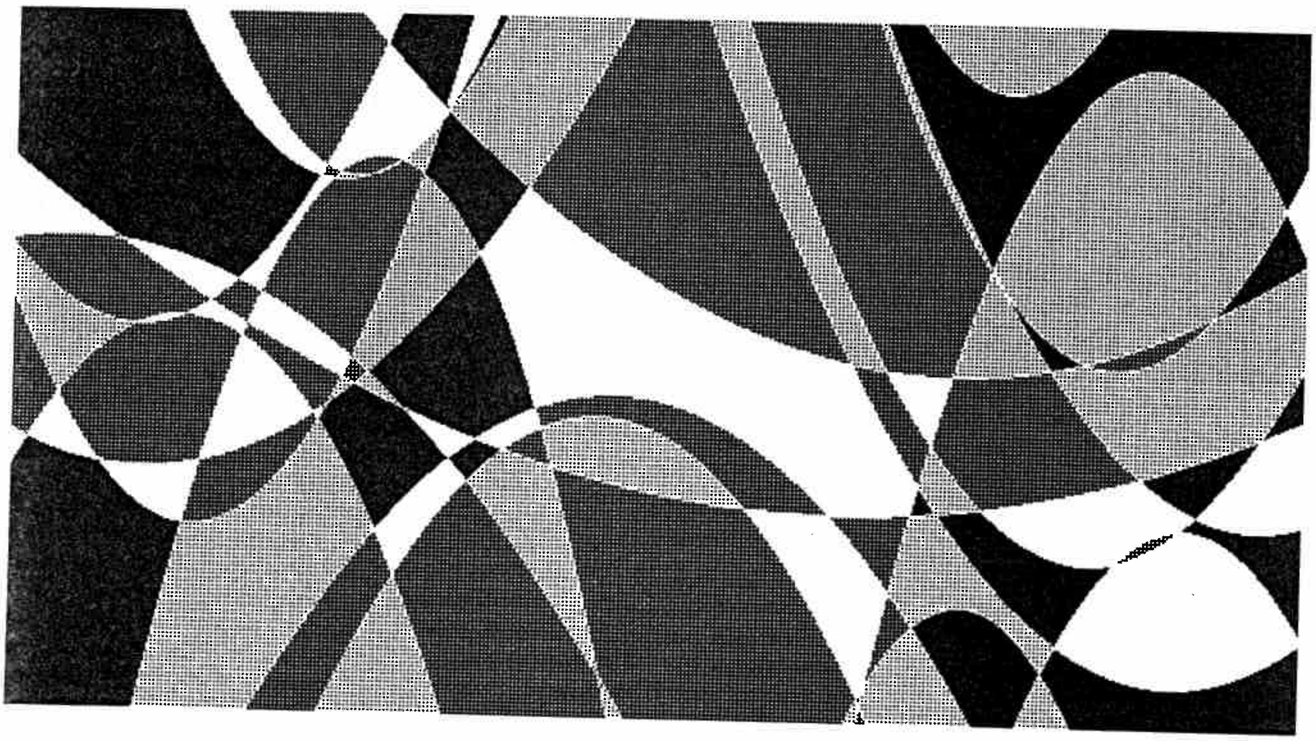
PARABELN

Ein Beispiel für projektartigen Unterricht in Mathematik

Jean-Paul David [1]
Peter Hänsli [2]
Marcel Leupp [3]



[1] AKAD, Jungholzstr. 43, CH-8050 Zürich, jpdavid@access.ch
[2] Alte Kantonsschule, Bahnhofstr. 91, CH-5001 Aarau, p.haensli@bluewin.ch
[3] Kantonsschule am Burggraben, Burggraben 21, CH-9004 St. Gallen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mathematikunterricht im Umbruch

Der Mathematikunterricht an Maturitätsschulen in der Schweiz und anderswo ist derzeit aus verschiedenen Gründen im Umbruch begriffen. Im Wesentlichen sind zwei Stossrichtungen zu beobachten:

- Der bis vor kurzem (fast) allein vorherrschende fragend-entwickelnde Unterricht wird durch *andere Lehrformen* erweitert. Ziel ist es dabei, die *Eigentätigkeit* der Schülerinnen und Schüler vermehrt zu fördern.

- Der Mathematikunterricht wird *anwendungsorientierter / realitätsbezogener* gestaltet. Ziel ist es dabei, den Schülerinnen und Schülern den *Zugang* zur Mathematik zu erleichtern und ihre *Akzeptanz* für die Mathematik zu erhöhen.

In der Schweiz und in Deutschland ist aufgrund der Ergebnisse der Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) eine breite Öffentlichkeit auf die Defizite des Mathematikunterrichts aufmerksam geworden ([1], [2]). Verschiedene Schul- und Hochschulgremien haben in der Folge Verbesserungsvorschläge ausgearbeitet ([3]). Darin tauchen die beiden oben angeführten Stossrichtungen wiederholt auf.

Materialien für projektartigen Unterricht in Mathematik

Vom 12.-18. Oktober 1997 und vom 12.-14. August 1998 trafen sich im Bergschulheim Casoja in Valbella (Schweiz) die drei Autoren dieses Berichts zusammen mit neun weiteren Mathematiklehrerinnen und -lehrern aus der Schweiz und Deutschland zu zwei Workshops, an denen sie unter der Leitung von Prof. Dr. U. Kirchgraber, ETH Zürich, *Materialien für projektartigen Unterricht in Mathematik* entwickelten. Diese liegen nun in der Reihe "Berichte über Mathematik und Unterricht" vor.

Diese Arbeit wurde gefördert durch die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) und das Programm "ETH für die Schule".

Das Projekt Parabeln

Gedanken zur Wahl des Themas

Nicht jedes Thema eignet sich für projektartigen Unterricht. Bei der Wahl des Themas Parabeln standen folgende Ansprüche im Vordergrund. Das Thema sollte

- unterrichtsnah, attraktiv und experimentell zugänglich sein
- möglichst viele Aufträge mit mathematischen Tätigkeiten erlauben

In diesem Bericht haben wir vier verschiedene Schüleraufträge zum Thema Parabeln zusammengestellt. Alle Fragestellungen sind experimentell zugänglich und erfordern von den Beteiligten mathematische Tätigkeiten. Viele weitere Aufträge zu diesem Thema sind denkbar und werden zum Teil in "Parabel überall" angeregt.

Gedanken zur Positionierung des Themas im Unterricht

- Die Parabel ist fester Bestandteil des Mathematikunterrichts am Gymnasium. Während den Schülerinnen und Schülern aus dem Alltag vor allem die geometrischen Eigenschaften der Parabel vertraut sind, tritt die Parabel in der Algebra scheinbar unabhängig als Graph der quadratischen Funktion in Erscheinung. Hier drängt sich ein Brückenschlag zwischen Algebra und Geometrie auf, um die Schülerinnen und Schüler bei ihrem Vorwissen abzuholen und ihr Vertrauen in die Mathematik zu stärken.
- Die Eigenschaften der Parabel sind einfach, aber nicht zu einfach. Deshalb sind Parabeln geeignet, die Schülerinnen und Schüler den heuristischen Aspekt der Mathematik erfahren zu lassen. Sie können ausgehend von echten Problemstellungen Zusammenhänge erahnen, mathematisieren und selbstständig einfache Schlüsse ziehen.
- Die Parabel ist eine Form aus unserem Alltag und viele ihrer Eigenschaften sind experimentell leicht zugänglich. Die Behandlung des Themas kann somit die Neugierde und das Interesse der Schülerinnen und Schüler wecken, die Umwelt und ihre Formen experimentell und mathematisch zu erfassen.
- Die Parabel erscheint wechselweise in ganz unterschiedlicher Bedeutung an den verschiedensten Stellen des Mathematik- und Physikcurriculums. Oft kann im Unterricht nur auf den jeweiligen fachspezifischen Aspekt näher eingegangen werden. Das Thema bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, die Verbindung zwischen Mathematik und Physik vertieft zu erfahren.

Gedanken zu den Schüleraufträgen und Lehrerinformationen

In unserem Projekt stellen wir vier Schüleraufträge mit zugehörigen möglichen Schülertätigkeiten und Ergebnissen vor. Die Aufträge sind entsprechend dem Charakter des projektartigen Unterrichtes vage formuliert. Die möglichen Schülertätigkeiten und Ergebnisse sind in den "Informationen für die Lehrerin, den Lehrer" zusammengestellt. Sie sind bestenfalls antizipierbar oder naheliegend, aber keinesfalls zwingend, und sollen der Lehrperson die Vorbereitung erleichtern und die dem Auftrag zugrunde liegende Vielfalt aufzeigen. Weiter werden der Lehrperson zusätzliche Informationsinputs zur Verfügung gestellt, die sie gegebenenfalls an geeigneter Stelle einsetzen kann.

Projektübersicht

Zielpublikum:	Schülerinnen und Schüler des 9. oder 10. Schuljahres
Zeitlicher Rahmen:	Mit einem zeitlichen Aufwand von mindestens sechs Lektionen lassen sich wesentliche Elemente der verschiedenen Schüleraufträge vernünftig bearbeiten.
Allgemeine Vorkenntnisse:	Elementare Planimetrie
Spezifische Vorkenntnisse:	Planimetrie der Parabel im Umfang der im Anhang skizzierten Grundlagen. Diese Kenntnisse können allenfalls vor Beginn des Projektes in ein bis zwei Lektionen vermittelt werden. Einzelne Schüleraufträge lassen sich, obwohl nicht notwendig, durchaus auch mittels analytischer Methoden (Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen) sinnvoll bearbeiten.
Gliederung: *Im Plenum:*	Projektbeschreibung, Organisation
In Gruppen:	Schüleraufträge: Parabel als Schatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung Fläche eines Parabelsegmentes Parabel als Bahnkurve schiefer Würfe Parabel überall

Organisatorisches:

Die verschiedenen Schüleraufträge eignen sich für Gruppen von zwei bis drei Schülern. Es ist ohne weiteres möglich, dass mehrere Gruppen unabhängig voneinander denselben Auftrag bearbeiten.

Für den Auftrag "Parabel als Schatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung" ist ein Raum vonnöten, der sich verdunkeln lässt. Die übrigen Aufträge können je nach Anzahl der Gruppen ohne weiteres im selben Unterrichtszimmer bearbeitet werden. Die Bearbeitung des Auftrags "Parabel als Bahnkurve schiefer Würfe" setzt allerdings ein Zimmer mit Wandtafel voraus.

Die gegenseitige Präsentation und eine Evaluation der verschiedenen Ausarbeitungen der Schüleraufträge sind ein wesentliches Element im Rahmen eines Projektunterrichtes. Vorschläge und Ideen dazu finden sich in den entsprechenden Informationen für die Lehrerin, den Lehrer.

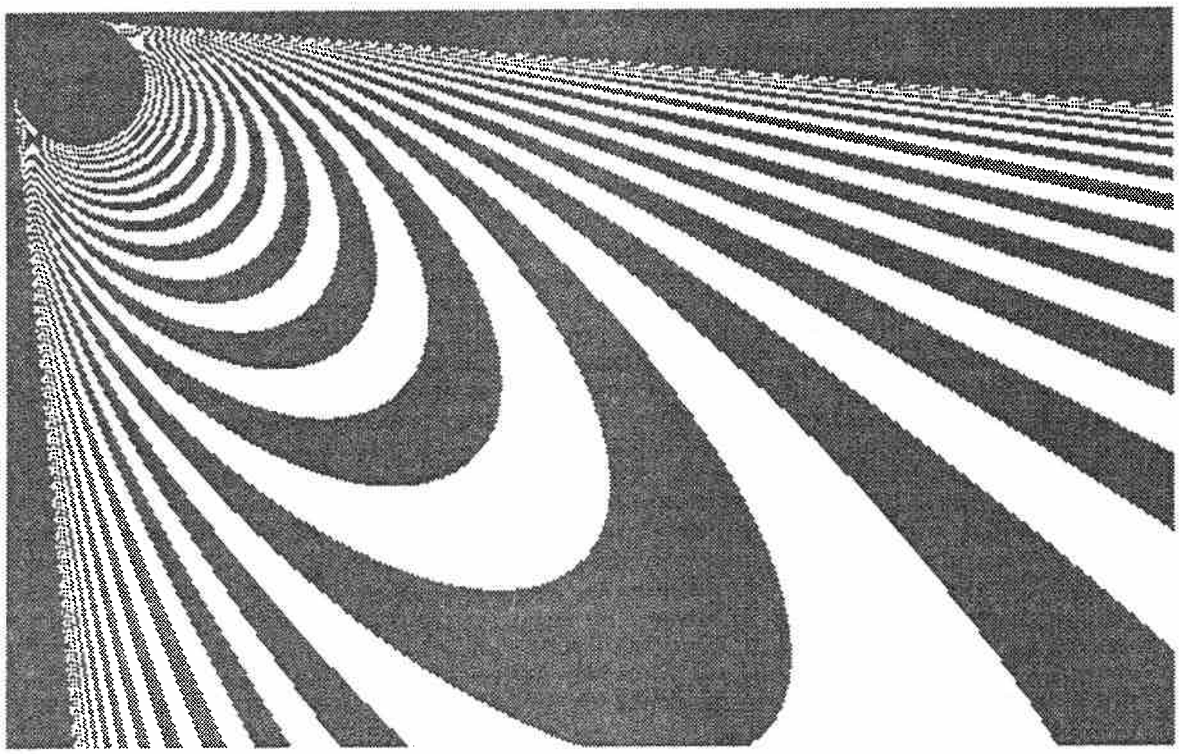
Bitte empfinden Sie das Wort "Schüler" im folgenden als einschliessend. Wir möchten unhandliche Formulierungen wie „Schülerin oder Schüler" gemessen verwenden und auf sprachliche Spagate wie "eine(m)/r Schüler/in" verzichten. Es ist absolut selbstverständlich, dass stets beide Geschlechter gemeint sind.

Die Parabel als Schatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung

Euer Auftrag:

Fixiere eine Kugel auf dem Tisch und beleuchte sie mit einer punktförmigen Lichtquelle. Dadurch wirft sie einen Schatten auf den Tisch, den sogenannten Schlagschatten. Dieser ändert seine Gestalt, je nach Wahl des Standortes der Lichtquelle.

Untersuche: Für welche Standorte ist die Schattengrenze eine Parabel?



Die Parabel als Schatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung

Informationen für die Lehrerin, den Lehrer

Schülerauftrag:

> Fixiere eine Kugel auf dem Tisch und beleuchte sie mit einer punktförmigen Lichtquelle. Dadurch wirft sie einen Schatten auf den Tisch, den sogenannten Schlagschatten. Dieser ändert seine Gestalt, je nach Wahl des Standortes der Lichtquelle.
>
> Untersuche: Für welche Standorte ist die Schattengrenze eine Parabel?

Mögliche Schülertätigkeiten: Ihre Schülerinnen und Schüler werden vermutlich von selbst auf die Tätigkeiten (1) bis (4) kommen. Für die Tätigkeiten (5) bis (8) bedarf es allenfalls zusätzlicher Anregungen oder Hinweise durch die Lehrkraft. Die Tätigkeit (9) hingegen wird mehr oder weniger stark durch den Lehrer geleitet.

(1) Ihre Schülerinnen und Schüler beginnen zunächst zu experimentieren. Sie stellen fest, dass es eine geschlossene Kurve (Ellipse) oder eine offene Kurve (Hyperbel oder Parabel) als Schattengrenze geben kann. Ziemlich sicher werden sie sogar feststellen, dass dafür die Höhe der Lichtquelle allein entscheidend ist.

(2) Die Schüler zeichnen die Schattengrenze auf Papier nach und untersuchen sie. Dabei stellt sich ihnen die Frage, wie sie überprüfen können, ob es sich bei der gezeichneten Kurve näherungsweise um eine Parabel handelt (siehe dazu auch Materialien (2) zu "Parabel überall"). Die Symmetrieeigenschaft der Kurve ist offensichtlich. Falls es sich tatsächlich um eine Parabel handelt, lässt sich die Symmetrieachse mit genügender Genauigkeit einzeichnen, indem man zwei Tangenten der Kurve verwendet (siehe dazu Anhang "Spezifische Vorkenntnisse: Grundlagen").

Die Untersuchung der gezeichneten Kurve kann mittels analytischer oder planimetrischer Methoden geschehen.

Analytische Methode:

(3) Die Schüler verwenden ein Koordinatensystem und überprüfen, ob es sich um den Graphen einer quadratischen Funktion handelt. Falls sich dies bestätigt, können Sie Ihre Schüler ermuntern, den Brennpunkt und die Leitgerade zu bestimmen (siehe dazu auch Materialien (3) zu "Parabel überall"). Darüber hinaus ist es auch entscheidend, die Bedeutung des Brennpunktes und der Leitgeraden in Bezug auf die Kugel zu kennen (Brennpunkt = Auflagepunkt der Kugel auf der Tischebene, Leitgerade = Schnittgerade der Tischebene mit der Ebene, in welcher die Eigenschattengrenze der Kugel liegt).

Planimetrische Methode:

(4) Die Schüler versuchen, die Leitlinieneigenschaft zu überprüfen, indem sie verschiedene Annahmen für die Lage des Brennpunktes und damit auch für die der Leitgeraden treffen.

(5) Unter der Annahme, dass es sich im Fall der offenen Kurve um eine Parabel handelt, lässt sich der Brennpunkt bestimmen, indem ein parallel zur Achse einfallender Strahl an der Parabel (bzw. an der Parabeltangente) gespiegelt und der gespiegelte Strahl mit der Achse geschnitten wird. Damit lässt sich auch die Leitgerade zeichnen (senkrecht zur Achse im gleichen Abstand vom Scheitel wie der Brennpunkt). Ist die Lichtquelle deutlich unterhalb des höchsten Punktes der Kugel (Fall der Hyperbel), so zeigt sich leicht, dass Punkte, die genügend weit vom Scheitel entfernt sind, verschiedene Abstände vom Brennpunkt und von der Leitgeraden haben. Damit lässt sich mit genügender Genauigkeit widerlegen, dass es sich in diesem Fall um eine Parabel handelt.

(6) Falls die Schüler bereits vermuten, dass der Auflagepunkt der Kugel der Brennpunkt ist, werden sie im Fall der Hyperbel leicht zeigen können, dass parallel zur Achse einfallende Strahlen nicht zum Brennpunkt hin reflektiert werden. Dies widerspricht somit der Annahme, es handle sich um eine Parabel.

(7) Falls sich die Lichtquelle auf der Höhe des höchsten Punktes der Kugel befindet, werden die Schüler die Vermutung, die Schlagschattengrenze sei eine Parabel mit dem Brennpunkt im Auflagepunkt der Kugel, erhärten. Damit ist bereits ein wesentliches Element dieses Schülerauftrags erarbeitet. Sie können die Schüler zusätzlich auffordern, diese Vermutung zu beweisen, allenfalls unter Zuhilfenahme von Literatur.

(8) Eventuell auf Ihre Anregung hin stellen die Schüler die Lichtstrahlen mittels Fäden dar. Die Berührungspunkte der Lichtstrahlen mit der Kugel bilden einen Kreis (Eigenschattengrenze der Kugel). Die Kreisebene schneidet die Tischebene in der Leitgeraden. Um den vollständigen Nachweis der Leitlinieneigenschaft zu erhalten, bedarf es allenfalls weiterer Anregungen von Ihrer Seite. So müssen die Schüler beispielsweise die zur Kreisebene parallele Ebene, die den betreffenden Parabelpunkt enthält, sichtbar machen. Diese erhält man, wenn die Kugel auf sie einen kreisförmigen Schatten wirft.

Die wenigsten Schülerinnen und Schüler werden den vollständigen Beweis nach Dandelin selber finden. Es ist aber sicher möglich, sie auf dem Weg zum Beweis zu begleiten und ihnen hie und da einen kleinen Denkanstoss zu geben.

Präsentation und Evaluation:

Im Idealfall führt eine Gruppe, die diesen Auftrag bearbeitet hat, den anderen Schülern den vollständigen Beweis nach Dandelin ausführlich und für alle verständlich vor. Vielleicht hat die Gruppe sogar ein Modell gebaut, in welchem die Lichtstrahlen als Mantellinien des Streiflichtkegels mittels Fäden dargestellt sind. Damit lässt sich anschaulich zeigen, dass jeder Punkt der Parabel vom Auflagepunkt der Kugel gleich weit entfernt ist wie von der Leitgeraden.
Andernfalls kann die Gruppe aber mindestens aufzeigen, wie sie den Auftrag bearbeitet hat und zu welchen Teilresultaten bzw. Vermutungen sie gekommen ist.

Erforderliche Kenntnisse:

Den Schülerinnen und Schülern ist die Definition der Parabel als geometrischer Ort bekannt. Zudem kennen sie die Tatsache, dass parallel zur Achse einfallende Lichtstrahlen von der Parabel zum Brennpunkt hin reflektiert werden. Sie müssen auch in der Lage sein, die Richtung der Parabelachse aus zwei Tangenten samt Berührungspunkten konstruieren zu können. Alle diese grundlegenden Eigenschaften sind im Anhang "Spezifische Vorkenntnisse: Grundlagen" dargestellt.

Material:

Kugel von ca. 20 cm Durchmesser (Spielball, evtl. mit speziellem Muster)
geeignete Lichtquelle auf Stativ montiert
grossflächiges Papier (z. B. Packpapier)
Konstruktions- und Zeichenmaterial
Faden oder Schnur
Klebstreifen
Modell zur Darstellung von Kegelschnitten aus der Sammlung

Hinweis zur Lichtquelle: Eine kleine Glühbirne (klar, mindestens 40 Watt) ist bereits gut geeignet. Diese wird in eine Fassung geschraubt, welche in jedem Do-it-yourself- oder Elektrofachgeschäft erhältlich ist. Die Fassung kann an einem Stativ befestigt werden, so dass die Höhe der Lichtquelle beliebig verstellbar ist. Noch besser geeignet ist eine Niedervolt-Halogenlampe, wie sie z. B. in Bürotisch-Lampen zur Arbeitsplatzbeleuchtung verwendet wird. Sie zeichnet die Schattengrenze besonders scharf. Weniger geeignet sind matte Glühbirnen.

Literatur:

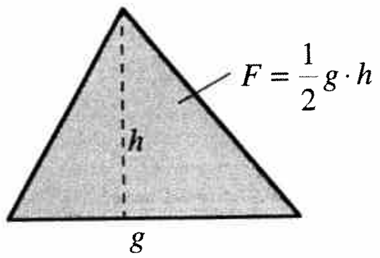
R. Stärk, Darstellende Geometrie, Schöningh, Paderborn, 1978
H. Bachmann, Vektorgeometrie, Ausgabe a, sabe, Zürich, 1989 (10. Auflage)
E. Schröder, Darstellende Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974

Fläche eines Parabelsegmentes

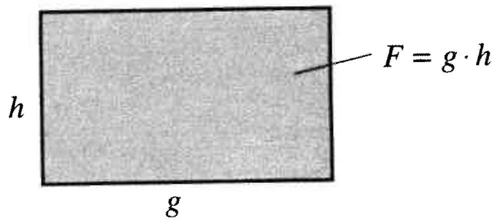
Euer Auftrag:

Aus deinem bisherigen Mathematikunterricht ist dir bekannt, wie man den Flächeninhalt von

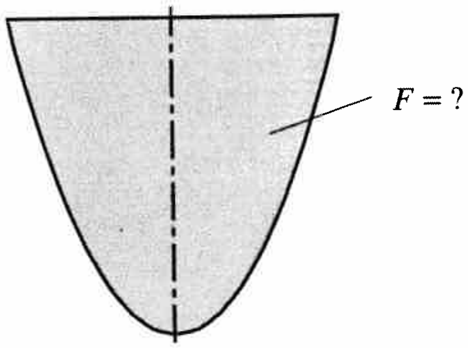
Dreiecken



Rechtecken



oder anderen geradlinig begrenzten Figuren berechnet. Für krummlinig begrenzte Figuren ist eine einfache Flächenformel ein Glücksfall; ein solcher liegt bei der Parabel vor!



Finde eine Methode oder Formel, um den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes zu bestimmen!

Fläche eines Parabelsegmentes

Informationen für die Lehrerin, den Lehrer:

Schülerauftrag:

> Aus deinem bisherigen Mathematikunterricht ist dir bekannt, wie man den Flächeninhalt von Dreiecken, Rechtecken oder anderen geradlinig begrenzten Figuren berechnet. Für krummlinig begrenzte Figuren ist eine einfache Flächenformel ein Glücksfall; ein solcher liegt bei der Parabel vor!
>
> Finde eine Methode oder Formel, um den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes zu bestimmen!

Mögliche Schülertätigkeiten:

(1) Bestimmung des Flächeninhalts

Ihre Schülerinnen und Schüler beginnen zunächst zu experimentieren. Sie zeichnen mit Hilfe von Brennpunkt und Leitgerade oder mit Hilfe der Funktionsgleichung eine Parabel auf Häuschenpapier. Anschliessend bestimmen sie den Flächeninhalt von verschiedenen Segmentflächen durch Auszählen der Häuschen.

Die Parabel muss sorgfältig gezeichnet werden. Das Auszählen von Häuschen führt bei 4-mm-Papier auf eine ausreichende Genauigkeit von etwa 1%. Allenfalls kann die Genauigkeit durch Verwenden von Millimeterpapier verbessert werden. Höhe, Grundlinie und Flächeninhalt sollten in konsistenten Masseinheiten angegeben werden.

Vielleicht finden Ihre Schüler eine andere Methode zur Flächenbestimmung. So lassen sich Parabeln auf mitteldichte Faserplatten (MDF) aufzeichnen und aussägen. Der Flächeninhalt eines Parabelsegmentes kann dann durch Wägen bestimmt werden. Bei dieser Methode sollte möglichst homogenes Material mit grosser Dichte verwendet werden. Karton eignet sich nicht.

(2) Auswertung

Die Schülerinnen und Schüler suchen nach einer Gesetzmässigkeit in ihrem umfangreichen Datenmaterial. Ziemlich sicher werden sie die Segmenthöhe als flächenbestimmende Grösse erkennen und verwenden. Für die Auswertung der Daten sind verschiedene Möglichkeiten denkbar mit entsprechend verschiedenen Ergebnissen.

Wir beschreiben hier einige Möglichkeiten, die sich beliebig erweitern oder abändern lassen. Wie weit Sie als Lehrperson lenkend eingreifen, hängt ganz von Ihnen und Ihren Vorstellungen in Bezug auf die Ergebnisse des Schülerauftrags ab.

(2.1) Die Schüler erstellen für *eine* untersuchte Parabel eine Tabelle, welche zu der Höhe (eventuell der Grundlinie) den Flächeninhalt des Parabelsegmentes angibt.

Nun können Sie die Schüler ermuntern, zu zeigen, dass jede beliebige Parabel durch zentrische Streckung auf die untersuchte "Normalparabel" zurückgeführt werden kann (siehe dazu auch Materialien (5) zu "Parabel überall") und zu untersuchen, wie dabei der Flächeninhalt vom Streckungsfaktor abhängt. Damit finden die Schüler eine Methode, den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes mit Hilfe des Streckungsfaktors und dem Tabellenwert der Normalparabel zu bestimmen.

(2.2) Die Schüler berechnen die Flächenverhältnisse von verschiedenen Segmenten und vergleichen sie mit den entsprechenden Höhenverhältnissen. Dabei entdecken sie, dass zu gleichen Höhenverhältnissen gleiche Flächenverhältnisse resultieren. Eventuell bedarf es zusätzlicher Anregungen Ihrerseits, damit die Schüler das Flächenverhältnis zum Höhenverhältnis 2:1 als $2\sqrt{2}:1$ interpretieren und daraus folgern: Eine Vergrösserung der Höhe um den Faktor k bewirkt eine Vergrösserung der Fläche um den Faktor $k\sqrt{k}$. Damit gelangen die Schüler zu der folgenden Flächenformel für ein Parabelsegment der Höhe h: $F = \text{konst} \cdot h\sqrt{h}$.

Nun können Sie Ihre Schüler auffordern "$\text{konst} \cdot \sqrt{h}$" als Streckenlänge zu interpretieren, oder "konst" mit Hilfe der Brennweite f (Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel) oder mit Hilfe des Öffnungsfaktors a der Parabel auszudrücken.

Im ersteren Fall ergibt sich $\text{konst} \cdot \sqrt{h} = \dfrac{2}{3} g$ im letzteren $\text{konst} = \dfrac{4}{3\sqrt{|a|}} = \dfrac{8}{3}\sqrt{f}$.

Bemerkung: Möglicherweise kennen die Schüler die Parabel bereits als Graph einer quadratischen Funktion und haben deshalb die Grundlinie g anstelle der Segmenthöhe als flächenbestimmende Grösse verwendet. Dann gelangen sie in gleicher Weise zur Formel: $F = \text{konst} \cdot g^3$ mit $\text{konst} \cdot g = \dfrac{2}{3} h$ beziehungsweise $\text{konst} = \dfrac{1}{6}|a| = \dfrac{1}{24f}$.

(2.3) Die Schüler erkennen zusätzlich zu der Segmenthöhe h die Grundlinie g als weitere, flächenbestimmende Grösse und vergleichen die Fläche des Parabelsegmentes mit jener des Rechtecks gebildet aus g und h. Dabei stellen sie fest, dass der Quotient der beiden Flächen immer denselben Wert ergibt. Auf diese Weise kommen die Schüler zu folgender Antwort: Die Fläche eines Parabelsegmentes ist gleich dem 2/3-fachen der Fläche des aus der Grundlinie und Höhe gebildeten Rechtecks.

Bemerkung: Haben ihre Schüler anstelle des Rechtecks das einbeschriebene Dreieck gebildet aus g und h benutzt, gelangen sie zur Antwort: Die Fläche eines Parabelsegmentes ist gleich dem 4/3-fachen der Fläche des aus der Grundlinie und Höhe gebildeten Dreiecks.

(3) Beweis der Flächenformel

Mit einer der unter (2) beschriebenen Antworten ist der wesentliche Teil des Schülerauftrags erfüllt. Sie können Ihre Schülerinnen und Schüler zusätzlich auffordern, die erarbeitete Flächenformel zu "beweisen". Wiederum sind verschiedene Möglichkeiten denkbar, von denen wir hier einige kurz skizzieren.

(3.1) Die Schüler studieren einen intuitiven "Beweis" von Archimedes, welcher auf einer raffinierten Anwendung des Hebelgesetzes basiert: Das Parabelsegment und ein Dreieck werden in sehr schmale Flächenstreifen unterteilt. Dann wird gezeigt, dass jeder Flächenstreifen des Segmentes auf der anderen Seite des Hebels einen Flächenstreifen des Dreiecks im Gleichgewicht hält.

Notwendige Vorkenntnisse: Parabel als Graph einer quadratischen Funktion, Gleichung der Parabeltangente (siehe dazu Anhang "Spezielle Vorkenntnisse: Brücke zur Algebra"), Hebelgesetz, Schwerpunkt eines Dreiecks

(3.2) Die Schüler studieren einen strengen Beweis von Archimedes, welcher auf der Methode „reductio ad absurdum" beruht. Kerngedanke des Beweises ist das Ausschöpfen der Parabelsegmentfläche durch immer kleinere Dreiecksflächen.

Notwendige Vorkenntnisse: Parabel als Graph der quadratischen Funktion, Folgen, Summe einer endlichen geometrischen Reihe, Methode des indirekten Beweises. (Oder siehe Anhang "Spezielle Vorkenntnisse: die Fläche des Parabelsegmentes berechnen").

(3.3) Die Schüler führen einen "Computerbeweis" durch. Sie schreiben ein Programm, welches den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes durch Aufsummieren von Streifen der Breite Δx mit $\Delta x \rightarrow 0$ berechnet.

Notwendige Vorkenntnisse: Parabel als Graph der quadratischen Funktion, elementare Kenntnisse im Programmieren

(3.4) Die Schüler überprüfen ihre Formel mit Hilfe des Computers. Sie schreiben ein Programm, welches den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes mit dem Monte-Carlo-Verfahren bestimmt: Im Rechteck, gebildet aus der Grundlinie und der Höhe, werden *zufällig* n Punkte mit $n \rightarrow \infty$ ausgewählt. Der Anteil all dieser Punkte, welcher sich innerhalb der Segmentfläche befindet, ergibt den Anteil der Segmentfläche an der Rechteckfläche.

Notwendige Vorkenntnisse: elementare Kenntnisse im Programmieren, Anwendung eines Zufallszahlengenerators, eventuell Parabel als Graph der quadratischen Funktion

(3.5) Sie skizzieren ihren Schülern einen Beweis mit Hilfe von Streckung: Wird eine Parabel zuerst an ihrem Scheitelpunkt zentrisch und anschliessend an ihrer Scheiteltangente axial gestreckt, beide mal mit Streckungsfaktor $k > 0$, wird sie wieder in sich selbst übergeführt (siehe dazu auch Materialien (5) zu "Parabel überall"). Ein Parabelsegment der Grundlinie g, Höhe h und Fläche F wird dabei auf ein Segment mit der Grundlinie g', Höhe $h' = k^2 h$ und Fläche $F' = k^3 F$ abgebildet. Die Differenzfläche beider Segmentflächen hat die Höhe $(k^2-1)h$ und ist oben und unten begrenzt durch g und g'. Ihr Flächeninhalt ist grösser als jener des einbeschriebenen und kleiner als jener des umbeschriebenen Rechtecks, somit gilt:

$$(k^2-1)hg \le (k^3-1)F \le (k^2-1)hg' \Leftrightarrow hg \le \frac{k^2+k+1}{k+1}F \le hg'$$

Für $k \rightarrow 1$ strebt g' gegen g und aus der Ungleichung wird die Flächenformel $F = \frac{2}{3}gh$.

Präsentation und Evaluation:

Die Gruppe, die diesen Auftrag bearbeitet hat, führt den anderen Schülerinnen und Schülern an einem Beispiel vor, wie sie den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes bestimmt. Dabei erläutert sie kurz, durch welche Vorgehensweise und Überlegungen sie diese Methode oder Flächenformel gefunden hat.
Hat die Gruppe zusätzlich einen Beweis ihrer Flächenformel erbracht oder in der Literatur studiert, kann sie die wesentlichen Schritte des Beweises den andern Gruppen verständlich vorführen. Falls die Gruppe anstelle eines Beweises ein Computerprogramm geschrieben hat, kann sie dieses den andern Schülern demonstrieren.
Vielleicht hat die Gruppe sogar ein Mobile aus Parabelsegmenten, die von Rechtecken oder Dreiecken im Gleichgewicht gehalten werden, gebaut, welches auf sehr eindrückliche und kreative Weise die Flächenformel mit Hilfe des Hebelgesetztes illustriert.

Material und Literatur:

Zu (1): Konstruktions- und Zeichenmaterial, Papier 4-mm-kariert, eventuell Millimeterpapier
Zu (2): einfacher Taschenrechner, eventuell eine Anleitung zur zentrischen Streckung von Parabeln (siehe dazu Materialien (5) zu "Parabel überall").
Zu (3): Kopien eines Beweises aus der Literatur, zum Beispiel:
Simonyi, K.: Kulturgeschichte der Physik. Thun: Harri Deutsch 1990
S. 92 - 95, intuitiver und strenger Beweis nach Archimedes
Programmierbarer Taschenrechner oder Computer

Die Parabel als Bahnkurve schiefer Würfe

Euer Auftrag:

Gesehen haben,	Wenn ihr aus etwas Distanz zuschaut, wie jemand einen Ball wirft, seht ihr eine bogenförmige Bahn. Es handelt sich näherungsweise um ein Stück einer *Parabel.* Wie gut die Parabelform stimmt, hängt davon ab, wie stark die Luft den Ball bremst. Die Bahn eines dicht gepackten Schneeballes ist schöner parabelförmig als jene eines Papierknäuels, das ihr quer durch's Klassenzimmer in den Papierkorb befördert. Ihr sollt nun die Bahn einer kleinen *Stahlkugel* bei geringer Geschwindigkeit untersuchen.
bauen,	**1. Baut eine Vorrichtung, mit der sich eine kleine Stahlkugel entlang der Wandtafel werfen lässt.** Euer Wurfgerät muss gut genug sein, um zuverlässig Würfe mit gleicher Steilheit und gleicher Startgeschwindigkeit wiederholen zu können. Mit Phantasie und etwas handwerklichem Geschick kriegt ihr das hin!
experimentieren und dann	**2. Führt mit eurem Gerät Würfe entlang der Wandtafel aus und prüft nach, wie gut die Parabelform der Wurfbahn stimmt.**
voll mit Mathematik dahinter!	Ihr müsst euch dazu einiges einfallen lassen. Zum Beispiel, wie man Wurfbahnen auf der Wandtafel festhalten und kontrollieren kann, ob es sich tatsächlich um Parabeln handelt. **Macht tüchtig Gebrauch von euren mathematischen Kenntnissen über die Parabel!** Die Chancen stehen dann gut, dass ihr gleich noch ein paar spannende Eigenschaften von Wurfbahnen entdeckt.
Die Challenge:	Sind eure planimetrischen Konstruktionen auf der Wandtafel, eure algebraischen Berechnungen, euer Wurfgerät so gut, dass ihr Zielpunkte voraussagen, auf der Tafel markieren und dann auch treffen könnt?

Die Parabel als Bahnkurve schiefer Würfe

Information für die Lehrerin, den Lehrer

Schülerauftrag

> Wenn ihr aus etwas Distanz zuschaut, wie jemand einen Ball wirft, seht ihr eine bogenförmige Bahn. Es handelt sich näherungsweise um ein Stück einer *Parabel.* [...]
>
> 1. Baut eine Vorrichtung, mit der sich eine kleine Stahlkugel entlang der Wandtafel werfen lässt. [...]
> 2. Führt mit eurem Gerät Würfe entlang der Wandtafel aus und prüft nach, wie gut die Parabelform der Wurfbahn stimmt. [...]
>
> Macht tüchtig Gebrauch von euren mathematischen Kenntnissen über die Parabel! [...]

Organisatorisches

Idealerweise lassen Sie zwei bis drei Schüler an diesem Auftrag arbeiten.

Für die Wurf-Experimente braucht es eine Wandtafel, wenn möglich etwa drei auf anderthalb Meter gross oder grösser.

Der Selbstbau eines Wurfgerätes ist nicht zwingend. Vielleicht ziehen Sie es vor, der Gruppe ein fertiges Gerät aus früheren Versuchen zur Verfügung zu stellen oder eines, das *Sie* gebaut haben. Baut die Gruppe das Gerät selber, ist ein entsprechender Werkplatz nötig.

Das Wurfgerät

Die Vorrichtung muss einigermassen genaues Zielen und eine konstante Abwurfgeschwindigkeit gewährleisten. Es ist fast erstaunlich, mit welch bescheidenem Aufwand dies realisierbar ist. Auf Seite 18 finden Sie eine Bauanleitung für das Gerät, das wir mit unseren Schülern getestet haben. Die Anleitung soll in erster Linie zeigen, wie wir uns ein solches Gerät etwa vorstellen. Sie kann aber auch als Vorlage für Ihre Schüler dienen, falls Sie die Zeit, die die Gruppe zum Austüfteln eines eigenen Modells benötigen würde, nicht aufwenden möchten.

Die Würfe

Die Schüler befestigen das Wurfgerät mit einer Zwinge oder mittels Saugnäpfen an einem Seitenrand der Wandtafel. Auf der Höhe der Rohrmündung ziehen sie über die ganze Tafellänge eine horizontale Achse, die sie bei Bedarf mit einer Skala versehen. Besser als eine Kreidenlinie ist ein aufgeklebtes Maler-Abdeckband, damit die Achse nicht nach jedem Auswischen von Zeichnungen erneuert werden muss.

Die Schüler führen Würfe aus, protokollieren deren Bahnen und treiben damit allerhand Mathematisches. Wie weit Sie als Lehrperson lenkend eingreifen, ist ganz Ihnen überlassen. Wir geben im folgenden ein paar Anregungen, die sich beliebig erweitern und abwandeln lassen.

Mögliche Schülertätigkeiten

(1) Würfe zeichnerisch festhalten

Es braucht mindestens zwei Personen: eine, die das Wurfgerät richtet und auslöst (Werferin) und eine oder mehrere, die die Wurfbahn beobachten (Beobachterinnen).

Einen einzelnen Bahnpunkt festhalten: Man zeichnet eine vertikale Kreidenlinie auf die Wandtafel. Die Beobachterin stellt sich genau davor und markiert den Punkt, wo die Stahlkugel die Linie passiert. Das geht recht genau, wenn man zwei Dinge beachtet: 1. Die Beobachterin muss die *ungefähre* Stelle bereits kennen. Dazu dient ein erster Wurf, den sie aus etwas Distanz beobachtet. Erst beim zweiten Wurf markiert sie die Stelle. 2. Die Beobachterin muss auf den Wurf gefasst sein. Die Werferin sollte den Wurf daher ankündigen: "3–2–1–Wurf!" Um eine ganze Bahnkurve festzuhalten, werden mehrere Punkte markiert, entweder nacheinander durch Wurfwiederholung oder gleichzeitig von mehreren Beobachterinnen.

(2) Die Genauigkeit verbessern

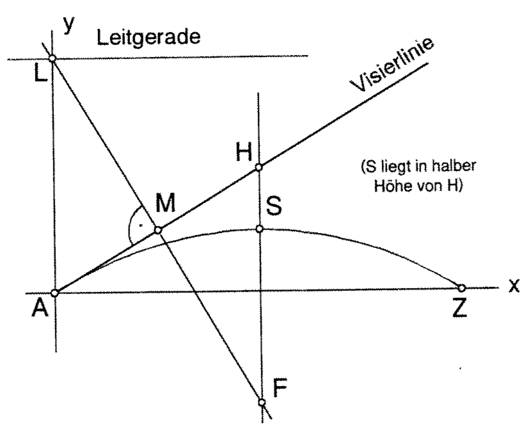
Die Stelle, an der die Kugel eine vertikale Linie passiert, kann von Auge auf ein paar cm genau festgestellt und markiert werden. Eine verbesserte Genauigkeit ergibt sich durch Wurfwiederholung. Die Beobachterin erhält dann mehrere Marken auf derselben vertikalen Linie und steht vor dem Problem, daraus eine einzige zu mitteln. Vielleicht regen Sie die Gruppe an, über das Problem zu diskutieren. Es kann ja auf sehr verschiedene Arten gelöst werden: intuitiv einen der Würfe als den besten deklarieren; die mittlere Marke nehmen; die Mitte der höchsten und der tiefsten Marke nehmen; intuitiv ein Zentrum aller Marken schätzen; den Durchschnitt der Höhen über der horizontalen Achse berechnen usw.

(3) Eine Bahn aus drei Punkten bestimmen und mit einem vierten kontrollieren

Diese Tätigkeit ist besonders für eine *algebraische* Behandlung geeignet. Die Schüler prüfen die Hypothese, die Stahlkugel folge auf ihrem Flug einer Parabel. Die horizontale Linie wird als x-Achse beschriftet (z. B. dm-Einheiten, Nullpunkt = Abwurfpunkt). Neben dem Abwurfpunkt A werden zwei weitere Punkte B und C durch Beobachtung bestimmt. Nun suchen die Schüler die quadratische Funktion $y=f(x)$, deren Graph durch A, B und C verläuft. Danach die Pointe: An einem beliebigen *berechneten* Punkt $P(x|f(x))$ wird ein Papierknäuel mit einem Klebstreifen an der Tafel leicht befestigt – und getroffen. (Dieses Experiment, das viele Schülerinnen und Schüler begeistert, eignet sich auch für den normalen Algebra-Unterricht.)

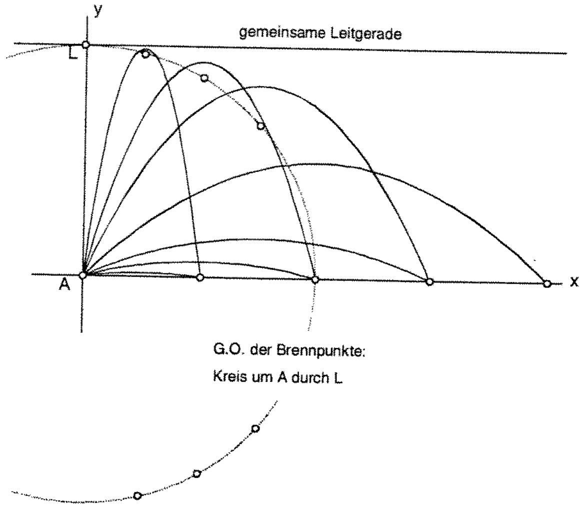
(4) Eine Bahn aus der Visierlinie und dem Zielpunkt bestimmen und dann prüfen

Diese Tätigkeit ist besonders für eine *planimetrische* Behandlung geeignet. Auch hier prüfen die Schüler die Hypothese, die Stahlkugel folge auf ihrem Flug einer Parabel. Aus der Position und der Schräglage des Wurfgerätes ist der Kurvenpunkt A mitsamt Tangente bekannt. Den auf gleicher Höhe liegenden Zielpunkt Z *beobachten* die Schüler. Daraus *konstruieren* sie direkt auf der Wandtafel den Scheitelpunkt der Parabel, den Brennpunkt und die Leitgerade und mit deren Hilfe einige weitere Punkte. Im einen oder andern Punkt hängen sie ein Papierknäuel auf und *testen*, ob es denn auch tatsächlich getroffen wird.



(5) Eine Kurvenschar untersuchen: Flugbahnen bei konstanter Startgeschwindigkeit

Es ist von Vorteil, wenn die Schüler bereits Tätigkeit (4) ausgeführt haben. Betrachtet man die Bahnen von Würfen mit gleichem Startpunkt und gleicher Anfangsgeschwindigkeit, jedoch verschiedenen Steigungen der Visierlinie, gelangt man zum Eindruck, dass die Leitgerade immer dieselbe sei. Akzeptieren die Schüler diese Erfahrung als richtig, steht ihnen nichts mehr im Wege, Fragen wie die folgenden experimentell und theoretisch zu erörtern: Wo liegen alle Brennpunkte? (Kreis um A durch L.) Für welche Neigung der Visierlinie ergibt sich der weiteste Wurf? (Für 45°.) Wo liegt der Brennpunkt in diesem Spezialfall? (Auf der x-Achse.) Wieviele Wurfparabeln führen zum gleichen Zielpunkt? (Im allgemeinen zwei.) In welcher Beziehung stehen die beiden Neigungswinkel der Visierlinie für den gleichen Zielpunkt? (Sie sind komplementär.) Wie sieht die Parabel aus, wenn man fast senkrecht nach oben wirft? (Sie wird ganz "spitz", Brennpunkt und Scheitelpunkt fallen praktisch mit L zusammen.) Vielleicht kommen Ihre Schüler allein auf diese Fragen, vielleicht finden sie noch andere dazu. Vielleicht werden Sie als Lehrperson die eine oder andere Frage anregen, die Ihnen besonders wertvoll erscheint. Es gibt keine Regel, die den projektartigen Unterricht in dieser Hinsicht einschränkt.



Präsentation der Arbeit

Sofern eine Präsentation vorgesehen ist, ermuntern Sie die Gruppe zu einer guten Vorbereitung. Die Schüler vergessen leicht, dass ihre Kolleginnen und Kollegen sich nicht ebenso lang mit dem speziellen Teilthema befasst haben und somit nicht über die gleichen Kenntnisse und Erfahrungen verfügen wie sie selbst. Wurfexperimente mögen für die Akteure per se spannend sein, für das Publikum sind sie es nur, wenn es die Mathematik drum herum versteht. Das sollte die Gruppe im Auge behalten, wenn sie die Präsentation vorbereitet.

Die Wurfexperimente können bei der Präsentation real vorgeführt werden. Aber es gibt durchaus auch andere Wege. Polaroidfotos der Wandtafelbilder lassen sich in einem *Bericht* verwenden oder für einen *Vortrag* auf Projektorfolie durchzeichnen. Für eine *Ausstellung* geeignet sind 1:1-Bilder auf Packpapier, das bei den zu protokollierenden Experimenten auf der Wandtafel fixiert wurde.

Erforderliche Kenntnisse

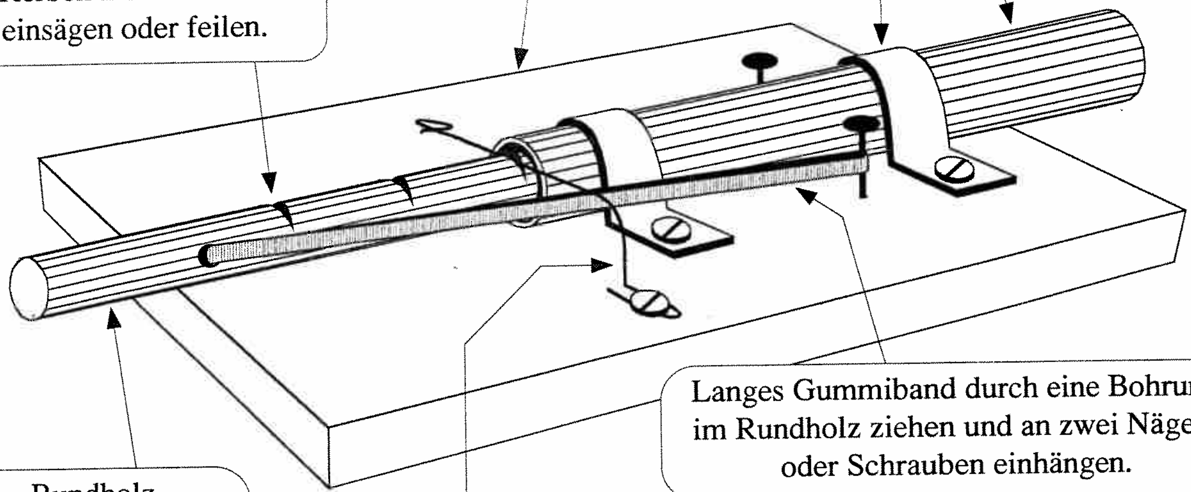
Nötig ist das *Grundlagen*-Wissen, das im ersten Teil des Anhangs "Spezifische Vorkenntnisse" wiedergegeben ist. Falls Ihre Schüler bereits die quadratische Funktion mit ihrem Graphen kennen, können sie davon Gebrauch machen. Voraussetzung ist das jedoch nicht. Vom *Zusatzwissen* aus dem zweiten Teil des Anhangs leiten Sie an die Schüler weiter, was Ihnen sinnvoll erscheint. Es gibt dort drei Abschnitte über den schiefen Wurf. Wir halten es jedoch für sinnvoll, diese Information den Schülern eher zurückhaltend und vor allem nicht zu früh zu vermitteln.

Bauanleitung für ein Wurfgerät

Elektro-Installationsrohr, Innendurchmesser 13 mm, etwa 20 cm lang, mit passenden Briden festschrauben.

Tannenbrettchen, etwa 20 cm x 10 cm x 1 cm.

Kerben ins Rundholz einsägen oder feilen.

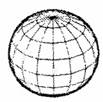


Langes Gummiband durch eine Bohrung im Rundholz ziehen und an zwei Nägeln oder Schrauben einhängen.

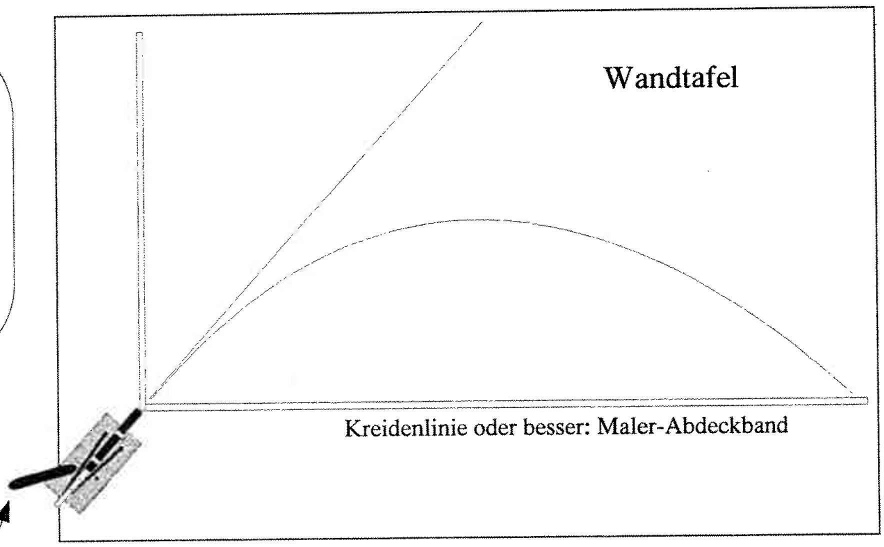
Rundholz, Durchmesser 12 mm, etwa 20 cm lang.

Federstahldraht, 1 mm Durchmesser, so befestigen und richten, dass er beim Herausziehen des Rundholzes in eine der Kerben einrastet. Beim Wurf das Brettchen festhalten und den Draht aus der Kerbe heben.

Wurfobjekt: Stahlkugel, Durchmesser 12 mm. Erhältlich in Bastel- und Spielwarenläden sowie bei Lieferanten von Schul-Experimentiermaterial.



Das Wurfgerät mit einer Schraubzwinge oder Werkzeugklammer oder mittels Saugnäpfen an der Tafel befestigen. (Eisenwarenhandlungen führen Saugnäpfe, die sich ins Brettchen einschrauben lassen.)



Klammer

Parabel überall

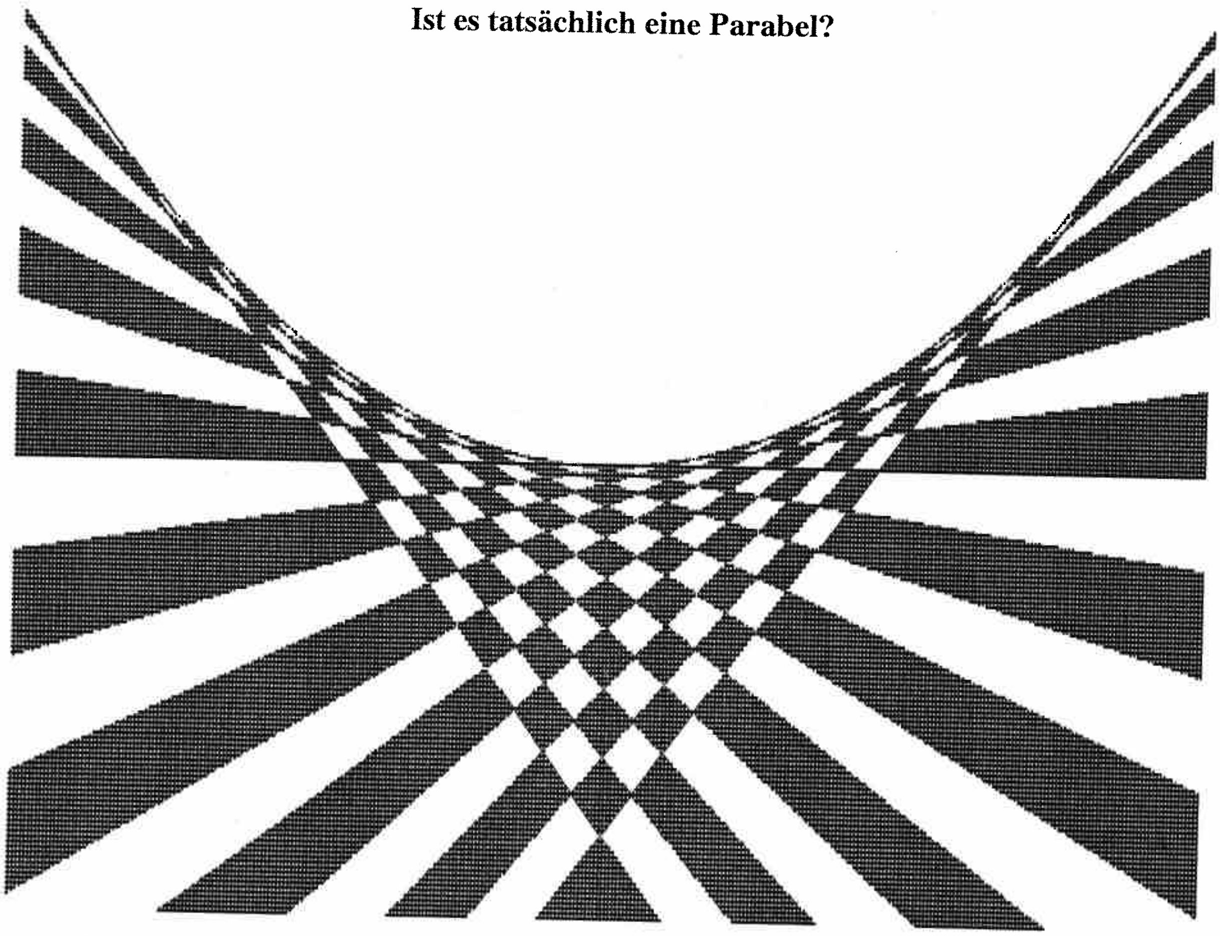
Euer Auftrag:

Überall in deinem Alltag und in deiner Umwelt begegnest du geometrischen Formen: Dreiecken, Rechtecken, Kreisen und vielen mehr. Sind auch Parabeln darunter?

Finde Parabeln in deinem Alltag!

Vergewissere dich jedesmal:

Ist es tatsächlich eine Parabel?



Parabel überall

Informationen für die Lehrerin, den Lehrer:

Schülerauftrag:

Überall in deinem Alltag und in deiner Umwelt begegnest du geometrischen Formen: Dreiecken, Rechtecken, Kreisen und vielen mehr. Sind auch Parabeln darunter?

Finde Parabeln in deinem Alltag! Vergewissere dich jedesmal: Ist es tatsächlich eine Parabel?

Mögliche Schülertätigkeiten:

Die folgenden Entdeckungen von "Parabeln im Alltag" können Sie durch eine Kiste mit bereitgestelltem Material anregen. Gegebenfalls können Sie dem Material zusätzliche, detailliertere Schüleraufträge beilegen. Ihre Schülerinnen und Schüler können nach eigenem Interesse Materialien aus der Kiste auswählen und damit experimentieren.

Zu mehreren Materialien befinden sich Kopiervorlagen im Anhang "Parabel überall". Von den restlichen Materialien werden eine kurze Beschreibung und Literatur- oder Bezugsquellen angegeben.

Kurzhinweise zu den einzelnen Materialien:

(1) Parabelformen in der Technik

Fotografien von Spiegelteleskopen, Sonnenspiegeln und Brückenbogen finden sich in
- Dustmann, F.W.: Abakus. Paderborn: Schöningh 1995 S. 89 - 95
- Münzinger, W.: Mathe-Welt Heft 83 (1997): Erhard Friedrich Verlag, Velber

Zusatzfragen: Wo ist die Parabelform? Weshalb wählt man eine Parabelform?

(2) Parabeln als spezielle Kurven

Im Anhang befinden sich Abbildungen von verschiedenen, parabelähnlichen Kurven. Falls es sich bei einer Kurve tatsächlich um eine Parabel handelt, lässt sich die Symmetrieachse einzeichnen, indem man zwei Tangenten der Kurve verwendet (siehe dazu Anhang "Spezifische Vorkenntnisse: Grundlagen"). Damit lässt sich die Parabelform für alle Kurven ausser (c) mit genügender Genauigkeit widerlegen.
Im Fall (c) lässt sich (unter der Annahme, dass es sich um eine Parabel handelt) der Brennpunkt bestimmen, indem ein parallel zur Achse einfallender Strahl an der Parabel (bzw. an der Parabeltangente) gespiegelt und der gespiegelte Strahl mit der Achse geschnitten wird. Damit lässt sich die Leitgerade zeichnen (senkrecht zur Achse im gleichen Abstand vom Scheitel wie der Brennpunkt) und mit Brennpunkt und Leitgerade die Parabelform der Kurve im Rahmen der Zeichengenauigkeit bestätigen.

Bei den Abbildungen im Anhang handelt es sich um Ausschnitte von einer:
(a) Kettenlinie (Cosinushyperbolicus), (b) Exponentialkurve, (c) Parabel, (d) Hyperbel, (e) Sinuskurve.

(3) Parabel als Graph der quadratischen Funktion

Im Anhang ist der Graph einer quadratischen Funktion abgebildet. Unter der Annahme, dass es sich um eine Parabel handelt, lässt sich der Brennpunkt bestimmen, indem ein parallel zur Achse einfallender Strahl an der Parabel (bzw. an der Parabeltangente) gespiegelt und der gespiegelte Strahl mit der Achse geschnitten wird. Damit lässt sich auch die Leitgerade zeichnen (senkrecht zur Achse im gleichen Abstand vom Scheitel wie der Brennpunkt) und mit Brennpunkt F und Leitgerade l die Parabelform im Rahmen der Zeichengenauigkeit bestätigen. Zwischen Brennweite f und Öffnungsparameter a besteht der einfache Zusammenhang: $f = \frac{1}{4a}$.

Diese Vermutung und die Parabelform lassen sich wie folgt beweisen:

$$P(x/y) \in \text{Parabel} \Leftrightarrow \overline{PF}^2 = \overline{Pl}^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4f}x^2$$

(siehe dazu auch Anhang "Spezifische Vorkenntnisse: Brücke zur Algebra")

(4) Parabel durch Papierfalten

Im Anhang findet sich eine Anleitung zum Falten von Papier. Dabei entsteht eine Parabel. Die Schüler müssen bzw. können dabei folgende Fragen beantworten:
- Weshalb handelt es sich um eine Parabel?
- Welches sind die Punkte der Parabel?
- Wo sind Brennpunkt und Leitgerade?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Parabelform und dem Abstand des Brennpunktes von der Leitgeraden?
- Warum werden parallel zur Achse einfallende Strahlen zum Brennpunkt hin reflektiert?

Literatur: W. Münzinger, Mathe-Welt, Heft 83 (1997), Erhard Friedrich Verlag, Velber

(5) Zentrische und axiale Streckungen von Parabeln

Im Anhang ist eine Anleitung zur zentrischen Streckung einer Parabel mit dem Scheitel als Streckungszentrum und zur axialen Streckung bezüglich der Scheiteltangente (normale Affinität) gegeben. Die Schüler sollen zeigen, dass die Bildkurve jeweils wieder eine Parabel ist, und deren Brennpunkt und Leitgerade bestimmen. Zudem sollen sie feststellen und allenfalls beweisen, dass eine zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor k dieselbe Bildkurve liefert wie die axiale Streckung mit dem Streckungsfaktor $1/k$.

(6) Ein Parabel-Zeichengerät selber bauen

Eine detaillierte Anleitung zum Bau eines Parabel-Zeichengeräts findet sich im Anhang. Dabei müssen bzw. können die Schüler folgende Fragen beantworten:
- Warum kann man mit dem Gerät Parabeln zeichnen
- Welche Eigenschaften hat eine damit gezeichnete Parabelschar?

(7) Die Parabel als Moiré-Muster

Im Anhang befinden sich Kopiervorlagen, um eine Projektor-Folie mit äquidistanten Linien und eine mit äquidistanten konzentrischen Kreisen herzustellen. Die Schüler können mit diesen beiden Folien experimentieren und beantworten folgende Fragen:
- Wo sind Parabeln? Wieviele sind es?
- Weshalb sind es Parabeln? Wo sind ihre Brennpunkte und Leitgeraden?
- Gibt es kongruente Parabeln oder ähnliche?

(8) Parabelgraphiken

Mehrere Beispiele von Computergraphiken sind im Anhang zusammengestellt. Sie sollen die Schüler ermuntern, ein einfaches Computerprogramm zu entwickeln, welches phantasievolle Graphiken mit Parabeln generiert. Beispielsweise können bei zufälliger Wahl von Scheitelpunkt und Öffnungsfaktor mehrere Parabeln gezeichnet werden und hernach die entstandenen Gebiete zufällig eingefärbt werden.

(9) Bau eines Sonnenspiegels

Eine detaillierte Anleitung zum Bau eines Sonnenspiegels (Parabolspiegels) findet sich in Münzinger, W.: Mathe-Welt Heft 83 (1997): Erhard Friedrich Verlag, Velber

(10) Parabolspiegel und Zauberei

Zwei aufeinandergelegte Parabolspiegel erzeugen vom Gegenstand innerhalb eine verblüffende, frei schwebende räumliche Erscheinung. Diese ist 3-dimensional von allen Seiten sichtbar, kann jedoch nicht berührt werden.
Bezugsquelle: AHA! 8001 Zürich, Spiegelgasse 14.

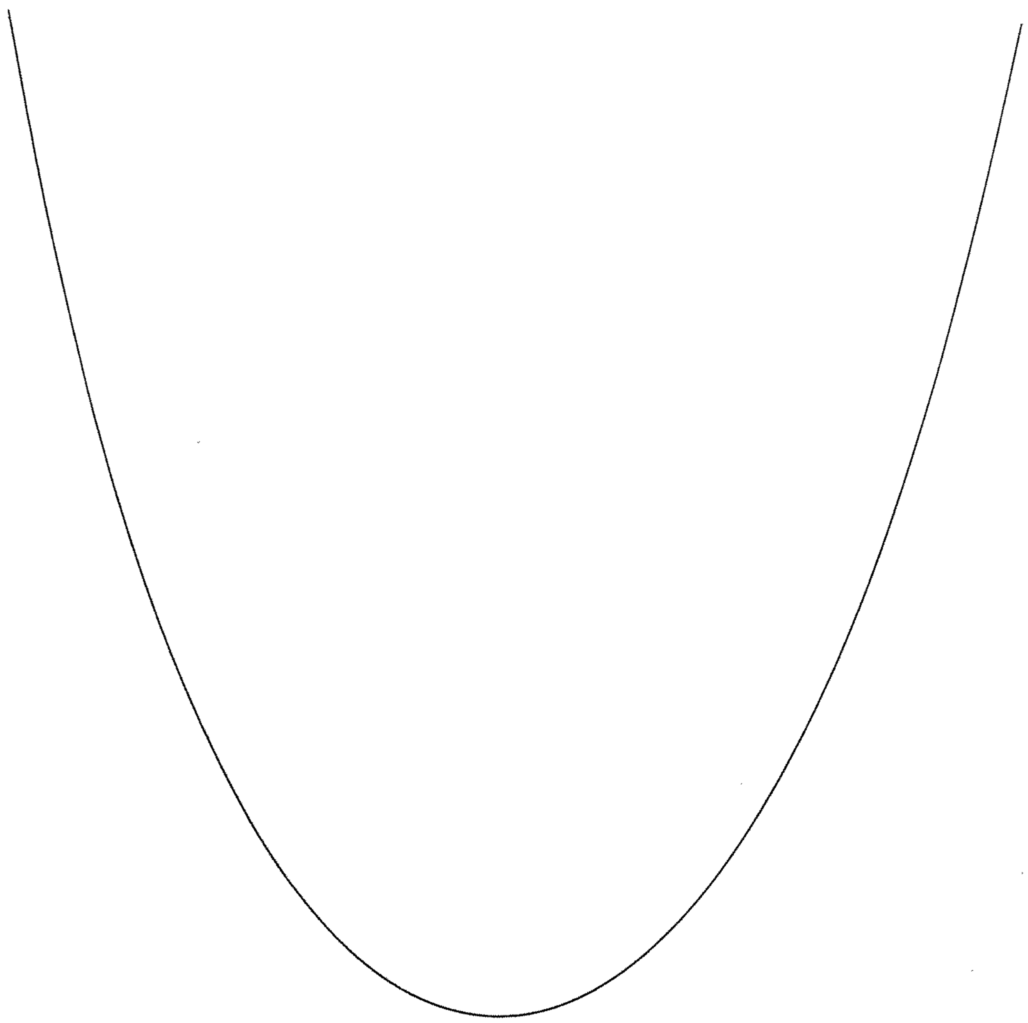
Zusatzfrage: Wie kommt das Bild zustande? Konstruiere den Strahlengang!

Anhang: Parabel überall

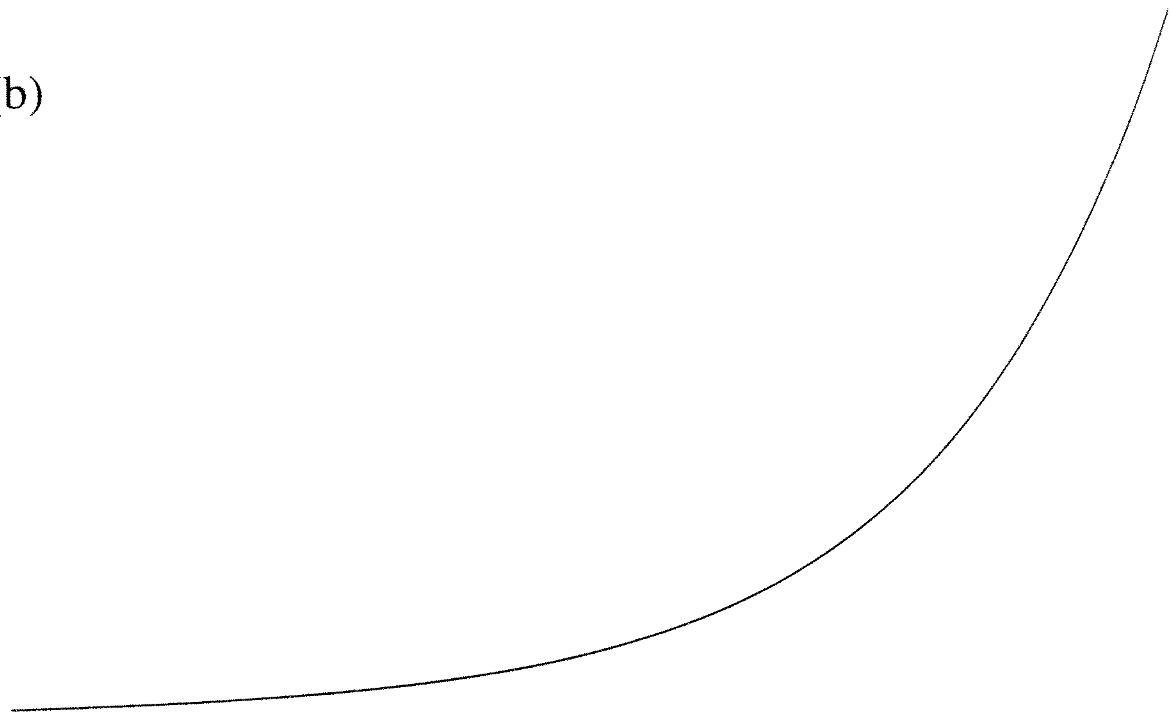
Parabeln als spezielle Kurven

Auf den ersten Blick sehen die abgebildeten Kurven alle wie Parabeln aus! Vergewissere dich im Rahmen der Zeichengenauigkeit: Welche der abgebildeten Kurven sind tatsächlich Parabeln?

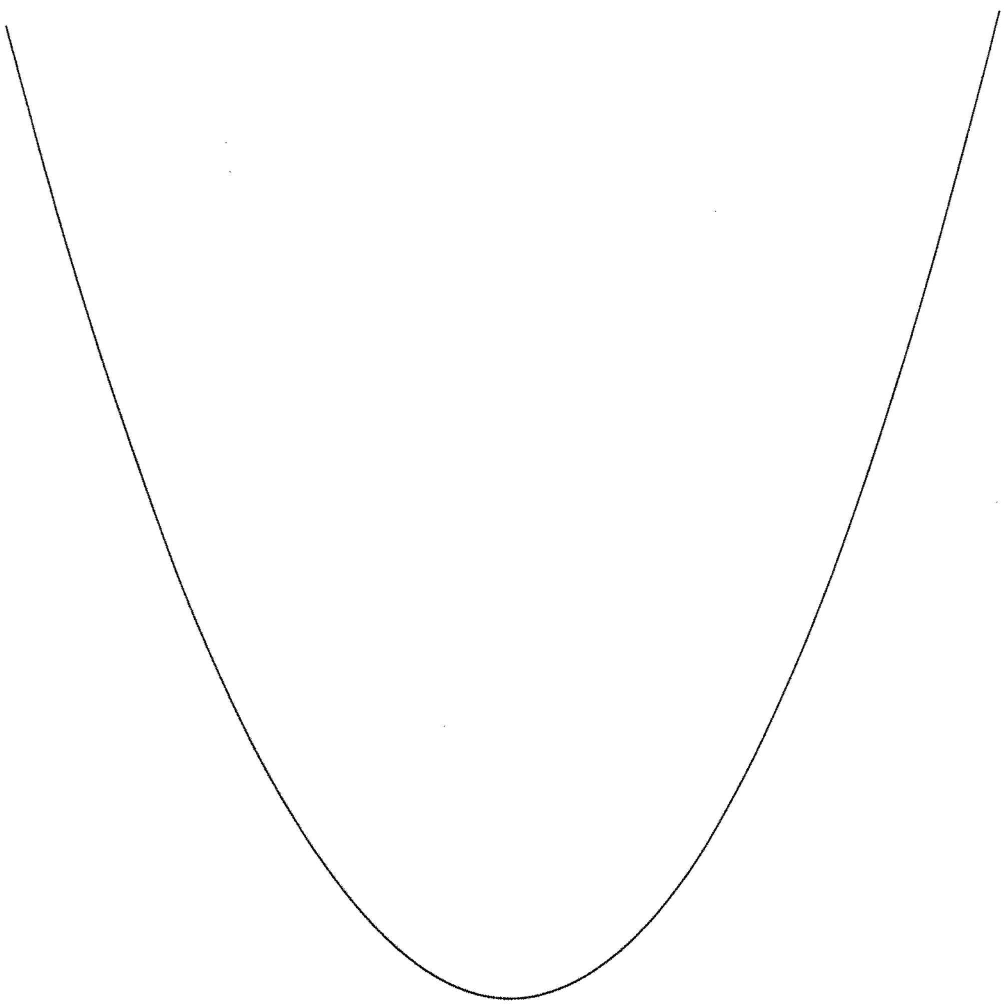
(a)



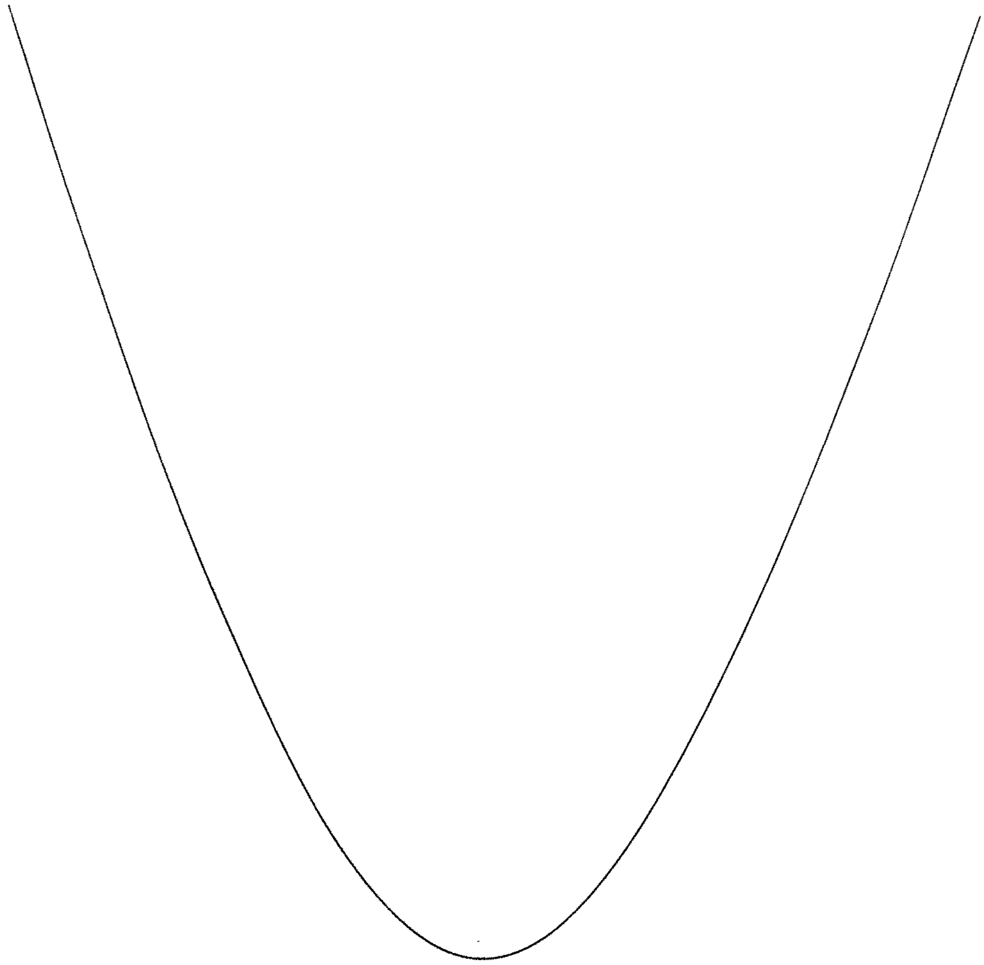
(b)



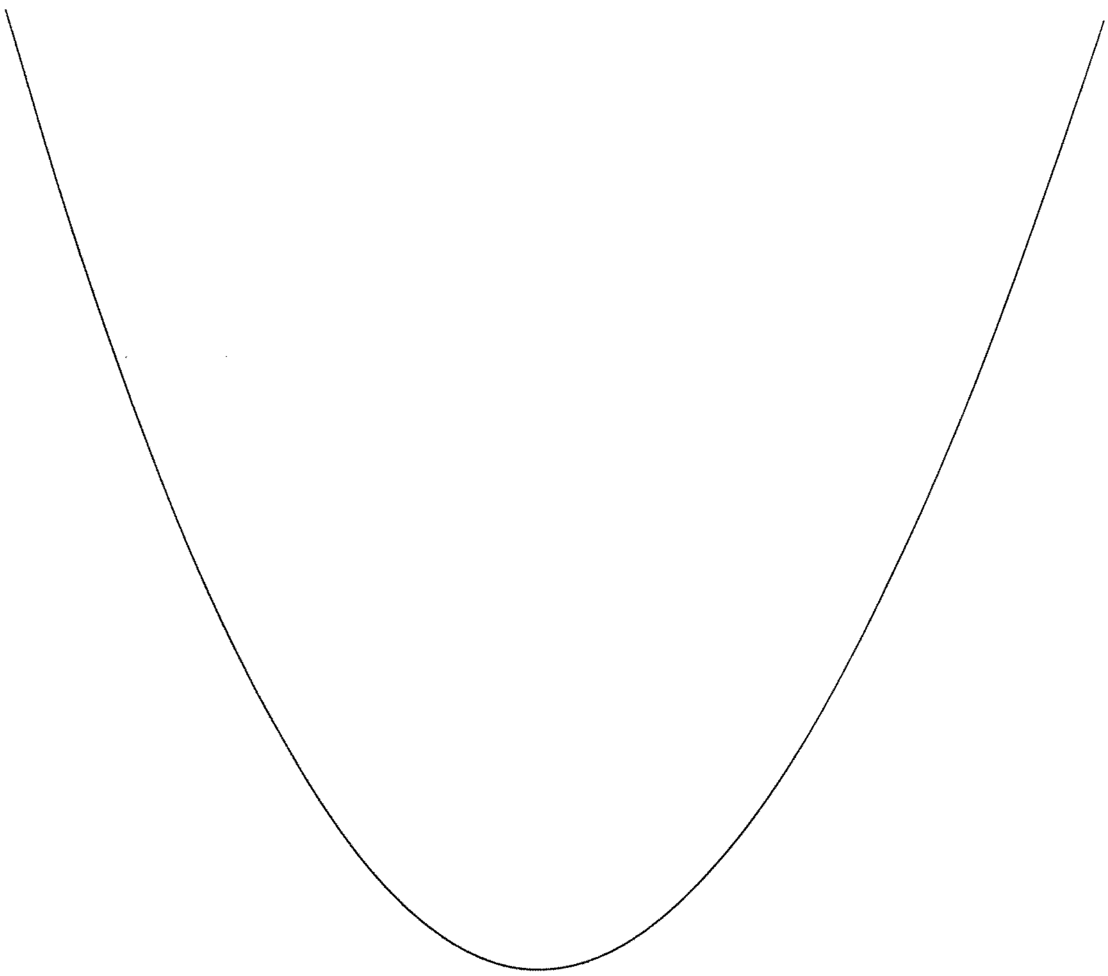
(c)



(d)



(e)

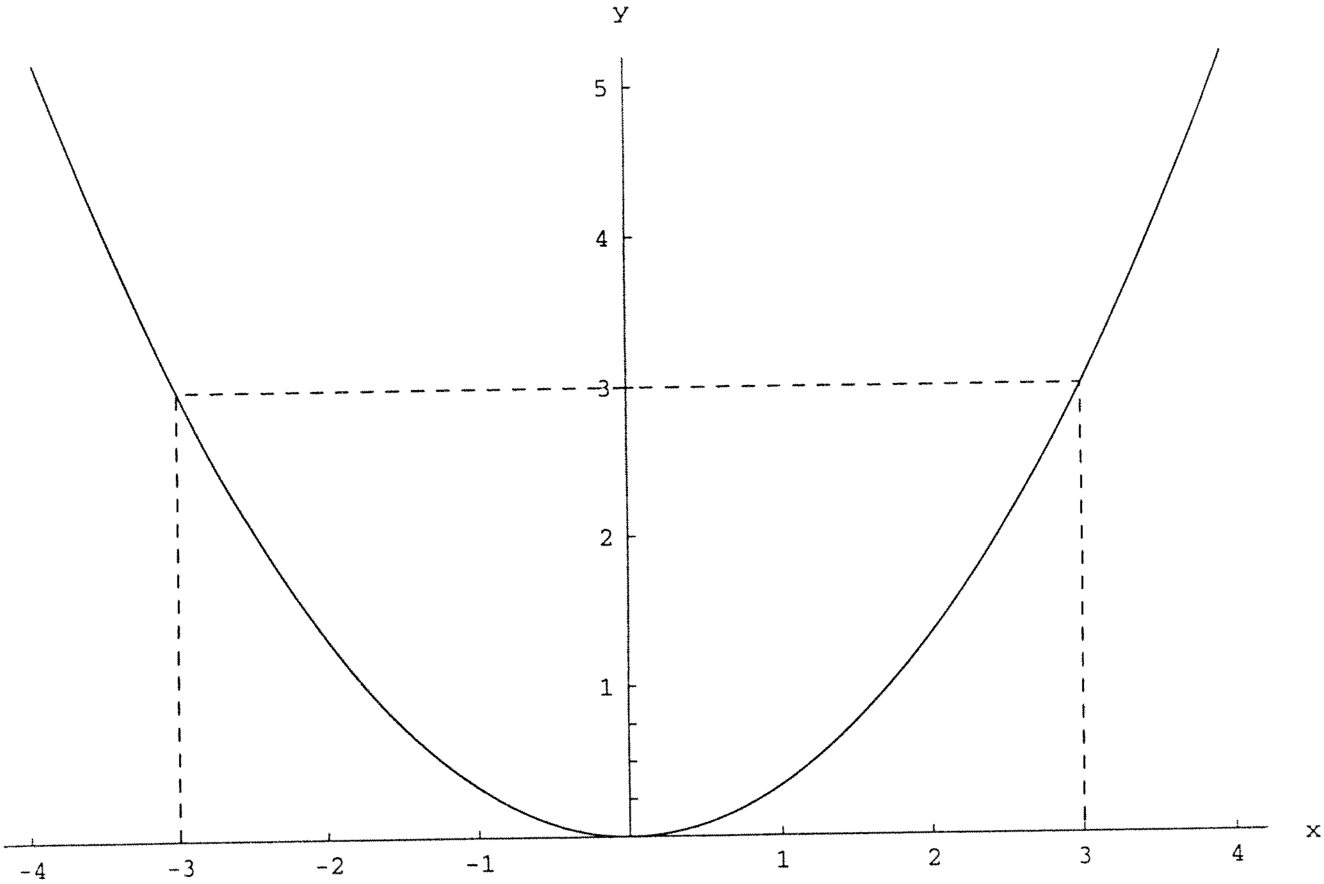


Parabel als Graph der quadratischen Funktion

Die Abbildung zeigt den Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = ax^2$. Du vermutest richtig: Es handelt sich dabei um eine Parabel! Kannst du deine Vermutung beweisen?

Für den Beweis helfen dir folgende Fragen:

- Welche Funktionsgleichung besitzt die abgebildete Parabel?
- Konstruiere Brennpunkt und Leitgerade! Wo liegen sie?
- Die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkt heisst Brennweite *f*. Welche Brennweite hat die abgebildete Parabel, und welcher Zusammenhang besteht vermutlich zwischen dem Öffnungsfaktor *a* aus der Gleichung $y = ax^2$ und der Brennweite *f*?
- Beweise nun, dass der Graph einer quadratischen Funktion tatsächlich eine Parabel ist. (Hinweis: Zeige, dass alle Punkte, die von dem Brennpunkt und der Leitgerade gleichen Abstand haben, die Funktionsgleichung erfüllen und umgekehrt.)



Parabel durch Papierfalten

Nimm ein Blatt Papier (Format A5). Markiere einen Punkt im Abstand 2 cm von der Mitte des längsseitigen Blattrandes (Fig. 1). Falte das Blatt wie auf dem Bild (Fig. 2), so dass der untere Blattrand den Punkt berührt. Falte das Blatt wieder auseinander und wiederhole diesen Faltvorgang mehrmals mit unterschiedlichen Winkeln. Dadurch entsteht eine Parabel.

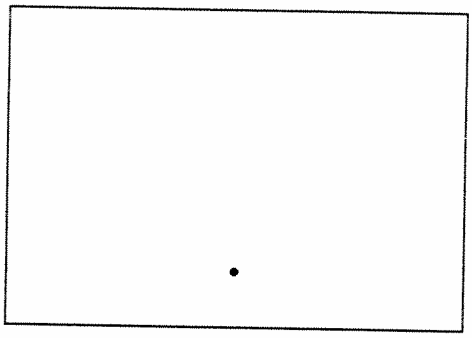


Fig. 1

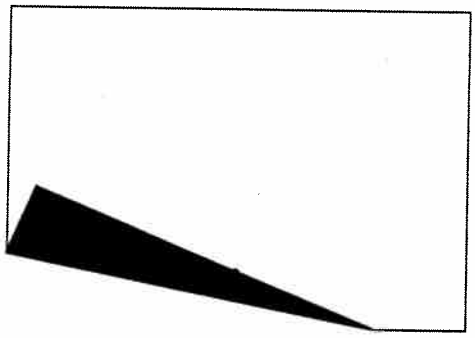


Fig. 2

Beantworte folgende Fragen:
- Weshalb handelt es sich um eine Parabel?
- Welches sind die Punkte der Parabel?
- Wo sind Brennpunkt und Leitgerade?
- Warum werden parallel zur Achse einfallende Strahlen zum Brennpunkt hin reflektiert?

Nimm ein neues Blatt Papier und wiederhole das Falten wie oben, indem du einen anderen Abstand für den zuvor markierten Punkt wählst. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Parabelform und dem Abstand des Brennpunktes von der Leitgeraden?

Streckungen von Parabeln

Auf der folgenden Seite ist eine Parabel mit Brennpunkt F und Leitgerade l abgebildet.

1. Zentrische Streckung der Parabel

Strecke die Parabel zentrisch mit dem Scheitel S als Streckungszentrum und dem Streckungsfaktor $k = 2$
(d.h.: jedem Punkt P der Parabel wird ein Bildpunkt P' wie folgt zugeordnet:
- P' liegt auf der Strecke SP bzw. auf ihrer Verlängerung
- für die Länge der Strecke SP' gilt: $\overline{SP'} = k \cdot \overline{SP}$)

Wiederhole diese zentrische Streckung mit $k = 1.5,\ 3,\ 5,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5}$.

Ist die Bildkurve stets wieder eine Parabel? Falls ja, welches sind Brennpunkt und Leitgerade der Bildkurve?

2. Axiale Streckung der Parabel

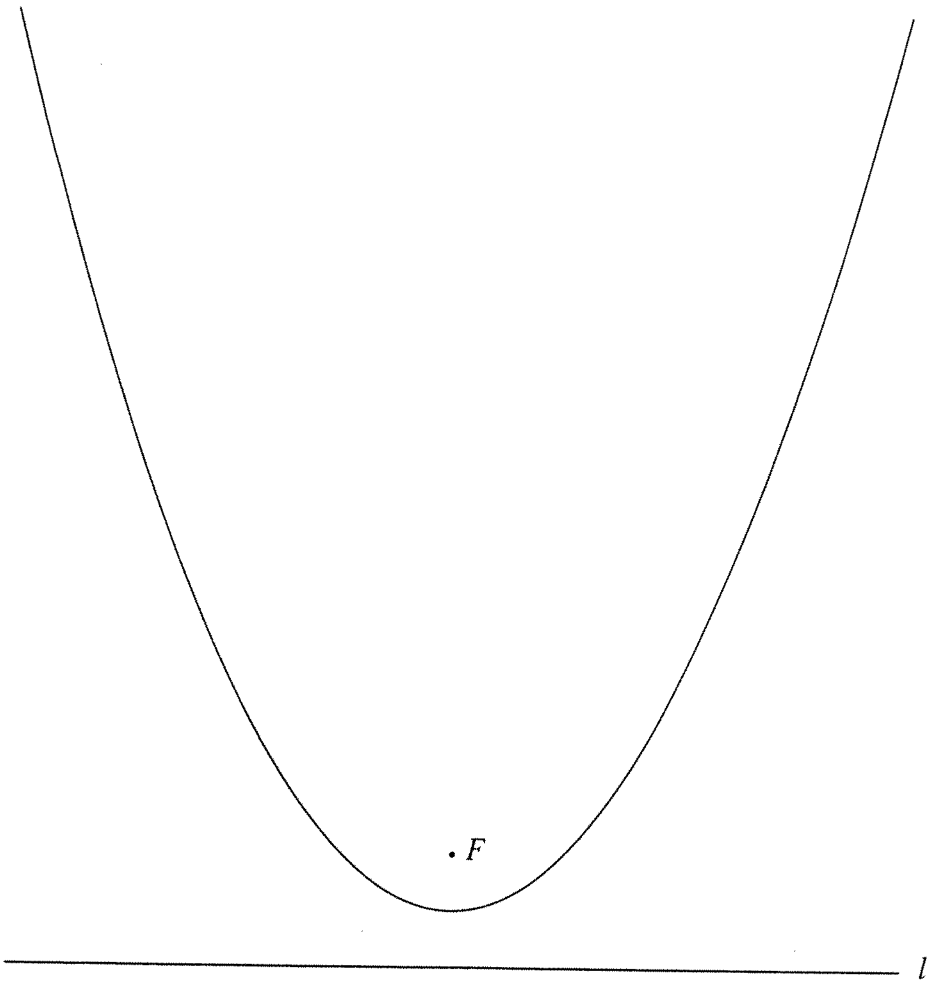
Strecke die Parabel axial bezüglich der Scheiteltangente mit dem Streckungsfaktor $k = 2$
(d.h.: jedem Punkt P der Parabel wird ein Bildpunkt P' wie folgt zugeordnet:
- P' liegt auf der Senkrechten zur Scheiteltangente durch P
- für den Abstand a' des Punktes P' von der Scheiteltangente gilt: $a' = k \cdot a$, wobei a der Abstand des Punktes P von der Scheiteltangente ist)

Wiederhole diese zentrische Streckung mit $k = 1.5,\ 3,\ 5,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5}$.

Ist die Bildkurve stets wieder eine Parabel? Falls ja, welches sind Brennpunkt und Leitgerade der Bildkurve?

3. Zentrische Streckung versus axiale Streckung

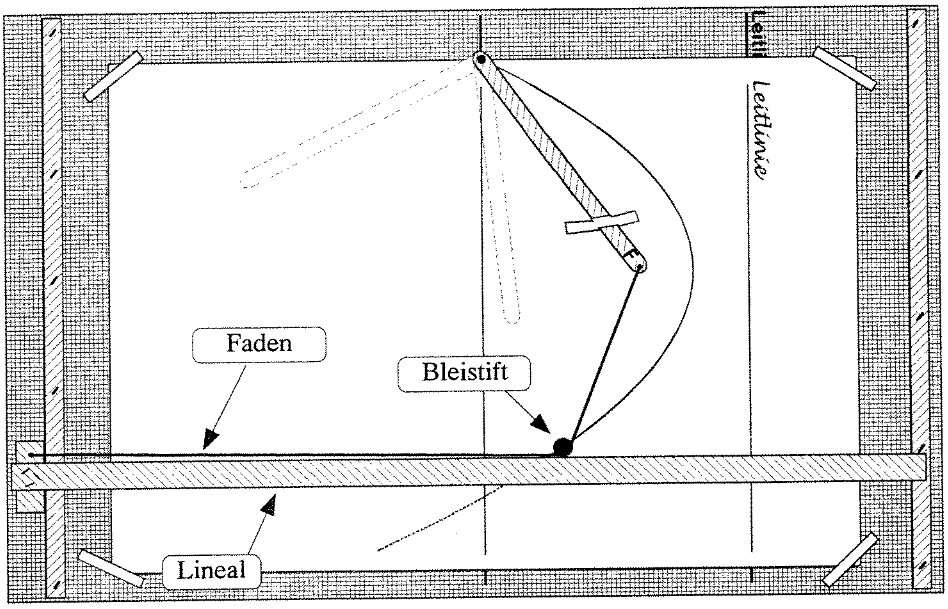
Welcher Zusammenhang besteht zwischen der zentrischen und der axialen Streckung einer Parabel?


F
l

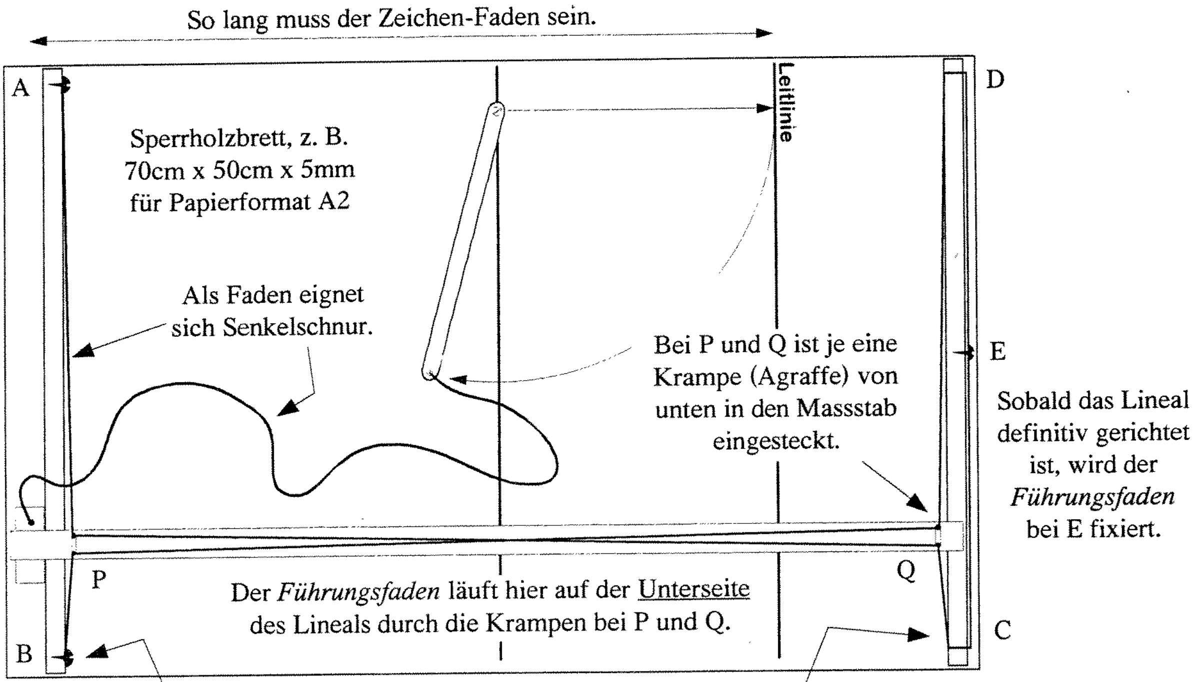
Ein Parabel-Zeichengerät selber bauen

Finde heraus, warum man mit dem abgebildeten "Gerät" Parabeln zeichnen kann. Baue das Gerät, zeichne damit eine Parabelschar und studiere ihre Eigenschaften. Wenn dir schöne Grafiken Freude machen, kannst du die von den Parabeln begrenzten Gebiete bunt ausmalen. Das schaut richtig gut aus!

Benützung des Gerätes: Lege das Brett in der gezeichneten Lage vor dich auf den Tisch. Schiebe ein Blatt Zeichenpapier unter den Schwenkarm und fixiere es mit Klebstreifen. Fixiere den Schwenkarm mit einem Klebstreifen auf dem Zeichenpapier. Kerbe einen Bleistift über der Spitze rundum ein. Schiebe das Lineal nach oben, hänge den Bleistift beim Faden ein und ziehe ihn gegen dich. Führe ihn so, dass der Faden angespannt bleibt und das Lineal mitgezogen wird.



Hinweise für den Bau des Gerätes: Verwende Sperrholz und Tannenleisten. Dann kannst du (fast) alles mit Heftklammern befestigen – das ist bequemer als Leimen und Schrauben. Wichtig ist, dass das Lineal gut läuft und sich nicht verkanten kann. Das erreichst du mit dem *Führungsfaden* APQCDQPB. Er zwingt das Lineal, stets senkrecht zu den Seitenleisten zu bleiben.



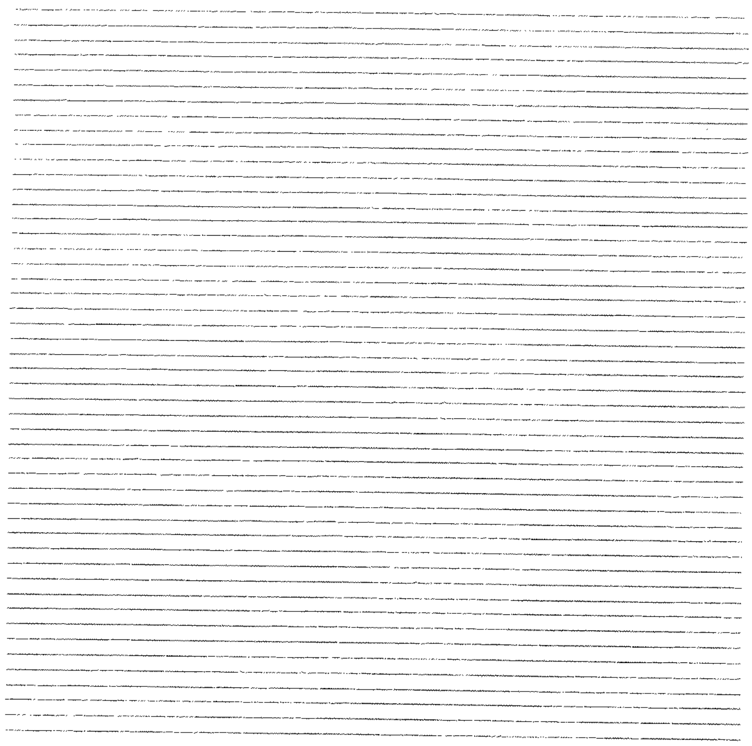
Der *Führungsfaden* ist bei A und bei B an der Seitenleiste befestigt.

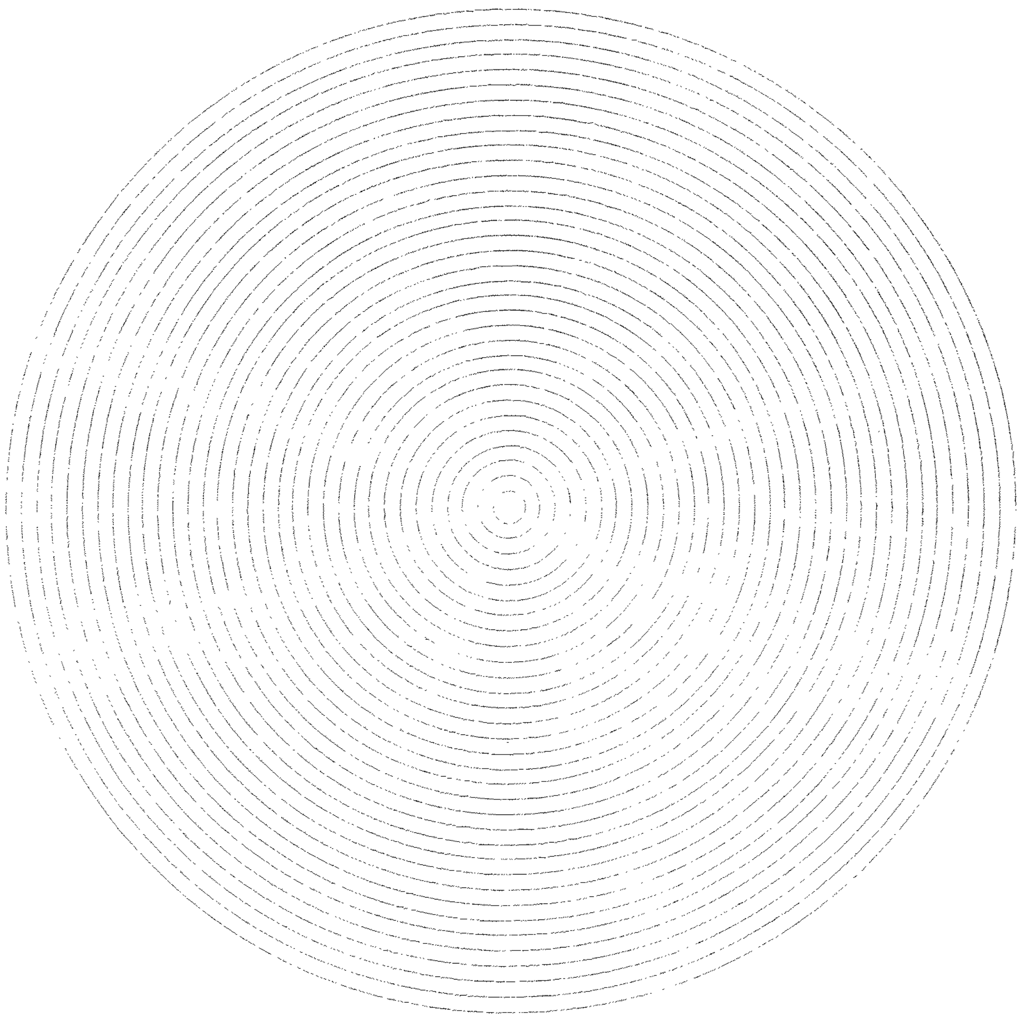
Der *Führungsfaden* führt bei C und bei D durch Bohrungen in der Seitenleiste.

Die Parabel als Moiré-Muster

Moiré heissen Muster, die sich bei der Überlagerung von regelmässigen Rastern ergeben. In der Druckerei-Technik sind sie unwillkommen. Dafür fanden sie schon früh das Interesse von Wahrnehmungsforschern. Zuhause entdeckt man sie bei feinen Gardinen oder Kleidern.

Kopiere dieses Blatt auf eine Projektor-Folie, schneide sie entzwei und lege die beiden Raster übereinander. Kannst du Parabeln entdecken? Wieviele? Wo sind ihre Brennpunkte und Leitgeraden? Gibt es kongruente Parabeln? Ähnliche?

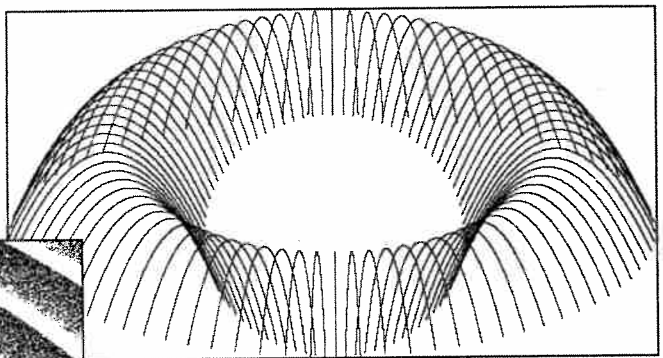


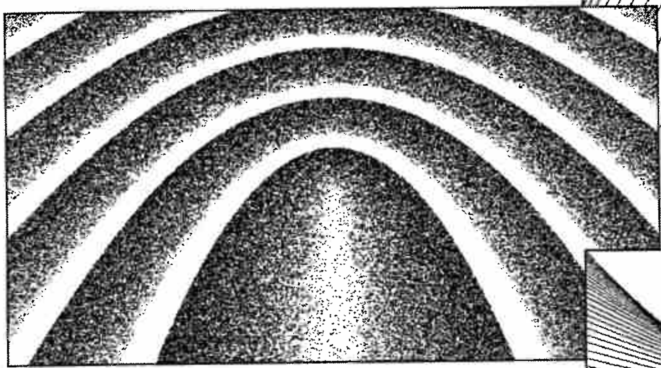


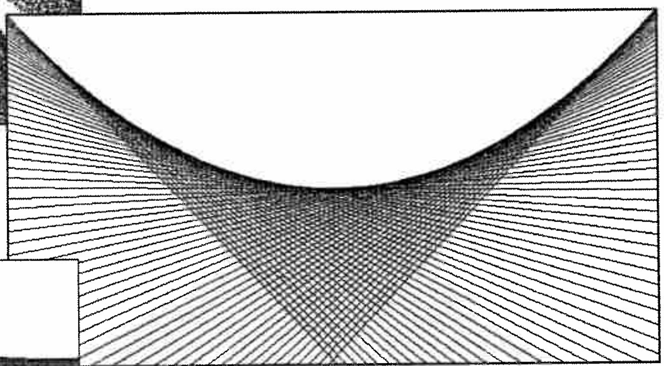
Parabelgraphiken

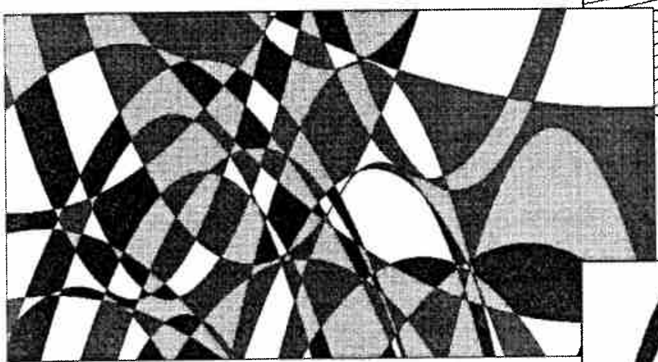
Steht dir ein Computer und eine Programmiersprache zur Verfügung? Dann kannst du faszinierende Graphiken programmieren, in denen Parabeln die Hauptrolle spielen. Benütze die mathematischen Eigenschaften der Parabel – und lass deiner Phantasie freien Lauf!

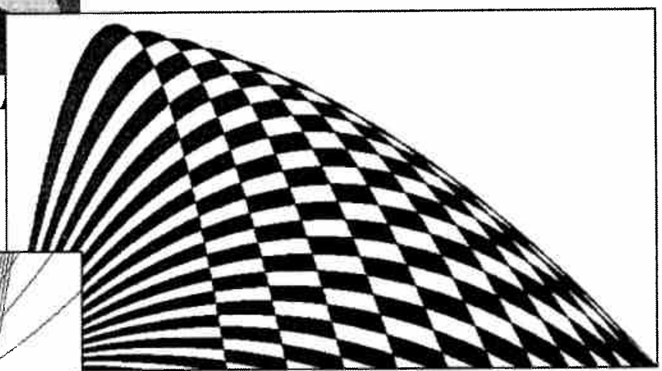
Die folgenden Beispiele sind mit einfachstem BASIC programmiert. Auf dem Bildschirm sind die Bilder farbig.

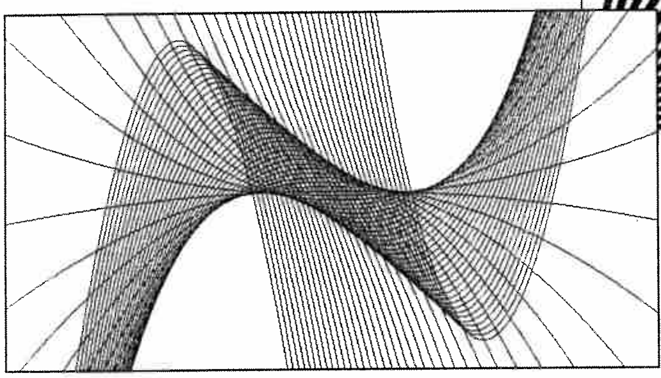










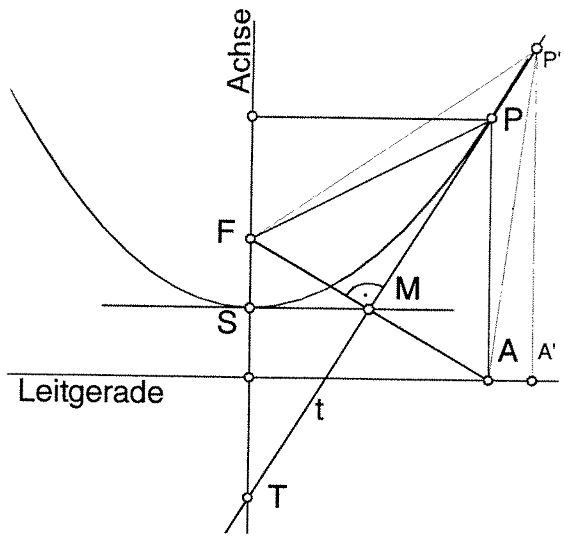


Anhang: Spezifische Vorkenntnisse

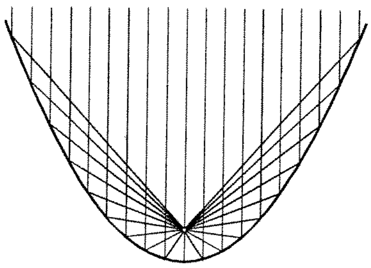
1. Grundlagen, über die Ihre Schüler für die Projektarbeit verfügen sollten

Die Parabel wird definiert als Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt F und einer festen Geraden ℓ gleichen Abstand haben. F heisst **Brennpunkt**, ℓ **Leitgerade** der Parabel.

Die Parabel ist achsensymmetrisch zur Normalen durch F zu ℓ. Man nennt die Symmetrieachse kurz **Achse** der Parabel. Der Parabelpunkt S auf der Achse heisst **Scheitelpunkt**. Er halbiert definitionsgemäss den Abstand des Brennpunktes von der Leitgeraden. Die Parallele zur Leitgeraden durch S – augenscheinlich eine Tangente – heisst **Scheiteltangente.**

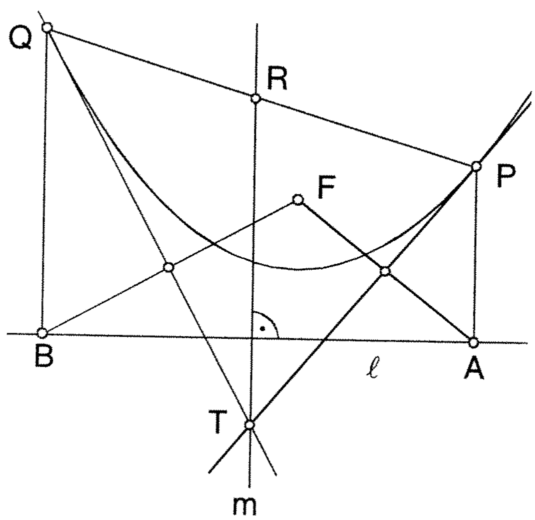


Bezeichnet P einen Parabelpunkt und A die Normalprojektion von P auf die Leitgerade, so ist die Mittelsenkrechte t von FA die Parabeltangente in P, denn jeder weitere Punkt $P' \neq P$ von t liegt wegen $\overline{P'F} = \overline{P'A} > \overline{P'A'}$ näher bei der Leitgeraden als bei F. Die Dreiecke APM und FTM sind kongruent (wsw), das Viereck FTAP ist ein Rhombus. Sein Mittelpunkt M liegt auf der Scheiteltangente. Die Normalprojektion von P auf die Achse und der Schnittpunkt T der Tangente liegen symmetrisch zu S.



Aus der Tatsache, dass t den Winkel FPA halbiert, ergibt sich die Reflexionseigenschaft der Parabel: achsenparallel einfallende Strahlen sammeln sich im Brennpunkt; vom Brennpunkt ausgehende Strahlen verlassen die Parabel achsenparallel.

Sind P und Q zwei Parabelpunkte und A und B die Fusspunkte ihrer Lote auf die Leitgerade, so sind die beiden Tangenten in P und Q die Mittelsenkrechten zweier Seiten im Dreieck ABF. Die Achsenparallele m durch ihren Schnittpunkt T ist folglich die dritte Mittelsenkrechte und damit die Mittelparallele von (PA) und (QB). Ihr Schnittpunkt R mit der Sehne PQ halbiert diese.

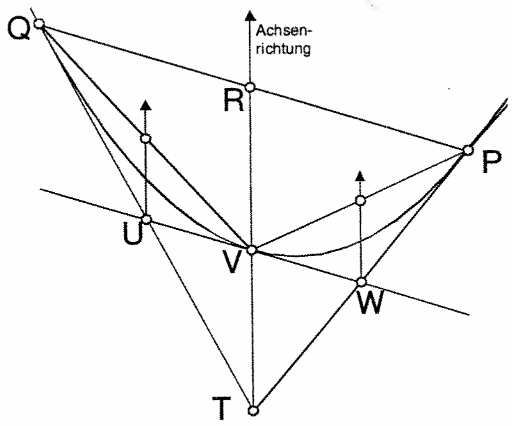


Offenbar lässt sich aus zwei Tangenten und ihren Berührpunkten sofort die Achsenrichtung der Parabel angeben. Danach findet man F durch Reflexion der in P und Q achsenparallel einfallenden Strahlen, schliesslich ℓ aus $\overline{PA} = \overline{PF}$.

2. Zusatzwissen, das Sie Ihren Schülern nach Bedarf zur Verfügung stellen

Das folgende Rüstzeug würden wir nicht im voraus vermitteln. Ob, wann, wie und in welchem Umfang Sie den Schülern Zusatzinformationen liefern, hängt vom Verlauf der Arbeit, von Ihren Schülern und von Ihren eigenen Präferenzen ab.

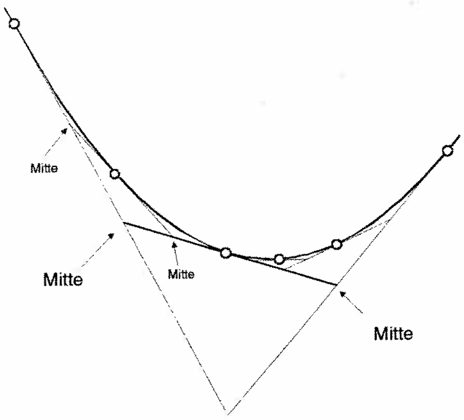
Im Sehnentangentendreieck oder kurz «**Tangentendreieck**» PTQ ist durch T die Achsenparallele gelegt. Sie schneidet die Parabel in V und trifft die Sehne PQ in der Mitte.



In V wird die Parabeltangente gelegt. Sie schneidet die Dreiecksschenkel in U und W.

Durch U und W werden die Achsenparallelen gelegt. Sie treffen die Sehnen QV bzw. PV je in der Mitte. Strahlensatzüberlegungen zeigen:

U halbiert QT, W halbiert PT, UW ist parallel zu QP, V halbiert UW und auch RT. Anders gesagt: Die Mittellinie des Tangentendreiecks ist Parabeltangente, ihr Mittelpunkt ist der Berührpunkt.



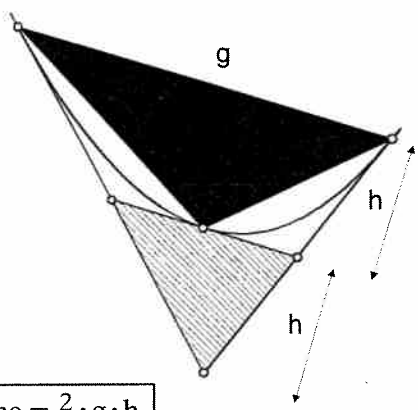
Anwendung: einen Parabelbogen schön zeichnen

Hat man zwei Parabeltangenten mit ihren Berührpunkten, kann man den dazwischen liegenden Bogen auf einfachste Weise recht genau zeichnen. Weder Leitgerade noch Brennpunkt sind dazu nötig, ja nicht einmal die Achsenrichtung. Man fügt einfach laufend neue Tangenten mit ihren Berührpunkten ein, indem man bei schon vorhandenen Tangentendreiecken die Mittellinie mit ihrem Mittelpunkt einzeichnet. (Selbst ohne Lineal und per Augenmass erzielt man schöne Parabelbogen.)

Weitere Anwendung: die Fläche des Parabelsegmentes berechnen

Wir betrachten ein Parabelsegment mit zugehörigem Tangentendreieck, das wir in ein schwarzes «Innendreieck», ein graues «Aussendreieck» und eine weisse «Restfläche» zerlegen.

Das Innendreieck beansprucht die Hälfte der ganzen Dreiecksfläche, das Aussendreieck einen Viertel und die Restfläche ebenfalls einen Viertel.

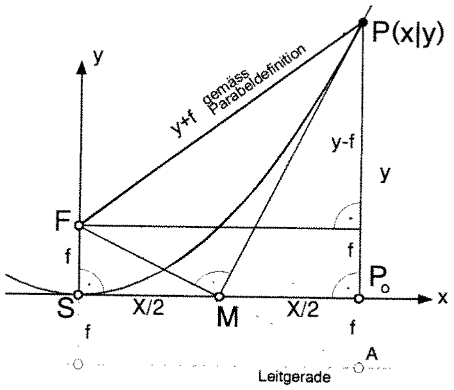


Die weisse Restfläche besteht aus zwei neuen Tangentendreiecken. Zerlegen wir diese analog, so reduziert sich die Restfläche auf einen Sechzehntel der Gesamtfläche.

Da die Restfläche stets aus Tangentendreiecken besteht, lässt sich der Vorgang endlos fortsetzen. Die Restfläche schrumpft dabei zügig dahin, derweil sich das Innere des Parabelsegmentes schwarz und das Äussere grau färbt. Da jedes Innendreieck doppelt so gross ist wie das zugehörige Aussendreieck, macht das Parabelsegment zwei Drittel der gesamten Dreiecksfläche aus: $\boxed{\text{Segmentfläche} = \frac{2}{3}\cdot g\cdot h}$

Brücke zur Algebra

Die Koordinatengleichung der Parabel kann zum Beispiel direkt aus der Definition gewonnen werden. Für den Abstand $\overline{FP}$ benötigen die Schüler den Satz von Pythagoras. Bezeichnet $f = \overline{SF}$ die «Brennweite» der Parabel, so ist $(y+f)^2 = x^2 + (y-f)^2$, woraus man nach kurzer Umformung $y = \frac{1}{4f} x^2$ erhält.



Einen andern Weg bietet die Ähnlichkeit der Dreiecke FSM und MP_0P. Aus $\frac{y}{x/2} = \frac{x/2}{f}$ erhält man $y = \frac{1}{4f} x^2$, ferner für die Tangentensteigung $m = \frac{y}{x/2} = \frac{1}{2f} x$.

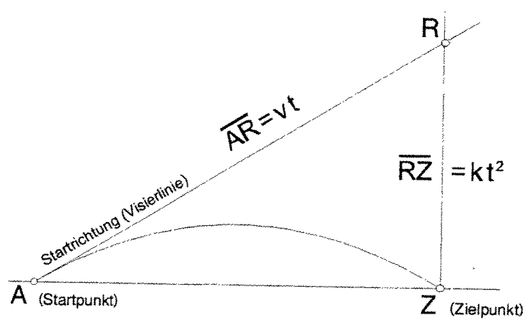
Das den Schülern möglicherweise vertraute Bild der Funktion $y = a x^2$ erweist sich also als Parabel im Sinne der planimetrischen Definition. Ihre Brennweite beträgt $f = \frac{1}{4a}$, die Tangentensteigung $m = 2ax$.

Schiefer Wurf

Der Projektteil "Parabel als Bahnkurve schiefer Würfe" strebt eine Auseinandersetzung nicht mit der Physik, sondern mit der *Geometrie* des schiefen Wurfes an. Dennoch fragen Ihre Schülerinnen und Schüler vielleicht nach Begründungen für die entdeckten Zusammenhänge, oder Ihnen selber liegt an einer Erörterung. Für den Mathematikunterricht dürften folgende Grundlagen genügen:

Bewegt sich ein Gegenstand mit gleichbleibender Geschwindigkeit v vorwärts, so ist der von ihm zurückgelegte Weg s proportional zur verstrichenen Zeit t: $s=v\cdot t$. Lässt man einen Gegenstand frei fallen, so gilt dieses Gesetz nicht; der Körper wird ja immer schneller. Aber es gilt ein anderes, nicht viel komplizierteres: Der Weg ist proportional zum *Quadrat* der verstrichenen Zeit: $s=k\cdot t^2$. Der Faktor k ist für alle Gegenstände gleich. Er beträgt ziemlich genau 5, wenn s die Anzahl Meter und t die Anzahl Sekunden seit dem Beginn des freien Falles ist. (Das Gesetz ist ungültig, wenn der Gegenstand so leicht ist oder so schnell wird, dass ihn die Luft merklich bremst.)

Beim schiefen Wurf startet der Gegenstand im Punkt A mit einer gewissen Geschwindigkeit v in schräger Richtung. Gäbe es keine Schwerkraft, würde er mit gleichbleibender Geschwindigkeit geradlinig weiterfliegen und nach einer gewissen Zeit t den Punkt R erreichen. Nun beginnt aber, sobald der Gegenstand unterwegs ist, auch seine Fallbewegung. Statt in R landet er um die Fallstrecke $k\cdot t^2$ tiefer im Zielpunkt Z.

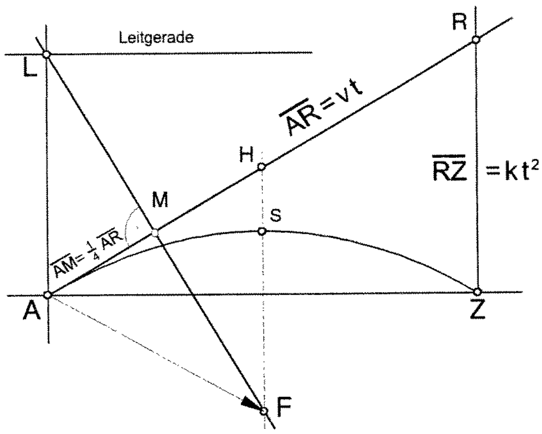


Geometrie des schiefen Wurfes

Wenn akzeptiert ist, dass es sich bei der Wurfbahn um eine Parabel handelt, ergibt sich eine einfache Erkenntnis über die Lage des Brennpunktes F und der Leitgeraden.

Die Visierlinie (AR) ist Parabeltangente. Ihr Schnittpunkt H mit der Parabelachse halbiert AR, und M halbiert AH. Die Dreiecke LAM und ARZ sind ähnlich. Aus $\overline{LA} : \overline{AM} = \overline{AR} : \overline{RZ}$ folgt

$$\overline{AL} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AR}}{\overline{RZ}} = \frac{\frac{1}{4}\overline{AR}^2}{\overline{RZ}} = \frac{\frac{1}{4}(vt)^2}{kt^2} = \frac{v^2}{4k}.$$



Das heisst: Der Abstand $\overline{AL}$ und damit der gleich grosse Abstand $\overline{AF}$ hängt nur von der Startgeschwindigkeit v ab. Würfe verschiedener Schräge mit immer derselben Startgeschwindigkeit ergeben eine Parabelschar mit gemeinsamer Leitlinie und ihren Brennpunkten auf einem Kreis um A.

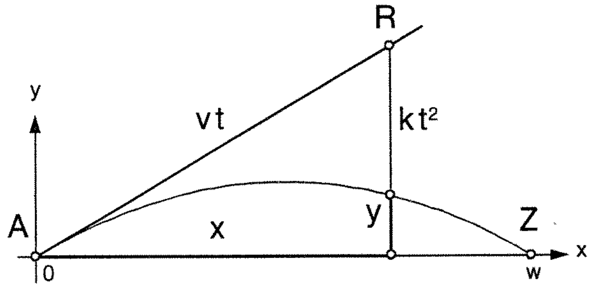
Da Z doppelt so weit rechts liegt wie F, erhält man den weitesten Wurf, wenn der Brennpunkt auf AZ liegt. Die Visierlinie ist dann 45° geneigt, und die Wurfweite beträgt $w = 2\overline{AF} = 2\overline{AL} = v^2 / (2k)$.

Beim senkrechten Wurf nach oben entartet die Parabel; F, S und L fallen zusammen. L markiert also den Hochpunkt des senkrechten Wurfes. Die Wurfhöhe beträgt $h = \overline{AL} = v^2 / (4k)$.

Algebra des schiefen Wurfes

Wenn feststeht, dass das Bild einer quadratischen Funktion eine Parabel ist, so lässt sich der Nachweis für die parabolische Wurfbahn ohne grossen Aufwand erbringen. Man führt am besten die **Steigung m** der Visierlinie ein. Es ist dann einerseits $y = mx - kt^2$ und andererseits $v^2t^2 = x^2 + m^2x^2$. Daraus ergibt sich

$$y = -\frac{k}{v^2}(1+m^2)\,x^2 + mx,$$



also eine nach unten geöffnete Parabel. Ihre rechte Nullstelle liefert die Wurfweite

$$w = \frac{v^2}{k} \cdot \frac{m}{1+m^2}.$$

Es gilt

a) $\frac{m^2+1}{m} = m + \frac{1}{m}$

b) für m>0

$\frac{m^2+1}{m} = \frac{(m-1)^2}{m} + 2 \geq 2$

Um w zu diskutieren, schaut man etwa den gekehrten Bruch $(m^2+1)/m$ näher an (siehe links).

a) zeigt, dass reziproke Steigungen (komplementäre Startwinkel) gleiche Wurfweiten liefern. Jeder Zielpunkt Z ist mit einem steilen oder einem flachen Wurf erreichbar.

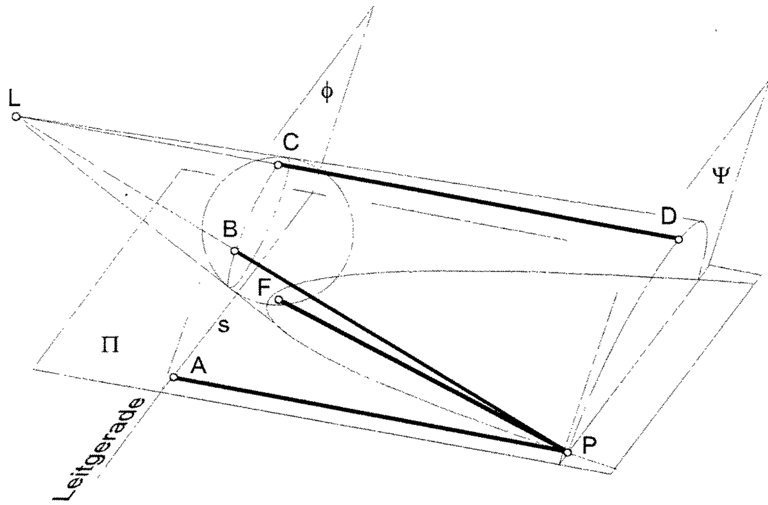
b) zeigt, dass die Wurfweite ihren grössten Wert für m=1, also den Startwinkel 45° erreicht, nämlich $w_{max}=v^2/(2k)$.

Kugelschatten: Nachweis der Parabelform mithilfe der Dandelin'schen Kugel

Eine Kugel liege auf der Tischfläche Π. Mit etwas Abstand sei auf der Höhe des obersten Kugelpunktes C eine punktförmige Lichtquelle L positioniert.

Die Lichtstrahlen, die die Kugel streifen, bilden eine Drehkegelfläche. Der oberste Lichtstrahl (LC) läuft horizontal, die übrigen schneiden Π entlang der Schlagschattengrenze.

Diese erweist sich als Parabel. Der Berührpunkt F der Kugel auf dem Tisch ist ihr Brennpunkt, die Schnittgerade s der Berührkreisebene Φ mit dem Tisch ihre Leitgerade.



Zum Beweis überlegt man, dass ein beliebiger Punkt P der Schlagschattengrenze von F und s den gleichen Abstand hat:

A sei der Fusspunkt des Lotes von P auf s und ψ die Parallelebene zu Φ durch P. Dann ist

$\overline{PF} = \overline{PB}$, weil dies Tangentenabschnitte von P an dieselbe Kugel sind,

$\overline{PB} = \overline{DC}$, weil diese Mantellinienabschnitte durch Rotation um die Kegelachse ineinander übergeführt werden können,

$\overline{DC} = \overline{PA}$, weil dies parallele Verbindungsstrecken zwischen zwei parallelen Ebenen sind.

Also ist $\overline{PF} = \overline{PA}$, was die Behauptung beweist.

Quellen

[1] Urs Moser, Erich Ramseier, Carmen Keller, Maja Huber: Schule auf dem Prüfstand - Eine Evaluation der Sekundarstufe I auf der Grundlage der Third International Mathematics and Science Study. Verlag Rüegger, Chur, 1. Aufl. 1997. ISBN 3-7253-0566-8.

[2] Bernd Wiegand: Einige Ergebnisse der Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) in Bezug auf Mathematik. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Heft 7/1997, Seiten 433-437.

[3] Schlechte Noten für den Mathematikunterricht in Deutschland - Anlass und Chance für Innovation - Erklärung der Fachverbände DMV/GDM/MNU zu den Ergebnissen der internationalen Mathematikstudie TIMSS. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Heft 3/1997, Seite 182.

Prof. U. Kirchgraber
Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89–01	H. Walser	Fraktale
89–02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89–03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89–04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90–01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90–02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91–02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91–03	M. Federer	Preistheorie
91–04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92–01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93–04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93–05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93–06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93–07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94–01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94–02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94–03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94–04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95–01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95–02	U.Kirchgraber	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten.
	U. Kirchgraber, N. Sigrist	Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95–03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95–04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
95–05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95–06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme
96–01	W. Burgherr	Schwimmende Prismen mit Schlagseite
96–02	M. Struwe	Sattelpunkte oder Variationsprinzipien in Geometrie und Mechanik
96–03	M. Huber	Warum denn ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar?
97–01	B. Eicke, E. Holzherr	Analysis – mit dem Computer-Algebra-System des TI-92 (Preis: Fr. 8.- inkl. MWSt)
97–02	C. Blatter	Notizen zu einer Mathematik fürs Leben
97–03	F. Spirig	Elemente zur Kugelgeometrie
98–01	U. Kortenkamp, J. Richter-Gebert	Geometry and Education in the Internet Age
98–02	M. Adelmeyer	KS Flight Simulator
98–03	H. Struve	Geometrie aus Schülersicht: Charakteristika und Probleme
98–04	M. Ludwig	Platonische Durchdringungen – ein Projekt im Mathematikunterricht der Klasse 10 (Preis: Fr. 5.- inkl. MWSt)
98–05	M. Adelmeyer,W. Durandi, M. Kopp	Schullotto – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98–06	J.-P. David, P. Hänsli, M. Leupp	Parabeln – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98–07	B. Dzung Wong, H.-W. Henn	Der Regenbogen – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98–08	M. Bettinaglio, F. Lehmann	Billard – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)