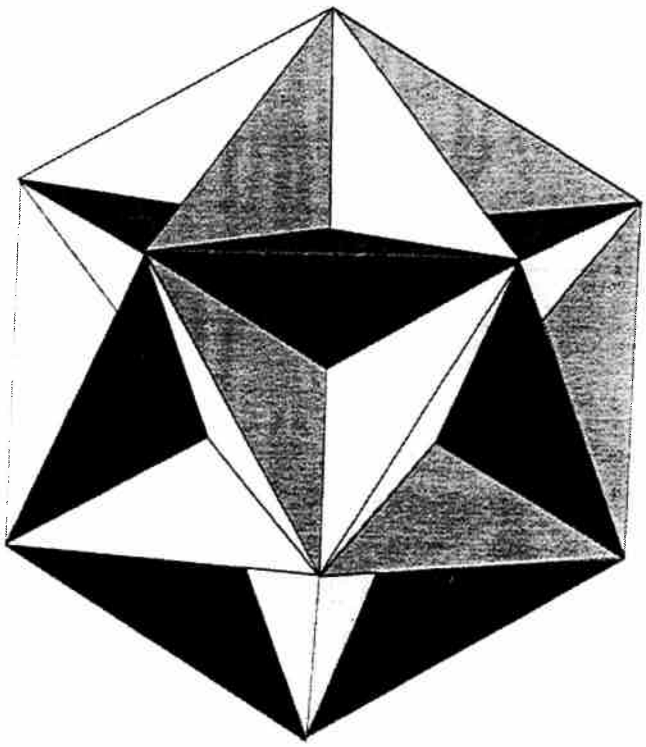
Platonische Durchdringungen

Ein Projekt[I] im Mathematikunterricht der Klasse 10



Matthias Ludwig, Klopfergasse 7, D-97084 Würzburg, m.ludwig@mail.uni-wuerzburg.de

Astrid Romer, Achenbergweg 13, CH-5313 Klingnau, aromer@kzu.ch

[I] Dieses Projekt wurde von der Schweizerischen Gesellschaft für Mathematik (SMG) und dem Programm „ETH für die Schule“ gefördert.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorbemerkung

1.1 Für den Lehrer

Dieses Projekt erfordert vom durchführenden Lehrer eine gewisse Liebe zur Raumgeometrie, die ihm die nötige Ausdauer verschafft, sich mit den Durchdringungskörpern zu beschäftigen und sie zu verstehen. Dieser Bericht gibt Anregungen und Hinweise zur Projektdurchführung und stellt Startmaterial zur Verfügung. Es gibt aber gute Gründe, dieses Projekt trotz seines Mehraufwandes gegenüber alltäglichem Unterricht durchzuführen. Einige seien in diesem Vorspann genannt:

- Durch Projekte wird die Teamarbeit unter den Schülern gefördert. Zudem verändert sich das Verhältnis zwischen Schülern und Lehrer positiv.
- Dadurch, dass die Schüler ihre Aufgaben selbständig lösen müssen sind sie auch für ihre Rechenfehler und damit auch für „schiefe", schlecht gebaute Körper verantwortlich. Die Verantwortungsbereitschaft der Schüler für ihr Tun erhöht sich.
- Mit diesem Projekt ist man in der Lage, die Schülerinnen und Schüler dazu zu bringen ihre Kenntnisse aus der Planimetrie (Pythagoras, Strahlensatz usw.) auf räumliche Problemstellungen anzuwenden.
- Durch das intensive Arbeiten mit den stereometrischen Grundkörpern wird das Raumvorstellungsvermögen geschult.
- Der Bau von Durchdringungskörpern erfordert exaktes Arbeiten und Konstruieren, zudem muss man sich über die einzelnen Arbeitsschritte im Klaren sein.
- Durch die Beschäftigung mit den Durchdrigungskörpern wird die Schönheit der Geometrie für viele Schülerinnen und Schüler (wieder) sichtbar.

1.2 Zum Projekt

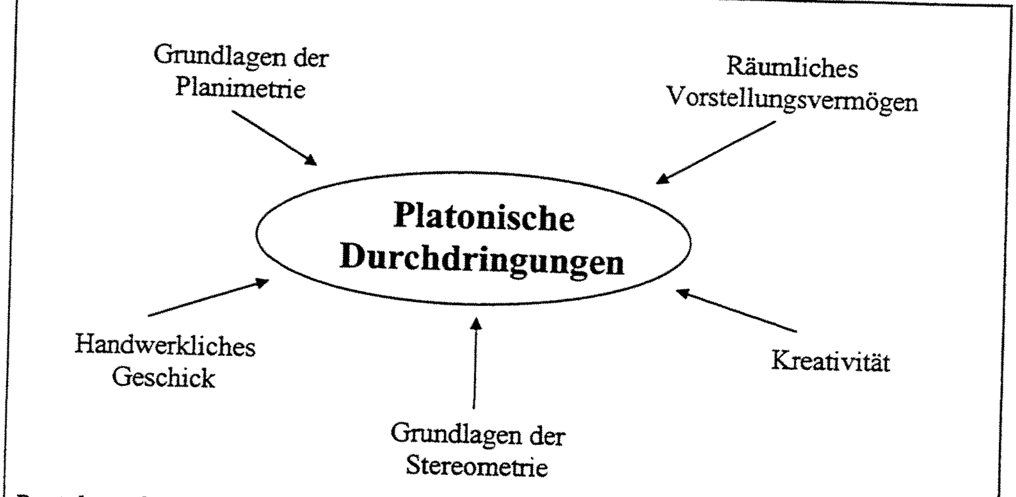
Dieser Vorschlag für ein Projekt im Mathematikunterricht ist für mehrere Jahrgangsstufen geeignet. Das Projekthema ergibt sich aus der Ästhetik der Platonischen Körper und ihrer Sternformen. Solch einen Körper 2-dimensional auf Papier zu sehen, ist schon beeindruckend, ihn in Realität vor sich zu haben, ist ein Erlebnis. Platonische Körper bzw. deren Durchdringungen zu berechnen und selbst herzustellen und sie dann in Händen zu halten, ist aber noch eine Steigerung. Je vielfältiger und interessanter die Durchdringungen, desto schwieriger ist es

aber auch, die erforderlichen Berechnungen durchzuführen; dennoch, die Arbeit wird sich lohnen, und die Schüler und auch der Lehrer werden stolz auf „ihre“ Körper sein.[II]
Es sei noch erwähnt, dass mit den Worten Schüler und Lehrer auch immer der weibliche Part gemeint ist. Sobald es sich aber um eine reine Schülerinnen- oder Schülergruppe handelt, so wird dies aus dem Text deutlich.

2. Hinführung zum Projekt

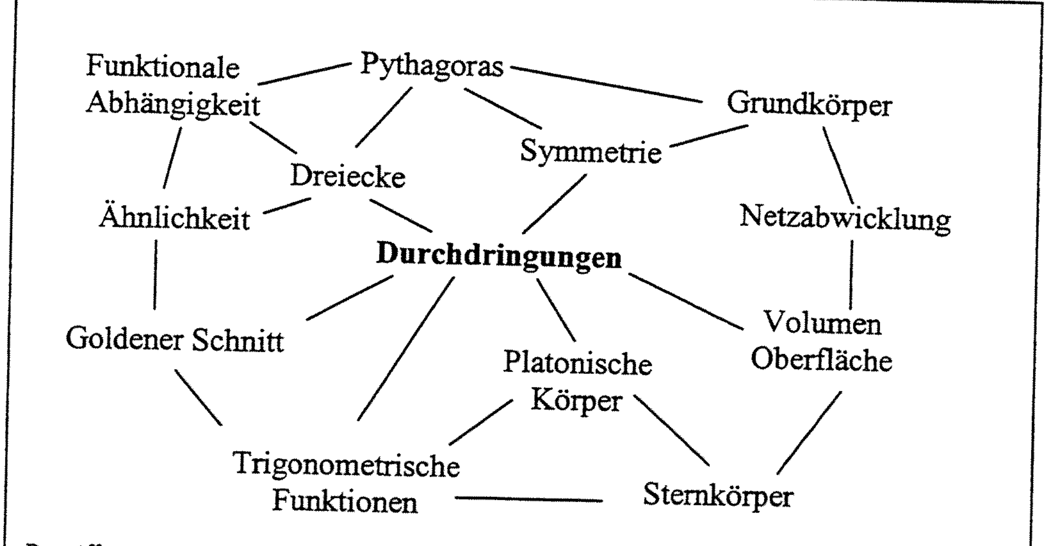
Von der Frey'schen Sicht (FREY 1995) aus ist in Mathematik eigentlich gar kein Projekt möglich, da der Lehrer fast immer den Projektanstoss gibt. Man kann diesen Projektanstoss aber so geben, dass die Schüler es nicht als Anstoss im negativen Sinne empfinden, sondern es wirklich als „ihr“ Projekt sehen. Man muss sich darüber im Klaren sein, dass Projektunterricht eine Struktur hat, so wie andere Unterrichtsmethoden auch. Z.B. sind manche Projektthemen dazu geeignet, den behandelten Stoff in einer Art Rückschau anzuwenden (reflexiv), dagegen gibt es Projekte, bei denen die Schüler durchaus in die Lage versetzt werden, sich neue mathematische Inhalte zu erarbeiten (projektiv). Ein weiterer Strukturfaktor ist der Bearbeitungsmodus. Es ist nämlich von Bedeutung, ob man einen zentralen mathematischen Begriff, der sich in vielerlei Bereichen wiederfindet, als Thema gewählt hat, oder ob man sich ein allgemeineres Thema ausgesucht hat, zu dessen Bearbeitung man vielfältige Beteiligung aus verschiedenen Fächern und die verschiedensten Fähigkeiten benötigt. Man unterscheidet hier den Stern- und den Magnetmodus(LUDWIG 1997)
Bei den Platonischen Durchdringungen handelt es sich um ein reflexives Magnetthema (siehe Graphik 1), d.h. dass den Schülern der benötigte Stoff im vorangegangenen Unterricht zur Verfügung gestellt wurde und dass verschiedene Fächer und Fähigkeiten zur Bearbeitung benötigt werden.

II Das Konzept für dieses Projekt wurde auf einer Arbeitstagung für MathematiklehrerInnen in Valbella entworfen. Dieser Workshop unter der Leitung von Prof. Dr. Kirchgraber wurde von der SMG und ETH Zürich finanziell unterstützt. An dieser Stelle möchten wir noch einmal dafür danken.



Projektstruktur: Reflexives Magnetthema — *Graphik 1*

Was bedeutet dies für den Mathematiklehrer? Nun, er wird rechtzeitig mit dem Kunsterzieher Kontakt aufnehmen und mit ihm den groben Projektablauf durchsprechen. Wichtig ist es auch für die Lehrkräfte, sich über die Ziele dieses Projektes im Klaren zu sein. Es ist nämlich so, dass während eines Projektes der Anspruch des Lehrers an seine Schüler steigt. Gute Dienste hat hier das Begriffsnetz (siehe Graphik 2) geleistet, welches einer Art Erwartungshorizont entspricht und den Lehrer an die anfänglichen Ansprüche erinnert. Ebenfalls beinhaltet solch ein Begriffsnetz alle für dieses Projekt wichtigen Schlagwörter.



Begriffsnetz zu den Platonischen Durchdringungen — *Graphik 2*

Im Vorfeld des Projektes ist es neben diesem Begriffsnetz vor allem wichtig, auf die Fähigkeiten der Schüler im handwerklichen wie im mathematischen Bereich einzugehen. Dies geschieht durch die Vorbereitung sogenannter Rahmengruppen. Diese Gruppen, in die sich die Schüler selber einteilen können oder vom Lehrer eingeteilt werden, dienen dazu, den jeweiligen Bedürfnissen der Schüler gerecht zu werden. In der Klasse gibt es „Rechenkünstler" neben „Raumvorstellungswundern" bzw. „Trigonometrieexperten" neben „Elementargeometern". Durch die Rahmengruppen, die dem Projekt eine innere Differenzierung geben, gelingt es, diese Talente zu fördern, bzw. ihre Interessen anzusprechen. Es lassen sich eine ganze Reihe von Rahmengruppen für dieses Projekt einer 10. Jahrgangsstufe angeben. Hier sieht man unsere Auswahl:

<u>Die Rahmengruppen</u>

- *Platonische Körper*
  - Diese Gruppe ist für alle Schüler verbindlich.
  - Bau sämtlicher regelmäßiger Polyeder.
- *Sternkörper*
  - Es sollen aus den Platonischen Körpern die einfachen Sternkörper entwickelt werden.
  - Keplersterne, Ikosaedersterne, Dodekaederstern.
- *Tetraederdurchdringungen*
- *Oktaederdurchdringungen*
- *Hexaederdurchdringungen*
- *Phantastische Durchdringungen*
  - Es sollen Eigenkreationen von Durchdringungen entworfen werden.
  - Es sollen die einzelnen Durchdringungsphasen gebaut werden.
- *Computerdarstellung von Durchdringungen*
  - Darstellung von den Platonischen Körpern im Würfel.
  - Darstellungen von Tetra-, Okta-, Hexaederdurchdringungen.

Nachdem nun die Rahmengruppen mit den Kollegen ausgewählt wurden, stellt man sie den Schülern vor. Dies kann in verschiedener Weise passieren. Eine Möglichkeit ist, aus jeder Rahmengruppe ein Modell zu zeigen, welches die Lehrkraft schon im Vorfeld gebaut hat. Ebenso kann man auch Bilder aus Büchern (z.B. ADAM, WYSS, 1984, COXETER, H.S.M., 1963) bzw. das Bildmaterial aus Kapitel 7 vorstellen. Denkbar ist auch, dass man schon während des laufenden Schuljahres den einen oder anderen Körper mit in den Unterricht bringt und so die Schüler mit den Körpern vertraut macht. In geeigneten Fällen können dadurch die Rahmengruppen auch mit den Schülern erstellt werden.

Die grundlegenden mathematischen Fähigkeiten, welche die Schüler für dieses Projekt mitbringen müssen, sind Kenntnisse über

- die Satzgruppe des Pythagoras,
- den Goldenen Schnitt,
- den Strahlensatz,
- die Trigonometrischen Funktionen,
- die Wurzelrechnung mit Variablen und
- das Auflösen von (linearen und quadratischen) Gleichungen .

3. Die Ziele des Projektes

Nachdem nun ein grobes Orientierungsraster für die Schüler und die beteiligten Lehrer entstanden ist, soll natürlich noch erläutert werden, welche Ziele mit diesem Projekt verfolgt werden. Diese Ziele decken sich weitgehend mit den Gründen, warum dieses Projekt durchgeführt werden soll. Zum einen spielt bei einem Projekt die soziale Komponente eine herausragende Rolle. So sollen die Schüler zur Teamarbeit (Hilfsbereitschaft, Arbeitsteilung, Kompetenzen verteilen) angeleitet werden. Die Verantwortungsbereitschaft der Schüler erhöht sich, da sie die Rechenfehler selbst zu verantworten haben, wenn die Körper nicht zusammenpassen. Neben diesen sozialen Fähigkeiten kann noch eine ganze Reihe von mathematischen Zielen genannt werden, welche von diesem Projekt angesteuert werden. Die Schüler sollen Kenntnisse aus der Planimetrie auf räumliche Problemstellungen[III] anwenden. Hierbei wird es wohl zu einer Vertiefung des räumlichen Vorstellungsvermögens kommen. Diese räumlichen Problemstellungen schulen ganz allgemein das räumliche Denken, insbesondere das Erkennen von räumlichen Zusammenhängen. Des Weiteren können Schüler ihre kreativen geometrischen Ideen beim Bau von räumlichen Modellen verwirklichen; dies erfordert exaktes Arbeiten und Konstruieren. Bevor man aber überhaupt mit dem Bau der Durchdringungskörper beginnen kann, ist es natürlich notwendig, sich über die einzelnen Arbeitsschritte Klarheit zu verschaffen; eine eigene Bauanleitung zu erstellen, wird unerläßlich sein. Als ein sehr wichti-

[III] Z.B. wo findet sich der Goldene Schnitt im Ikosaederstern oder im Keplert-Poinsot-Stern wieder? Oder: wie kann der „Pythagoras“ und Strahlensatz bei dem Würfeldrilling angewandt werden?

ges Ziel sehen wir aber auch noch die Förderung der mathematischen Kreativität[IV] sowie der Eigeninitiative. Abschließend - aber nicht weniger betont - sei bemerkt, dass mit diesem Projekt bei den Schülern wohl auch die Freude an der Schönheit der Geometrie (wieder) erweckt werden kann.

4. Mögliche Ergebnisse des Projektes

4.1 Allgemeine Bauhinweise zu den Körpern

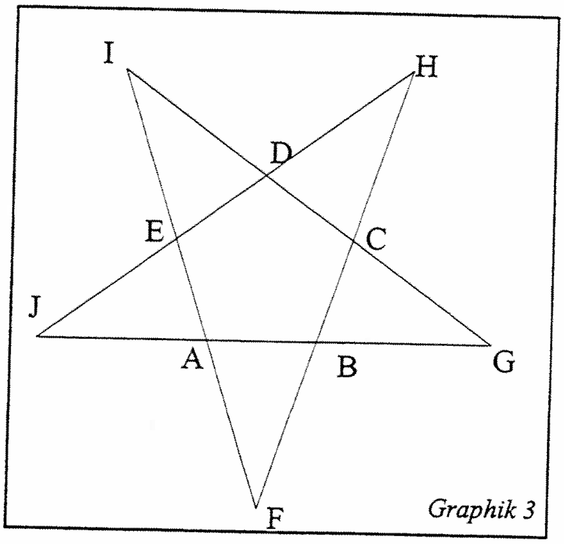
Das Material, welches sich leicht verarbeiten läßt und trotzdem eine hohe Festigkeit und Stabilität aufweist, ist Fotokarton. Diesen gibt es in den verschiedensten Farben, und er ist in jeder Papeterie günstig zu haben. Bearbeitet wird der Karton mit einem Papiermesser. Um exakte gerade Linien zu schneiden, empfiehlt sich ein Stahllineal. Kanten, die geknickt werden müssen, sollen mit dem Papiermesser an der Außenseite leicht angeritzt werden. Als Klebstoff empfiehlt sich Alleskleber (Uhu, Cementit oder ähnliches); auf gar keinen Fall sollte man Sekundenkleber verwenden, da die Kanten und Laschen oft erst während des Aushärtens des Klebers in Position geschoben werden müssen.
Falls man Kantenmodelle erstellen möchte, um damit z.B. Durchdringungen innerhalb eines Platonischen Körpers darzustellen, so benötigt man zuerst, vor allem für den Dodekaeder und den Ikosaeder, Raumwinkelschablonen, um die Holz- oder Metallstäbe (manchmal reichen auch Streichhölzer) richtig zusammenzusetzen, sonst werden die Platonischen Körper unansehnlich schief. Man benötigt neben Lötkünsten für die Metallstäbe und Alleskleber für die Holzstäbe auch noch eine Unmenge an Geduld.

4.2 Ein Dodekaederstern

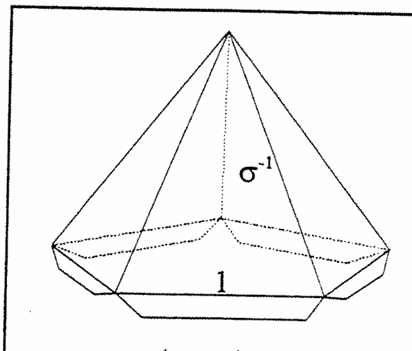
Der Dodekaeder ist für diesen Körper der Kern, um den sich der Stern rankt. Verlängert man alle Seiten eines Fünfecks ABCDE, so schneiden sich die Seiten paarweise. Man erhält einen fünfzackigen Stern FGHIJ (Graphik 3) das sogenannte Pentagramm. Verlängert man nun jede Kante des Dodekaeders auf die gleiche Weise, so erhält man auf Grund der Drehsymmetrie über jeder Dodekaederfläche eine regelmäßige fünfseitige Pyramide. Das bedeutet, dass man

[IV] Mathematische Kreativität meint hier den ungerichteten, spielerischen Umgang mit Formen und Formeln, das Verlassen von vorgedachten Lösungswegen, Entwicklung von eigenen Berechnungsmethoden usw..

den Dodekaederstern aus zwölf regelmäßigen Pyramiden zusammensetzen kann, deren Grundseite sich zu den Kanten verhält wie $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1):1$ (Goldener Schnitt). An die Grundseiten einer unten offenen Pyramide (siehe Graphik 4) werden entsprechend die anderen geklebt. Raffiniert sieht der Dodekaederstern aus, wenn man alle Pyramidenflächen, welche in einer Ebene liegen, gleichfarbig gestaltet. Allerdings muss man dann jede Pyramidenfläche - das sind immerhin 60 Stück - einzeln ausschneiden und richtig zusammenkleben. Ein recht aufwendiges Verfahren, bei dem man vor allem viel räumliches Vorstellungsvermögen braucht, um die richtigen Farben aneinander zusetzen.



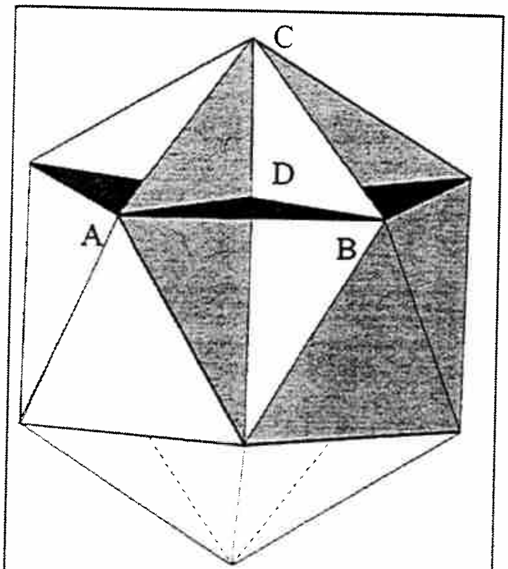
Graphik 3



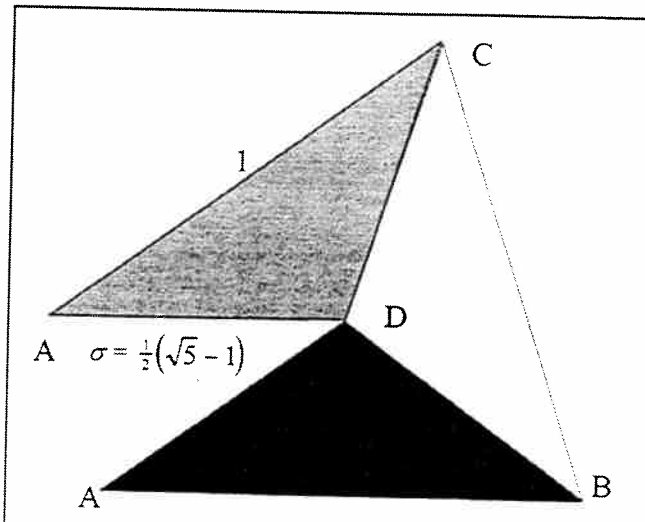
Wobei $\sigma = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ *Graphik 4*

4.3 Ein weiterer Sternkörper (Titelbild)

Für diesen Körper dient der Ikosaeder als Grundlage. In den Zwanzigflächner werden zwölf regelmäßige Fünfecke einbeschrieben, denn jeweils fünf Ecken eines Ikosaeders liegen in einer Ebene. Fünf dieser Fünfecke durchdringen ein sechstes so, dass aus diesem ein Pentagramm ausgeschnitten wird. Diese Fünfecksflächen schneiden sich also alle im Verhältnis



Graphik 5

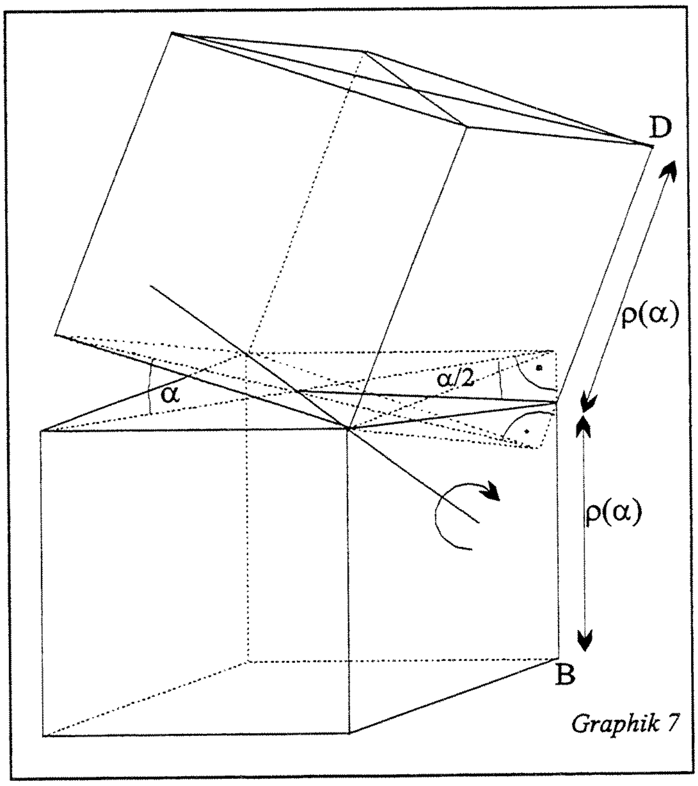


Das Netz einer Pyramide *Graphik 6*

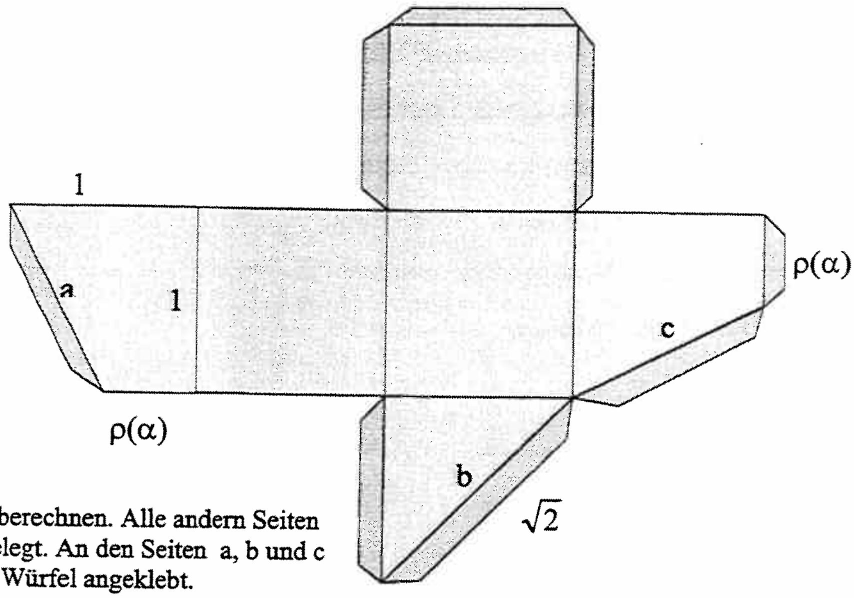
des Goldenen Schnittes. In Graphik 5 wird dies durch drei sich schneidende Fünfecke verdeutlicht. Die gleichschenklichen Dreiecke ABD, BCD und ADC sind kongruent und bilden eine nach innen gerichtetet Pyramide (Graphik 6 zeigt das Netz einer Pyramide). Die Basis der Dreiecke verhält sich zu den Schenkeln wie 1 : σ, wobei $\sigma = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Interessant wird dieser Körper dadurch, dass jedes Fünfeck in einer Farbe gehalten wird. So erkennt man das Konstruktionsprinzip dieses Sternkörpers sehr gut.

4.4 Phantastische Durchdringung

Bei dieser Rahmengruppe kann man beliebige Körper beliebig durchdringen lassen. Es empfiehlt sich aber, erst mit zwei *einfachen* Körpern zu beginnen. Hier wird die dynamische Durchdringung von zwei Würfeln beschrieben. In diesem speziellen Fall ist *ein* Würfel fix, wogegen der zweite Würfel um eine Flächendiagonale des ersten pendeln kann (Graphik 7). Von Interesse ist hier, wie die Länge ρ vom Winkel α abhängt. Bei Kenntnis der Länge ρ läßt sich das restliche Würfelnetz ohne weitere Probleme berechnen. Ein wichtiger Schritt zur Lösung ist die Erkenntnis, dass das Problem symmetrisch ist. Mit Hilfe des Tangens kann man ρ(α) berechnen. Es gilt: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\rho(\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, also $\rho(\alpha) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$. Diese Formel gilt allerdings nur für den Bereich D_ρ= [0°; 2 arctan$\sqrt{2}$] ≈ [0°; 109,47°]. Bei α=109.47° kommt die Ecke D mit der Ecke B zur Deckung. Danach dringt sie durch den Boden des fixen Würfels. Diese Berechnungen hierzu sind noch um einiges komplizierter und können kaum von Schülern erwartet werden. Graphik 8 zeigt das Netz eines Würfel einer Würfeldurchdringung mit α ≈ 35,26° woraus sich für ρ(α)= 0,5 ergibt.



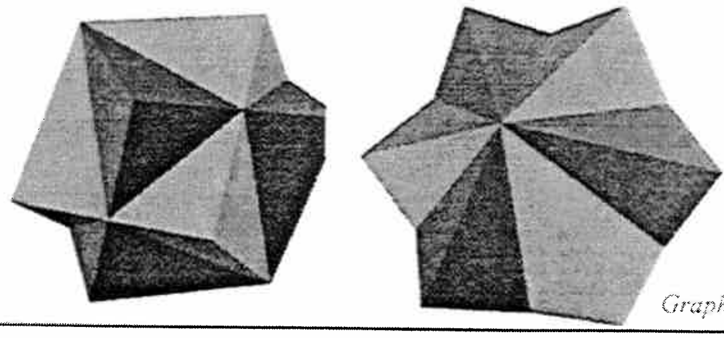
Graphik 7



Nur $\rho(\alpha)$ ist zu berechnen. Alle andern Seiten sind dann festgelegt. An den Seiten a, b und c wird der zweite Würfel angeklebt.

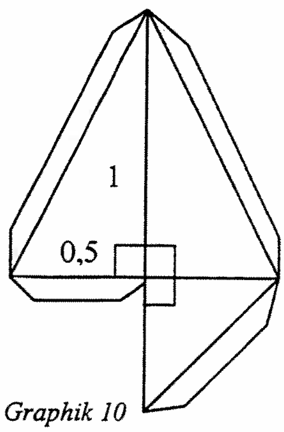
Graphik 8

4.5 Würfelzwilling



Graphik 9

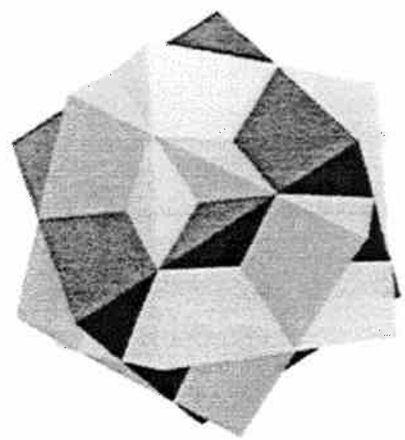
Dieser Würfelzwilling entsteht durch eine Drehung eines zweiten Würfels um 60° um die Raumdiagonale des ersten Würfels. Es ergibt sich, dass sich die entsprechenden Kanten halbieren. Der Bau ist relativ einfach. Man schneidet sich zuerst das Netz des fixen Würfels (z.B. heller Würfel Graphik 9) aus. Dieses Netz wird nur soweit zu einem oben offenen Würfel zusammengebaut, so dass man noch von innen gegen den Würfel drücken kann. Dies ist notwendig, um die Pyramiden (dunkler Würfel, siehe Graphik 9), die den zweiten Würfel symbolisieren werden, auf die Würfelflächen des hellen Würfels sauber aufzukleben. Graphik 8 zeigt das Netz einer Pyramide, welche auf den Würfel aufgesetzt wird. Eine andere Möglichkeit diesen Zwilling zu bauen, besteht darin, jeweils 6 Pyramiden aus einer Farbe anzufertigen und diese einzelnen zusammen zu kleben. In Kapitel 7 ist ein Bastelbogen mit den einzelnen Teilen für einen rot-weißen Würfelzwilling zu finden.



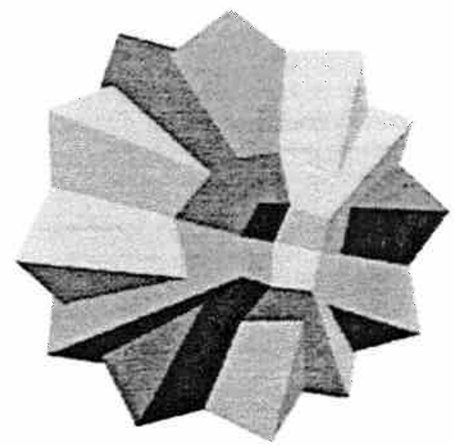
Graphik 10

4.6 Ergebnisse mit dem Computer

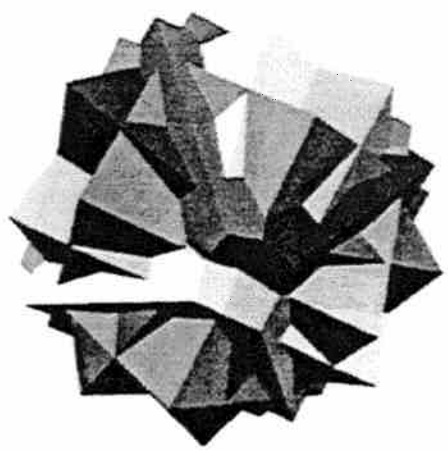
Es gibt eine Vielzahl von 3D-Geometrie-Programmen (Asymetrix 3D, Schnitte von SCHUMANN, 1995, usw.), mit denen man Schnittkörper erzeugen kann. Allerdings ist es meines Erachtens doch recht kompliziert, eine Mehrzahl von gleichen Körpern zu verschmelzen: aber sicherlich eine reizvolle Aufgabe für den begeisterten Computerfreak, der sich nur schwer mit Papiermesser und Schere anfreunden kann. Die Bilder, die unten zu sehen sind, sind mit Asymetrix 3D erzeugt worden.



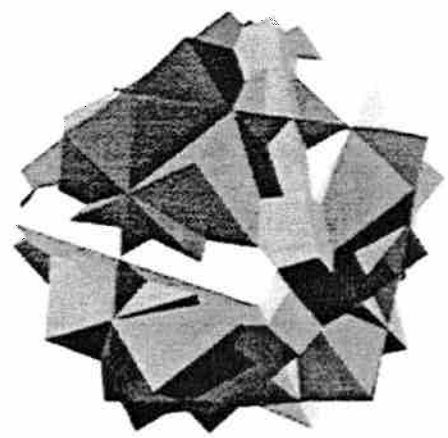
Drei Würfel durchdringen sich



Vier Würfel durchdringen sich



Sechs Würfel durchdringen sich



Sieben Würfel durchdringen sich

5. Projektverlauf und Ergebnisse einer 10. Klasse

5.1 Projektverlauf

Das Projekt, wie es oben in einer Trockenform beschrieben ist, wurde von einer 10. Klasse an einem bayerischen Gymnasium durchgeführt. Der Kristallisationspunkt dieses Projektthemas war die Frage nach der Richtigkeit von Winkelberechnungen im Raum (z.B. Flächenwinkel der regulären Polyeder). „Rechnen kann man schließlich viel", sagten die Schüler „wir wollen es messen". Also wurden die regulären Polyeder gebaut. Hier war einige Anleitung nötig und zwar: vom Werkzeug bis zur Klebetechnik. Techniken wie: wenig Kleber auf der Lasche verstreichen, kurz aber fest die Lasche an die richtige Stelle drücken und nun noch in die exakte Position schieben. Das ist nicht ganz einfach für ungeübte Hände. Die Flächenwinkel wurden nachgemessen und tatsächlich, die Messungen stimmten mit der Berechnung im Rahmen der Messgenauigkeit überein. „Welch ein Glück", bemerkten manche Schüler. An dieser Schüleräußerung bemerkte man, dass es für die Schüler spannend war, ihr Ergebnis in der Realität zu überprüfen. Und sie erfuhren eine Genugtuung, da das Ergebnis richtig war. Ich für meinen Teil kann sagen, dass auch mich immer wieder freut, wenn meine Berechnungen dem Nachmessen standhalten.

Nun war der Grundstein für das Projekt „Begnadete Körper"[V] gelegt, und man überlegte sich, ob es noch weitere ansprechende Körper gibt, die sich berechnen und anschließend bauen lassen. Bilder von Durchdringungskörpern wurden den Schülern ausgeteilt, von denen sich jeder einen aussuchen sollte. Es zeigte sich recht schnell, dass für manche Schüler mathematisch gesehen hier schon „das Ende der Fahnenstange" erreicht war, und so hatten diese Projektteilnehmer den Auftrag, sich mit dem geschichtlichen Teil der Platonischen Körper auseinanderzusetzen. Diese Gruppe hatte dann noch die Idee, während der Präsentation des Projektes ein Rätsel über diese Ausstellung ein Rätsel für die Unterstufe zu entwerfen.

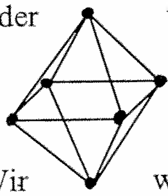
Aus der Sicht zweier Schülerinnen (Daniela und Ruth) begann das Projekt wie folgt (Zitat aus ihrem Projekttagebuch): „ Am ersten Tag unseres Projektes *'**Begnadete Körper**'* erzählte uns Herr Ludwig, welche Themenbereiche es geben würde und teilte die Klasse in Gruppen ein. Davon gab es fünf: 1. Sternkörper, 2. Durchdringungen, 3. Phantastische Durchdringungen, 4. Computerdarstellungen, 5. Geschichte der regelmäßigen Polyeder.

Er erklärte uns im großen und ganzen die Aufgaben der einzelnen Gruppen genauer und beantwortete Fragen unsererseits. Die Hausaufgabe bestand darin, einen der Plat. Körper mit

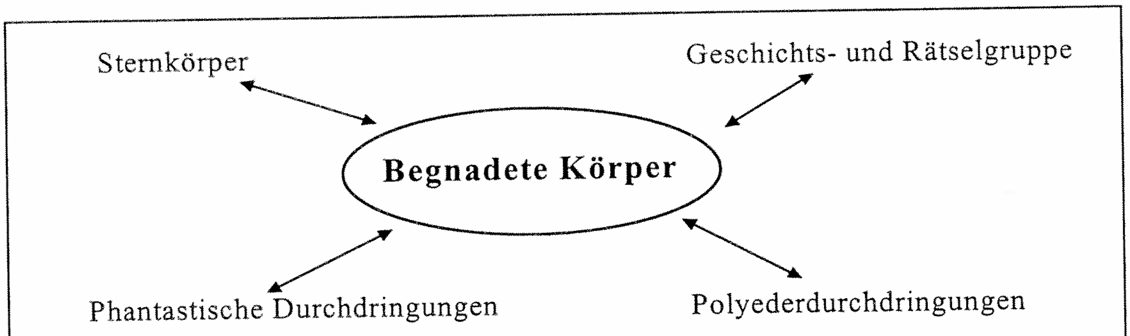
---

V Dieser Projektname wurde von den Schülern vorgeschlagen. Den ursprünglichen „Platonische Durchdringungen" fanden sie nicht gut.

Streichhölzern zu bauen. Daniela bastelte einen Dodekaeder und ich einen Oktaeder. Wir stellten fest, dass Uhu in diesem Fall nicht so gut geeignet ist wie Holzleim. Mit der Herstellung dieser 'Streichholzkörper' bekamen wir erste Einblicke in die Welt der Polyeder. Wir waren jetzt also bereit auf neue Abenteuer. Als nächstes versuchten wir uns bei der Erschaffung der platonischen Körper aus Pappkarton, was ja unsere Hauptaufgabe darstellen sollte ..."



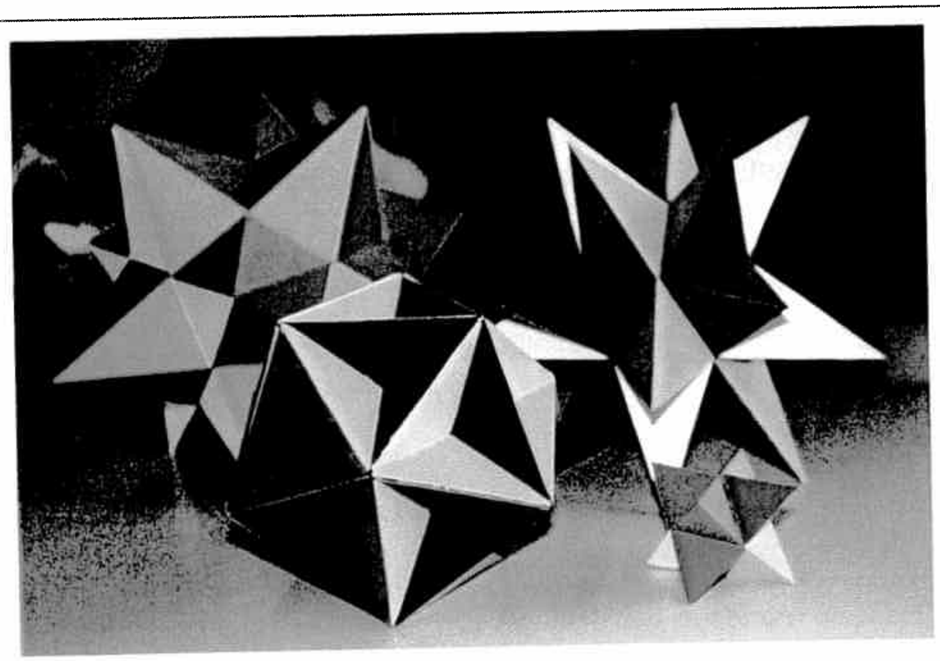
Dieses Zitat zeigt wie die Schüler einen Projekteinstieg erleben. Da kein Schüler bereit war mit dem Computer zu arbeiten, gab es schließlich vier Gruppen die sich in ihrem Beschäftigungsfeld unterschieden.



Graphik 11

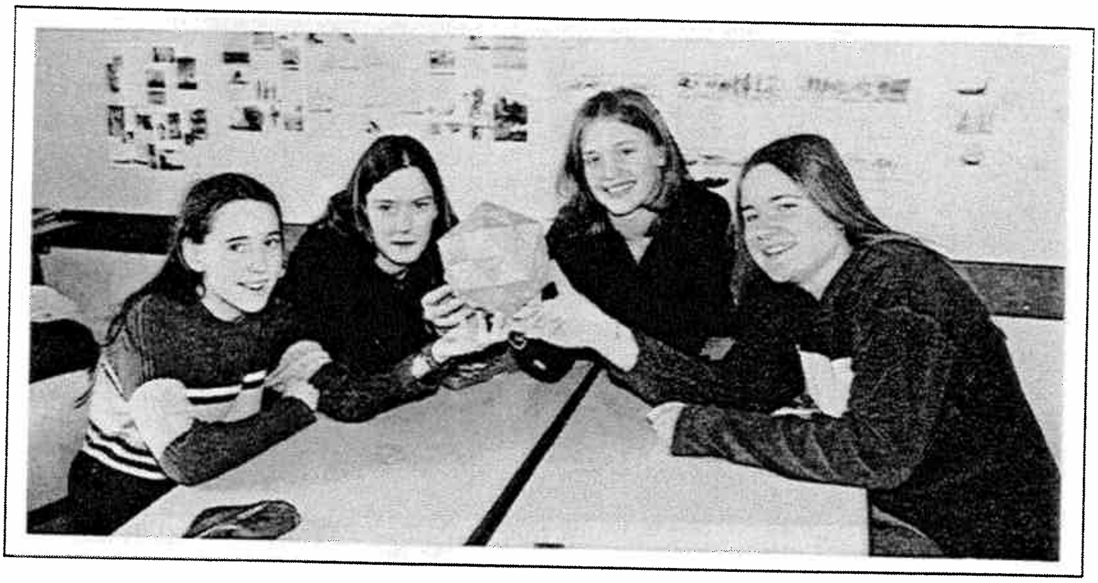
5.2 Ergebnisse

Die Sternkörpergruppe bastelte im Wesentlichen die einfachen Sterne, wie in 4.2 und 4.3 beschrieben, daneben noch den Keplerstern sowie den Ikosaederstern. Das folgende Bild zeigt einen Teil der Ergebnisse.



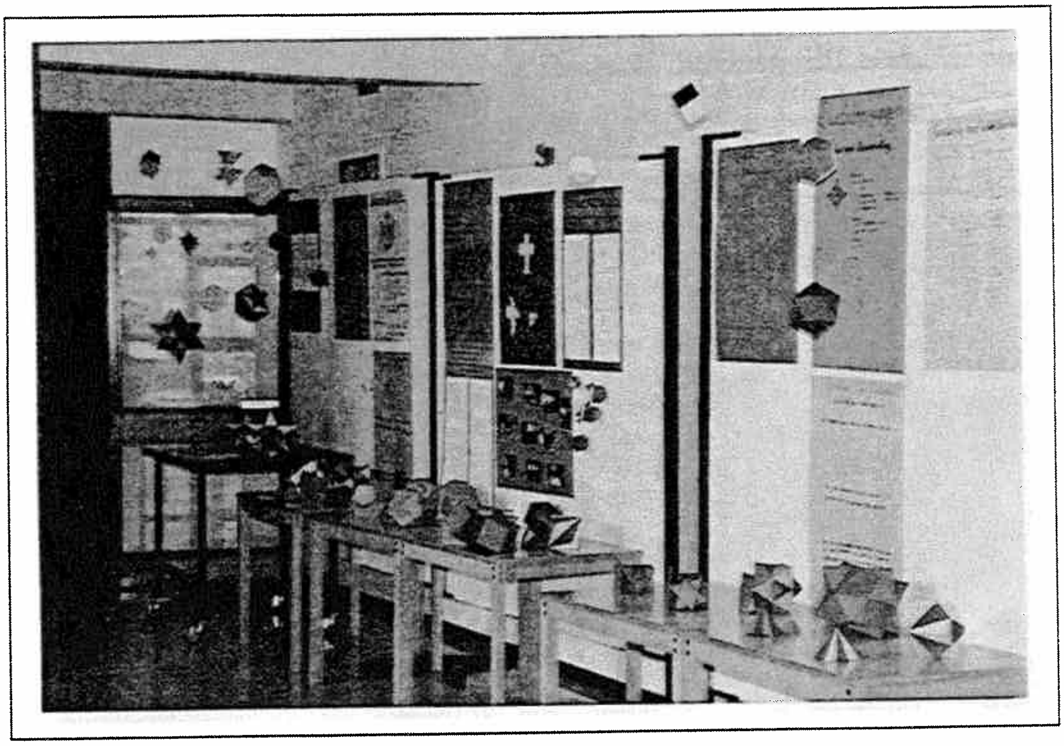
Ergebnisse der Sternkörpergruppe

Die Gruppe der Phantastischen Durchdringungen ließ u.a. einen Dodekaeder (orange) in einem Ikosaeder (grün) stufenweise verschwinden. Im Bild sind die Schülerinnen mit einem dieser Körper zu sehen. Ihr gesamtes Vorgehen haben die Schülerinnen in einem dicken Projektheft dokumentiert.



Die phantastischen vier Mädels

In der Gruppe der Polyederdurchdringungen wurde an zwei Fronten gearbeitet. Während sich der eine Teil den Drillingen widmete, berechnete der andere die Zwillinge. Jede Gruppe arbeitete so auf ihrem entsprechenden mathematischen Niveau. Vor allem die Drillingsgruppe (Mädchengruppe) ist hier hervorzuheben. Sie hat ein sauberes Projektheft angelegt, in dem ihr gesamtes Vorgehen während dieses Projektes dokumentiert ist. So konnten sie in beispielhafter Weise auf manche Berechnungen zurückgreifen. Ebenso sind auch die Baupläne der Körper in diesem Berichtsheft niedergelegt. Bilder dieser Körper sind im 7. Kapitel zusehen.
Bei der Präsentation dieses Projektes wurden die „Begnadeten Körper“ durch eine Ausstellung ins rechte Licht gerückt. Das begleitende Unterstufenrätsel, welches bei den jungen Schülern reges Interesse fand, ist im Anhang zu finden. Die Antworten auf die Fragen des Rätselbogens waren alle in der Ausstellung zu finden. Die 3 besten Schüler (es waren übrigens nur Schülerinnen) erhielten Buchpreise, die ein ortsansässiger Buchhändler stiftete. Das nächste Bild zeigt einen Teil der Ausstellung.



Die Ausstellung der begnadeten Körper

5.3 Projektkritik und Schlußbemerkung

Das Projekt hat insgesamt drei Wochen gedauert. Bei vier Stunden pro Woche wurden also 12 Lektionen benötigt. Sicherlich kann man diese Zeit auch noch verkürzen, wenn mehr zu hause gearbeitet wird. Ich schätze aber das freie Arbeiten im Klassenzimmer als Gegenpol zum sonst eher lehrerzentrierten Unterricht. Aus den Projektberichtsheften ist eine gesunde Kritik an der Projektdurchführung nicht zu übersehen. Vor allem wird mir der Vorwurf gemacht, dass ich zu viel an den handwerklichen Dingen auszusetzen hatte (Klebetechnik, Ausschneiden von Kartonteilen usw.). Hieraus ist vielleicht der Schluß zu ziehen, dass man eine Einführungsstunde machen sollte. Meiner Meinung nach sollten die Schüler aber ruhig selbst mit diesen Problemen klarkommen. Der mathematische Teil scheint für die Schüler völlig in den Hintergrund gerückt zu sein. Den Projektberichten entnimmt man, dass sie immer nur gebastelt haben und nur wenig rechnen mussten. Dies ist natürlich überhaupt nicht wahr. Die Projekthefte sind mit Rechnungen und Formeln für ihre Durchdringungskörper übersät. Ich erwiderte in einem Abschlußgespräch darauf, dass auch eine Brücke schneller berechnet, als dann anschließend gebaut ist. Aber „ohne Rechnung keine Brücke“. Ebenfalls zeigt die fertige funktionstüchtige Brücke dem Ingenieur die Richtigkeit seiner Berechnungen.

Bezüglich der Raumvorstellung glauben die Schüler, dass sie einiges dazugelernt haben. Sie begründen dies damit, dass ihnen am Schluß das Konstruieren und Zeichnen der Körper für die Baupläne sehr leicht gefallen sei. Dies entspricht auch meiner subjektiven Beobachtung. Meiner Ansicht nach haben die meisten Schüler den Zugewinn an Rechenkompetenz, mathematischer Eigenständigkeit und strukturiertem Arbeiten noch nicht wahrgenommen. Dies ist natürlich auch schwer zu messen, aber man merkte, wie unbefangen die Schüler am Ende des Projektes mit den Winkelfunktionen, den komplizierten Zeichnungen und den Benennungen ihrer Objekte umgingen. Dies ist sicherlich ein starkes Indiz für die obenstehende Behauptung.

Stolz betrachten zwei Schüler ihren Oktaederzwilling

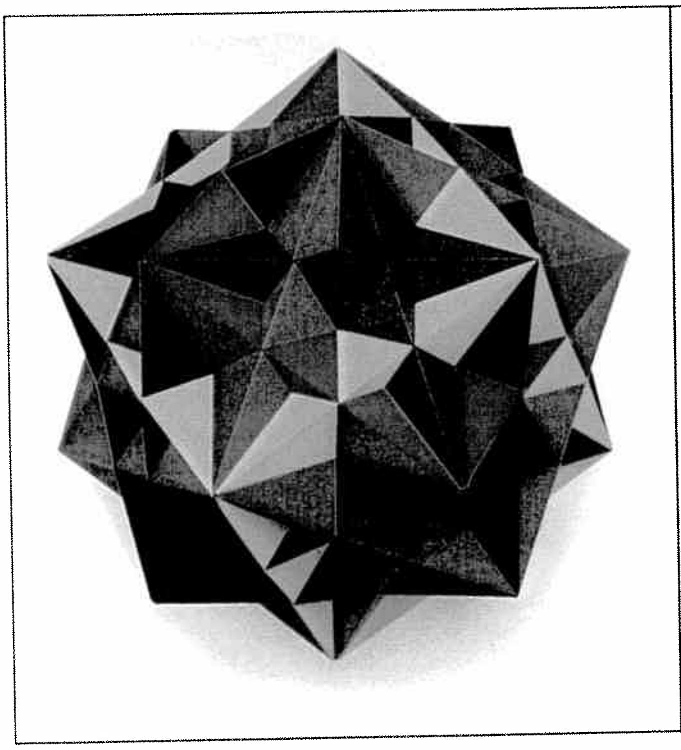
6. Präsentationsmöglichkeiten

Zu diesem Punkt kann man nur Anregungen geben, da es von Schule zu Schule verschiedene Möglichkeiten gibt, das Projekt zu präsentieren. Bei diesem Teil des Projektes wird wohl vor allem der Kunsterzieher helfen können, die Körper effektvoll in Szene zu setzen. Wir denken hier an ein großes Mobile, an dem alle Körper im Gleichgewicht sind. Oder man installiert mehrere Bildschirme, auf denen sich die computergenerierten Körperdurchdringungen bewegen. Genauso gut kann man aber auch für jede Rahmengruppe eine Stellwand in der Aula aufbauen, an der die einzelnen Arbeitsschritte und Bauphasen dargestellt werden. Ebenso sind die fertigen Modelle zu sehen. Bei besonders gelungenen Körpern läßt sich vielleicht auch eine Ausstellung in einer Galerie organisieren. Wie man sieht gibt, es also eine Vielzahl von Präsentationsmöglichkeiten für dieses optisch sehr ansprechende Projekt.

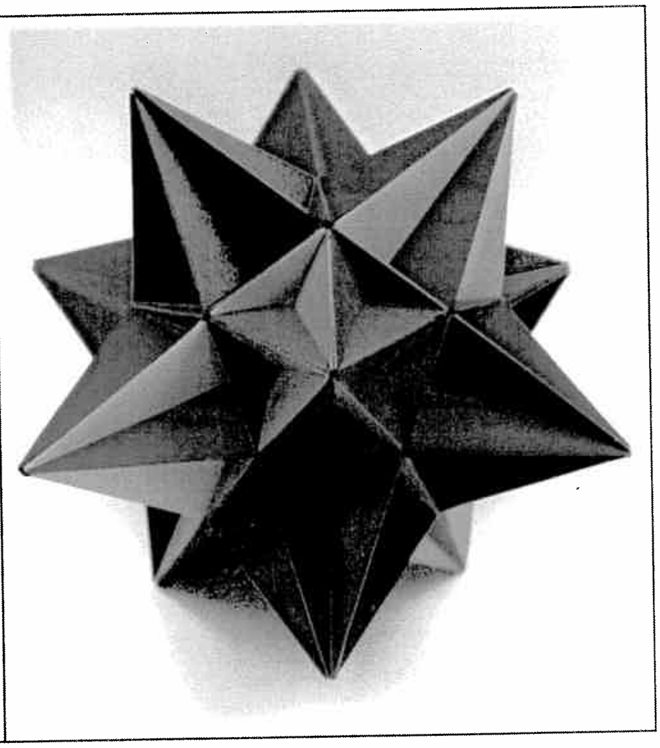
7. Materialien

7.1 Bildmaterial

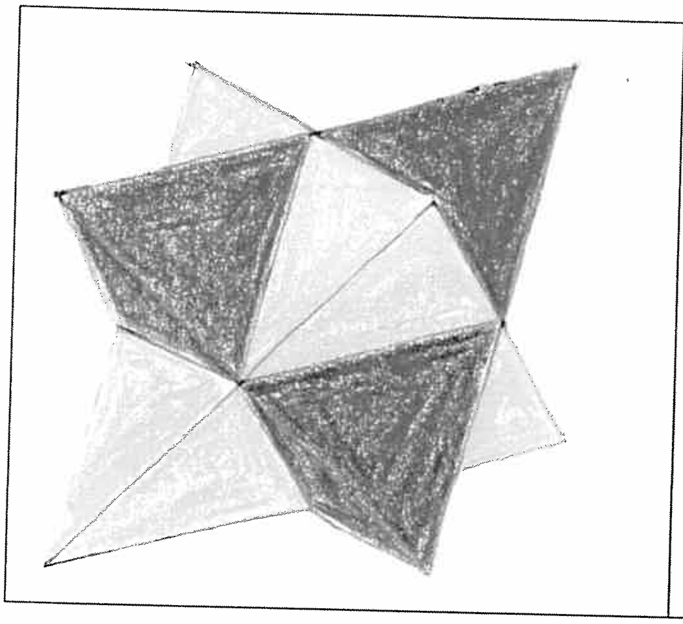
Auf den nächsten zwei Seiten sind Farbbilder von Durchdringungs- und Sternkörpern zu sehen. Dieses Bildmaterial ist im Laufe des hier vorgestellten Projektes entstanden. Die Körper sind von den Schülern wirklich gebaut worden. Das Bildmaterial kann dem durchführendem Lehrer als Kopiervorlage für seine Schüler dienen. Die zwei Körper unten auf dieser Seite sind während des Projektes vom Lehrer gebaut worden.

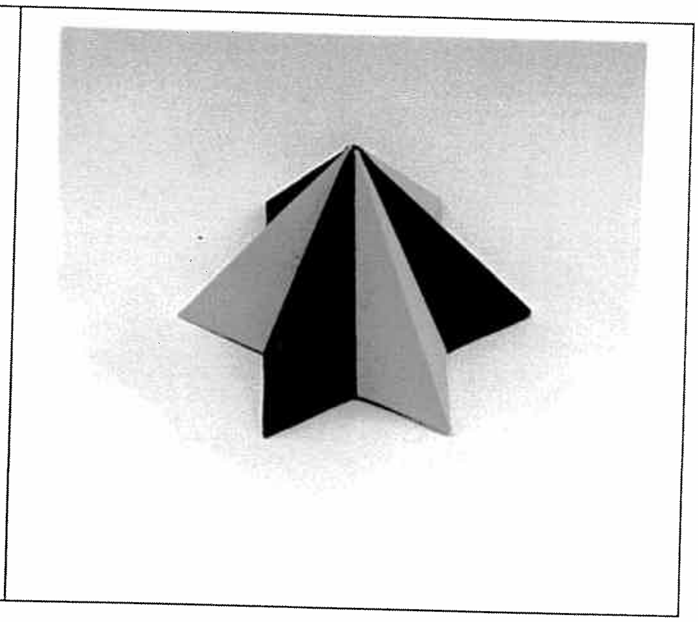


Würfelfünfling



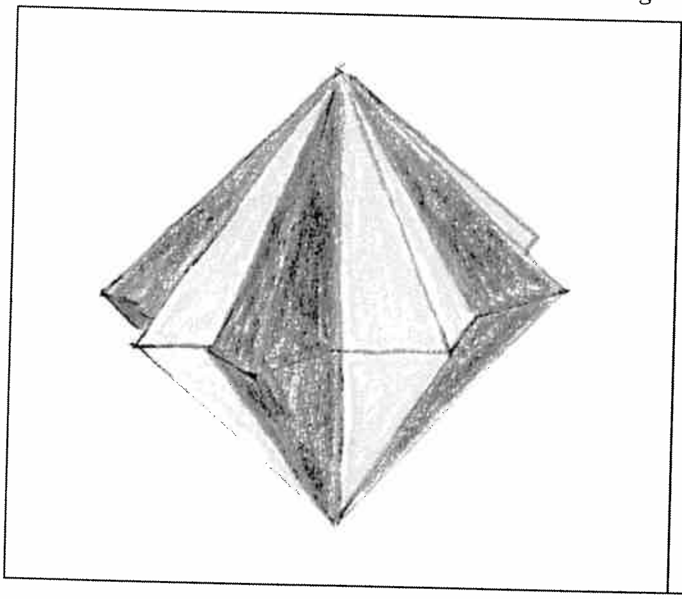
Kepler-Poinsot-Stern

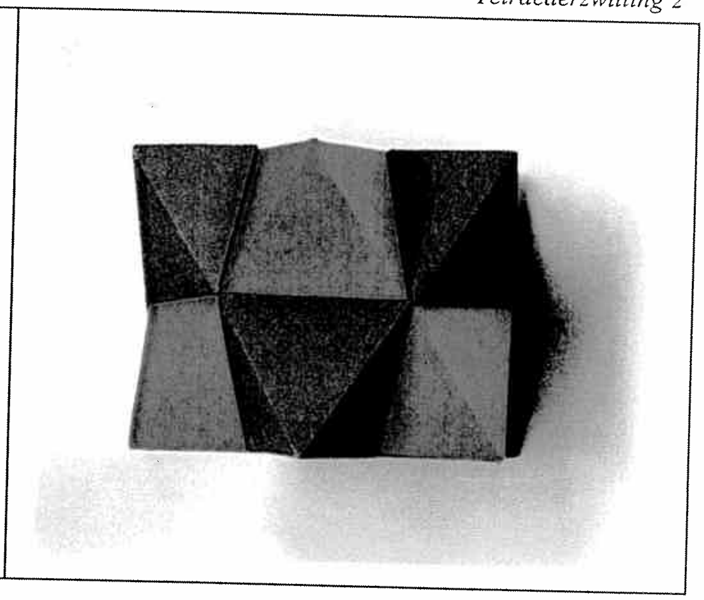




Tetraederzwilling 1

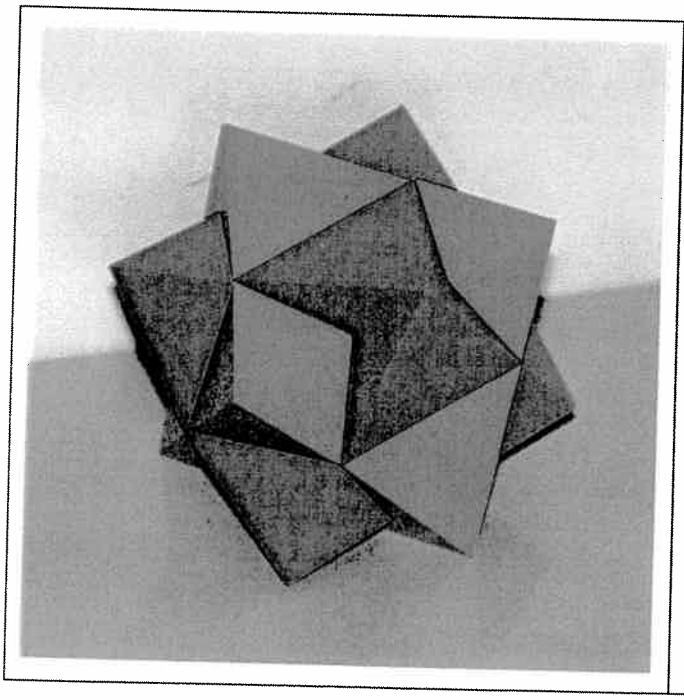
Tetraederzwilling 2

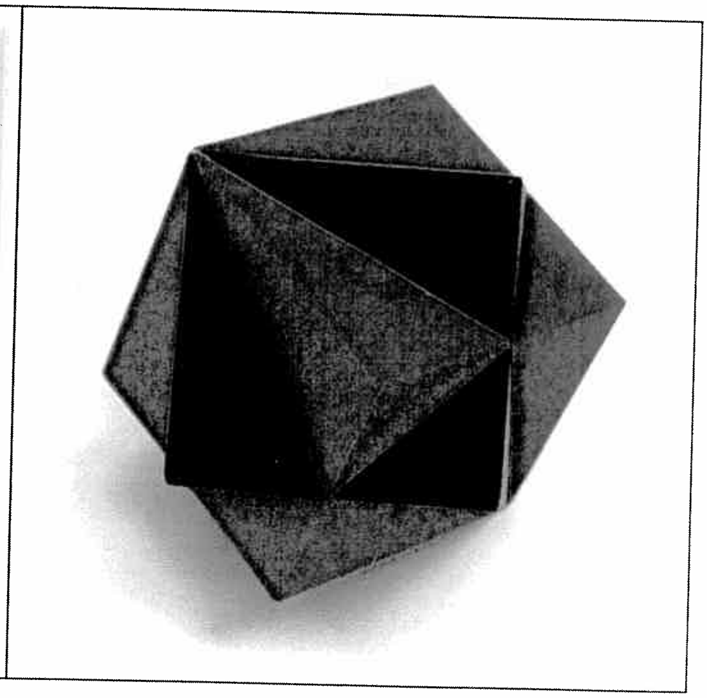




Oktaederzwilling 1

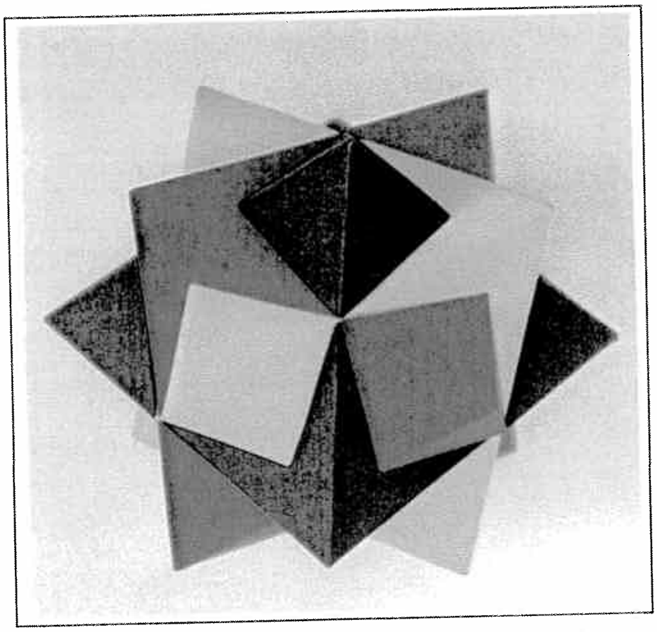
Oktaederzwilling 2



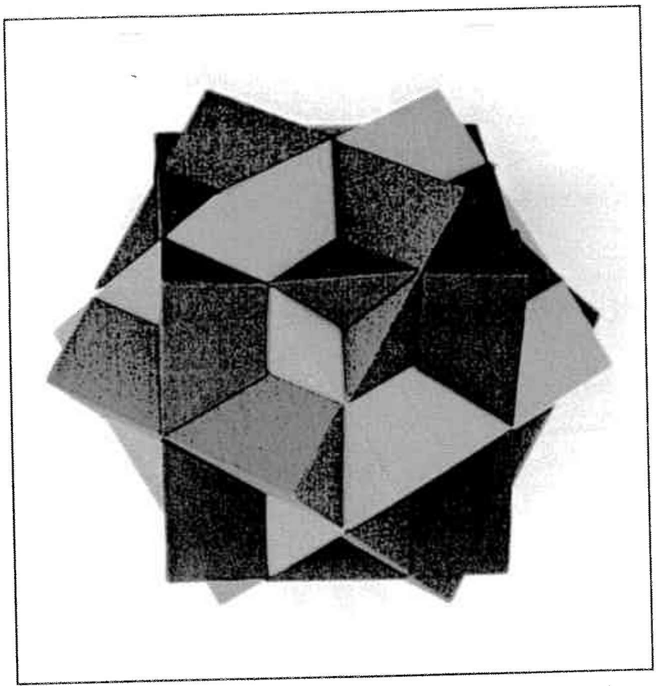


Oktaederzwilling 3

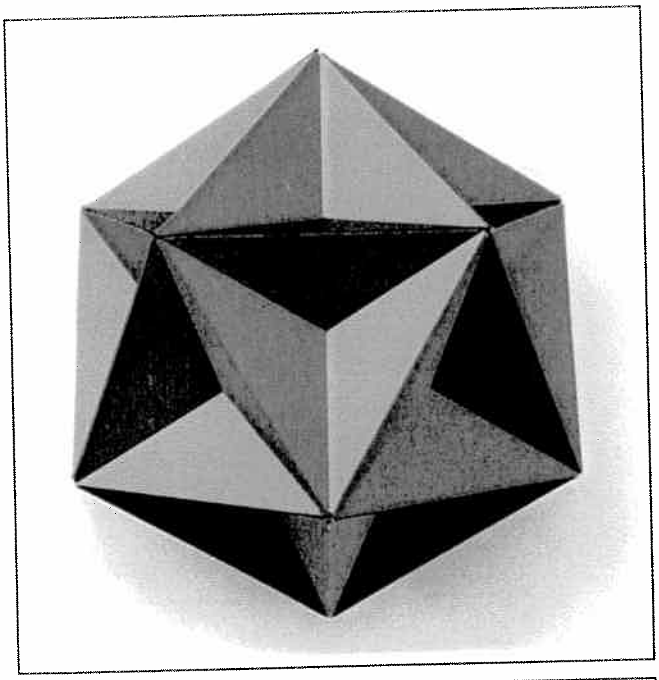
Würfelzwilling



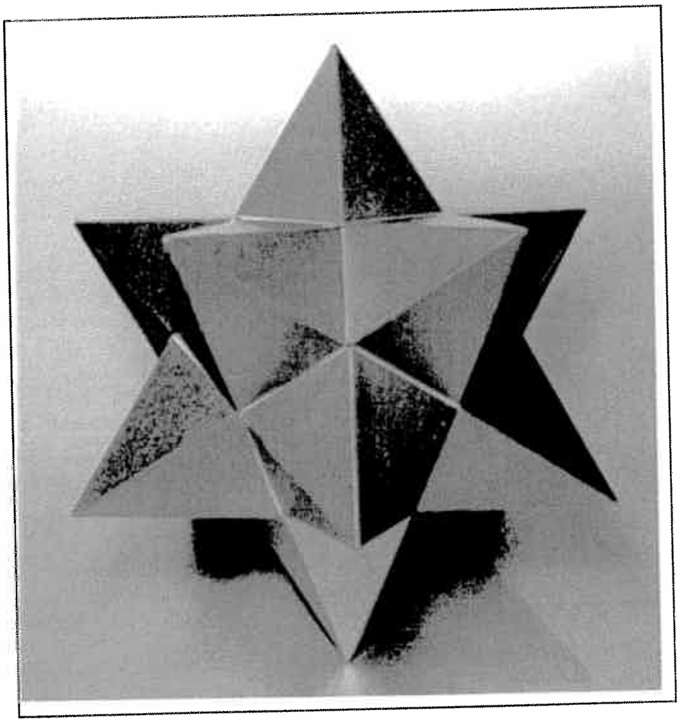
Oktaederdrilling



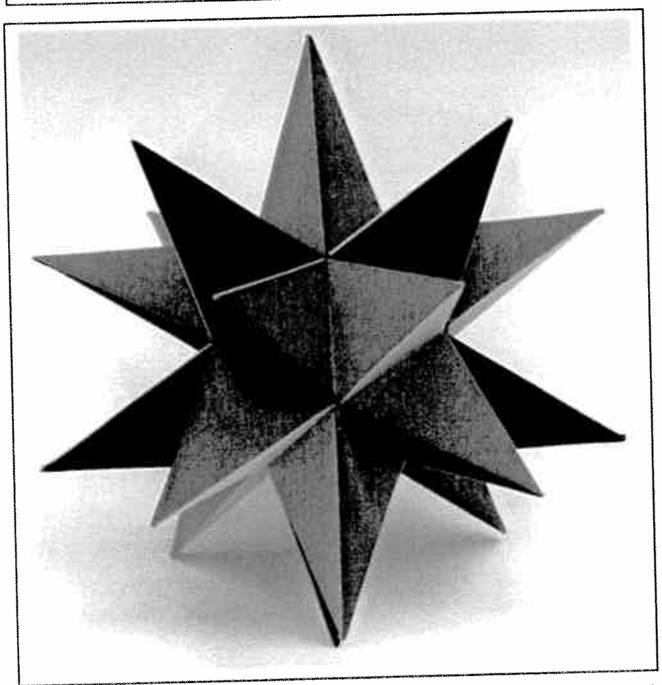
Würfeldrilling



Dodekaederstern 1



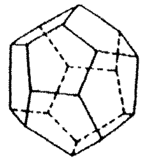
Dodekaederstern 2



Ikosaederstern

7.2 Preisrätsel der Klasse 10

Preisrätsel zum Projekt der Klasse 10a für Unterstufenschüler



Name: ____________

Klasse: ________

1. Wie viele Platonische Körper gibt es?

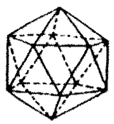
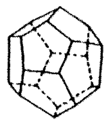
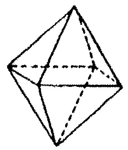
Anzahl: ______

2. Wann lebte Platon?
von ______ bis ______

3. Mit jeweils welchem Platonischen Körper hat Platon die vier Elemente verglichen?

____

4. Welcher von diesen drei Körpern ist ein Oktaeder?

☐  ☐  ☐ 

5. Welcher dieser drei Namen bezeichnet keinen der Platonischen Körpern?

☐ Lokaeder ☐ Tetraeder ☐ Ikosaeder

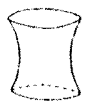
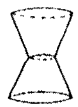
6. Wie kann man einen Hexaeder noch nennen?

____

7. Wie viele Kanten besitzt ein Dodekaeder?

Anzahl: ______

8. Welche Form kann ein rotierender Tetraeder einnehmen?

☐  ☐  ☐ 

9. Wie viele Flächen hat ein Ikosaeder?

☐ 10 ☐ 18 ☐ 20

→

10. Aus wie vielen verschiedenen Farben besteht dieser Ikosaederstern (vgl. Körper Nr.6)?

Anzahl: ______

11. Wie viele Flächen hat dieser Dodekaederstern (vgl. Körper Nr. 7)?

Anzahl: ______

12. Welche Körper kannst Du hier erkennen (vgl. Körper Nr. 1)?

____

13. Welche Gemeinsamkeit haben die drei Körper mit den Nummern 2, 3 und 4?

____

14. Aus wie vielen einzelnen Bauteilen bestehen die 3 Würfel,
die hier ineinander übergehen (vgl. Körper Nr. 5)?

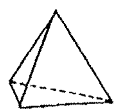
Anzahl: ______

15. Wie viele Körper hat die Klasse 10a während ihrem Projekt gebaut?

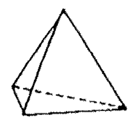
☐ 20-30 ☐ 30-40 ☐ mehr

Viel Spaß beim Beantworten der Fragen!

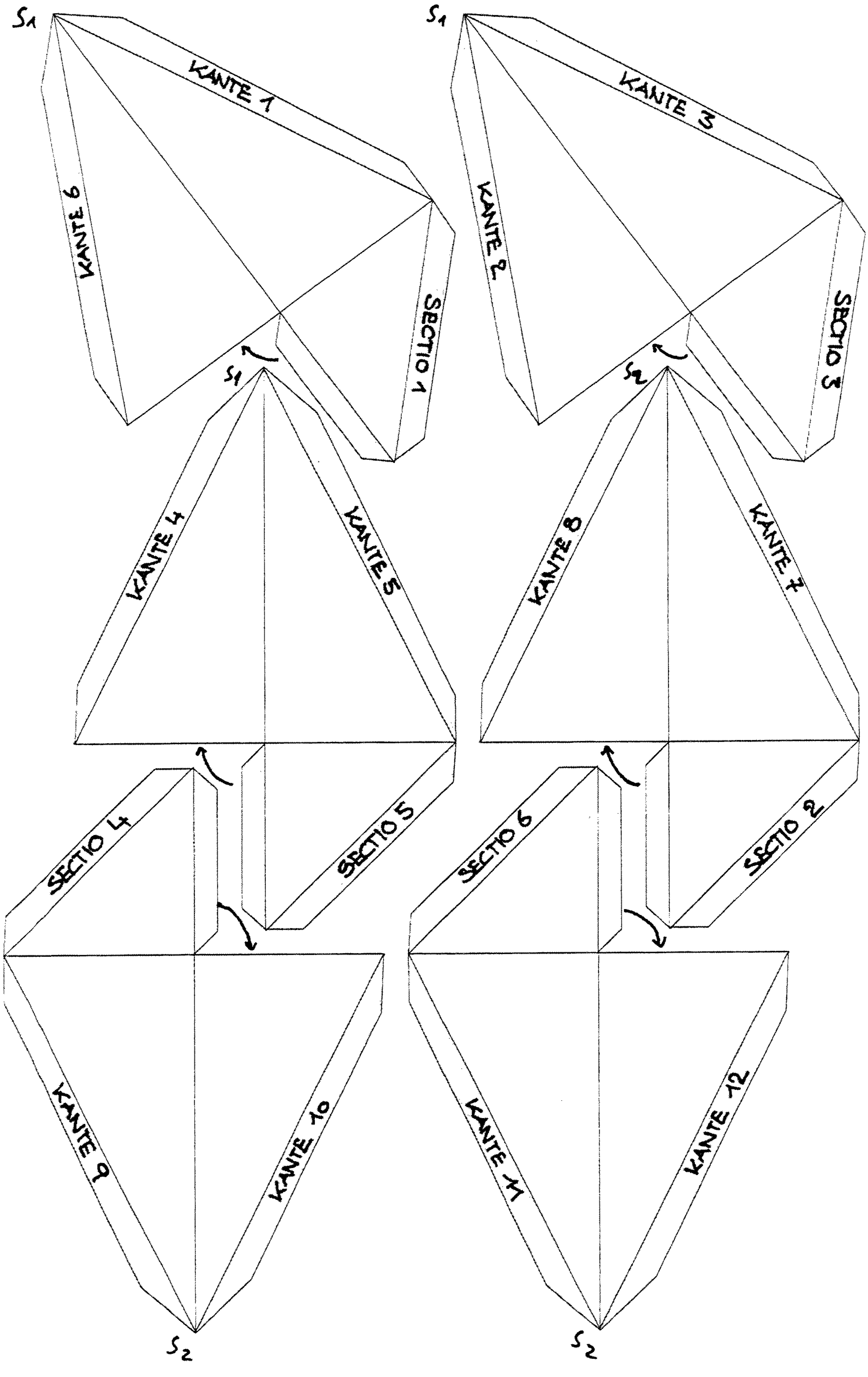
Es gibt einige tolle Preise zu gewinnen!



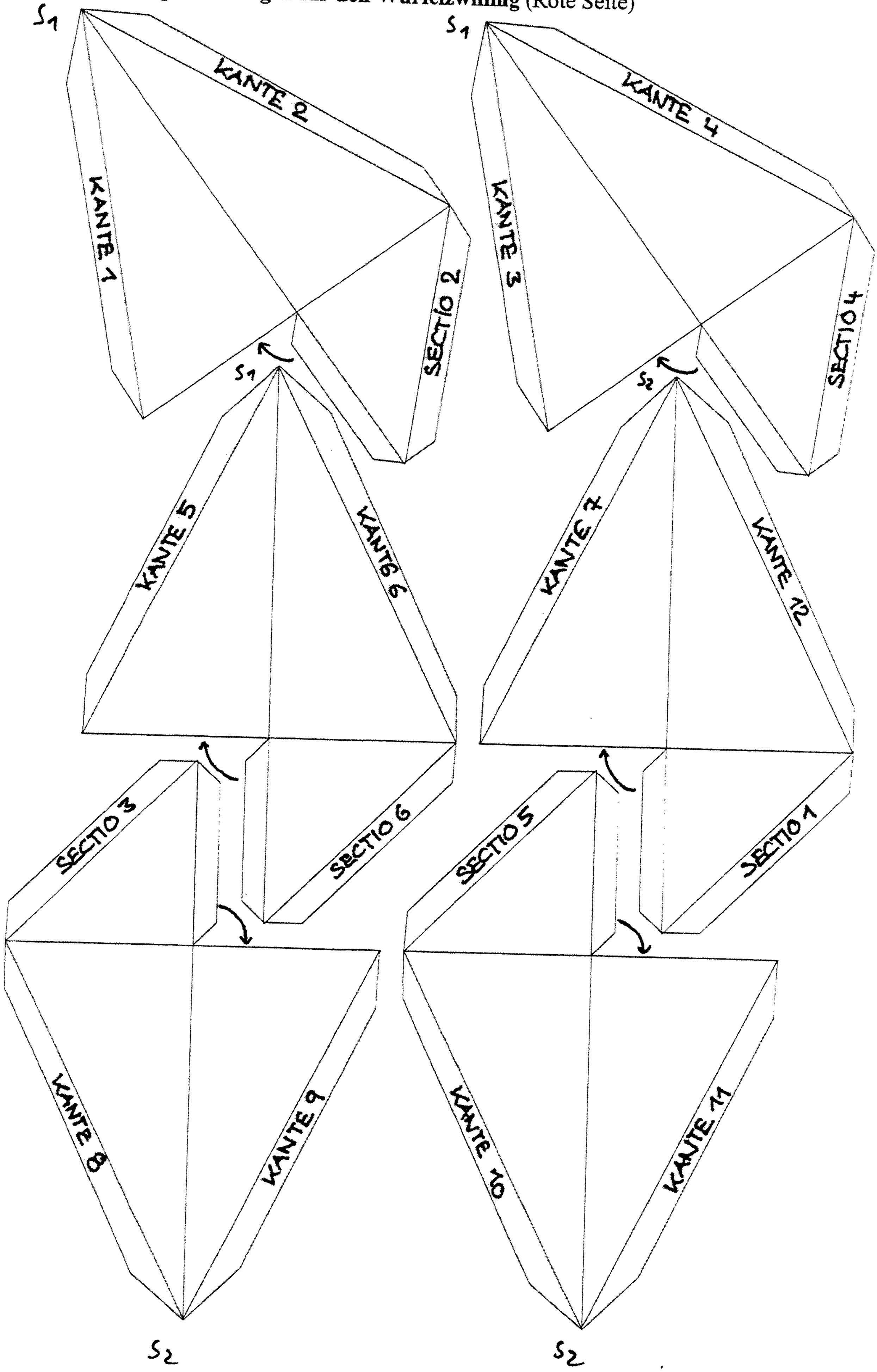
Bitte den ausgefüllten Fragebogen bei der Klasse 10a oder bei Dr. Ludwig abgeben!



7.3 Bastelbogen für den Würfelzwilling (Weiße Seite)



Fortsetzung Bastelbogen für den Würfelzwilling (Rote Seite)



Kurze Bauanleitung zum Würfelzwilling (Seite 22/23):

Zuerst alle Eckpunkte der Pyramidennetze mit einem Zirkel durchstechen und auf der unbedruckten Rückseite die Kanten mit einem Papiermesser anritzen. Dies ergibt ganz gerade und saubere Kanten. Die einzelnen Pyramiden sauber zusammenkleben und aushärten lassen. Nun werden die Pyramiden zusammengeklebt. Wir beginnen mit der weißen Pyramide Spitze1, Sectio 1, suchen rote Pyramide S 1, Sectio 2 und kleben die Kante 1 der beiden Pyramiden zusammen. Nun wird die weiße Pyramide S 1, Sectio 3 an Kante 2 der roten Pyramide festgeklebt, usw. Das wird mit allen Pyramiden der Spitze 1 getan. Dann werden die Pyramiden mit S 2 an dem halben Würfelzwilling befestigt. Und zwar wird an die weiße Pyramide mit S1, Sectio 1 die rote Pyramide mit S2 und Sectio 1 geklebt, nun folgt eine weiße Pyramide mit S2 und Sectio 2 usw. . Die letzte Pyramide einzusetzen, macht am meisten Mühe, und man sollte sich hier Zeit lassen, damit das Werk einen sauberen Abschluß findet.

7.4 Literaturverzeichnis

ADAM, P., WYSS, A., Platonische und Archimedische Körper ihre Sternformen und polaren Gebilde, Stuttgart, Verlag Freies Geistesleben, 1984

Asymetrix 3D F/X™ V. 1.0, Asymetrix Corporation (Graphikprogramm)

COXETER, H. S. M., Regular Polytopes, 2.Aufl., The Macmillan Company, New York, 1963

FREY, K., Die Projektmethode, Weinheim, Basel, Beltz Verlag, 1995

LUDWIG, M., Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums, Diss, Würzbug, 1997

SCHUMANN, H., 3D-Programm Körperschnitte, Dümmler Verlag, 1995

Prof. U. Kirchgraber
Eidg. Technische Hochschule Zürich
Mathematik
8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89–01	H. Walser	Fraktale
89–02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89–03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89–04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90–01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90–02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
91–01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91–02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91–03	M. Federer	Preistheorie
91–04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92–01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93–01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93–01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93–02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93–02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93–03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93–03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93–04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93–04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93–05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93–06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93–07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94–01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94–02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94–03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94–04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95–01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95–02	U.Kirchgraber	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten.
	U. Kirchgraber, N. Sigrist	Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95–03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95–04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
95–05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95–06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme
96–01	W. Burgherr	Schwimmende Prismen mit Schlagseite
96–02	M. Struwe	Sattelpunkte oder Variationsprinzipien in Geometrie und Mechanik
96–03	M. Huber	Warum denn ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar?
97–01	B. Eicke, E. Holzherr	Analysis – mit dem Computer-Algebra-System des TI-92 (Preis: Fr. 8.- inkl. MWSt)
97–02	C. Blatter	Notizen zu einer Mathematik fürs Leben
97–03	F. Spirig	Elemente zur Kugelgeometrie
98–01	U. Kortenkamp, J. Richter-Gebert	Geometry and Education in the Internet Age
98–02	M. Adelmeyer	KS Flight Simulator
98–03	H. Struve	Geometrie aus Schülersicht: Charakteristika und Probleme
98–04	M. Ludwig	Platonische Durchdringungen – ein Projekt im Mathematikunterricht der Klasse 10 (Preis: Fr. 5.- inkl. MWSt)
98–05	M. Adelmeyer,W. Durandi, M. Kopp	Schullotto – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98–06	J.-P. David, P. Hänsli, M. Leupp	Parabeln – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98–07	B. Dzung Wong, H.-W. Henn	Der Regenbogen – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98–08	M. Bettinaglio, F. Lehmann	Mathematisches Billard – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
99–01	F. Blättler, R. Sutter	Public Key – Kryptographie RSA-programm für den TI-92