschienen:

> Hans Magnus Enzensberger
> Der Zahlenteufel
> Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben
> Hanser Verlag 1997

Der Held dieses Buches ist Robert, ein aufgeweckter Elfjähriger, dem auf fast poetische Art mannigfache mathematische Erfahrungen und Überraschungen zuteil werden. Das geht von Primzahlen ("prima Zahlen" bei Enzensberger) über die Divergenz der harmonischen Reihe bis zum Traveling Salesman Problem.

Zweite Vorbemerkung: Der nachfolgende Text ist pure Fiktion. Ähnlichkeiten von darin vorkommenden Beispielen mit realen Unterrichtserlebnissen sind rein zufällig, und, ja: Die weibliche Form ist immer mitgemeint.

Ich hatte einen Traum: Ein Lehrer schrieb eine Aufgabe an die Wandtafel, die keiner glich, die die Schüler schon gesehen hatten, und es gab weder allgemeines Stöhnen noch abgelöschte Kommentare, dafür leuchteten die Augen von nicht wenigen in der Klasse. Er teilte einen mathematischen Text aus, "Beweis des Fünffarbensatzes"; und nach der Pause begannen schon die ersten, virtuelle Landkarten zu zeichnen (statt sich mit Karl dem Kühnen zu befassen). Eine Lehrerin las mit ihren Schülern ein Paper aus dem "American Mathematical Monthly"; es gab auch ein "Ex" darüber. Ein Schüler kam nach der Stunde und wollte wissen, ob es außer den reellen und den komplexen Zahlen noch andere patente Zahlensysteme gibt.

Am andern Tag war der DMK-Vorschlag eines "Katalogs der Grundkenntnisse in Mathematik" [1] in der Post. Die meisten von Ihnen haben wohl diesen Katalog studiert und ihn vielleicht mit dem Vorgänger-Katalog aus dem Jahr 1990 verglichen. (Pro memoria fasse ich auf der Rückseite einer Briefmarke zusammen: Es gibt nun auch einige Begriffe aus der Stochastik

---
[1] Leicht überarbeitete Version eines Vortrags am 8. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht, 14. Mai 1997

sowie einen Abschnitt "Einfache mathematische Modelle"; dafür soll das Integral aus dem Programm gekippt werden.) Ums Himmels Willen, haben Sie vielleicht ausgerufen, wir haben in Zukunft weniger Mathematikstunden, und da sollen wir noch zusätzlichen Pflichtstoff bringen — von den Träumen der Herren Professoren gar nicht zu reden. Dazu ist folgendes zu sagen: Der Katalog von 1990 wollte nur eine handliche Schnittstelle zwischen Mittelschule und Hochschule definieren. Im Gegensatz dazu versteht sich der neue Katalog als eine Art "Maturitätsprogramm"; er sollte also mit dem geltenden Maturitätsprogramm von 1973 [2] verglichen werden:

7 Mathematik

7.1 Bildungsziel

Fähigkeit, an mathematischen Objekten allgemeine Strukturen zu erkennen, funktionelle Zusammenhänge zu erfassen und die mathematischen Kenntnisse auf anderen Wissensgebieten anzuwenden. Übung im Lösen von Aufgaben aus den Stoffgebieten.

7.2.1 Stoff, Typus A, B, D, E

7.2.1.1 Die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Die Operationen und ihre Eigenschaften, Ordnung. Primfaktorzerlegung, kleinstes gemeinsames Vielfaches und größter gemeinsamer Teiler für die natürlichen Zahlen. Polynome: Addition, Subtraktion, Multiplikation und ihre Eigenschaften. Quotienten von Polynomen.

7.2.1.2 Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme 1. Grades mit 1, 2 und 3 Variablen. Gleichungen 2. Grades mit einer Variablen.

7.2.1.3 Relationen, Abbildungen, Zusammensetzung von Abbildungen, inverse Abbildung. Einfache rationale Funktionen, die Exponentialfunktion und der Logarithmus, trigonometrische Funktionen.

7.2.1.4 Begriff der Ableitung, Ableitungsregeln, Diskussion von Funktionen, Stammfunktion und bestimmtes Integral. Oberfläche und Volumen einfacher Körper.

7.2.1.5 Geometrische Transformationen: Bewegungen und Spiegelungen, zentrische und allgemeine Ähnlichkeitsabbildungen in der Ebene. Grundlegende Sätze der Elementargeometrie. Trigonometrie: rechtwinkliges Dreieck, Sinus- und Kosinussatz. Additionstheoreme.

7.2.1.6 Reelle Vektorräume der Dimension 1, 2 und 3, Skalarprodukt, Vektorprodukt. Anwendung auf die ebene Geometrie: Gerade, Kreis (Parameterdarstellung und Gleichung in Koordinaten).

7.2.1.7 Beschreibende Statistik, Begriff der Wahrscheinlichkeit, Summen- und Produktsatz, Normalverteilung.

Jetzt schaut es schon wieder ganz anders aus: Der "Katalog 1997" ist mit dieser Liste einigermaßen kompatibel, ausgenommen bezüglich der Integralrechnung, und hier ist ja das letzte Wort noch nicht gesprochen.

Haben Sie übrigens den "reellen Vektorräumen der Dimension 1" in Ihrem Unterricht auch immer den gebührenden Platz eingeräumt? Ein Kollege am "Gymnase de Vevey" hat wohl als einziger dieses profunde Thema wirklich ernst genommen. Seine autographierte "Géométrie" behandelt im ersten Paragraphen des "Chapitre I: Géométrie de la droite" nicht mehr und nicht weniger als

"L'espace vectoriel à *une* dimension sur le corps des réels".

Es gibt da ein "loi interne" $(x; y) \mapsto x + y$ und ein "loi externe" $(\alpha; x) \mapsto \alpha x$ mit den üblichen Verknüpfungsaxiomen und zusätzlich das folgende Dimensionsaxiom:

D1: Pour tout couple $(x; y)$ d'éléments de E, il existe deux nombres réels α, β non tous nuls et tels que $\alpha x + \beta y = e$; en outre, il existe un élément a de E tel que la relation $\lambda a = e$ entraîne $\lambda = 0$.

Auf Seite 3 wird dann bewiesen, daß jeder von 0 verschiedene Vektor u als Basis des Vektorraums E dienen kann, und auf Seite 9 kommen wir zu dem folgenden Satz:

> *Théorème.* L'ensemble des automorphismes de E, structuré par la loi de composition $\circ$, constitue un groupe isomorphe au groupe $\mathbb{R}^*$. Ce groupe est noté $GL(1;\mathbb{R})$ et on l'appelle groupe linéaire à une variable sur le corps des réels.

Soviel zum Röstigraben in der Schulmathematik. Nun wollen wir aber im Ernst beginnen. — Der "Katalog 1997" beruft sich in seiner Präambel auf den "Rahmenlehrplan für Maturitätsschulen" [3]. Ich würde am liebsten den Abschnitt "Mathematik" daraus Wort für Wort hier abdrucken, da er sehr eindrücklich beschreibt, was mir vorschwebt und wozu ich Ihnen Mut machen möchte:

> Der Mathematikunterricht am Gymnasium ist *erlebnisorientiert*, und er ist *haltungsorientiert.*

Mit "haltungsorientiert" ist hier das Bestreben angesprochen, bei *allen* Schülern eine positive Einstellung zur mathematischen Beschreibungs- und Denkweise zu begründen und zu fördern, und das schließt die notwendige Sprachkultur mit ein.

Das hätte dann zum Beispiel zur Folge, daß prägnante mathematische Argumente und Formeln (wie $F = a \cdot b$) vom intelligenten Durchschnittsleser und -hörer jederzeit akzeptiert und im allgemeinen verstanden werden. In diesem Zusammenhang wäre (zu Ihrer Entlastung) die folgende Bemerkung zu machen: Einen großen Teil Mitschuld an der allgemeinen Mathematik-Misere im Publikum trägt die Monotype-Company. Ihre phantastischen Setzmaschinen, anfangs dieses Jahrhunderts konstruiert und hierzulande noch in den Achtzigerjahren in Gebrauch, waren nicht in der Lage, Exponenten zu produzieren, geschweige denn richtiggehende Formeln, und die Typographen in den "normalen" Druckereien, während Jahrzehnten die bestbezahlten Facharbeiter, weigerten sich strikt, auch nur das harmloseste mathematische Symbol, etwa $\pm$ oder $<$, in ihren Winkelhaken zu stellen. Es sollte doch möglich sein, dem Mann auf der Straße die Formel

$$T = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

zu präsentieren. Ein Richter im Kanton Luzern, der einen Autoraser zu bestrafen hatte, schrieb in der Urteilsbegründung, der Mann habe nicht bedacht, daß die kinetische Energie exponentiell mit der Geschwindigkeit zunimmt ...

Nun gilt es, die hehren Bildungsansprüche jenes "Rahmenlehrplans" zu übersetzen in die reale Schulpraxis, und das heißt vorab, das Material auszuwählen, an dem die erwünschten mathematischen Tugenden erlernt und gefestigt werden können. Hier eine etwas hintersinnige Liste von denkbaren Lehrzielen:

- x^x ableiten können,
- $(x^2 - x + 1)/(x + 1)$ ohne Fehler zweimal ableiten können,
- die Gleichung einer kubischen Parabel bestimmen können, die bei $x = 1$ ein lokales Maximum und im Punkt $W(2\,|\,1)$ *(sic!)* eine Wendetangente der Steigung -3 hat,
- den Abstand von zwei windschiefen Geraden konstruktiv bestimmen können,
- den Abstand von zwei windschiefen Geraden rechnerisch bestimmen können,
- einmal verstanden haben, warum man mit Zirkel und Lineal einen Winkel nicht dreiteilen oder kein reguläres Siebeneck konstruieren kann,
- eine verbal beschriebene Populationsdynamik in ein System von Differentialgleichungen übersetzen können,
- eine Liste der möglichen gegenseitigen Lagen von drei Ebenen im Raum herstellen können,

- einige Eigenschaften der logarithmischen Spirale kennengelernt haben,
- undsoweiter; die besten Beispiele kommen später noch.

Sie merken die Absicht und werden vielleicht verstimmt: Das ist ja alles schön und recht; aber wo bleibt die unumgängliche "Hochschulreife"? Dabei denken Sie natürlich in erster Linie an das mathematische Faktenwissen und einige Fertigkeiten, die in der Tat von einem ansehnlichen Teil der Maturanden beim Eintritt in die Hochschule vorausgesetzt werden und in dem besagten "Katalog" einmal mehr aufgezählt sind. Dies scheint mir allerdings eine sehr einseitige Betrachtungsweise der Idee "Hochschulreife" zu sein.

Die Schnittstelle Gymnasium/Hochschule ist eigentlich nur in unserem Fach eine kritische Angelegenheit (und dann vielleicht noch bei allgemeinen Fertigkeiten wie Sprachkenntnissen, computer literacy u.ä.). Zum Vergleich etwa das Fach Geschichte: Die historischen Kenntnisse eines Studienanfängers sind willkommener Bildungshintergrund, werden aber in Einzelheiten weder fürs Geschichts- noch fürs Medizinstudium vorausgesetzt. So stehen eigentlich nur die Mathematiklehrer im Clinch zwischen den "Anforderungen der Hochschule" und dem Herzenswunsch, mehr "allgemeinbildende" mathematische Erlebnisse und Einsichten zu vermitteln. Das ist ein Dilemma, dem Sie sich mit jeder Klasse neu, und heute, wo wieder Weichen für Jahrzehnte gestellt werden, besonders stellen müssen; einfach den "Katalog der Grundkenntnisse" abhaken, gilt nicht. Sie sind nicht allein: Auch in anderen Fächern gibt es zentrale Zielkonflikte, zum Beispiel (auf kürzeste Form gebracht) "klassische Literatur" vs. "moderne Literatur" oder "Geschichte vergangener Zeiten" vs. "Neueste Geschichte".

Im DMK-Vorschlag für einen neuen "Katalog der Grundkenntnisse" lesen wir bezüglich der Hochschulreife: "Es wird also erwartet, daß die Studierenden die genannten Begriffe kennen, mit ihnen gearbeitet haben und ohne langes Repetieren wieder sicher damit umgehen können." Hier steht nichts von "affenartiger Behendigkeit im Nullsetzen von Ableitungen" und auch nichts von "reflexartigem Kurvendiskutieren". "Den Ableitungsbegriff kennen und damit gearbeitet haben" kann zum Beispiel folgendes einschließen: Die Ableitung ist der Grenzwert von Differenzenquotienten. Betrachtet man die Differenzenquotienten der Flächenfunktion $x \mapsto A(x)$, so sieht man: Die Ableitung A' ist die Ausgangsfunktion f. Das gibt eine wunderbare Methode zum Ausrechnen von Flächeninhalten ... — ich werde darauf zurückkommen.

Im Maturitätsprogramm von 1973 wird unter 7.1 "Übung im Lösen von Aufgaben aus den Stoffgebieten" verlangt. Das tönt ganz vernünftig: Wir sind ja alle damit einverstanden, daß sich einer eine mathematische Formel oder Methode erst dann richtig angeeignet hat, wenn er sie in der passenden mathematischen Situation sinngemäß anwenden kann. Nun ist aber die "Übung im Lösen von Aufgaben" im Laufe der Jahrzehnte zum Leitmotiv geworden, dem alles andere untergeordnet wird:

- Mathematischer Stoff, der nicht umgehend und ausgiebig beübt werden kann, wird tunlichst ausgeblendet.
- Ein wesentliches Kriterium bei der Aufnahme oder Rejektion eines bestimmten Stoffpakets ist die Frage, ob man "davon Noten machen kann". Nun stellt hierzulande die Leistungsbewertung sozusagen hundertprozentig auf die beim schriftlichen Aufgabenlösen erbrachten Leistungen ab. Damit haben es mathematische Inhalte, die sich weniger fürs Aufgabenlösen eignen oder zu denen noch kein umfassender Aufgabenvorrat existiert, von vorneherein sehr viel schwerer, in den Gymnasialunterricht Eingang zu finden.
- Das Notenargument hat auch in den etablierten mathematischen Stoffgebieten eine verheerende Konsequenz: Alle gestellten Aufgaben müssen so leicht oder schematisch sein, daß sie auch von den schwächeren Schülern selbständig gelöst werden können.

(Nebenbemerkung: Ein vergleichbares Phänomen beobachten wir im Zusammenhang mit der Frage, ob Spielfilme am Fernsehen durch Werbung unterbrochen werden dürfen. Viele Leute sehen darin einen unzuläßigen "Eingriff ins Kunstwerk". Das wirklich Fatale ist aber etwas ganz anderes, nämlich, daß am Schluß die werbenden Firmen bestimmen, welche Filme gezeigt werden.)

Aufgaben dürfen ruhig einmal schwierig sein. Sie sollen den Schüler in eine unerwartete mathematische Situation stellen, die er aber mit den ihm bekannten Mitteln bewältigen kann. Er soll am Schluß das Gefühl haben: Hier war eine undurchsichtige Angelegenheit (von einer Art, wie sie vielleicht auch außerhalb der Schule vorkommen könnte), und ich habe (bzw. wir haben) sie mit mathematischen Überlegungen aufklären können. Eine Aufgabe von dieser Art möchte ich Ihnen hier vorstellen; sie ist im laufenden Sommersemester an der ETH aufgetaucht; woher sie ursprünglich stammt, weiß ich nicht. Für Sie als Profis gibt es einen Extra-Parcours: Behandeln Sie die Aufgabe zunächst ohne Bleistift und Papier im Kopf.

> Übung 4: Die Schattenfunktion
>
> ABC sei ein Dreieck in der Ebene (Abb. 1). Sein Umkreismittelpunkt U liegt in $(0, 0)$. Das Dreieck dreht sich gleichmäßig um U, so daß der zurückgelegte Winkel t gerade die verstrichene Zeit mißt. Während der Bewegung wird das Dreieck parallel zur y-Achse auf die x-Achse projiziert. Die Länge S seines Schattens auf der x-Achse hängt in bestimmter Weise von t ab.
>
> Welche besonderen Eigenschaften besitzt die Schattenfunktion $t \mapsto S(t)$, und wie genau hängen diese Eigenschaften mit dem Dreieck zusammen? Läßt sich ein Dreieck aus seiner Schattenfunktion $t \mapsto S(t)$ rekonstruieren?
>
> Experimentieren Sie, spekulieren Sie, begründen Sie!

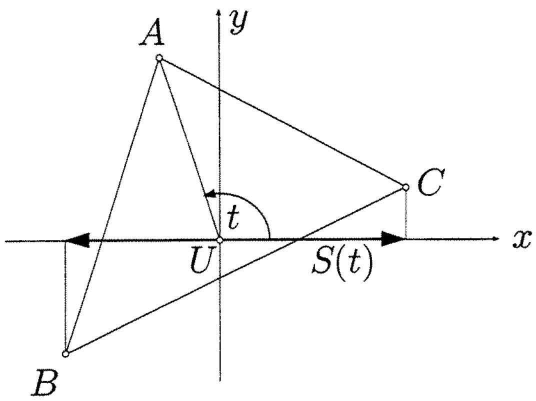

Abb. 1

Es wird in Zukunft weniger Mathematikstunden geben. Wie soll man da Platz finden für neuen, vielleicht sogar schwierigen Stoff?

1. Wir müssen uns davon lösen, nur Themen aufzugreifen, für die eine abschließende Theorie in der Klasse "erarbeitet" werden kann. Beispiele für solche Themen, die dann auch bis zum Überdruß ausgewalzt werden, sind die Parabel als Graph eines Polynoms zweiten Grades (Abb. 2 aus der Weltwoche [4] zeigt ein typisches Tafelbild ...) oder der berühmte Terrassenpunkt.

Mit den Terrassenpunkten hat es übrigens eine besondere Bewandtnis: Sie kommen in der Natur gar nicht frei vor, da es sich dabei um ein unstabiles Phänomen handelt. Vielleicht darf ich kurz auf diesen Punkt eingehen.

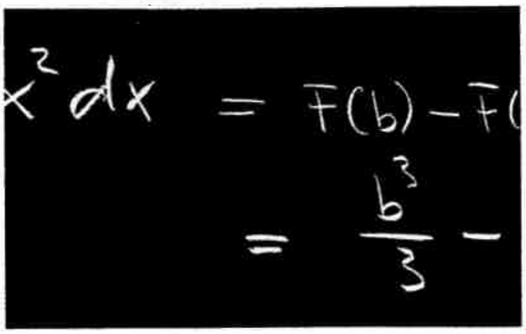

Abb. 2

Die Funktion $f_0(t) := t^3$ besitzt an der Stelle $t_0 := 0$ einen Terrassenpunkt. Die beliebig nahe bei f_0 liegenden Funktionen

$$f_\epsilon(t) := t^3 + \epsilon t\,, \qquad 0 < |\epsilon| \ll 1\,,$$

besitzen in der Nähe von t_0 keinen Terrassenpunkt, ja für $\epsilon > 0$ nichteinmal eine Nullstelle der Ableitung.
Im Gegensatz dazu ist z.B. eine isolierte einfache Nullstelle stabil: Es sei f_0 stetig differenzierbar und

$$f_0(t_0) = 0\,, \qquad f_0'(t_0) \neq 0\,.$$

Die "Störfunktion" $u(t)$ sei in einer Umgebung U von t_0 Einschränkungen der Form

$$|u(t)| < \epsilon\,, \qquad |u'(t)| < \epsilon \qquad \bigl(\,|u''(t)| < \epsilon\,\bigr)$$

unterworfen, im übrigen aber ganz beliebig. Dann besitzt auch die Funktion

$$f(t) := f_0(t) + u(t)$$

in einer geeigneten Umgebung $U' \subset U$ genau eine einfache Nullstelle. Wenden wir dieses Prinzip auf Nullstellen von ersten Ableitungen an, so sehen wir: Ist $f_0'(t_0) = 0$ und zum Beispiel $f_0''(t_0) > 0$, so besitzt auch jede leicht gestörte Funktion $f(t) := f_0(t) + u(t)$ in der Nähe von t_0 ein lokales Minimum. — Ende des Exkurses über Terrassenpunkte.

Newton hat seine "Fluxionsrechnung" erfunden als Medium zur Formulierung von Naturgesetzen. Dies ist eigentlich das Wichtigste am Begriff des Differentialquotienten: Daß man mit seiner Hilfe Differentialgleichungen aufschreiben kann, die analytisch codieren, wie sich zum Beispiel die Planetenkonstellation Sekunde für Sekunde gemäß den momentanen inneren Kräften fortentwickelt. Ein Triumph des abendländischen Geistes, aber für Gymnasiasten streng verboten, da eine abschließende Theorie mit einfachen Lösungsrezepten für derartige Gleichungen nicht gegeben werden kann.

Das Planetensystem ist ein wenig kompliziert; wir wählen daher ein einfaches biologisches Modell als Beispiel. Es bezeichne $y(t)$ die Größe einer "pseudobiologischen" Population zur Zeit t. Wählt man eine Million Individuen als Einheit, so kann man y als kontinuierliche Variable betrachten. Erste Überlegungen über das Anwachsen dieser Population führen auf

$$y(t + \Delta t) - y(t) \doteq \alpha\, y(t)\, \Delta t$$

mit einer gewissen Proportionalitätskonstanten $\alpha > 0$; die Population würde also nach dem Gesetz

$$\dot y = \alpha\, y$$

exponentiell zunehmen. Wir wollen nun in das Modell einbauen, daß sich die einzelnen Individuen gegenseitig behindern, und zwar folgendermaßen: Zweierstöße haben außerordentliche Todesfälle zur Folge. Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei unabhängig agierende Individuen zur gleichen Zeit denselben Ort aufsuchen, ist proportional zum Quadrat der Anzahl Individuen. Somit ist die Anzahl der Zweierstöße pro Zeiteinheit proportional zu $y^2(t)$. Diese feld-, wald- und wiesenbiologischen Betrachtungen führen schließlich auf eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{y} = \alpha y - \beta y^2 .$$

Die Werte der Systemparameter α und β kennen wir nicht; sie ließen sich vielleicht mit geeigneten Experimenten bestimmen. Der Einfachheit halber wollen wir $\alpha = 1$, $\beta = 1$ annehmen (das läßt sich durch geeignete Wahl der Einheiten auf der t- und der y-Achse immer erreichen). Gesucht sind also Funktionen $t \mapsto y(t)$, für die *identisch in* t gilt:

$$\dot{y}(t) = y(t) - y^2(t)$$

(man erkennt immer noch den Wachstums- und den Zusammenstoßterm!). Für derartige Probleme gibt es einige Methoden und Tricks, auch Kataloge mit Lösungen, die meisten sind aber nicht formelmäßig lösbar. Hier haben wir Glück: Eine vollständige Liste aller Lösungen ist gegeben durch:

$$y(t) = \frac{C}{C - (C-1)e^{-t}} , \qquad C \in \mathbb{R} .$$

Daß das Lösungen sind, läßt sich leicht überprüfen; vor allem aber kann man diese Funktionen für verschiedene Werte von $C = y(0)$ diskutieren und das Ergebnis mit dem, was man anschaulich erwartet hat, vergleichen.

2. Die für unsere Schulmathematik geltende Unterrichtsdoktrin ist, daß das Fortschreiten alleweil in sokratischer Manier zu geschehen habe. Der Lehrer soll die zu neuen Begriffen und Einsichten führenden Bewegungen nicht einfach Zug um Zug vormachen; vielmehr hat er die verdammte Pflicht, durch gezielte Fragen alle Zutaten zu dem schließlichen Ganzen bröckchenweise aus einer trägen Schülerschaft herauszuholen, und der Inspektor prüft mit der Stoppuhr, wieviel Sekunden nach Unterrichtsbeginn die erste Lehrerfrage gestellt wird.

Andere Formen sind denkbar, bringen die Klasse (jedenfalls kurzfristig) schneller voran und machen, mit Verlaub, für einen weniger langweiligen Unterricht. Man kann diesen Punkt auch noch von einer höheren Warte aus betrachten. Lisa Hefendehl (Augsburg) schreibt dazu in der jüngsten Nummer der DMV-Mitteilungen [5]:

> "... ist die für das Fach Mathematik typische Tradition des kurztaktigen, fragendentwickelnden Mathematikunterrichts ... problematisch geworden. Der Versuch, entlang einer vorgeordneten Kette von Fragen und Impulsen logisch-systematische Gedankengänge zu erzeugen, verkennt, daß das Lernen von Mathematik nicht so organisierbar ist wie die Darstellung fertiger mathematischer Ergebnisse. Er führt zu einem kleinschrittigen, von äußeren Routinen geprägten Unterricht, der nur oberflächliches Verständnis erzeugt, weil die 'Interaktionslogik' die 'Sachlogik' ersetzt."

Und weiter:

> "[Es] resultiert ein methodischer Formalismus, der den Lernprozeß der Schülerinnen und Schüler durch die 'Kleinarbeitung des Stoffes' und eine enge Unterrichtsführung in den Griff zu bekommen versucht. Wie sich gezeigt hat, wird hierdurch Verständnis oft eher verstellt als gefördert, weil kein umgreifendes erkenntnisleitendes Interesse aufgebaut und keine tieferliegende Auseinandersetzung mit der Bedeutung der Inhalte geweckt wird. 'Durchgenommener' Stoff wird nicht automatisch auch angenommen."

Und dasselbe ein drittes Mal:

> "Diese Synthese [von methodischem und mathematischem Formalismus] führt zu einem Mathematikunterricht, der die Schüler/innen kleinschrittig an einer vorgegebenen Darstellung des Stoffes entlangführt, einer Darstellung, die in der Langzeitperspektive der Lehrenden einen wohlbestimmten Ort hat, währenden die Lernenden oft nicht sehen, wohin der Weg gehen soll."

Gestatten Sie mir, zwei Vorschläge für andersartige Unterrichtsformen zu skizzieren:

2.1. Der Lehrer führt einen mehrteiligen Gedankengang sorgfältig vor versammelter Klasse durch und vergewissert sich durch gelegentliche Zwischenfragen, daß noch die allermeisten dabei sind. Das geht vielleicht 10 Minuten. Wichtig: Am Schluß steht ein Ergebnis da, das von allen als hocherfreulich erlebt wird, also nicht einfach eine weitere Form der Geradengleichung. Dem folgenden Beispiel liegt die Übungsannahme zugrunde, daß die Integralrechnung nicht mehr zum Maturitätsprogramm gehört; es ist also gewissermaßen subversiv ...

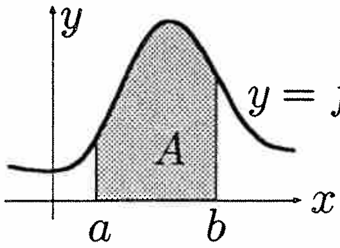

Abb. 3

Ein ziemlich allgemeines Problem: Für eine gegebene Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ und gegebene Grenzen a und b soll der Flächeninhalt A in der Abb. 3 bestimmt werden. Die Zahl A hängt ab von den beiden Grenzen a und b und natürlich von dem genauen Verlauf des Graphen $\mathcal{G}(f)$ für $a \leq x \leq b$. Im Augenblick haben wir keine Ahnung, wie das zu bewerkstelligen wäre. Wir machen nun die Sache scheinbar komplizierter, indem wir die Funktion $A(x)$ ins Spiel bringen (Abb. 4) und über diese Funktion nachdenken.

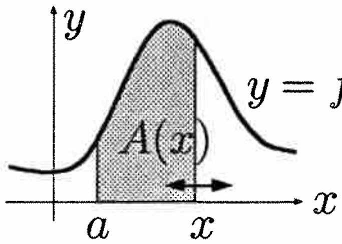

Abb. 4

Jedenfalls ist $A(a) = 0$, und die gesuchte Zahl A ist nichts anderes als $A(b)$. Betrachte nun zwei nahe beieinander gelegene Stellen x und $x + h$. Der Abb. 5 entnimmt man, daß die Differenz $A(x+h) - A(x)$ gerade gleich dem schraffierten Flächeninhalt ΔA ist und weiter, daß es in dem Intervall $[x, x+h]$ einen Punkt ξ gibt mit

$$\Delta A = f(\xi) \cdot h\ .$$

Damit haben wir $A(x+h) - A(x) = \Delta A = f(\xi) \cdot h$ und folglich

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\xi)\ ,$$

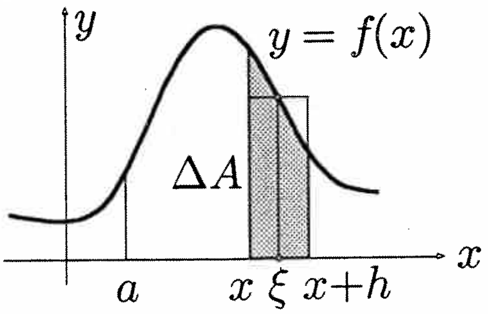

Abb. 5

wobei wir allerdings nicht wissen, wo genau der Punkt ξ liegt, das macht aber nichts. Hier steht nun linker Hand ein Differenzenquotient, und es liegt nahe, den Grenzübergang $h \to 0$ ins Auge zu fassen, der uns dann die Ableitung $A'(x)$ liefert. Der Punkt ξ hängt zwar von h ab, bleibt aber während des ganzen Grenzübergangs $h \to 0$ in dem Intervall $[x, x + h]$ eingeschlossen. Somit muß ξ mit $h \to 0$ gegen x streben und folglich (f stetig vorausgesetzt) $f(\xi)$ gegen $f(x)$. Alles in allem ergibt sich

$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) ,$$

und zwar gilt das für alle x.

Damit haben wir etwas ganz Entscheidendes herausgefunden: Die Ableitung der (gesuchten) Flächenfunktion $A(x)$ ist die (gegebene) Ausgangsfunktion $f(x)$. Man könnte sagen (und einige tun das): "$A(x)$ ist eine *Aufleitung* von $f(x)$"; üblicher ist es, $A(x)$ eine *Stammfunktion* von $f(x)$ zu nennen.

Ist $f(x)$ als Ausdruck gegeben, zum Beispiel $f(x) := 3x^2 - 8x$, so läßt sich vielleicht eine Stammfunktion $F(x)$ gezielt erraten. In dem angegebenen Beispiel sieht man sofort: $F(x) := x^3 - 4x^2$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$. Wie kommen wir nun von einer irgendwie gefundenen Stammfunktion $F(x)$ zu der Flächenfunktion $A(x)$, speziell zu dem Wert $A = A(b)$?

Da sowohl $A(x)$ wie $F(x)$ Stammfunktionen derselben Ausgangsfunktion $f(x)$ sind, gilt

$$\bigl(A(x) - F(x)\bigr)' = A'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0 ,$$

und hieraus folgt nach einem bekannten Prinzip, daß die Funktion $A(x) - F(x)$ *konstant* ist:

$$A(x) \equiv F(x) + c$$

für ein gewisses $c \in \mathbb{R}$. Setzen wir hier zur Probe $x := a$, so folgt $0 = F(a) + c$, also $c = -F(a)$. Der gesuchte Flächeninhalt A hat daher den Wert

$$A = A(b) = F(b) - F(a) .$$

Sapienti sat.

Der Lehrer kann am Schluß eine Textversion der betreffenden "Unterrichtseinheit" abgeben, wobei es die Meinung hat, daß in der nächsten Stunde Fragen darüber gestellt werden, zum Beispiel:

- Woher weiß man, daß es einen Punkt ξ gibt mit $\Delta A = f(\xi) \cdot h$?
- In welcher Beziehung stehen zwei Stammfunktionen derselben Funktion f zueinander?

2.2. Ein mathematischer Text (zum Beispiel der vorangehende) wird ausgeteilt und Satz für Satz von Schülern "vorübersetzt" wie ein Abschnitt aus Cäsars "De bello Gallico". Der jeweilige

Vorleser muß also schwierigere Passagen erklären bzw. mit seinen eigenen Worten umgesagt wiedergeben. Das kann prima vista geschehen oder nach Studium des Textes als Hausaufgabe. Die in derartigen Übungen gezeigten Leistungen werden wie entsprechende Leistungen in Sprachfächern mit Selbstverständlichkeit benotet, und die Schüler wissen das.

Im Fach Geschichte gibt es ein auch an schweizerischen Gymnasien verwendetes mehrbändiges Werk mit "Quellenmaterial",

> Fragen an die Geschichte, Bd. 1–4
> Geschichtliches Arbeitsbuch für die Sekundarstufe I
> Hrsg. von H. D. Schmid
> Cornelsen Verlag, Frankfurt 1981–85

Hier hat es zeitgenössische Illustrationen, Urkundstexte, Zeitungsausschnitte, Schlachtenbilder, Koransuren — kurz: eine überwältigende Fülle von Material, das den trockenen Geschichtsunterricht lebendig werden läßt. Dieses Material kann in freier Auswahl der Einzelstücke im Stammunterricht beigezogen oder auch weggelassen werden. Der interessierte Schüler kann sich übers Wochenende auch noch die Teile zu Gemüte führen, die vom Lehrer übergangen worden waren. Ein derartiges Werk sollten wir auch in der Mathematik haben: Eine (deutschsprachige) Anthologie von "klassischen Stücken" — oder gibt es das schon? Mir ist jedenfalls bis jetzt nichts Derartiges begegnet.

—

Ich schließe mit einigen Anregungen zur Geometrie. Gemeint ist die "richtige" Geometrie; sie handelt von den bei den ebenen und den räumlichen Figuren waltenden Formeln, Sätzen, unvermuteten Zusammenhängen und, ja: Geheimnissen. Ich sage das, weil viele Maturanden mit der Vorstellung ins Leben hinausziehen, "Geometrie" sei die analytische Geometrie der Ebene, soweit sie mit Geraden- und Kreisgleichungen beschrieben werden kann.

Die DG im alten Stil hat wohl in kurzem ausgedient. Ein Kapitel daraus, und nicht das einfachste, würde ich aber gerne behalten: die Axonometrie. Im Zentrum steht hier die Aufgabe, von räumlichen Situationen geometrisch korrekte und gleichzeitig anschauliche Figuren herzustellen. Rechnerisch geht es um lineare Abbildungen

$$A\colon\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad (x,y,z) \mapsto (\xi,\eta)$$

vom Rang 2. Wie sehen die zugehörigen Formeln aus? Welche axonometrischen Dreibeine gehören zu Orthogonalprojektionen? Schreibe ein Computerprogramm, das eine Parameterdarstellung einer Kurve (einer Fläche) als Input akzeptiert und ein axonometrisches Bild dieser Kurve (Fläche) zeichnet, zunächst ohne Berücksichtigung der Sichtbarkeit. Das Möbiusband in Abb. 6 wurde mit einem ganz einfachen Pascal-Programm gezeichnet.

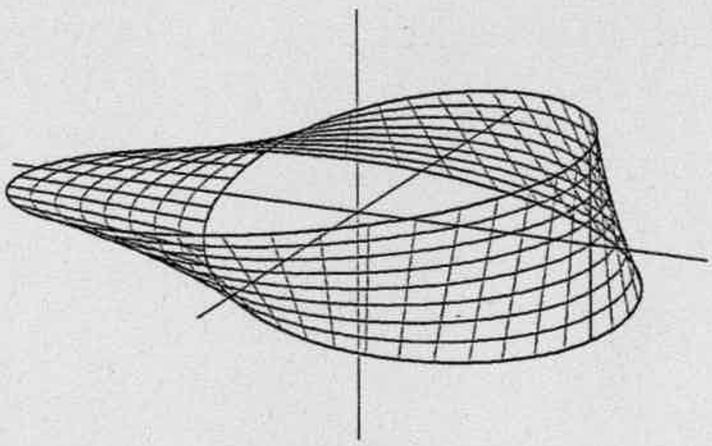

Abb. 6

Ein facettenreiches geometrisches Thema ist die altbekannte Ellipse: Sie erscheint uns als geometrischer Ort, als Kegelschnitt (Dandelinsche Kugeln!), dann als affines Bild eines Kreises in der Ebene, speziell bezüglich Streckung in x- und y-Richtung, als Bild eines Kreises im Raum unter verschiedenen Projektionen, aber auch als Bahn eines Oszillators mit zwei Freiheitsgraden. Geheimnisvoll sind die Sätze von Pascal und Brianchon. Man braucht sie nicht zu beweisen, soll aber die Schüler (an Kreisen, das genügt) Figuren mit immer wieder anderer Anordnung der 6 Punkte zeichnen lassen. Wie durch ein Wunder klappt es jedesmal.

Die logarithmische Spirale und einige ihrer Eigenschaften; Bilder von logarithmischen Spiralen in der Natur.

Parameterdarstellungen von ziemlich beliebigen ebenen Kurven und deren Präsentation auf dem Bildschirm. Mit der folgenden Beobachtung sind wir einer großen Sache auf der Spur: Alle konvexen ebenen geschlossenen Kurven haben "Totalkrümmung" 2π. Experimentiere nun auch mit nichtkonvexen Kurven und komplizierten Achterschleifen; vielleicht ergibt sich eine Gesetzmäßigkeit.

Dann krumme Flächen. Was ist eine Tangentialebene? Riemannsche Krümmung; sie kann positiv sein, null oder auch negativ. Es geht hier nicht um die formelmäßige Berechnung, sondern um geometrische Grunderfahrungen. Gaußabbildung zur Messung der "Totalkrümmung". Alle "Eiflächen" im dreidimensionalen Raum haben Totalkrümmung 4π. Wie groß ist die Totalkrümmung eines eingeblötschten Fußballs (Abb. 7), eines Rotationstorus?

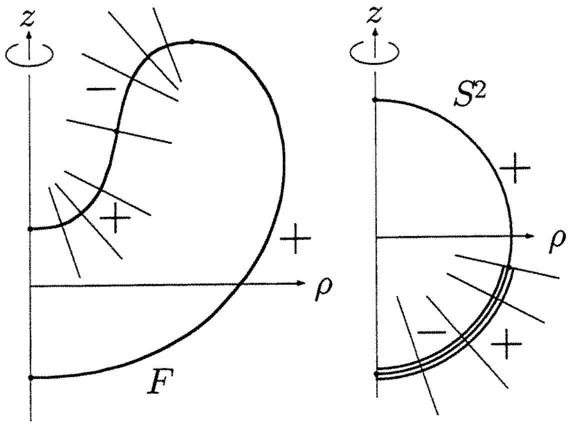

Abb. 7

Bei der Parallelprojektion einer Fläche in die Ebene gibt es Umrißlinien. Wie sind sie charakterisiert? Flächenkurven, die die Umrißlinien treffen, und ihr Bild. Das kann man auch zusammen mit dem Zeichenlehrer besprechen. Ich will nie mehr solche Kegel sehen:

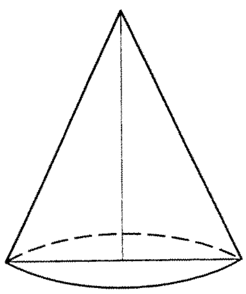

Abb. 8

Und noch ein letztes Thema: Polyeder. Stichworte: Eulersche Formel, abschließende Aufzählung der regulären Polyeder, ihre axonometrische Darstellung, Präsentation auf dem Bildschirm. Schon schwieriger: der Starrheitssatz von Cauchy. Das läßt sich nicht im Unterrichtsgespräch erarbeiten; vielmehr wäre eine Textvorlage zugrundezulegen, die in der Stunde "vorübersetzt" wird. Als Anwendung der Eulerschen Formel in der Ebene der Beweis des Fünffarbensatzes oder ein tatsächlicher *Beweis*, daß sich drei Häuser nicht mit drei Brunnen verbinden lassen, ohne daß sich die Wege überkreuzen.

Ganz zum Schluß noch das folgende: Die Weltwoche brachte jüngst über mehrere Seiten einen Tour d'Horizon über den Zustand der schweizerischen Maturitätsschulen und die Befindlichkeit der Unterrichtenden [4]. Zum "Testfach" Geschichte lesen wir da unter anderem: "Die Folgen von 1968 und das Aufkommen der Sozialgeschichte haben den Geschichtsunterricht auch didaktisch und methodisch revolutioniert", und zum Latein: "Wenn Maturanden heute weniger Latein 'können', dann wissen sie dafür mehr über die lateinische Sprache und ihre Kultur. An der Maturitätsprüfung wird vor allem Textverständnis verlangt, werden Interpretationsfragen und Sachwissen diskutiert. In all diesen Bereichen leisten Maturanden in Latein heutzutage deutlich mehr als vor 30 Jahren." Demgegenüber gab die Sprecherin der Mathematiklehrerschaft das folgende zum besten: "Mathe ist Mathe. Eigentlich hat sich nicht viel verändert." Immerhin: "Die Matur ist anspruchsvoller geworden. Die Anzahl der Aufgaben ist gestiegen." Das trifft es wohl ziemlich genau.

Liebe Kolleginnen und Kollegen: Haben Sie Mut zu einem phantasievollen und erlebnisorientierten Mathematikunterricht! Damit tragen Sie ein Stück dazu bei, daß wir in dem entsprechenden Weltwoche-Bericht 20 Jahre später etwas anderes lesen können.

LITERATURANGABEN

[1] Katalog Grundkenntnisse Mathematik; Vorschlag DMK 1997. Bulletin des Vereins Schweizerischer Mathematik- und PhysiklehrerInnen, Februar 1997

[2] Reglement für die eidgenössischen Maturitätsprüfungen vom 17. Dezember 1973; Anhang: Maturitätsprogramme

[3] Rahmenlehrplan für Maturitätsschulen. Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (EDK). Bern 1994

[4] Bringen die Gymnasien nur noch Nieten hervor? Die Weltwoche, Nr. 19, 7. Mai 1997, 45–49

[5] Lisa Hefendehl-Hebeker: Gedanken zur Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Heft 2/97, 5–9

Prof. U. Kirchgraber
Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89–01	H. Walser	Fraktale
89–02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89–03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89–04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90–01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90–02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90–03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91–02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91–03	M. Federer	Preistheorie
91–04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92–01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93–04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93–05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93–06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93–07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94–01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94–02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94–03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94–04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95–01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95–02	U.Kirchgraber	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten.
	U. Kirchgraber, N. Sigrist	Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95–03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95–04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
95–05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95–06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme
96–01	W. Burgherr	Schwimmende Prismen mit Schlagseite
96–02	M. Struwe	Sattelpunkte oder Variationsprinzipien in Geometrie und Mechanik
96–03	M. Huber	Warum denn ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar?
97–01	B. Eicke, E. Holzherr	Analysis – mit dem Computer-Algebra-System des TI-92 (Preis: Fr. 8.- incl. MWSt)
97–02	C. Blatter	Notizen zu einer Mathematik fürs Leben