

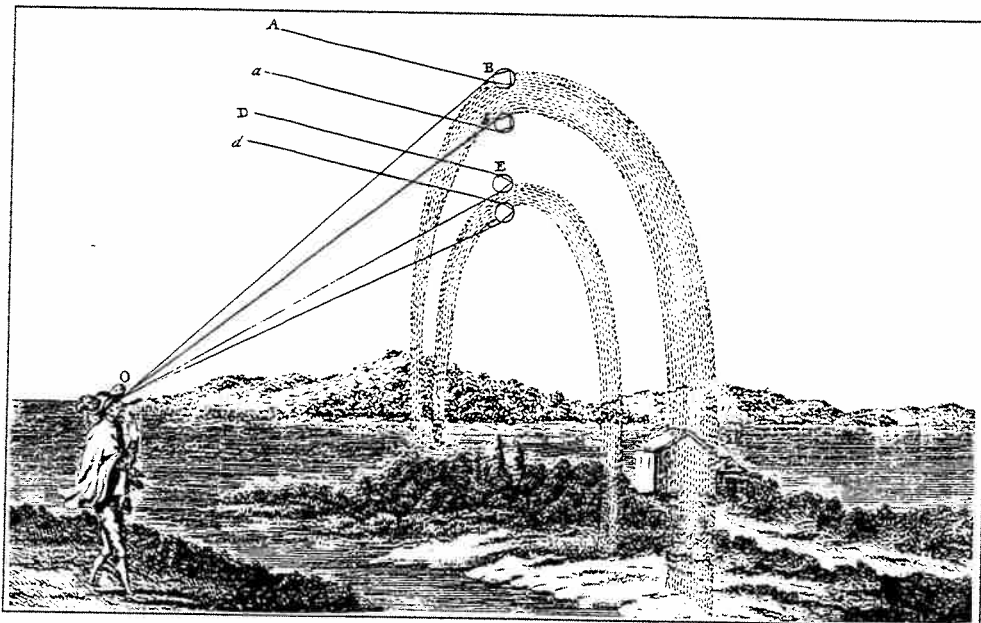
Baoswan Dzung Wong

Aargauische Kantonsschule
CH-5430 Wettingen

Hans-Wolfgang Henn

Staatliches Seminar für
Schulpädagogik (Gymnasien)
D-76133 Karlsruhe

DER REGENBOGEN



Dieses Projekt wurde gefördert durch die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) und das Programm *ETH für die Schule*

Inhaltsangabe

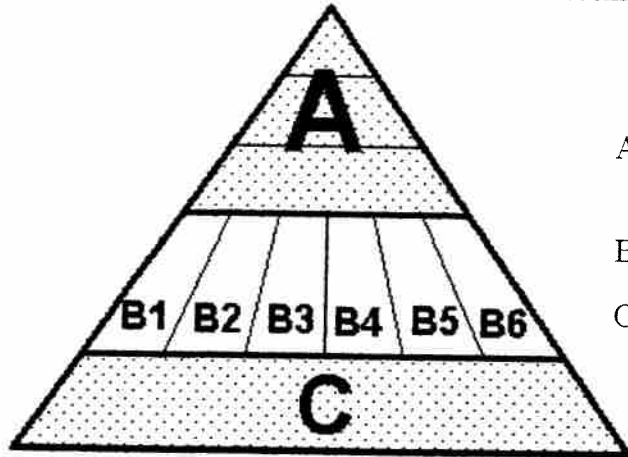
1	Überblick über das Projekt	3
1.1	Einführung	3
1.2	Voraussetzungen	4
1.3	Ziele	4
2	Geometrischer Zugang	5
2.1	Die Unterrichtsphasen	5
2.2	Die Arbeitsblätter	6
2.3	Erwartungshorizont der Arbeitsblätter	11
3	Projektaufträge	23
3.1	Quantitative Theorie des Regenbogens mit Methoden der Analysis	23
3.1.1	Fermatsches Prinzip	23
3.1.2	Quantitative Bestimmung der Extremwinkel	23
3.1.3	Verallgemeinerungen	23
3.2	Experimente	24
3.2.1	Plexiglasscheibe	24
3.2.2	Gartenschlauch	24
3.2.3	Zylinderglas, Quaderbecken	24
3.2.4	Kugelglas	25
3.2.5	Heiligenschein	26
3.2.6	Weitere Experimente	26
3.3	Historisches	26
3.3.1	Die Stationen der Regenbogenforschung	27
3.3.2	Vertiefung in ein literarisches Werk	27
3.4	Regenbogen überall	29
3.4.1	im Internet	29
3.4.2	in den Bauernregeln	30
3.4.3	in der Kunst	30
3.4.4	in der Technik	30
3.5	Kritische Analyse	31
3.5.1	Darstellung in Schulbüchern	31
3.6	Zeitungsartikel	32
4	Präsentation und Zusammenfassung	32
4.1	Erstellen eines Quizheftes	32
4.2	Führen eines Tagebuches	33
4.3	Darstellung der Regenbogentheorie	33
4.3.1	in einem Videofilm	33
4.3.2	in einem Comic	33
4.3.3	an Modellen	33

5 Erwartungshorizont	34
Zu 3.1.1: Fermatsches Prinzip	34
Zu 3.1.2: Quantitative Bestimmung der Extremwinkel	34
Zu 3.1.3: Verallgemeinerungen	36
Zu 3.2.2: Experiment mit Gartenschlauch	37
Zu 3.2.3: Experiment am Quaderbecken	38
Zu 3.2.4: Experiment am Kugelglas	38
Zu 3.2.5: Heiligenschein	40
Zu 3.2.6: Weitere Experimente	40
Zu 3.3.1: Stationen der Regenbogenforschung	40
Zu 3.3.2: Vertiefung in ein literarisches Werk	41
Zu 3.4.2: Regenbogen in den Bauernregeln	42
Zu 3.4.3: Regenbogen in der Kunst	43
Zu 3.4.4: Regenbogen in der Technik	44
Zu 3.5: Kritische Analyse	45
Zu 4.1: Erstellen eines Quizheftes	46
Zu 4.3.3: Darstellung an Modellen	47
6 Referenzen	50
6.1 Glossar	50
6.2 Literatur	51
6.3 Internetadressen	53

1 Überblick über das Projekt

1.1 Einführung

Der Regenbogen hat seit jeher auf Menschen eine besondere Faszination ausgeübt, einerseits durch seine leuchtenden Farben, andererseits durch seine elegante Bogenform. Dieses Projekt soll zeigen, wie mit der Mittelschulmathematik die Entstehung des Regenbogens verständlich gemacht werden kann. Wir haben unser Projekt in 3 Projektphasen strukturiert, die in Abschnitt 1.2 näher beschrieben werden:



A Geometrischer Zugang zur Erklärung des Regenbogens,

B sechs Projektaufgaben,

C Präsentation und Zusammenfassung.

Zielgruppe ist eine 11. Klasse, d.h. eine Klasse, die im ersten Jahr Analysis lernt (11. Klasse in Deutschland, 3. Klasse Sekundarstufe II in der Schweiz). Das Projekt kann natürlich auch früher (ohne Abschnitt 3.1) oder später durchgeführt werden (vgl. Voraussetzungen).

Gemäss der zu erwartenden geringen Projekterfahrung werden für den geometrischen Zugang A zur Erklärung des Regenbogens die Arbeitsaufträge an die Schüler in Form von Arbeitsblättern (vgl. Kap. 2) gefasst, die zuerst relativ eng, dann zunehmend offener formuliert sind. Müssen gewisse Voraussetzungen zuerst geschaffen werden, so sollen sie als Schüleraufträge vergeben werden (z.B. Experimente zu Reflexion, Brechung, Dispersion). Gruppenarbeit ist eine geeignete Lernform. Die Lerngruppe vergleicht regelmässig ihre Ergebnisse und hat so einen gemeinsamen Wissensstand (in obenstehendem Diagramm durch die horizontalen, sich weitenden Blöcke angedeutet). Für die eigentliche Projektphase wurden 6 verschiedene Teilaufgaben B1 bis B6 formuliert (vertikale Blöcke im Diagramm). Diese vertiefenden Aspekte sind unabhängig voneinander und verschieden schwierig und können so zur Binnendifferenzierung dienen (vgl. Kap. 3):

B1 Quantitative Theorie des Regenbogens mit Methoden der Analysis.

B2 Experimente zur Erzeugung von "Regenbögen".

B3 Studium historischer Texte zur Regenbogentheorie.

- B4 “Regenbogen überall” (Internet-Recherchen, Mythen der Völker, Bauernregeln, Abbildungen von Regenbogen, Regenbogen in der Kunst, in der Technik, ...).
- B5 Kritische Analyse (Darstellung in Lexika, Schulbüchern, Zeitungsartikeln, ...).
- B6 Schreiben eines populärwissenschaftlichen Artikels zur “Regenbogentheorie”, der in der ZEIT oder in BILD DER WISSENSCHAFT erscheinen könnte.

In der zusammenfassenden dritten Projektphase C werden die einzelnen Ergebnisse gegenseitig vorgestellt und in einer Ausstellung der Schulöffentlichkeit präsentiert (vgl. auch Kap. 4).

In jedem Fall ist die Zusammenarbeit von Mathematik- und Physiklehrer wünschenswert. Bei einigen der Teilaspekte in B können sehr gut andere Fächer in das Projekt einbezogen werden, z.B. Geschichte, Religion, Französisch, Englisch, Bildnerisches Gestalten. Der Zeitbedarf für das Projekt liegt je nach Ausführlichkeit zwischen 10 und 20 Unterrichtsstunden.

1.2 Voraussetzungen

Je nach Stand der Klasse müssen folgende Voraussetzungen zuerst bereitgestellt werden:

- a) Kenntnis von Reflexions- und Brechungsgesetz,
- b) Kenntnis des Phänomens der Dispersion,
- c) Kongruenzsätze am Dreieck,
- d) Ähnlichkeit,
- e) Winkelfunktionen am Kreis,
- f) Herstellen funktionaler Beziehungen und Deutung von Funktionsgraphen,
- g) Kenntnis geeigneter Computerprogramme (z.B. Dynamische Geometrieprogramme (DGS), Graphik-Taschenrechner (GTR), Funktionsplotter, Computer-Algebra-Systeme (CAS), ...)
- h) Arcussinus-Funktion; Extremwertbestimmung (für Teil 3.1).

1.3 Ziele

- a) aktives Kennenlernen eines typischen Modellierungskreislaufs:
 - Problem der Realität (hier das Naturphänomen Regenbogen),
 - Naturbeobachtung, Präzisierung der Situation, Vereinfachung,

- Mathematisches Modell (Ablenkfunktionen),
 - Mathematische Ergebnisse (Extremwinkel (abhängig vom Brechungsindex n), Symmetrie, Intensitätsverteilung),
 - Rückübersetzung in die Realität (Regenbogenwinkel, Helligkeitsverteilung, Farben, Bogenform),
 - Grenzen des Modells (z.B. überzählige Bögen (Beugungseffekte), weisse Nebelbögen,...)
- b) selbständig Experimente planen und ausführen, Literaturarbeit, Einsicht in die Geschichte der Naturwissenschaften, Erstellen von Protokollen (Schreiben eines "Zeitungsartikels"), Halten von Referaten.

2 Geometrischer Zugang

2.1 Die Unterrichtsphasen

1. Phase (1–2 U-Stunden)

Die Lehrerin bzw. der Lehrer zeigt der Klasse einige geeignete Photos von Regenbogen. In einer Einzelarbeitsphase soll jeder Schüler schriftlich die folgende "Brainstorming-Frage" beantworten:

Was wissen Sie vom Regenbogen? Notieren Sie, welche Erfahrungen und Kenntnisse aus Ihrem "Erfahrungsschatz" man vermutlich gebrauchen kann!

Die vorhandenen Vorstellungen und Ideen werden gesammelt, verglichen, diskutiert, geordnet und gewertet. Anschliessend wird in Gruppen das Arbeitsblatt 1 bearbeitet und dabei die ersten vereinfachenden Modellannahmen gemacht. Der Ablenkwinkel α wird als abhängig vom "Stossparameter" x mit $-1 \leq x \leq 1$ erkannt. Die Ergebnisse der Gruppenarbeit werden im Plenum gesammelt und ausgewertet.

2. Phase (1–2 U-Stunden)

Anhand des Arbeitsblatts 2 werden die Strahlengänge der Strahlen 1. bis 4. Ordnung konstruiert und genauer untersucht. Jeder Schüler sollte 4 Exemplare dieses Arbeitsblatts erhalten, um die 4 verschiedenen Konstruktionen durchführen zu können. Aus Zeitgründen kann man auch nur 2 Strahlengänge konstruieren lassen, muss dann aber auf gleichmässige Verteilung der vier Strahlenordnungen achten. Anschliessend werden die Ablenkwinkel α in Abhängigkeit vom Einfallswinkel β , vom Brechungswinkel γ , vom Brechungsindex n und vom Stossparameter x bestimmt.

3. Phase (2–4 U-Stunden)

Die Winkelverteilung der Strahlen 1.– 4. Ordnung wird untersucht. Hierfür werden zwei verschiedene Arbeitsmöglichkeiten angeboten:

- Arbeitsblatt 3a: Wertetabellen bzw. Konstruktion von Strahlenbündeln,
- Arbeitsblatt 3b: Einsatz eines Dynamischen Geometrieprogramms. Man sollte ein Makro **Brech_ein** zur Verfügung haben (ggf. durch den Lehrer vorgegeben), das z.B. die folgende Spezifikation hat:

Anfangselemente: Gerade g , Punkt P , Punkt Q auf g .

Zielelemente: Punkt R so, dass der Strahl PQ bei der Brechung an g (mit $n = 1.33$) in den Strahl QR gebrochen wird.

Da dieses Makro programmspezifisch ist, muss man seine Anwendung genau erklären. Für den Lösungsvorschlag wurde EUKLID verwendet.

4. Phase (2–4 U-Stunden)

Die drei (ggf. in verschiedenen Arbeitsgruppen zu bearbeitenden) Aufgabenstellungen des Arbeitsblatts 4 (Intensitätsverteilung, Bogenform und Farben) klären qualitativ das Entstehen des (primären und sekundären) Regenbogens.

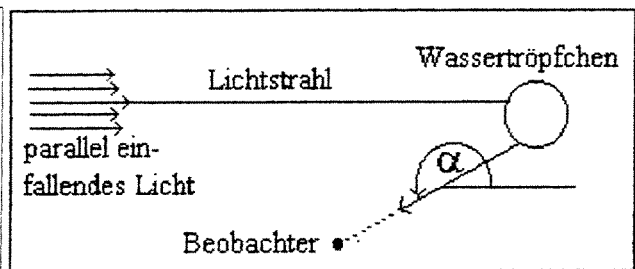
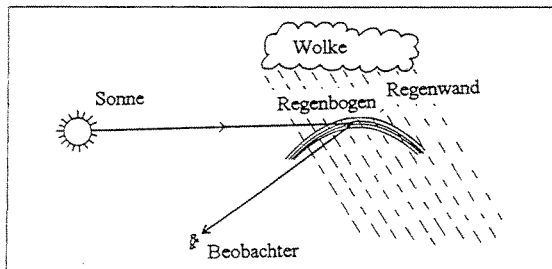
2.2 Die Arbeitsblätter

Die folgenden vier Arbeitsblätter sind als Kopiervorlagen gedacht.

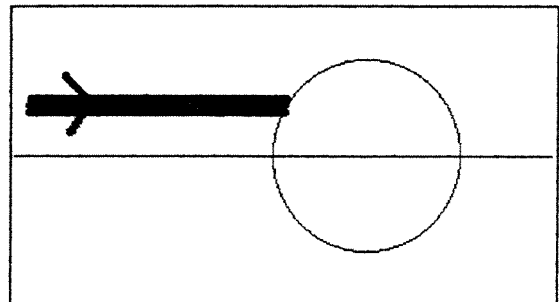
Zu jedem Arbeitsblatt wird in Abschnitt 2.3 ein Erwartungshorizont für die Bearbeitung angegeben.

Arbeitsblatt 1:

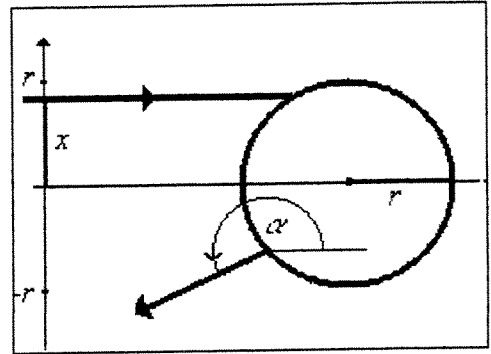
Wie entsteht ein Regenbogen? — Mathematisches Modell —



1. Erläutern Sie die Situationsskizze "Sonne, Beobachter, Regen" (oben links).
2. Begründen Sie folgende Vereinfachungen im zweiten Bild (oben rechts):
 - Man kann in einer "Einfallsebene" argumentieren;
 - die Tröpfchen sind kugelförmig;
 - die Sonnenstrahlen fallen parallel ein;
 - die Sonnenstrahlen werden an einem Wassertröpfchen gebeugt;
 - die Ablenkung eines Strahls kann durch einen geeigneten Winkel α gemessen werden.
3. Welche Winkel gehören zum "Beobachtungssektor", d. h. können vom Beobachter gesehen werden?
4. Lichtstrahlen werden beim Auftreffen auf das betrachtete Tröpfchen zum Teil gebrochen, zum Teil reflektiert. Notiere die zugehörigen Gesetze beim Auftreffen eines Lichtstrahls auf eine Ebene (nenne den Einfallswinkel β , den Ausfallswinkel γ). Wie kann man Brechung und Reflexion bei Kugelflächen beschreiben?
5. Wenn wir davon ausgehen, dass bei der Zerlegung eines Strahles in gebrochenen und reflektierten Strahl die Intensität jeweils halbiert wird, so können Sie das nebenstehende Bild ergänzen (die Liniendicke soll jeweils die Intensität des Strahls symbolisieren). Was sollen die Strahlen m -ter Ordnung sein?



6. Das nebenstehende Bild präzisiert das 2. Bild der vorhergehenden Seite. Der Ablenkwinkel α hängt vom Abstand x ab, den der einfallende Strahl von der Tröpfchenachse hat. Man zählt x negativ bzw. positiv, wenn der Strahl oberhalb oder unterhalb der Tröpfchenachse einfällt. Der Tröpfchenradius r ist uns leider unbekannt. Begründen Sie, dass der Ablenkwinkel α nicht allein vom Abstand x des Strahls von der Tröpfchenachse, sondern vom Verhältnis $x : r$ abhängt. Wieso kann man dies dazu benutzen, den Tröpfchenradius auf 1 zu normieren? Damit hat der sogenannte "Stossparameter" x den Wertebereich $-1 \leq x \leq 1$.

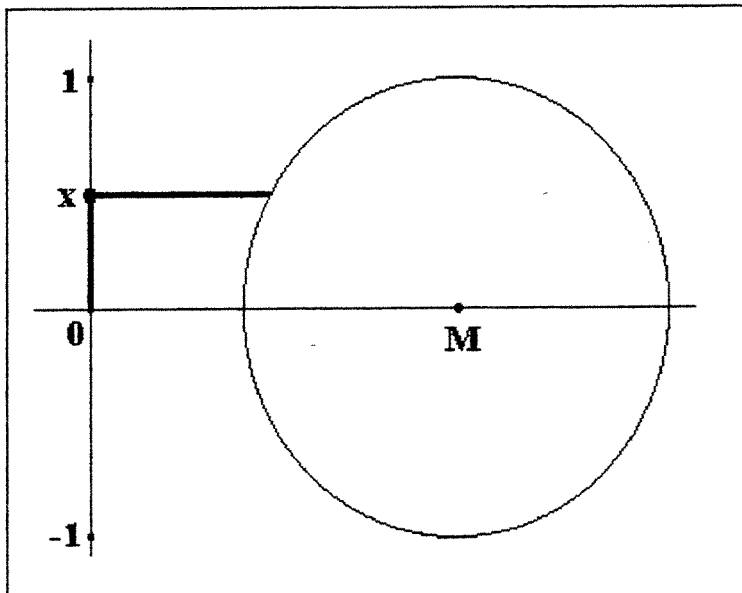


Arbeitsblatt 2:

Wie entsteht ein Regenbogen? — Die Ablenkfunktionen F_i —

Ein Ergebnis von Arbeitsblatt 1 war, dass wir aus Intensitätsgründen zunächst nur Strahlen der 1. bis 4. Ordnung untersuchen.

Konstruieren Sie in dem unteren Bild den Strahlengang der Strahlen der 1. bis 4. Ordnung (verwenden Sie jeweils ein eigenes Exemplar von Arbeitsblatt 2). Den Brechungsindex von Wasser können Sie mit $n = 1.33$ ansetzen.



Drücken Sie jeweils α durch den Einfallswinkel β und den Brechungswinkel γ aus.

Überlegen Sie, wie und durch welche Formeln β , γ , n und x zusammenhängen. Verwenden Sie dies, um jeweils den Ablenkwinkel α in Abhängigkeit vom Brechungsindex n und vom Stossparameter x zu bestimmen.

Arbeitsblatt 3a:**Wie entsteht ein Regenbogen?
— Die Winkelverteilung —**

Versuchen Sie einen Überblick darüber zu gewinnen, wie die Winkel der Strahlen 1. bis 4. Ordnung verteilt sind, wenn x von -1 bis 1 variiert wird.

Prüfen Sie insbesondere, welche Strahlen in den Beobachtungssektor fallen.

Mögliche Wege, die Sie begehen können:

- Berechnen Sie Wertetabellen für α . Variieren Sie dabei x in genügend kleinen Schritten. Zeichnen Sie dann entsprechende x - α -Graphen.
- Konstruieren Sie den Strahlenverlauf für parallel einfallende Strahlenbündel (z. B. im Abstand 0.1 oder 0.05). Sie können dies auch arbeitsteilig auf Folien machen und diese dann aufeinanderlegen.

Untersuchen Sie, wie stark sich α ändert, wenn sich x um einen festen Wert Δx ändert. Versuchen Sie die Resultate zu deuten.

Arbeitsblatt 3b:**Wie entsteht ein Regenbogen?
— Die Winkelverteilung —**

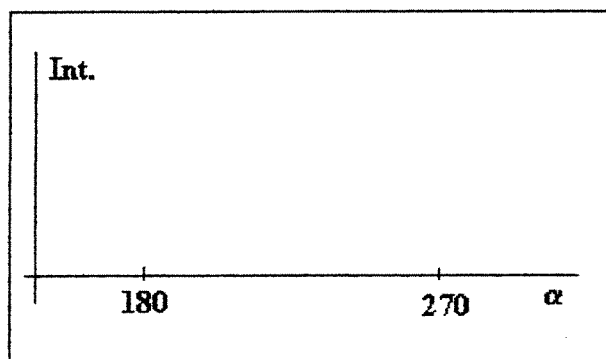
Versuchen Sie einen Überblick darüber zu gewinnen, wie die Winkel der Strahlen 1. bis 4. Ordnung verteilt sind, wenn x von -1 bis 1 variiert wird.

Prüfen Sie insbesondere, welche Strahlen in den Beobachtungssektor fallen.

Konstruieren Sie hierfür den Strahlenverlauf der Strahlen 1. bis 4. Ordnung mit einem Dynamischen Geometrieprogramm. Gehen Sie wie in der letzten Abbildung des Arbeitsblatts 1 von einem Punkt x aus, der zwischen -1 und $+1$ im Zugmodus variiert werden kann. Sie können zur Konstruktion das Makro **Brech.ein** verwenden (Ihre Lehrerin bzw. Ihr Lehrer erklären Ihnen, wie es genau anzuwenden ist, um zu einem einfallenden Strahl den gebrochenen Strahl zu konstruieren). Nutzen Sie ansonsten zur Konstruktion die vorhandenen Symmetrien aus (vgl. die Konstruktionen zum Arbeitsblatt 2)!

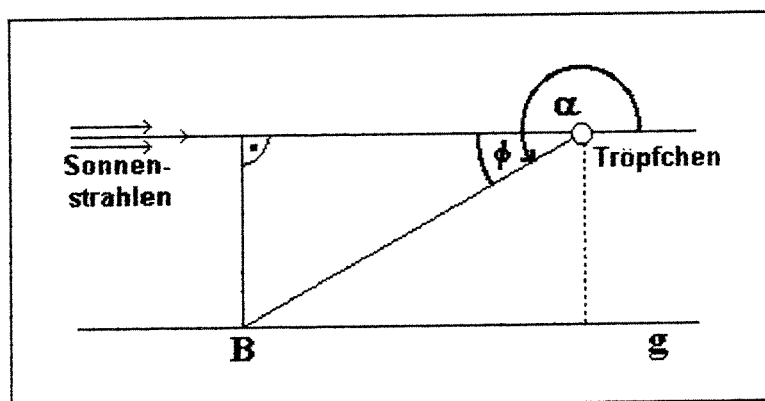
- a. Entwerfen Sie ein Diagramm für die Intensitätsverteilung. Verwenden Sie die nebenstehende Skizze! Zeichnen Sie die Intensität der Strahlen 1., 3. und 4. Ordnung ein und die resultierende Gesamtintensität.

Jetzt sollten Sie das Entstehen des primären und des sekundären Regenbogens erklären können! Was ergibt sich sonst noch aus der Intensitätsverteilung?



- b. Wieso ist der Regenbogen farbig? Sie sollten dabei an ein bekanntes Experiment denken, bei dem aus weissem Sonnenlicht auch Farben entstehen. Womit hatte man das erklärt?

- c. Wieso ist der Regenbogen kreisförmig? Beachten Sie hierfür, dass wir bisher immer in einer festen Einfallsebene (wie im nebenstehenden Bild) argumentiert haben. Was bedeutet es, wenn man eine andere Einfallsebene betrachtet?

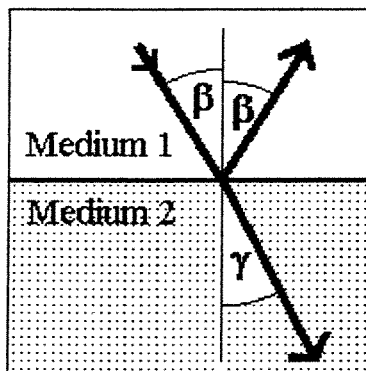


Bastele ein Modell "mit variabler Einfallsebene" aus Pappdeckel! Wovon hängt es ab, wie gross der Kreisteil ist, den wir vom Regenbogen sehen?

2.3 Erwartungshorizont der Arbeitsblätter

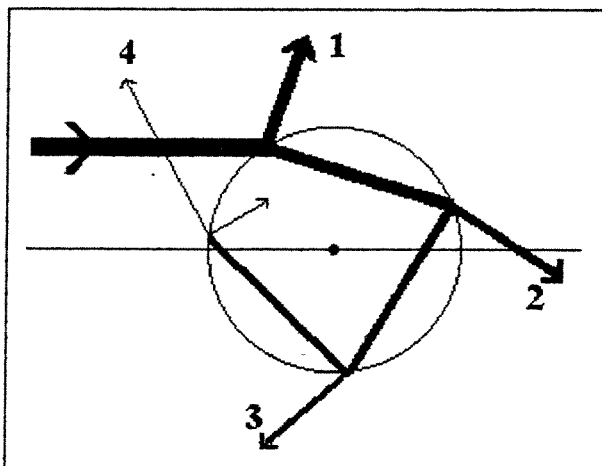
Arbeitsblatt 1

Die Parallelitätsannahme kann man wegen der grossen Entfernung Sonne – Erde leicht durch eine Überschlagsrechnung begründen. Der Ablenkswinkel α lässt sich natürlich auch anders definieren. In unserer Definition bedeutet $\alpha = 0^\circ$ keine Ablenkung. Damit ein abgelenkter Strahl überhaupt ins Auge des Beobachters fallen kann, muss α im dritten Quadranten liegen, d.h. zwischen 180° und 270° im Gradmass bzw. zwischen π und 1.5π im Bogenmass betragen.



Lichtstrahlen breiten sich geradlinig aus. Beim Auftreffen auf die Trennschicht von Medium 1 (hier Luft) und Medium 2 (hier Wasser) wird der Strahl wie im nebenstehenden Bild zum Teil reflektiert (unter Beachtung des Reflexionsgesetzes *Einfallswinkel = Ausfallswinkel*) und zum Teil gebrochen (unter Beachtung des Brechungsgesetzes $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = n$ beim Eintritt ins optisch dichtere (hier von Luft in Wasser) bzw. $= \frac{1}{n}$ beim Eintritt ins dünnere Medium (hier von Wasser in Luft)).

Bei den kugelförmigen Wassertropfchen ist zur Konstruktion am Auftreffpunkt des Strahls die Tangentialebene zu verwenden. Als Brechungsindex n kann man zunächst den Wert $n = 1.33$ (Luft/Wasser) verwenden (vgl. jedes Physikbuch).



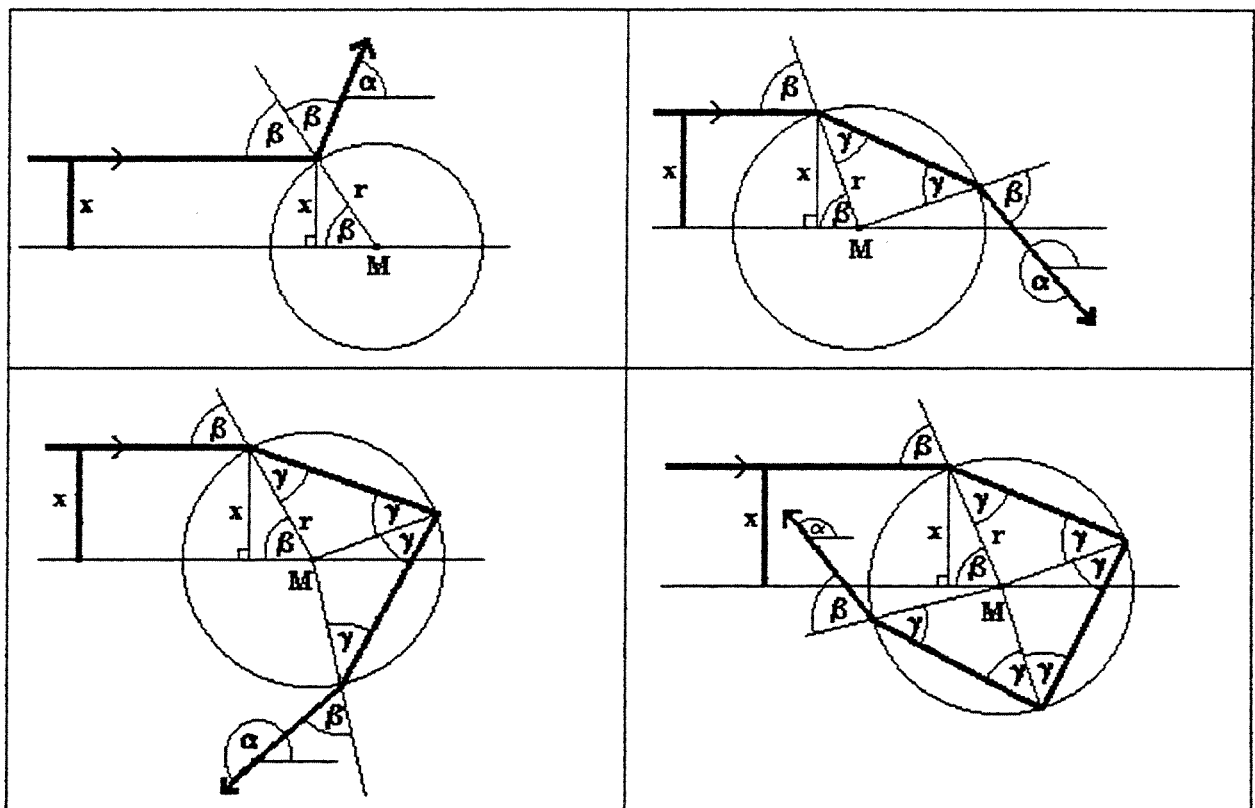
Näherungsweise kann man davon ausgehen, dass bei der Zerlegung eines Strahles in gebrochenen und in reflektierten Strahl die Intensität jeweils halbiert wird. Das nebenstehende Bild deutet dies an. Die recht komplizierten Fresnelschen Formeln, die das Verhalten genauer beschreiben, sind für unsere Zwecke nicht nötig. Strahlen 1. Ordnung werden am Tröpfchen reflektiert, Strahlen 2. Ordnung werden ins Tröpfchen gebrochen und gleich wieder herausgebrochen. Strahlen m -ter Ordnung werden $(m - 2)$ -mal im Tröpfcheninnern reflektiert.

Nach der vereinfachten Intensitätsüberlegung hat der Strahl m -ter Ordnung noch $\frac{1}{2^m}$ der ursprünglichen Intensität, der Strahl 5. Ordnung damit noch $\frac{1}{32}$, also etwa 3%, was man sicherlich zunächst vernachlässigen kann.

Die Normierung des unbekannten Tröpfchenradius r auf 1 (in irgendeiner Einheit) ist elegant und arbeitssparend. Verwendet wird die Ähnlichkeitsinvarianz der Situation. Wer diesen Weg nicht gehen will, der kann auch die Ablenkfunktionen mit Definitionsintervall $[-r; r]$ studieren und erhält hinterher, dass die extremalen Ablenkwinkel unabhängig von r sind. Der Einfluss des Tröpfchenradius wird hier in erster Näherung vernachlässigt (für Genaueres vgl. Abschnitt 3.4.4).

Arbeitsblatt 2

In den vier folgenden Bildern wurde der Strahlengang der Strahlen 1. bis 4. Ordnung konstruiert:



In den Figuren ist β der Eintritts- und der (äussere) Reflexionswinkel, γ der Brechungswinkel (und innere Reflexionswinkel) mit $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = n$. Aufgrund der vorliegenden Symmetrien treten nur diese beiden Winkel auf. Für positive x ist die Ablenkung des Strahls (gemessen in mathematisch positivem Sinn) bei der äusseren Reflexion $\pi - 2\beta$, bei der Brechung in das Tröpfchen oder aus dem Tröpfchen heraus $-\beta + \gamma$, bei einer Reflexion

im Innern des Tröpfchens $\pi + 2\gamma$. Die gesamte Ablenkung α ergibt sich folglich zu:

$$\begin{array}{ll} \text{Strahl 1. Ordnung:} & \alpha = \pi - 2\beta \\ \text{Strahl 2. Ordnung:} & \alpha = -2\beta + 2\gamma \\ \text{Strahl 3. Ordnung:} & \alpha = \pi - 2\beta + 4\gamma \\ \text{Strahl 4. Ordnung:} & \alpha = 2\pi - 2\beta + 6\gamma \end{array}$$

Wegen $\sin(\beta) = \frac{x}{r}$ und $r = 1$ folgt $\beta = \arcsin(x)$. Weiter folgt $\gamma = \arcsin(\frac{x}{n})$ wegen des Brechungsgesetzes. Aufgrund der Antisymmetrie des Arcussinus sind die folgenden Funktionsterme $\alpha = F_m(x)$ auch für negative x gültig:

$$\begin{array}{ll} \alpha = F_1(x) = & \pi - 2 \arcsin(x) \\ \alpha = F_2(x) = & -2 \arcsin(x) + 2 \arcsin(\frac{x}{n}) \\ \alpha = F_3(x) = & \pi - 2 \arcsin(x) + 4 \arcsin(\frac{x}{n}) \\ \alpha = F_4(x) = & 2\pi - 2 \arcsin(x) + 6 \arcsin(\frac{x}{n}) \end{array}$$

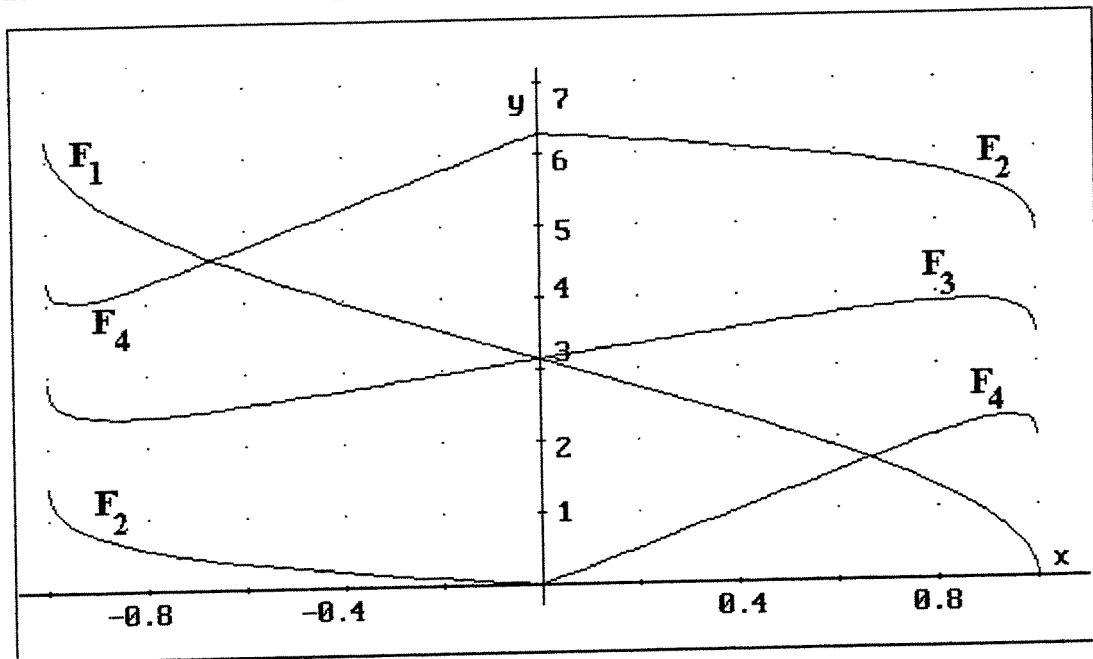
Arbeitsblatt 3a

Auch ohne die zuletzt beschriebenen Formeln für die Ablenkwinkel kann man für einen ersten qualitativen Überblick wie folgt vorgehen: jeweils zehn Schüler für eine Strahlenordnung konstruieren je einen Strahl für $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ auf Overheadfolien. Die Folien werden dann anschliessend aufeinander gelegt. Die Konstruktion wird sehr einfach, wenn man geeignete Symmetrien beachtet.

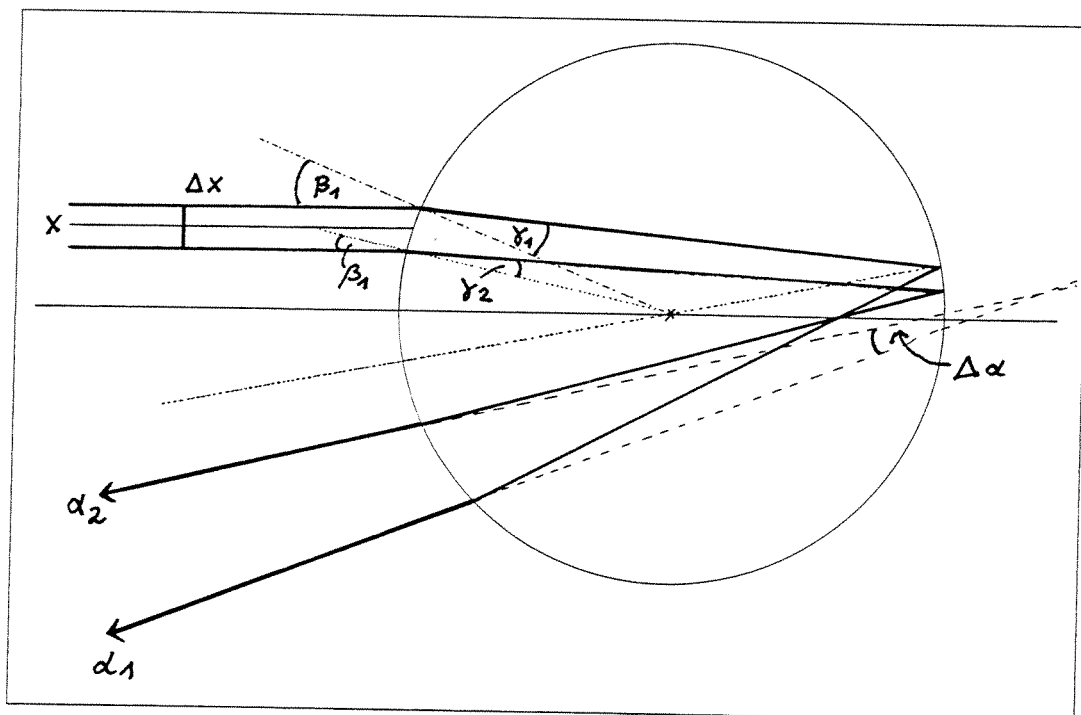
Mit Hilfe eines Taschenrechners kann man mit Hilfe der Formeln $F_1(x)$ bis $F_4(x)$ der Ablenkfunktionen Wertetabellen $(x|\alpha)$ berechnen und dann Graphen zeichnen. Man verwendet dabei den Wert $n = 1.33$. Dabei muss man ggf. den Winkel α modulo 360° auf das Intervall $[0^\circ; 360^\circ)$ reduzieren (bzw. im Bogenmass modulo 2π). Ein programmierbarer Taschenrechner erleichtert die Arbeit.

Wenn man einen GTR oder einen Funktionsplotter zur Verfügung hat, so kann man die Graphen noch einfacher zeichnen lassen. Dabei sind jedoch ggf. die Funktionsterme durch eine Fallunterscheidung so abzuändern, dass jeweils $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$ gilt.

In jedem Fall erhält man Graphen der Ablenkfunktionen F_1 bis F_4 wie im nächsten Bild:



Man kann aber auch rein geometrisch arbeiten und argumentieren, indem man für verschiedene x die entsprechenden Strahlengänge konstruiert. In Gruppenarbeit kann man für verschiedene Werte von x und für eine feste Bündelbreite Δx das Strahlenbündel $[x - 0.5 \cdot \Delta x; x + 0.5 \cdot \Delta x]$ konstruieren und den Divergenzwinkel $\Delta\alpha$ messen lassen. Für die Konstruktion wird der Auftreffwinkel β mit dem Winkelmesser gemessen und der Brechungswinkel γ mit dem Taschenrechner berechnet. Dies ist im nächsten Bild für die Strahlen 3. Ordnung ausgeführt.



In diesem Bild sind $x = 0.3$, $\Delta x = 0.16$, $\beta_1 = 22^\circ$, $\gamma_1 = 16.3^\circ$, $\beta_2 = 12^\circ$, $\gamma_2 = 8.9^\circ$, $\Delta\alpha = 8.5^\circ$. Ändert man z.B. x in Schritten von 0.1 von -1 bis 1 , so stellt man fest:

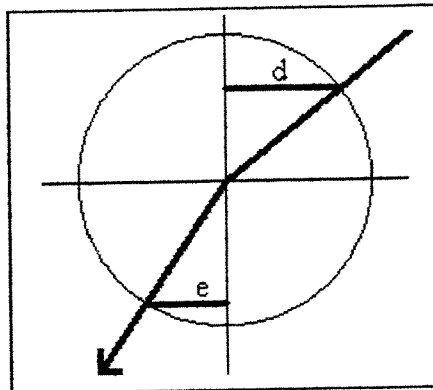
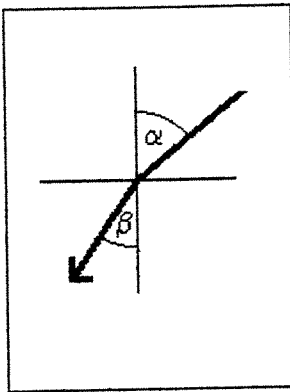
- Nur für $x > 0$ kann das am Tröpfchen reflektierte Licht 3. Ordnung in den Beobachtungssektor fallen.
- Der Streuwinkel $\Delta\alpha$ bleibt ab $x = 0$ zunächst relativ gleich, nimmt dann aber einen minimalen Wert an, der fast Null ist.
- Die Winkel α der abgelenkten Strahlen haben einen maximalen Wert bei ca. 222° , dort ist auch gerade der minimale Wert von $\Delta\alpha$.

Ein einfallender Strahl der "Breite" Δx hat eine immer gleich bleibende Lichtintensität, die in den von x abhängigen Winkelbereich $\Delta\alpha$ zurückgeworfen wird. Je kleiner $\Delta\alpha$ ist, desto grösser ist also die Intensität des Lichts 3. Ordnung, das in diesen Winkelsektor zurückgeworfen wird. Dort, wo $\Delta\alpha$ fast gleich Null wird, ist also eine sehr grosse Intensität Lichts 3. Ordnung zu erwarten, das dem Beobachter auffallen müsste. Dieser Effekt bewirkt den Regenbogen.

Die entsprechende Konstruktion für Strahlen 1. Ordnung ergibt, dass $\Delta\alpha$ über den gesamten Bereich von -1 bis 1 fast gleich bleibt. Strahlen 2. Ordnung fallen nie in den Beobachtungssektor, können also nichts zum Regenbogen beitragen. Strahlen 4. Ordnung haben ein ähnliches Verhalten wie Strahlen 3. Ordnung: In den Beobachtungssektor können sie nur für $x < 0$ fallen; es gibt einen Wert für x , bei dem $\Delta\alpha$ fast gleich Null ist. Die Winkel α der abgelenkten Strahlen haben einen minimalen Wert, der etwa bei 230° liegt. Genau dort liegt wieder das Minimum von $\Delta\alpha$ vor.

Arbeitsblatt 3b

Für die Bearbeitung dieses Arbeitsblatts müssen die Schülerinnen und Schüler Kenntnisse mit dem Umgang eines Dynamischen Geometrieprogramms haben, z.B. mit Cabri, Thales, Euklid oder Geolog. Im folgenden wird eine Lösungsmöglichkeit für die Strahlen 3. Ordnung mit dem Programm Euklid gezeigt. Euklid ist ein sehr leistungsfähiges Shareware-Programm (Bezugsquelle vgl. Literaturverzeichnis, Abschnitt 6.3, Nr. 14). Für eine Lösung mit CABRI vgl. Henn/Jock, Arbeitsbuch Cabri-Géomètre. Bei Verwendung eines anderen Programms müssen ggf. geeignete Modifikationen gemacht werden.



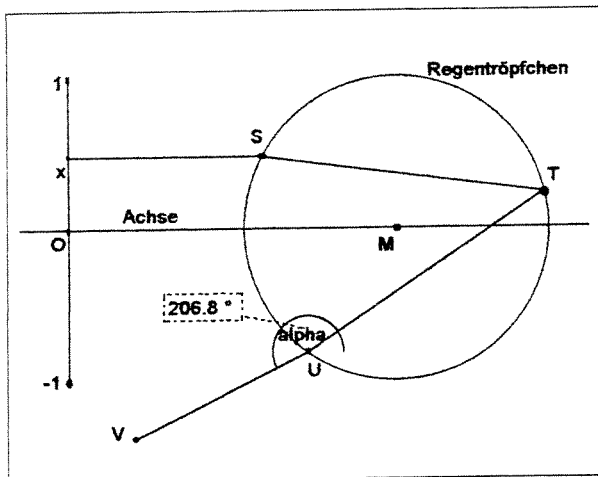
Für die Konstruktion des entscheidenden Makros **Brech_ein** verwendet man die elementargeometrische Fassung des Brechungsgesetzes, die ohne Sinusfunktion auskommt:

Der Zusammenhang zwischen einfallendem Strahl mit Einfallswinkel α und gebrochenem Strahl mit Brechungswinkel β (linkes Bild) kann durch das Verhältnis von Strecken ausgedrückt werden (rechtes Bild): Wird ein beliebiger Kreis um den Auftreffpunkt des einfallenden Strahls auf die Trennschicht gezeichnet, so haben die entsprechenden Halbsehn d und e stets ein konstantes Verhältnis, den Brechungsindex (die Halbsehn sind für Kreisradius 1 natürlich gerade die Sinuswerte!).

Das nächste Bild zeigt die entsprechende Konstruktion eines Makros **Brech_ein**, das die folgende Spezifikation hat:

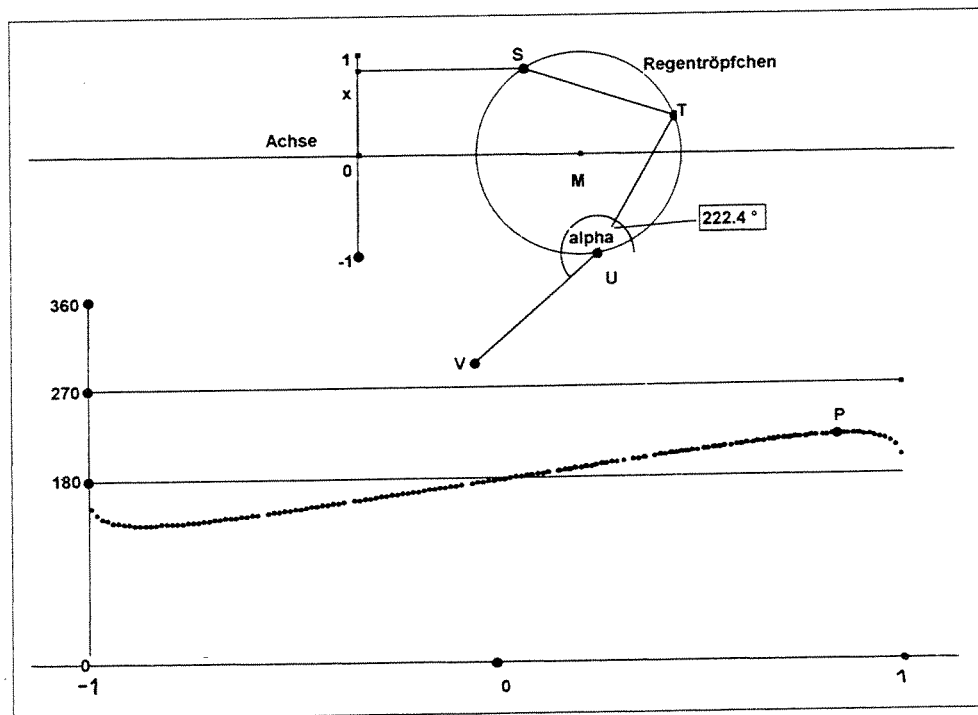
Anfangsobjekte: Gerade a , Punkt $A \in a$, Punkt B .

Zielobjekt: Punkt C derart, dass der einfallende Strahl AB an der Geraden a in den Strahl AC (bei Brechungsindex $n = 1.33$) gebrochen wird.



Schliesslich wird im linken Bild noch der endgültige Ablenkswinkel α von EUKLID gemessen, im Bild sind es gerade 206.8° (da EUKLID wie üblich einen durch 3 Punkte bestimmten normierten Winkel misst, wurden zuerst eine Parallele durch U zur Achse und ganz rechts ein Hilfspunkt auf dieser Parallele gezeichnet und hinterher wieder verborgen). Ziehen an x zwischen -1 und 1 ergibt analoge Ergebnisse, wie sie im Erwartungshorizont von Arbeitsblatt 3a beschrieben sind.

Der funktionale Zusammenhang zwischen x und α kann sehr schön von Euklid mit Hilfe der Ortslinienoption gezeichnet werden. Dies ist im nächsten Bild als Ortslinie dargestellt:

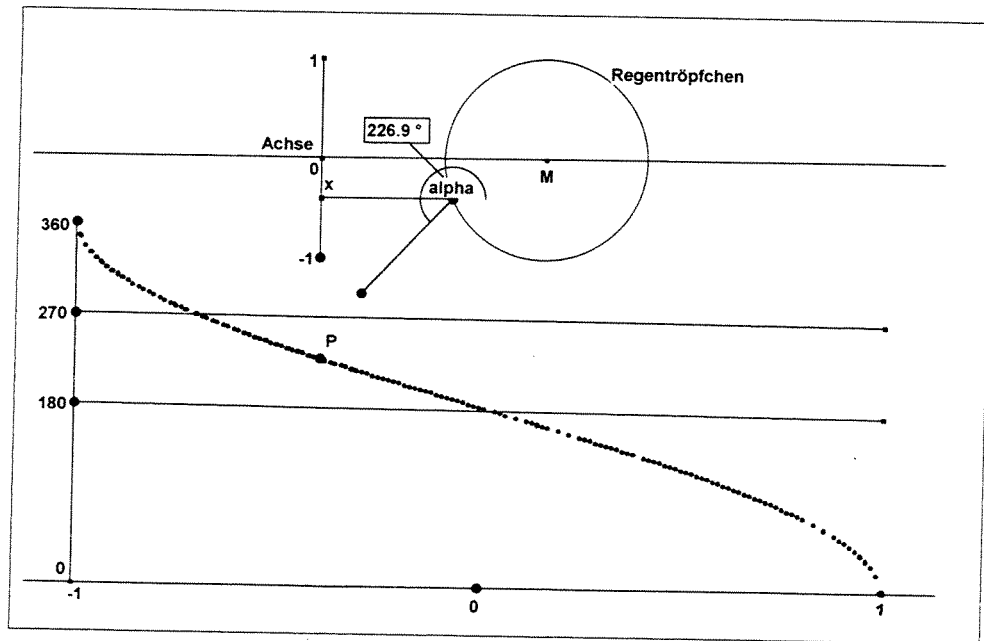


Zuerst wird unterhalb des Strahlengangs ein Koordinatensystem mit Ursprung O gezeichnet. Auf der Querachse wird der x -Wert abgetragen (von -1 bis 1), auf der Hochachse der Winkel α in Grad. Die beiden waagrechten Parallelen markieren den Beobachtungssektor von 180° bis 270° . Der Punkt $P(p|q)$ hat die Koordinaten $p = 4 * d$, wobei d der Abstand vom " -1 -Punkt" zu x ist und $q = \alpha/50$ (die Konstanten 4 und 50 sind so gewählt worden, dass der Bildschirm gut ausgenutzt wird). Realisiert wird dies wie folgt: Zuerst muss auch d von Euklid gemessen werden. Dann können mit

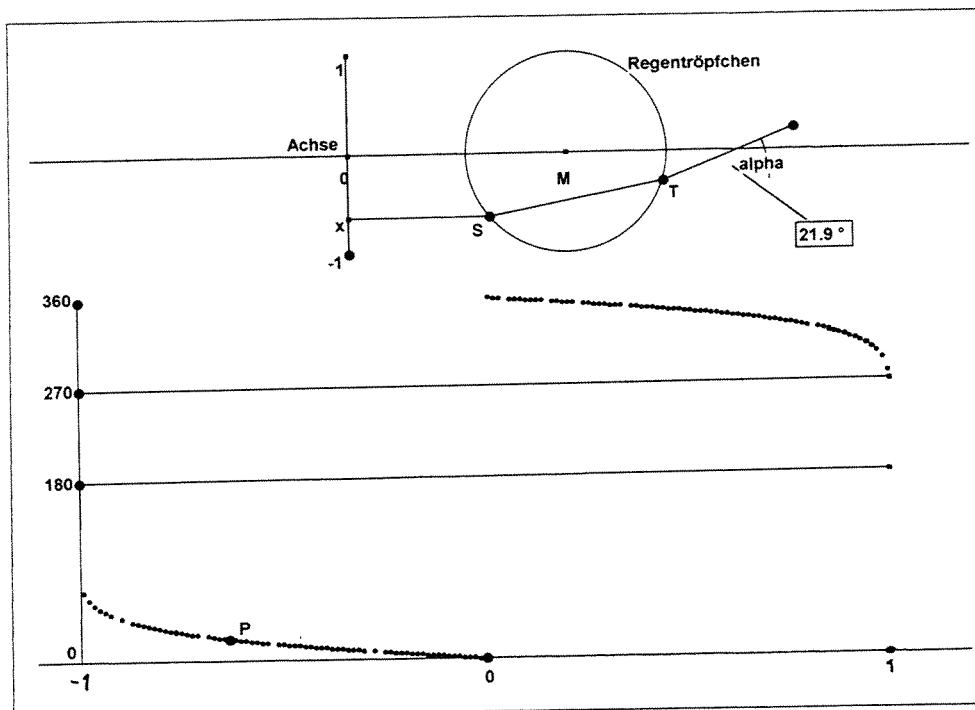
Hilfe des Euklid-Menüpunkts "Kreis aus gegebenem Radius und Mittelpunkt" Kreise mit den Radien p und q gezeichnet werden. Sie erzeugen entsprechende Punkte auf x - und α -Achse. Lote in diesen Punkten zu den Achsen schneiden sich im Punkt P . Die unnötigen Hilfslinien wurden versteckt. Jetzt erzeugt P im Ortslinienmodus den gepunkteten Graphen, wenn x im Zugmodus zwischen -1 und 1 verändert wird. Dies ist der geometrisch erzeugte Graph der Funktion F_3 ! Das Maximum von α liegt bei etwas mehr als 222° , dieser Fall ist gerade in der obigen Figur gezeichnet.

Entsprechende Figuren lassen sich für die anderen betrachteten Strahlenordnungen zeichnen. Man geht immer von der Figur links in der Mitte von Seite 17 aus.

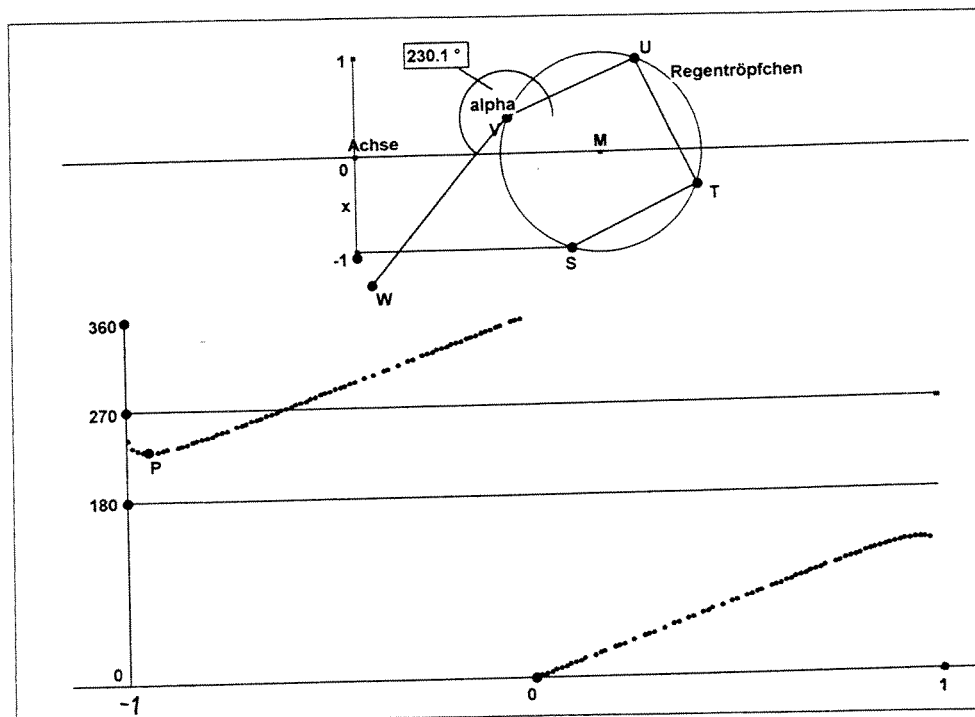
Bei den Strahlen 1. Ordnung ergibt sich der am Tröpfchen reflektierte Strahl direkt durch Spiegelung von x an SM . Das nächste Bild zeigt den Strahlengang und den x - α -Graphen als Ortslinie. Man sieht, dass die Kurve keine stationären Punkte aufweist.



Bei den Strahlen 2. Ordnung ergibt sich der aus dem Tröpfchen austretende Strahl durch Spiegelung von x an der Mittelsenkrechten von ST . Wie das folgende Bild zeigt, fallen solche Strahlen nie in den Beobachtungssektor.



Schliesslich ergibt sich der Strahlengang für die Strahlen 4. Ordnung durch folgende Symmetrien: U ist der Spiegelpunkt von S an MT , V bzw. W sind die Spiegelpunkte von S bzw. x an der Mittelsenkrechten von TU . Strahlen vierter Ordnung fallen nur für negative x in den Beobachtungssektor und zwar ab einem minimalen Winkel von etwa 230° . Dieser Fall ist im letzten Bild dargestellt.



Arbeitsblatt 4

a. Intensitätsverteilung

Ziel unserer “Theorie des Regenbogens” ist die Beschreibung der Intensitätsverteilung des gestreuten Lichts. Als Ergebnis von Arbeitsblatt 3a und 3b kann man festhalten:

Strahlen 1. Ordnung werden gleichmässig über den Beobachtungssektor verteilt.

Strahlen 2. Ordnung fallen nicht in den Beobachtungssektor.

Strahlen 3. Ordnung fallen bis zu einem maximalen Winkel von etwa 222° in den Beobachtungssektor.

Strahlen 4. Ordnung fallen ab einem minimalen Winkel von etwa 230° in den Beobachtungssektor.

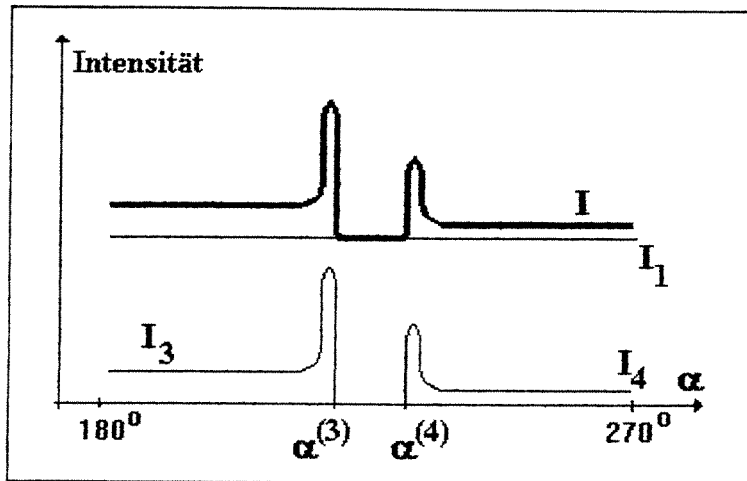
Sinnvollerweise können wir annehmen, dass die Intensität des parallel einfallenden Sonnenlichts im ganzen Bereich von $-1 \leq x \leq 1$ gleichmässig ist. Licht aus einem Strahlenbündel $\Delta x = x_2 - x_1$ wird in einen Winkelbereich von α bis $\alpha + \Delta\alpha$ gestreut. Wenn bei gleichem Δx der Winkelbereich $\Delta\alpha$ kleiner ist, so ist in der entsprechenden Richtung von α bis $\alpha + \Delta\alpha$ eine grössere Lichtintensität zu erwarten. Genauer ist die mittlere Änderungsrate

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{F_m(x + \Delta x) - F_m(x)}{\Delta x}$$

ein gutes Mass für die Intensitätsverteilung.

Nach den obigen Ergebnissen fallen Strahlen 2. Ordnung nicht in den Beobachtungssektor, man kann sie also vernachlässigen. Ausserdem nimmt die Gesamtintensität des Lichts mit wachsender Ordnung m stark ab. Die Strahlen 1. Ordnung sind gleichmässig über den Beobachtungssektor gestreut, die mittlere Änderungsrate ist relativ konstant. Da die Gesamtintensität dieses Lichts auch am grössten ist, ergibt es eine diffuse, gleichmässige Helligkeit I_1 des Hintergrunds.

Strahlen 3. Ordnung haben die kleinste Änderungsrate ≈ 0 bei dem Maximalwinkel $\alpha^{(3)} \approx 222^\circ$. Nur dort kann die Intensität I_3 von Strahlen 3. Ordnung nennenswert sein und als “helle Stelle” im Hintergrundgrau I_1 der Strahlen 1. Ordnung eventuell als primärer Regenbogen auffallen. Die Strahlen 4. Ordnung haben ihre kleinste Änderungsrate ≈ 0 bei dem Minimalwinkel $\alpha^{(4)} \approx 230^\circ$. Da die Intensität I_4 der Strahlen 4. Ordnung insgesamt viel kleiner ist, wird diese zusätzliche “helle Stelle” nur bei besonders günstigen Verhältnissen als sekundärer Regenbogen zu sehen sein.



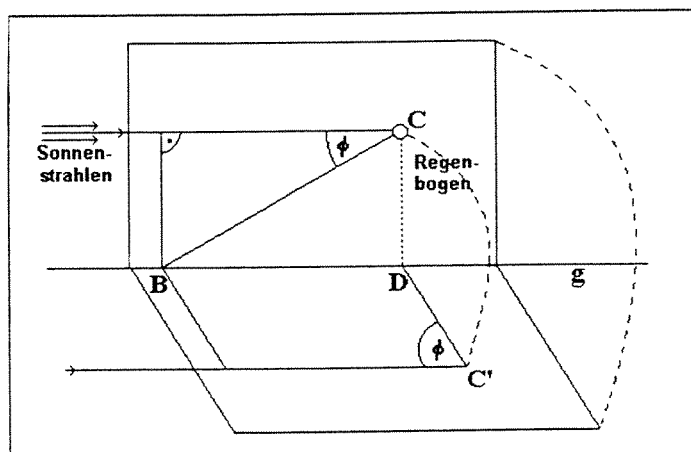
Die im nebenstehenden Bild skizzierte Intensitätsverteilung macht die Verhältnisse übersichtlich: Die fraglichen Teilintensitäten I_1 , I_3 und I_4 und die Gesamtintensität I sind in Abhängigkeit von Winkel α dargestellt. In den Winkelbereich zwischen $\alpha^{(3)}$ und $\alpha^{(4)}$ fallen nur die Strahlen 1. Ordnung mit der gleichmässigen Intensität I_1 .

In den seltenen Fällen, in denen der schwächere sekundäre Regenbogen zu sehen ist, kann man diesen Bereich deutlich als dunkleres Band, das sogenannte Alexander-Dunkelband, erkennen.

b. Die Farben des Regenbogens

Die bisherigen Ergebnisse lassen am Himmel zwei hellere, d.h. "weissere" Stellen unter den Winkeln $\alpha^{(3)}$ bzw. $\alpha^{(4)}$ erwarten. Der Regenbogen ist aber farbig. Um diese Farben erklären zu können, erinnere man sich an die Zerlegung des Sonnenlichts durch ein Prisma in das volle Spektrum: "Weisses" Sonnenlicht besteht aus Strahlen, die das volle Farbspektrum von violett bis dunkelrot durchlaufen. Der Brechungsindex n , den wir bisher immer mit $n = 1.33$ angenommen haben, ist in Wirklichkeit von der Farbe des Lichts abhängig (Dispersion). Die Abhängigkeit des Brechungsindex macht sich allerdings erst in der zweiten Dezimalen bemerkbar (man suche Werte dafür in Büchern)! Die Ablenkefunktionen F_3 und F_4 und damit die extremalen Ablenkwinkel $\alpha^{(3)}$ bzw. $\alpha^{(4)}$ sind von n abhängig und unterscheiden sich daher ein wenig für die verschiedenen Farben des Spektrums, so dass wir den Regenbogen farbig sehen. Da die Strahlen, die den sekundären Regenbogen erzeugen, ein weiteres Mal im Innern des Tröpfchens reflektiert werden, ist die Farbfolge des sekundären Regenbogens gerade umgekehrt.

c. Die Bogenform des Regenbogens



Bisher haben wir zwar vom *Regenbogen* geredet, haben aber alle Kalkulationen in einer festen Einfallsebene gemacht, die nur den Punkt B (Auge des Beobachters) enthalten und parallel zu den Sonnenstrahlen sein musste (vgl. obiges Bild). Die Wahl eines anderen Tröpfchens der Regenwand bedeutet die Drehung der Einfallsebene um die Gerade g . In der neuen Ebene erhält man natürlich denselben Regenbogenwinkel (im Bild wurde der "reduzierte" Regenbogenwinkel ϕ eingezeichnet). Der Punkt C , in dessen Richtung unser Auge den Regenbogen sieht, macht dabei eine Kreisbewegung um den Mittelpunkt D , wie das obige Bild andeutet. Da man die Einfallsebene nicht weiter als bis zur Erdoberfläche drehen kann und da die Regenwand unterschiedlich ausgedehnt ist, sieht man den Regenbogen als mehr oder weniger grosses Kreisbogenstück. Wenn man diese Einschränkungen nicht hat, z.B. von einem hohen Berg oder vom Flugzeug aus, kann man den Regenbogen als Vollkreis sehen.

3 Projektaufträge

Lösungsvorschläge zu einer Auswahl der hier beschriebenen Projektaufträge sind in Kapitel 5, Erwartungshorizont, nachzulesen.

3.1 Quantitative Theorie des Regenbogens mit Methoden der Analysis

3.1.1 Fermatsches Prinzip

Leiten Sie das Reflexions- und Brechungsgesetz mit Hilfe des Fermatschen Prinzips des zeitminimalen Lichtwegs her.

3.1.2 Quantitative Bestimmung der Extremwinkel

Bestimmen Sie die stationären Punkte der Ablenkfunktionen für die Strahlen 1. bis 4. Ordnung mit Hilfe der Analysis. Leiten Sie hierzu ggf. die Ableitung des Arcussinus her, indem Sie den Zusammenhang der Graphen von Funktion und Umkehrfunktion berücksichtigen. Beschaffen Sie sich Tabellen über den Zusammenhang von Brechungsindex und Lichtfarbe und bestimmen Sie die Winkelbreite von Haupt- und Nebenregenbogen.

3.1.3 Verallgemeinerungen

Im Alten Testament wird berichtet, dass Jahwe nach der *Grossen Sintflut* den Regenbogen als Symbol des Bundes zwischen ihm und den Menschen gesetzt hatte. Untersuchen und zeichnen Sie die Graphen der Extremalwinkelfunktionen $\alpha^{(3)}(n)$ bzw. $\alpha^{(4)}(n)$ in Abhängigkeit von n für $1 < n < 2$. Was wäre, wenn Wasser einen anderen Brechungsindex hätte? Denken Sie z.B. an die Belastung von Wasser mit stark brechenden Schadstoffen wie Benzol ($n = 1.50$) oder Schwefelkohlenstoff ($n = 1.63$). Für welchen Brechungsindex würden primärer und sekundärer Regenbogen zusammenfallen?

Wir haben die Ablenkfunktionen nur bis $m = 4$ betrachtet. Studieren Sie F_m für $m > 4$. Setzen Sie hierfür einen festen Brechungsindex (z.B. den von Wasser) und eine feste Lichtfarbe (z.B. ein Laser) an. Unter welchen Winkeln könnte man weitere Neben-Regenbögen höherer Ordnung erwarten?

Untersuchen Sie weitere, Sie interessierende Fragen.

3.2 Experimente

3.2.1 Plexiglasscheibe

Die Auffächerung des einfallenden Lichts, die im Bild des Abschnitts 5 des Arbeitsblatts 1 darzustellen ist, lässt sich experimentell zeigen: Ein horizontal aufgeweitetes Laserbündel streift an einem Papp-Schirm vorbei und trifft auf eine kreisförmige Plexiglasscheibe (Durchmesser ca. 10 cm, Dicke ca. 1 cm). Die Eintrittshöhe des einfallenden Bündels kann man stufenlos mittels einer Hebebühne verändern, auf der der Laser befestigt ist. Mit etwas Sorgfalt kann man die Strahlen bis zur 4. Ordnung beobachten.

3.2.2 Gartenschlauch

Wenn Sie an einem Sommertag, mit der Sonne im Rücken, den Garten spritzen, können Sie Haupt- und Nebenregenbogen beobachten.

- (i) Messen Sie die beiden Regenbogenwinkel sowie die Winkelbreite (zwischen Rot und Violett) der Regenbögen.
- (ii) Betrachten Sie die Bögen durch ein Polarisationsfilter. Was beobachten Sie? Worauf lässt das schliessen?

3.2.3 Zylinderglas, Quaderbecken

- (i) Das der Sonne zugewandte Fenster mit einem Stück Karton, aus welchem ein schmaler Schlitz herausgeschnitten ist, verdunkeln. Bei schlechtem Wetter tut auch ein Diaprojektor seine Dienste.
- (ii) Mit Wasser gefülltes Glas vor den Karton stellen. Um den Verlust der Intensität durch vorzeitig austretendes Licht gering zu halten, umgeben wir die Rückseite des Glases mit einer spiegelnden Folie (z.B. Aluminiumfolie), so dass möglichst viel Licht zurückgeworfen wird.
- (iii) Glas solange verschieben, bis sich auf dem Karton Regenbogenfarben einstellen.
- (iv) Regenbogenwinkel, Eintrittshöhe und Winkelbreite des Regenbogens messen.

Als Variation beobachten Sie den Weg eines Lichtstrahls durch ein quaderförmiges Glasbecken statt durch das Zylinderglas. Hat die Dicke des Glases einen Einfluss auf die Einfalls- und Ausfallswinkel? Begründen Sie.

3.2.4 Kugelglas

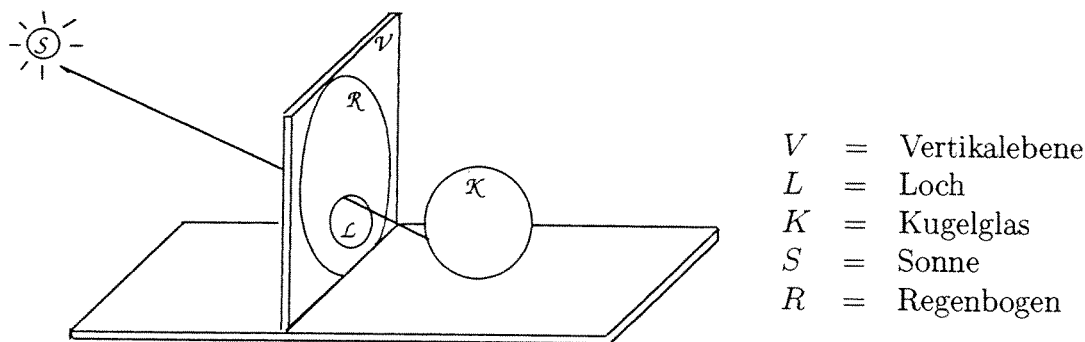
Experimentelle Ermittlung der stationären Eintrittshöhe und des Regenbogenwinkels:

Die Bildung des Regenbogens lässt sich im Schulzimmer anschaulich nachahmen, wenn wir den Regentropfen durch ein mit Wasser gefülltes kugeliges Glas (z.B. Christbaumkugel, Zuckerstreuer, Öllämpchen, usw.) und die Sonne durch eine Taschenlampe oder einen Diaprojektor ersetzen.

- (i) In einem verdunkelten Raum
 - a) ein Stück Karton mit einer Nadel durchlöchern
 - b) aus dem Stück Karton einen schmalen Schlitz herausschneiden
 - c) aus dem Stück Karton ein rundes Loch der gleichen Grösse wie das Kugelglas herausschneiden
- (ii) Taschenlampe dahinterstellen
- (iii) Mit Wasser gefülltes Kugelglas davorstellen
- (iv) Kugel solange verschieben, bis sich auf dem Karton Regenbogenfarben einstellen
- (v) Regenbogen markieren
- (vi) Regenbogenwinkel messen: $\sigma = \dots\dots\dots$
- (vii) Eintrittshöhe messen: $x = \dots\dots\dots$
- (vii) Winkelbreite messen: $\Delta\sigma = \dots\dots\dots$

Fragen:

- A. Welcher Gestalt sind jeweils die Regenbögen in den Aufstellungen a), b), c)?
- B. Wie gross muss die lichtdurchlässige Öffnung im Karton mindestens sein, damit ein kreisförmiger Regenbogen entsteht?
- C. Betrachten Sie einen Regenbogen durch ein Polarisationsfilter (z.B. manche Sonnenbrillen). Was beobachten Sie? Wie begründen Sie Ihre Beobachtung?
- D. Wenn Sie als Variation mit der Sonne als Lichtquelle arbeiten, empfiehlt es sich zudem, die Sonnenhöhe zu messen. Ebenso aufschlussreich ist es, Ort, Datum und Uhrzeit des Experimentes festzuhalten. Vergleichen Sie den im Experiment erhaltenen Regenbogen mit dem nach Descartes' Theorie errechneten. (Die Rechnung beinhaltet den Schnitt eines Kegels mit Öffnungswinkel 42° mit der den Regenbogen empfangenden Ebene).



3.2.5 Heiligenschein

Besetzt man eine Selbstklebefolie oder schwarzen Samt mit Glasperlen, die etwa die gleiche Brechungszahl wie Wasser aufweisen, und stellt es der Sonne zugewandt hin, so kann man darauf einen Kreis lebhaftester Spektralfarben um den Schatten des eigenen, und nur des eigenen Kopfes erkennen. Für jeden Betrachter äusserst schmeichelhaft!

3.2.6 Weitere Experimente

- (i) In der Juliausgabe des *Scientific American* vom Jahre 1977 beschreibt J. Walker eine Versuchsanordnung, die das Ausmessen von Regenbogenwinkeln höherer Ordnungen erlaubt. Zur Vermeidung des Blendens durch die Lichtquelle wird im verdunkelten Raum gearbeitet. In einer umgestülpten, auf einer Seite offenen Schachtel wird ein Wassertröpfchen an ein Drahtende aufgesprüht und mittels eines Projektorlämpchens bestrahlt. Auf dem Tröpfchen sind "Regenpünktchen" sichtbar.
- (ii) Wozu soll es gut sein, einen Regenbogen 17. Ordnung beobachten zu wollen?
- (iii) Weitere Experimente finden sich unter der Webadresse
<http://www.unidata.ucar.edu/staff/blynds/RnbwEx.html>

3.3 Historisches

Die Geschichte des Regenbogens hat weder Anfang noch Ende. Wann die Menschheit zum ersten Mal ihre Aufmerksamkeit darauf lenkte, ist nirgends festgehalten, noch können wir uns gegenwärtig rühmen, den Regenbogen in allen Einzelheiten zu verstehen. Die Erscheinung muss die Menschen schon früh dazu bewegt haben, eine Interpretation zu suchen, zunächst synthetisch in Gestalt von Geschichten und Mythen, dann analytisch in Form einer wissenschaftlichen Erklärung. Die Theorie des Regenbogens ist offensichtlich aus der Wissbegier des Menschen entstanden. Dabei bricht das Wissen um die Entstehung des Regenbogens nicht dessen Zauber, im Gegenteil, es erhöht unsere Ehrfurcht vor dem Naturschauspiel.

Die allmähliche Entwicklung der Theorie aus den ersten einfachen Vermutungen bis zu den heutigen, mittels fortgeschrittenen Werkzeugen der Mathematik ausgefeilten Erkenntnissen zu verfolgen, heisst gleichzeitig auch, den Pfaden der Jahrtausende alten Geschichte der Naturwissenschaften nachzuspüren.

In Boyers *“The Rainbow: From Myth to Mathematics”* z.B., finden Sie eine umfassende Würdigung dieses Aspektes. Wenn Sie ein paar Namen haben, können Sie sich auch in die Quellen und detaillierte Sekundärliteratur dazu vertiefen.

3.3.1 Die Stationen der Regenbogenforschung

Erstellen Sie eine Galerie der Personen in der abendländischen Kultur, die zur Erklärung des Regenbogens beigetragen haben. Es sollen

- (i) die Epoche, in der sie lebten,
- (ii) das Werk, das sie dazu verfassten,
- (iii) Mittel und Methoden, die sie dabei verwendeten,
- (iv) physikalische Gesetze und mathematische Überlegungen, mit charakteristischen Skizzen, die ihnen zur Verfügung standen

z.B. als kurzer Text zum Porträt mit dargestellt werden, wie auch eine Beurteilung angesichts des damals bekannten Wissens. (Beachten Sie, dass zuweilen richtige Ansätze in einer späteren Zeit verloren gehen konnten oder auch als falsch verworfen wurden.)

3.3.2 Vertiefung in ein literarisches Werk

Obwohl Sekundärliteratur und Lehrbücher den wertvollen Dienst erfüllen, ausgedehnte Wissensgebiete in kompakter Weise wohl gegliedert darzulegen, lässt sich beim Lesen des zugrundeliegenden Quellenmaterials ein vielfacher Genuss ableiten.

Zum einen ist der Originaltext nicht nur wegen der Erstmaligkeit der darin offenbarten Erkenntnisse bemerkenswert, sondern auch wegen der Qualität des Geistes, der darin zum Vorschein kommt. Es ist äusserst anregend, sich gewissermassen mit dem Meister hinzusetzen und ihm zuzuhören, wie er seine Gedanken entwickelt, die die Einsichten der Menschheit in die Natur so nachhaltig beeinflussen und die Entwicklung der Wissenschaften so vorantreiben werden.

Zum anderen wird uns bewusst, wie auch ein grosser Geist um seine Erkenntnisse ringen muss und zuweilen auch irrt, so dass gewisse Konzepte in späteren Zeiten anderen weichen müssen.

Descartes (1596–1650): “*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, Les météores, De l’arc-en-ciel*”, 1637, (ca. 13 Seiten), worin er als erster eine zufriedenstellende Erklärung für den Haupt- und Nebenregenbogen gab. Ihre Arbeit kann



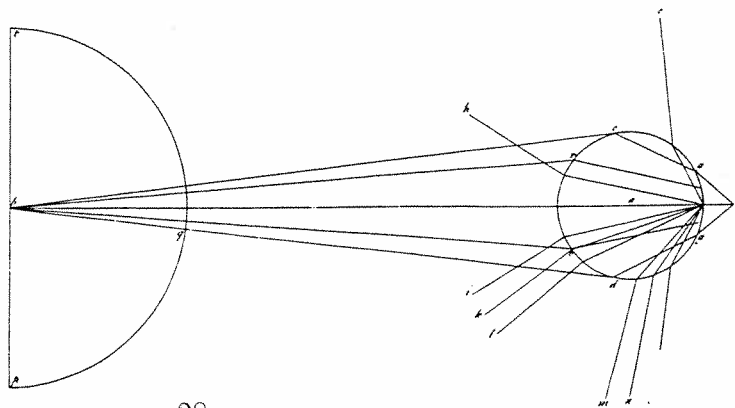
- (i) eine Übersetzung seines französischen Textes unter Berücksichtigung der heute üblichen Fachausdrücke sein, mit
- (ii) einer Beschreibung seines Vorgehens (z.B. Erklärung seiner geometrischen Skizzen und seiner Tabellen) wie auch
- (iii) was seine Arbeit im Vergleich zu jenen seiner Vorgänger auszeichnet.
- (iv) Führen Sie ausserdem Literatur auf, die Descartes' Arbeit über den Regenbogen würdigt.

Goethe (1749–1832): Im vorgerückten Alter begann er seine Aufmerksamkeit auf den Regenbogen zu richten. Er studierte dazu eingehend die Arbeiten einiger Naturwissenschaftler, zitierte, bewertete sie und stellte eine eigene Abhandlung des Regenbogens in Aussicht.

- (i) Suchen Sie in seiner “*Farbenlehre*” jene Stellen heraus, in welchen er sich zum Regenbogen äussert.

Da Goethe seine “*Farbenlehre*” im wesentlichen als Entgegnung (siehe “2. Teil: polemischer Teil”) zu Newtons “*Opticks*” entwickelte, tun Sie gut daran, auch das letztere Werk *dem Aufbau nach* zu studieren. Der Regenbogen wird darin im Buch 1, Teil 2, Proposition 9, Aufgabe 4 erklärt.

- (ii) Goethe hat eine verbesserte Version der Skizze Antonio de Dominis in seinen Tafeln zur *Farbenlehre* beigegeben. Vergleichen Sie diese Skizze mit denjenigen Descartes. Auf welchen physikalischen Gesetzen beruhen die eingezeichneten Strahlengänge? Was möchte Goethe mit den Strahlen, die hinter dem Regentropfen zusammenkommen, aussagen?



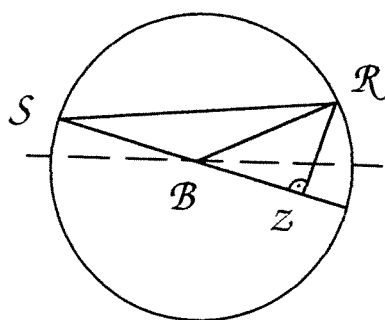
- (iii) Einer der vordringlichen Einwände, die Goethe gegen die mathematischen Naturwissenschaftler vorbrachte, galt der Argumentation unter Gebrauch 2-dimensionaler Zeichnungen des Strahlenganges durch den Regentropfen, die dem offensichtlich 3-dimensionalen Phänomen nicht gerecht werden könne. Gehen Sie dieser Frage nach. Skizzieren Sie die relevanten Strahlengänge (d.h. jene, die zum Regenbogen beitragen), wie sie beim Eintritt, Durchgang und Austritt *räumlich* angeordnet sind. Was entgegnete Sie Goethe?
- (iv) Die Ausdrucksweise in seinen naturwissenschaftlichen Schriften zeugt von erstaunlicher Selbstsicherheit. Beurteilen Sie seine Haltung — aus Ihrer Sicht einerseits, im Lichte seiner Zeit andererseits.

Aristoteles (384–322 v. Chr.) “Meteorologica”

Eine englische Übersetzung findet sich im *Internet Classics Archive* der Massachusetts Institute of Technology

<http://classics.mit.edu/Aristotle/meteorology.3.iii.html>

Die deutsche Übersetzung ist unter derselben Adresse in Bearbeitung.



Aristoteles stellte sich das Himmelsgewölbe als Halbkugel über der Horizontebene (gestrichelte Linie) mit dem Beobachter B im Kugelzentrum vor.

Das Licht der Sonne S wird von der Wolke R reflektiert und auf das Auge des Beobachters geworfen, falls die Strecken $\overline{SR}$ und $\overline{RZ}$ im richtigen Verhältnis stehen. Bei Rotation der Strecke $\overline{SR}$ um die Achse SB beschreibt R einen Bogen, eben den Regenbogen.

3.4 Regenbogen überall

3.4.1 im Internet

Wenn Sie nun als Regenbogenexperte oder -expertin unter den Unmengen von Websites, die das Wort “rainbow” enthalten, eine, die unseren Ansprüchen genügt, finden wollen, dann kommen Sie unter der Adresse

www.geom.umn.edu/education/calc-init/rainbow

auf Ihre Rechnung. Sie enthält den Kurs *Circles of Light: The Mathematics of Rainbows* des Geometry Centers der University of Minnesota, und ist so angelegt, dass jeweils auf eine kurze Darstellung der physikalischen Gegebenheiten einige Fragen dazu zu beantworten sind. Ihre Aufgabe ist nun:

- (i) Zu jeder der “Questions” die Lösungswege klar, verständlich und vollständig darzulegen.
- (ii) Diesen Kurs auf deutsch umzuschreiben, wenn nötig mit Bemerkungen und Ergänzungen versehen.

- (iii) Die Internet Sites pflegen sich im raschen Wandel zu erneuern. Recherchieren Sie nach anderen ergiebigen Webseiten zum Regenbogen. Geben Sie dabei URL, eine zusammenfassende Inhaltsangabe, Brauchbarkeit für unsere Zwecke: Verständlichkeit, wissenschaftliche Genauigkeit (z.B. ist korrekt erklärt, wie der Regenbogen entsteht?) an. Welche Aspekte werden betont?

3.4.2 in den Bauernregeln

- (i) Sammeln Sie Bauernregeln (z.B. im Internet, Kalenderblättern, usw.), in welchen der Regenbogen vorkommt.
- (ii) Untersuchen Sie sie auf ihren Wahrheitsgehalt und begründen Sie.

3.4.3 in der Kunst

Betrachtung von Gemälden mit Regenbögen [Tafeln Boyer S. 288/289]

- (i) Stellen Sie eine Liste von Gemälden mit Regenbögen zusammen, mit folgenden Angaben: Name des Malers, Titel des Bildes, Jahr, Material (z.B. Öl auf Karton), Grösse des Bildes (Höhe $\times$ Breite), heutiger Standort.
- (ii) Untersuchen Sie Anordnung und Zahl der Farben (in Abhängigkeit der Epochen), sowie die Beleuchtungsrichtung der Sonne.
- (iii) In den Darstellungen wird der Regenbogen als zwei grundlegend verschiedene Sinnbilder verwendet, welche? Beschreiben Sie je ein Gemälde zu jeder dieser Deutungsarten.
- (iv) In welchem Land häufen sich die Darstellungen des Regenbogens? Woher kommt das wohl?

3.4.4 in der Technik

Auf die Frage, wozu es gut sei, die Eigenschaften der Elektrizität zu verstehen, soll Benjamin Franklin erwidert haben: "Wozu ist ein Baby gut?" Ähnlich könnte man nun fragen, wozu Kenntnisse über den Regenbogen gut sein könnten.

Die Regenbogentheorie bietet eine optische Methode zur Untersuchung verschiedener Tröpfcheneigenschaften und wird besonders an mechanisch unzugänglichen Stellen verwendet. Dadurch ermöglicht sie z.B. die Feststellung der Wolkenstruktur und findet in der Untersuchung der Vereisung von Flugzeugflügeln eine technische Anwendung (siehe Boyer).

- (i) Konzipieren Sie Versuche, die den Zusammenhang zwischen Regenbogen und Tröpfchengrösse aufzeigen könnten. Führen Sie diese Versuche aus.
- (ii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Wolkenstruktur und Tröpfchengrösse?

- (iii) Finden Sie andere Anwendungen der Regenbogentheorie in der Technik (siehe van Beeck).

3.5 Kritische Analyse

Untersuchen Sie die Darstellung der Regenbogenentstehung in verschiedenen Schulbüchern. Analysieren Sie die drei im folgenden angegebenen Beispiele:

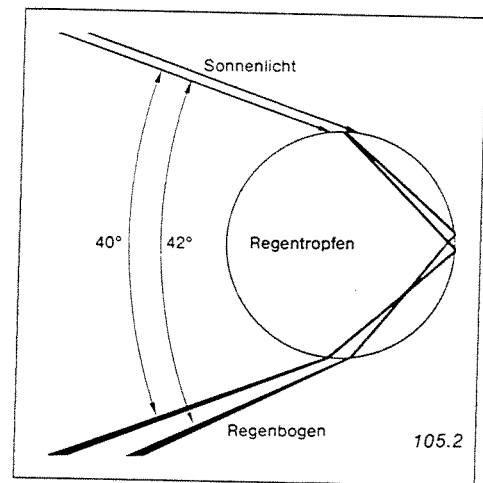
3.5.1 Darstellung in Schulbüchern

- (a) *Natur und Technik — Physik. Bisherige Ausgabe für die Sekundarstufe I, S. 105, Cornelsen-Verlag, Berlin*

Aus der zugehörigen Beschreibung:

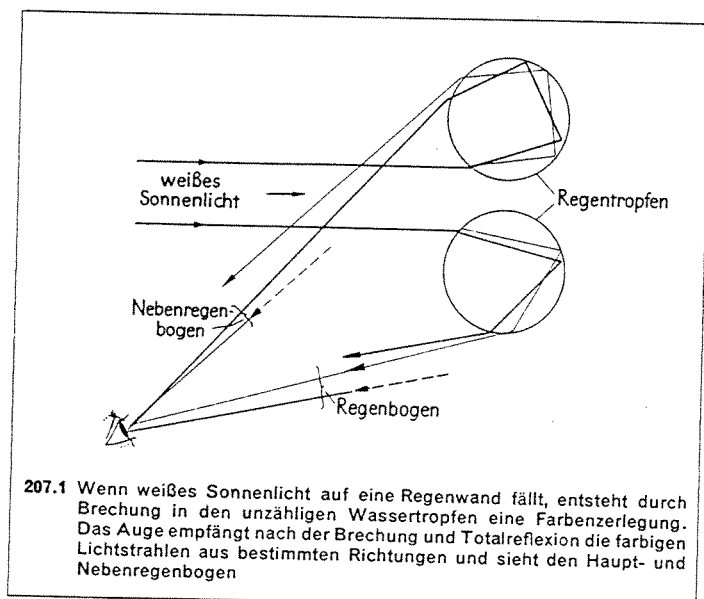
“...Von der Sonne kommende weisse Lichtbündel fallen in die einzelnen Wassertropfen ein und werden gebrochen (Abb. 105.2). Durch die Brechung werden die Spektralfarben getrennt und an der Rückseite des Tropfens total reflektiert. Unter erneuter Brechung treten sie aus dem Tropfen aus.

Zwischen dem einfallenden weissen Lichtbündel und dem austretenden farbigen liegt ein bestimmter Winkel: Für Rot beträgt er 42° , für Violett 40°”



- (b) *Dorn, Physik, Mittelstufe, Ausgabe A, S. 207, Schroedel-Verlag Hannover, 1966*

Das nebenstehende Bild mit seiner Unterschrift ist der gesamte Beitrag zur Theorie des Regenbogens.

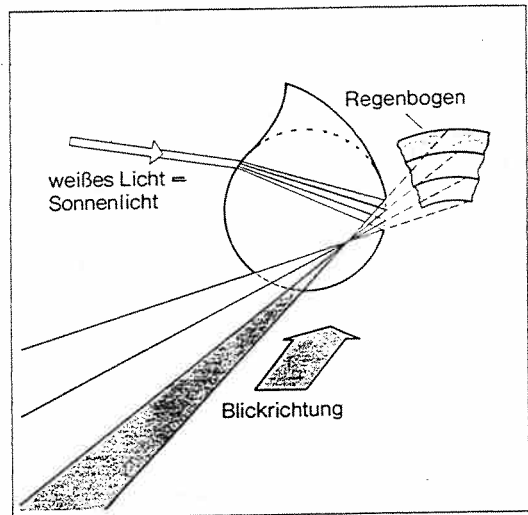


(c) *Wege in die Physik und Chemie, S. P55, Klett-Verlag Stuttgart 1976*

Das Buch ist für Hauptschulen konzipiert. Aus der Erklärung:

“Versuch: Wir nehmen ein Becherglas und füllen es mit Wasser; es stellt nun einen “Wassertropfen” dar. Fällt ein Lichtstrahl darauf, dann wird er in diesem “Wassertropfen” abgelenkt und gebrochen. In einiger Entfernung beobachten wir das in Spektralfarben zerlegte Licht.

Die Regentropfen beim Regenbogen wirken ähnlich. Das Sonnenlicht wird in jedem Tropfen reflektiert und beim Ein- und Austritt gebrochen. Dabei wird es in Spektralfarben zerlegt. Ein Beobachter sieht jede der Spektralfarben nur unter einem bestimmten Winkel: Für Violett beträgt er 40° , für Rot 42° .”



Untersuchen Sie weitere Physikbücher, Zeitungsartikel, Enzyklopädien, usw.

3.6 Zeitungsartikel

Schreiben Sie einen populärwissenschaftlichen Artikel zur Theorie des Regenbogens, der z.B. in einer Zeitung oder einer Zeitschrift, wie *bild der wissenschaft* erscheinen könnte.

4 Präsentation und Zusammenfassung

Als Lernkontrolle könnten folgende Aufgaben dienen:

4.1 Erstellen eines Quizheftes

Stellen Sie die Fragen zum Regenbogen in einem **Quizheft** zusammen. Fügen Sie dem auch einen Antwortteil bei.

Eine Frage, die uns beschäftigen könnte und die bei weitem nicht endgültig entschieden ist, lautet, wann ein Regenbogen zum ersten Mal gesichtet worden ist. Dies geht nicht notwendigerweise mit dem Auftreten der ersten Menschen vor zwei bis drei Millionen Jahren einher. Grösse und Form des Regenbogens müssten schon zu Zeiten des ersten Lebens überhaupt etwa wie heute gewesen sein (ausschlaggebend dafür ist die Tröpfchengrösse des Niederschlags). Der Farbensinn hingegen dürfte eine Errungenschaft der höher entwickelten Lebewesen gewesen sein. Die Frage lautet also: Wie sehen Fische, Reptilien, Vögel, Primaten, ... den Regenbogen? Wie erleben sie ihn?

- (i) Nachtaktive Wirbeltiere haben bekanntlich keinen ausgeprägten Farbensinn. Wie mag ein Regenbogen für solche Lebewesen aussehen?
- (ii) Insekten haben die Fähigkeit, Farben zu sehen, die für uns nicht sichtbar sind und umgekehrt. Für die Biene z.B. ist der sichtbare Bereich gegen das kurzwellige Licht hin verschoben. (Sie ist nicht empfindlich für das Grün des Blätterwerks, hingegen für das Blau und Violett einer Blüte, die sich daher hervorhebt.) Wie sieht wohl der Regenbogen für eine Biene aus?
- (iii) Die Frage bleibt, ob der Mensch nun jenes auserlesene Lebewesen ist, das den schönsten Regenbogen sieht. (Sicher ist wohl, dass der Mensch infolge seiner intellektuellen Fähigkeiten sich am meisten am Regenbogen zu erfreuen imstande ist.)

4.2 Führen eines Tagebuches

Am Ende eines jeden Tages soll ein Bericht von etwa einer A4-Seite ins Tagebuch eingetragen werden. Zu Beginn des darauffolgenden Tages gibt jede Gruppe einen mündlichen Bericht über ihre Arbeit des Vortages.

4.3 Darstellung der Regenbagentheorie

4.3.1 in einem Videofilm

Produzieren Sie einen etwa $\frac{1}{2}$ -minütigen Werbespot zum Regenbogen, der die vier Elemente "Reflexion", "Brechung", "Dispersion" und "Häufung der Ausfallsstrahlen" als Ingredienzen für die Entstehung des Regenbogens enthält.

4.3.2 in einem Comic

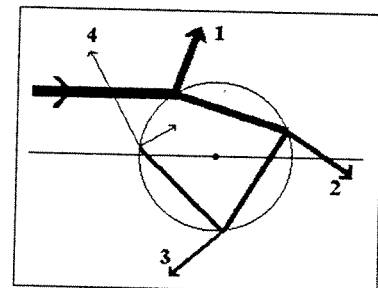
Statt in einem Film dasselbe auf Comicstreifen festhalten.

4.3.3 an Modellen

Hier soll es Ihre Aufgabe sein, Ihre zur Regenbagentheorie gewonnenen Erkenntnisse visuell darzustellen in einer Unmittelbarkeit, wie sie in Geschriebenem nicht erreicht werden kann — handwerklich in Fadenmodellen oder elektronisch in Computermodellen — um sie so Aussenstehenden näher zu bringen.

1. Intensitäten

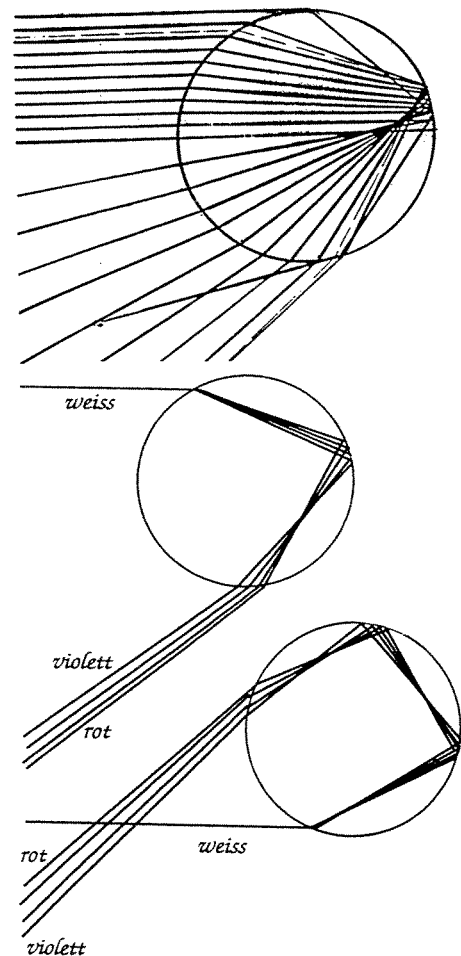
der Strahlengänge 1. bis 4. Ordnung



2. **Reflexionen und Brechungen**
 der Strahlengänge 3. Ordnung
 $x = 0.0$ bis 1.0

3. **Dispersion**
 der Strahlengänge 3. Ordnung
 $x = 0.86$
 rot bis violett

4. **Dispersion**
 der Strahlengänge 4. Ordnung
 $x = -0.95$
 violett bis rot



5 Erwartungshorizont

Ein kleiner Überblick über mögliche Lösungen ausgewählter Aufgaben sei hier für die Lehrkraft gegeben.

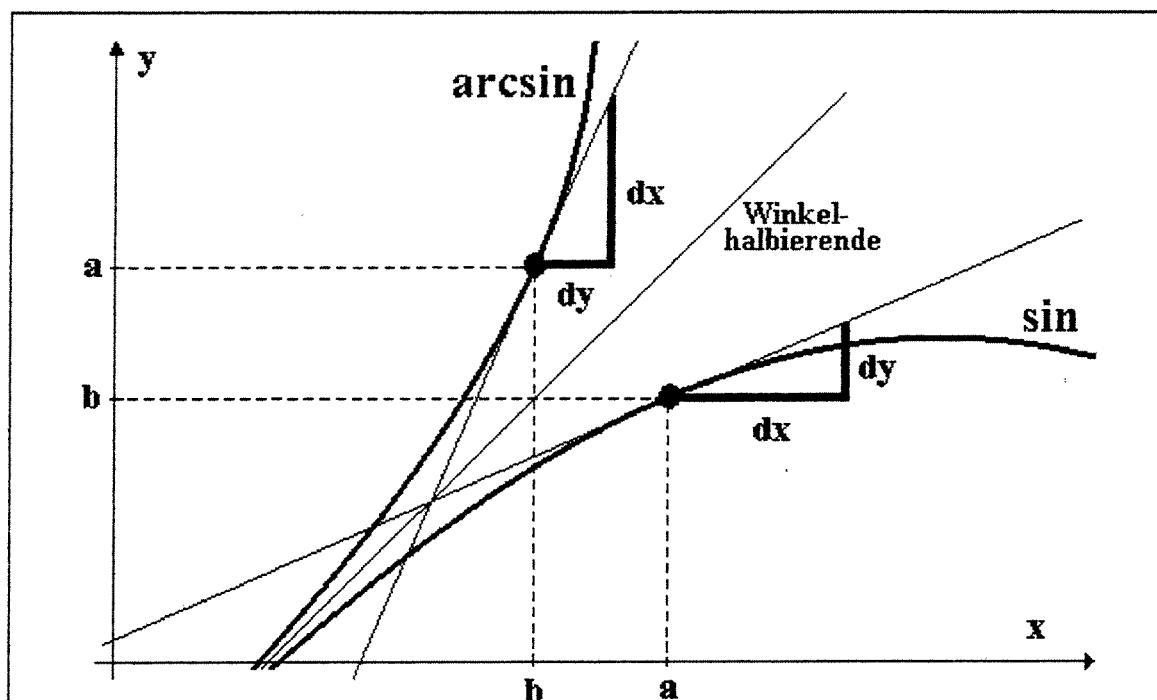
Zu 3.1.1: Fermatsches Prinzip

Für eine analytische Herleitung des Reflexions- und des Brechungsgesetzes sei auf Janke [Janke, S. 154–157] verwiesen.

Zu 3.1.2: Quantitative Bestimmung der Extremwinkel

Ist die Ableitung des Arcussinus noch nicht bekannt, so können Schüler sie selbständig

durch die Analyse des folgenden Bildes herleiten.



An den zwei Punkten $(a|b)$ und $(b|a)$ sind die Tangenten an die Sinus- bzw. die Arcussinus-Kurve gezeichnet worden. Wegen $b = \sin(a)$ und $\frac{dy}{dx} = \cos(a)$ folgt sofort die gesuchte Formel

$$\arcsin'(b) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos(a)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}$$

Damit ergeben sich die Ableitungen der Ablenkfunktionen von S. 13 zu:

$$F_1'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$F_2'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{n\sqrt{1-(\frac{x}{n})^2}}$$

$$F_3'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{n\sqrt{1-(\frac{x}{n})^2}}$$

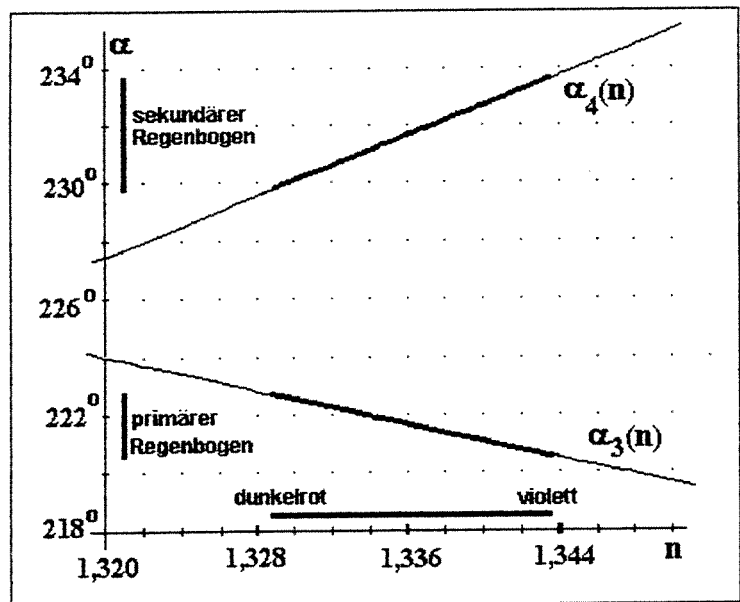
$$F_4'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{6}{n\sqrt{1-(\frac{x}{n})^2}}$$

Es folgt einfach, dass $F_1'(x)$ und $F_2'(x)$ keine Nullstellen und F_1 und F_2 keine stationären

Punkte haben, während $F_3'(x)$ und $F_4'(x)$ jeweils genau eine Nullstelle haben mit dem entsprechenden Vorzeichenwechsel im Beobachtungssektor mit zugehörigen, noch von n abhängigen Extremwinkeln (im Bogenmass)

$$\alpha_3(n) = F_3\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right), \quad \alpha_4(n) = F_4\left(-\sqrt{\frac{9-n^2}{8}}\right)$$

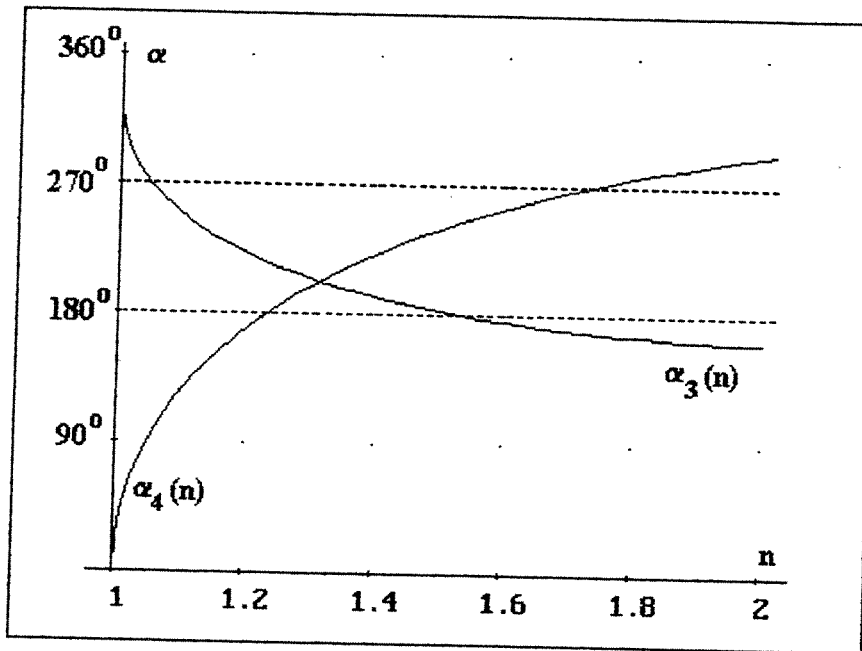
λ in nm	Farbe	n
760.8	dunkelrot	1.3289
686.7	rot	1.3304
656.3	orange	1.3312
589.6	gelb	1.3330
527.0	grün	1.3352
486.1	blaugrün	1.3371
430.8	blau	1.3406
396.8	violett	1.3435



Unter Verwendung der links stehenden Tabelle ist das Schaubild im Bereich $1.320 < n < 1.350$ gezeichnet worden. Die Extremalwinkel für die einzelnen Farben variieren um ca. 2.1° für die Strahlen 3. Ordnung; die Farbenfolge ist von Blau nach Rot mit zunehmendem Winkel, d.h. Rot erscheint höher am Himmel als Blau. Bei den Strahlen 4. Ordnung ist die Varianz ca. 3.8° , die Farbenfolge ist umgekehrt. Der Winkelabstand zwischen den Extremalwinkeln 3. und 4. Ordnung ist etwa 7.2° . Jeder Regenbogen, insbesondere, wenn der sekundäre Regenbogen sichtbar ist, bestätigt extrem genau die Vorhersagen unseres mathematischen Modells!

Zu 3.1.3: Verallgemeinerungen

Der folgende Graph ist analog zum letzten Schaubild für $1 < n < 2$ dargestellt.



Man sieht, wie wichtig eine sehr genaue Rechnung ist. Hätte man mit dem oft im Physikunterricht benutzten Näherungswert $n = 1.3$ für Wasser gerechnet, so hätten sich die Bereiche der Strahlen 3. und 4. Ordnung überlappt. Der Wert $n = 1.3$ entspricht jedoch einer weit im Infraroten gelegenen, für uns unsichtbaren Wellenlänge.

Genauer entspricht der Schnittpunkt der beiden Kurven der Gleichung $\alpha^{(3)}(n) = \alpha^{(4)}(n)$, was approximativ den Wert $n = 1.31201$ ergibt. Wenn dagegen Wasser einen deutlich höheren Brechungsindex hätte, würde man kaum mehr einen Regenbogen sehen können. Jahwe hat also wirklich durch die Wahl des Brechungsindex für Wasser die Sichtbarkeit der beiden Regenbögen erst möglich gemacht!

Die Ablenkefunktionen F_m beliebiger Ordnung m lassen sich leicht in Verallgemeinerung der bisherigen Formeln angeben: Es gilt $\alpha = (m - 2)\pi - 2\beta + 2(m - 1)\gamma$, also

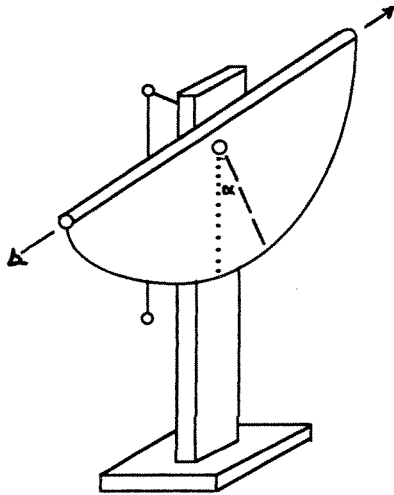
$$F_m(x) = (m - 2)\pi - 2 \arcsin(x) + 2(m - 1) \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)$$

wobei der Winkelwert ggf. auf $[0; 2\pi)$ zu normieren ist.

Ganz genauso, wie oben, lassen sich die Extremwinkel für die Regenbogenwinkel höherer Ordnung berechnen. Jearl Walker [Walker 1977] beschreibt ein Experiment, mit dem man diese höheren Regenbögen tatsächlich beobachten können soll.

Zu 3.2.2: Experiment mit Gartenschlauch

Als Vorrichtung zur Winkelmessung könnte Folgendes (eine vereinfachte Version des Sextanten) gebastelt oder von der Lehrkraft bereitgestellt werden:



Falls die Sonne am Horizont steht (Sonnenhöhe $\phi = 0^\circ$), so peilt man den höchsten Punkt des Regenbogens an und misst den Winkel gegenüber der Horizontalen.

Steht die Sonne höher (Sonnenhöhe ϕ), dann entspricht dem Regenbogenwinkel die Summe $\alpha + \phi$.

Zu 3.2.3: Experiment am Quaderbecken

Für die Auffächerung in die Spektralfarben ist die Brechung zuständig, welche stattfindet, solange der Lichtstrahl nicht senkrecht auf die Beckenwand einfällt.

Da die Glasinnen- und -aussenwände unter sich parallel sind, bewirkt die Brechung innerhalb des Glases nur eine Parallelverschiebung des durchtretenden Lichtstrahls und keine Veränderung in der Fortpflanzungsrichtung. Daher wird der Ausfallswinkel durch die Glaswand nicht beeinträchtigt.

Zu 3.2.4: Experiment am Kugelglas

- A. a) Punkt, b) kurzes Bogenstück, c) ganzer Kreis
- B. Zur Kugel konzentrischer Kreis mit einem Radius von 85% des Kugelradius.
- C. Das von der Wasserkugel gestreute Licht ist polarisiert, was darauf schliessen lässt, dass das Licht nicht nur gebeugt, sondern auch reflektiert worden ist.
- D. Bei einem Experiment vom 8. 2. 1998 um 15:00 wurde folgendes gemessen:

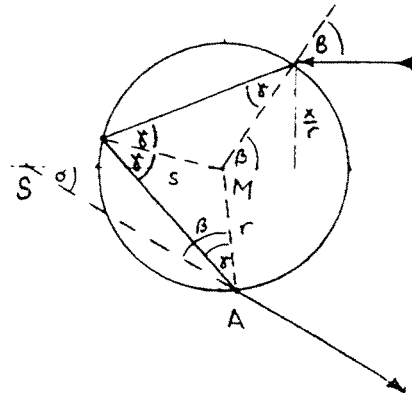
$$\begin{aligned}
 r &= \text{Kugelradius} &= 3.1 \text{ cm} \\
 \phi &= \text{Sonnenhöhe} &= 20^\circ \\
 a &= \text{Abstand } (M, V) &= 5.6 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}
 M &= \text{Kugelmittelpunkt} \\
 V &= \text{empfangende Vertikalebene} \\
 S &= \text{Kegelspitze der ausfallenden Strahlen} \\
 s &= \text{Abstand } (M, S) \\
 \sigma &= \text{Regenbogenwinkel} = 42^\circ
 \end{aligned}$$

Berechnungen:

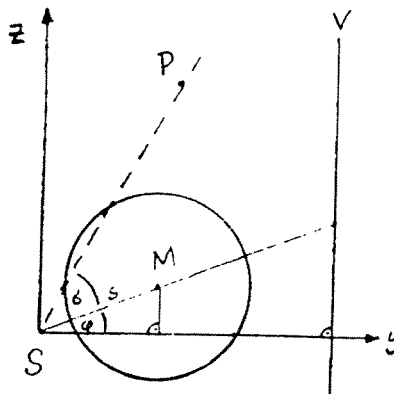
(i) **Abstand s der Kegelspitze zum Kugelmittelpunkt**



Sinussatz im Dreieck SAM ergibt

$$\frac{s}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \sigma} \implies s = 3.94 \text{ cm}$$

(ii) **Einführen eines Koordinatensystems**



$$\begin{matrix} S & (& 0 & | & 0 & | & 0 &) \\ M & (& 0 & | & s \cos \phi & | & s \sin \phi &) \end{matrix}$$

$$V : y = v = s \cos \phi + a = 1.26 \text{ cm}$$

(iii) **Gleichung des Regenbogenkegels**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SM} &= \overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SM} \cdot \cos \sigma \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ s \cos \phi \\ s \sin \phi \end{pmatrix} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot s \cdot \cos \sigma \end{aligned}$$

(iv) **Schnitt des Kegels mit der Vertikalebene V**

Setzen wir in der Kegelgleichung $y = v$ ein, so erhalten wir nach einiger Rechnung die Gleichung einer Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{(z - N)^2}{B^2} = 1$$

wobei

$$\text{kleine Halbachse} \quad A = \frac{v \sin \sigma}{\sqrt{\cos^2 \sigma - \sin^2 \phi}} = 9.4 \text{ cm}$$

$$\text{grosse Halbachse} \quad B = \frac{v \sin \sigma \cos \sigma}{\cos^2 \sigma - \sin^2 \phi} = 10.6 \text{ cm}$$

$$\text{Höhe des Symmetriepunktes} \quad N = \frac{v \sin \phi \cos \phi}{\cos^2 \sigma - \sin^2 \phi} = 6.8 \text{ cm}$$

ist.

Zu 3.2.5: Heiligenschein

Die feinen Glasperlen übernehmen hier die Rolle der Regentröpfchen.

Einen von der Erscheinung her ähnlichen Effekt können wir im Morgentau beobachten, der aber — anders als der Regenbogen — auf Strahlengängen 2. Ordnung beruht, die von den sich hinter den Tautröpfchen befindenden Grashalmen zum Beobachter zurückgeworfen werden. Ausserdem ist dieser *Taubogen* wegen der fehlenden Neigung der Wiese hyperbelförmig.

Zu 3.2.6: Weitere Experimente

- (ii) Falls der Ort des Regenbogens mit unseren berechneten Voraussagen (vgl. 5. Erwartungshorizont, Zu 3.1.3) übereinstimmt, so trägt dies zur Bestätigung des Descartes'schen Regenbogenmodells bei.

Zu 3.3.1: Stationen der Regenbogenforschung

- a) Aristoteles (384–322), *Meteorologica* III.3–4; Erklärung mittels Reflexion allein; [Boyer S. 146]
- b) Alexander von Aphrodisias (2. Jh. v. Chr.); Entdeckung des zwischen Haupt- und Nebenregenbogen liegenden dunklen Bandes.
- c) Robert Grosseteste (1168–1253), *De iride seu de iride et speculo*; Brechung berücksichtigt.
- d) Roger Bacon (c. 1214–1292?) bestimmt experimentell den Regenbogenwinkel von 42° , falsch erklärt mit Reflexion (1266).

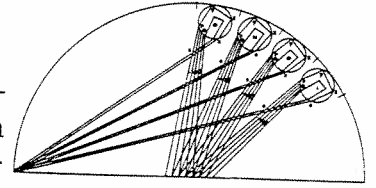


Aristoteles



Bacon

- e) Dietrich von Freiberg (–1311), *De iride et radialibus impressionibus* (Über den Regenbogen und die durch Strahlen erzeugten Eindrücke, 1304); Experiment und Brechung zur Erklärung. [Boyer S. 110–124]
- f) Marco Antonio de Dominis (1566–1624), *De radiis visus et lucis in vitis perspectivis et iride tractatus* (1611), Venedig; eines der umstrittensten Werke über den Regenbogen [Boyer S. 190, S. 360, Goethe Tafel XVI]
- g) Johann Kepler (1571–1630), *Mysterium cosmographicum* (1596) [Boyer S. 184]
- h) René Descartes (1596–1650), *Le discours de la méthode, Les météores, De l'arc-en-ciel* (1637); Experimente, Brechung, Erklärung durch Häufung bei extremalen Ablenkungswinkeln. [Boyer S. 209]
- i) Baruch Spinoza (1632–1677), *Stelkonstige reeckening van den regenboog* (1687); Versuch, mittels den von Descartes formulierten geometrischen Gesetzen der Reflexion, Brechung, ... den Regenbogen rein algebraisch, d.h. rechnerisch zu erklären. Als Denker war Spinoza wenig am Experimentieren interessiert, welches in jener Zeit als naturwissenschaftliche Methode aufkam. Er hatte das Werk geschrieben, um zu zeigen, dass die Welt rational zu erklären war.
- j) Isaac Newton (1642–1727), *Opticks* (1704); Erforscht die Dispersion des weissen Lichtes, welche erst eine vollständige (Grob)erklärung des Regenbogens im 1. Buch, 2. Teil, 9. Proposition, 4. Aufgabe erlaubt. [Boyer S. 254]



von Freiberg



Kepler



Descartes



Newton

Zu 3.3.2: Vertiefung in ein literarisches Werk zu Goethes Farbenlehre:

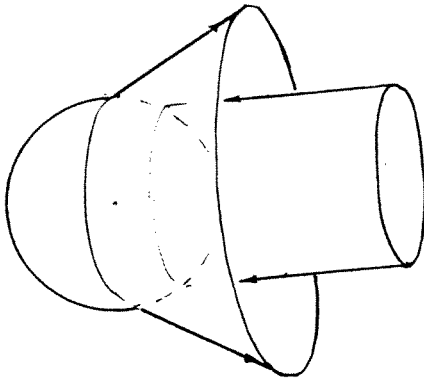
- (i) Im sogenannten "polemischen" Teil seiner Farbenlehre zerpfückt Goethe Newtons "Optik" Proposition für Proposition. Die Erwähnung des Regenbogens findet sich daher in seiner Entgegnung Nr. 609 zur 9. Proposition, dem 4. Problem.

Im "3. Teil: historischer Teil" hat Goethe in Bezug auf den Regenbogen die Schriften Keplers, De Dominis, Descartes, ... sehr aufmerksam gelesen und ausführlich kommentiert.

Die versprochene Abhandlung über den Regenbogen scheint er hingegen nie in Publikation gegeben zu haben (siehe "4. Teil: Statt des versprochenen Supple-

ments").

(iii)



Die relevanten Strahlengänge für den Hauptregenbogen bilden beim Eintritt in das Tröpfchen einen Zylinder vom Radius 85%, beim Austritt einen Kegel des halben Öffnungswinkels 42° . Man muss sich also die 2-dimensionale Zeichnung um die Tröpfchenachse rotiert vorstellen.

(iv) Seine erbitterte Gegnerschaft Newton gegenüber entstammt

- seiner Weltsicht, wonach sich die Natur durch die mathematisierte Physik unter keinen Umständen adäquat verstehen lässt. Goethe war auch gegen jede Form von Messinstrumenten — da sie einen viel zu kleinen Ausschnitt (wie beim Mikroskop) der Wirklichkeit wiedergäben —, sondern vertraute auf den Menschen als ganzheitliches, zuverlässigstes physikalisches System der Wahrnehmung.
- seinem eingestandenem Unbehagen allem Abstrakten gegenüber, wie der Astronomie, Kosmologie, mathematischen Physik, Philosophie, ... welche den unmittelbaren Lebensbereich des Menschen im Hier und Da übersteigt. Viel lieber befasste er sich mit der Biologie und wandte sich den Pflanzen und Tieren zu, die ihn umgaben.

Man darf nicht vergessen, dass seinerzeit selbst so hervorragende Physiker wie Christian Huygens die Form, in der Newton seine Theorie darstellte, nämlich als Folge von Propositionen, die es durch Experimente zu beweisen galt, nicht verstand. Nicht dass das Experimentieren zu jener Zeit unbekannt war, doch pflegte man in erzählerischer Weise seine Gedankengänge und das Vorgehen beim Experimentieren in der Reihenfolge des tatsächlichen zeitlichen Ablaufs darzulegen und nicht in der logischen Form eines nach mathematischer Manier in "Voraussetzung, Behauptung, Beweis" gegliederten Lehrbuches darzustellen.

Diese analytische, reiner Logik folgende, sezierte Form war für Goethe ungeniessbar.

Zu 3.4.2: Regenbogen in den Bauernregeln

- (i) Bauernregeln in verschiedenen Sprachen und Kulturen sagen im Wesentlichen dasselbe aus:

Regenbogen am Morgen
macht dem Schäfer Sorgen;

Regenbogen am Abend
ist dem Schäfer labend.

A rainbow in the morning
Is the shepherd's warning.
A rainbow at night
Is the shepherd's delight.

Die wohl platzsparendste ist diese: 東虹日頭，西虹雨。

(Übersetzung: Regenbogen im Osten bringt Sonne, Regenbogen im Westen bringt Regen.)

- (ii) Im Allgemeinen sind kurzzeitige Wettervorhersagen aufgrund aufmerksamer, langjähriger Beobachtungen ziemlich glaubwürdig, während die langzeitige Vorhersage selbst mit den heutigen, leistungsfähigen Computern immer noch nicht beherrscht werden kann.
- (iii) Ein Regenbogen am Abend, wenn die Sonne in unserem Rücken westlich steht, bedeutet, dass es östlich von uns regnet. Da in unseren Breitengraden (im Wesentlichen wegen der Corioliskraft) das Wetter von Westen nach Osten zieht, entfernt sich aber das schlechte Wetter. Umgekehrt verheißt ein Regenbogen am Morgen nichts Gutes.

Zu 3.4.3: Regenbogen in der Kunst

(i)

Jahr	Maler	Titel	Ort
1503	B. Pinturicchio	Piccolomini	Piccolomini
-1507		in Talamone	Bibliothek, Siena
1514	A. Dürer	Melencolia I	Museum Unterlinden, Colmar
			Kupferstich, 239 × 188 mm
1519	M. Grünewald	Stuppacher Madonna	Katholische Pfarrkirche
			6990 Stuppach-Mergentheim
1638	P. P. Rubens	Regenbogen mit Landschaft	London, The Wallace Coll.
			135.6 × 235 cm
1675	J. van Ruisdael	Der Judenfriedhof	Detroit Institute of Arts
			Dresden, 42 × 89 cm
1801	J. M. W. Turner	Kathedrale von Durham	British Museum
1805	J. A. Koch	Heroische Landschaft mit Regenbogen	Staatliche Kunsthalle, Karlsruhe
1808	C.D. Friedrich	Landschaft mit Mondregenbogen	Museum Folkwang, Essen
			70 × 102,5 cm
1812	E. Schleich	Chiemsee- landschaft	Museum der bildenden Künste, Leipzig
-1874			
1841	J. C. Cazin	Strasse mit Regenbogen	Museum of Fine Arts, Boston
-1901			
1835	D. Lucas	Die Kathedrale von Salisbury	British Museum
			55.1 × 69.2 cm
1804	M. von Schwind	Der Regenbogen	Historisches Museum, Wien
-1871			
1865	R. Henri	Knabe mit Regenbogen	
-1929			
1856	J. E. Millais	The Blind Girl	British Museum
...	M. Young	The Passing Shower	Andover Art Studio
...	J. Hecht	Noah's Ark	New York Public Library
...	Isleta	Kochina Indian Dance Ceremony	Museum of the American Indian

(iii) Der Regenbogen gilt einerseits als Zeichen der Hoffnung, andererseits als Begleiterscheinung des Unheils.

(iv) Besonders beliebt ist die Darstellung des Regenbogens in England, wegen der günstigen Wetterverhältnisse und auch wegen der besonderen Beziehung der Engländer zum Wetter.

Zu 3.4.4: Regenbogen in der Technik

Mit Hilfe der Interferenztheorie, besonders für die überzähligen Bögen (schwache, sich rosa und grün abwechselnde Bögen, die zuweilen unmittelbar an der Innenseite des Hauptregenbogens beobachtet werden können), kann folgende Beziehung zwischen dem Regenbogen und der Tropfengrösse gefunden werden:

Durchmesser	Regenbogen
1 mm – 2 mm	klarer, heller Hauptbogen mit intensivem breiten Violett überzählige Bögen rosa, grün, blau
0.5 mm	schwaches Rot im Hauptbogen kein Intervall zwischen Hauptbogen und überzähligen Bögen überzählige Bögen nur grün, violett
0.3 mm	kein Rot im Hauptbogen schmales Intervall zwischen Hauptbogen und überzähligen Bögen
≤ 0.2 mm	Gelb im ersten überzähligen Bogen
0.1 mm	mehrere undeutlich getrennte untergeschobene Bögen helles Violettrosa, schwaches Blaugrün
0.08 – 0.1 mm	erster unechter Bogen klar vom Hauptbogen abgetrennt enthält Weiss
0.06 mm	weisser Streifen im Hauptbogen
0.05 mm	Weisser Bogen mit Orangetönung am äussern Rand und ein wenig Blau am innern Rand

Die Regenbogen Theorie kann daher eine Hilfe zur Feststellung der Tröpfchengrösse und damit der Wolkenstruktur darstellen und in der Untersuchung der Vereisung von Flugzeugflügeln eine technische Anwendung finden. So hat die National Academy of Aeronautics 1944–1947 einen Regenbogenrecorder verwendet, um Tröpfchengrösse in der Natur und in Nebelkammern zu testen.

Eine weitere Anwendung findet die Regenbogen Theorie in der optischen, nicht-eingreifenden Methode zur Bestimmung der Tröpfcheneigenschaften von Sprühmitteln, die in Verbrennungsmotoren, industriellen Prozessen und in der Landwirtschaft zur Ausbringung von Dünger und Pestiziden verwendet werden (siehe van Beeck).

Zu 3.5: Kritische Analyse

In den verschiedenen Physikschulbüchern wird zum Teil die Entstehung des Regenbogens vereinfachend und exaktifizierbar, zum Teil auch verfälschend dargestellt. Manchmal findet man nur Allgemeinplätze wie "Der Regenbogen entsteht durch Zerlegung des Sonnenlichts in Farben." (Bergmann, F. - Schelper, W.: Einführung in die Physik; 1. Teilband, Frankfurt: Diesterweg Salle 1975).

An den drei Erklärungen und Abbildungen in Abschnitt 3.5.1 ist folgendes zu kritisieren:

(a) *Natur und Technik*

Die Erklärung ist insgesamt zumindest unzureichend und enthält die falsche Begründung von der Totalreflexion. Bei einer Kugel wird ein Strahl, der hineingebrochen wird, stets auch zum Teil herausgebrochen, da die gleichen Winkelverhältnisse vorliegen. In der Abbildung fallen 2 parallele, im Original rot gezeichnete Strahlen auf den Tropfen und verzweigen sich dann recht merkwürdig in zwei einmal auch rot, einmal blau gezeichnete Strahlen. Bild und Text suggerieren, dass *alle* auf das Tröpfchen treffende Strahlen so gebrochen werden.

(b) *Dorn-Bader*

Die Erklärung ist völlig unzureichend und enthält auch den gravierenden Fehler der Totalreflexion. In den beiden neueren Ausgaben des Dorn-Bader, Mittelstufe, von 1974 und 1980 ist der Fehler der Totalreflexion beseitigt, die Erklärung ist aber nach wie vor unzureichend. Erst in der aktuellen Ausgabe von 1992 wird auf die Konzentration der Strahlen bei dem 42° -Winkel hingewiesen.

(c) *Wege in die Physik und Chemie*

In der Kunst werden Tropfen beharrlich "tropfenförmig" dargestellt. Hochgeschwindigkeitsfotografien bestätigen aber die Kugelform frei fallender Regentropfen. Die Kugelform erklärt sich durch die starken Anziehungskräfte zwischen den Wassermolekülen.

Die Beschreibung des Versuchs und die Erklärung sind unzureichend.

Zu 4.1: Erstellen eines Quizheftes

Weitere Fragen wären z.B.

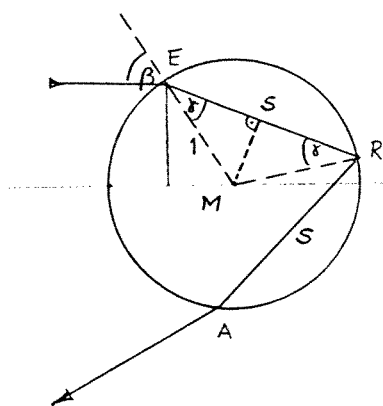
1. Wo steht die Sonne, wenn ich einen Regenbogen sehe?
2. Warum ist der Regenbogen Teil eines Kreises?
3. Wie entstehen die Farben im Regenbogen?
4. Wie entsteht der Nebebogen?
5. Was sind überzählige Regenbögen? Worauf begründen sie?
6. Was ist ein Reflexionsregenbogen?
7. Was ist ein Mondregenbogen?
8. In manchen Artikeln wird von einem unter seltenen Bedingungen sichtbaren dritten Regenbogen berichtet. Was halten Sie davon? [Der Regenbogen aus Strahlen 5. Ordnung, der nach den Berechnungen in der Richtung der Sonne zu orten wäre, ist unter besonderen Umständen gesichtet worden (Heilermann, 4. September 1878). Wie steht es um Regenbögen noch höherer Ordnungen?]

9. Weshalb ist der Himmel zwischen Haupt- und Nebenregenbogen dunkler als der übrige Himmel?
10. Weshalb ist der Himmel unterhalb des Hauptregenbogens heller als der übrige Himmel?
11. Wie weit vom Beobachter entfernt entsteht ein Regenbogen?
12. Sehen zwei Beobachter denselben Regenbogen?
13. Wie erklären Sie sich einen "Regenbogen" auf einem taubedeckten Rasen, auch "Taubogen" genannt? Welche Form erwarten Sie? [Der Taubogen beruht, anders als der Regenbogen, auf Strahlengängen 2. Ordnung, die an Grashalmen zurückgeworfen werden, siehe Lynch and Livingston, p. 122–123]
14. Kann an einem klirrend kalten Wintertag ein Regenbogen entstehen?
15. Kann zur Mittagszeit ein Regenbogen entstehen?
Nebst meteorologischen Bedingungen hängt die Entstehung des Regenbogens von verschiedenen Faktoren ab, von welchen? [Tageszeit, geographischer Breite, Jahreszeit]
16. Rainbow Puzzle (Greenler: Rainbows, Halos, ..., Plate 1.13, S. 21: Foto eines Regenbogens bei dunkelblauem Himmel über reifüberzogenen Baumkronen in der winterlichen Gegend der Niagarafälle)
17. Welche Wirkung hat der saure Regen (Brechungsindex $n = 1.5$) für den Regenbogen?
18. Wie sähe ein Regenbogen aus, wenn es Diamanten ($n = 2.4$) regnen würde? [Stationäre Werte für den Stossparameter liegen bei $x = \sqrt{\frac{(m-1)^2 - n^2}{(m-1)^2 - 1}}$, wobei m die Ordnung des Strahlenganges und n der Brechungsindex ist. Das bedeutet, dass es bei Diamantenregen keinen Regenbogen aus Strahlen 1. bis 3. Ordnung gibt.]
19. Wären schwache Intensitäten selbst gegen das Blenden der Sonne sichtbar, so sähen wir auch Regenbögen höherer Ordnungen. Wie sähe dann der Himmel aus?

Zu 4.3.3: Darstellung der Regenbogentheorie an Modellen

- (a) Fäden mit Reissnägeln auf ein Brett befestigt sollen die Strahlengänge sichtbar machen, während eine kreisförmige Glasscheibe darübergelegt den Regentropfen darstellen möge.

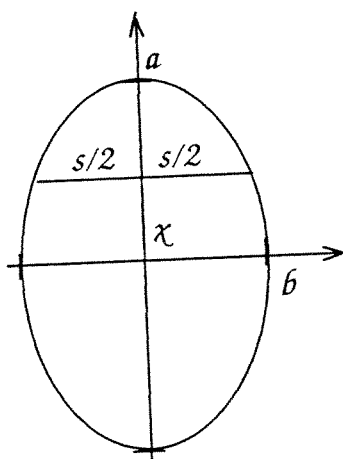
Bei der praktischen Konstruktion wird sich das Berechnen und Abtragen des Einfallswinkels β und des Brechungswinkels γ als umständlich erweisen, zumal sich



$$x = \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \sin \gamma = \frac{x}{n}$$

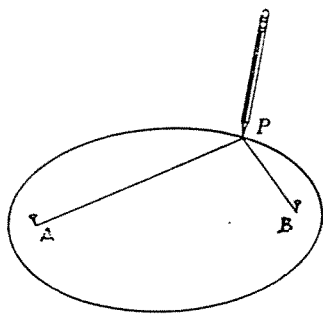
$$\Rightarrow \cos \gamma = \frac{s}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2$$



Die letzte Gleichung beschreibt im $(x, \frac{s}{2})$ -Koordinatensystem eine Ellipse mit grosser Halbachse $a = n = 1.33 \dots$ (je nach Farbe des Lichtes) und kleiner Halbachse $b = 1$ (siehe Bild links).

Da wir schon daran sind, mit Faden und Reißnägeln zu arbeiten, drängt sich die elegante Ellipsenkonstruktion nach der **Brennpunktsdefinition** auf:



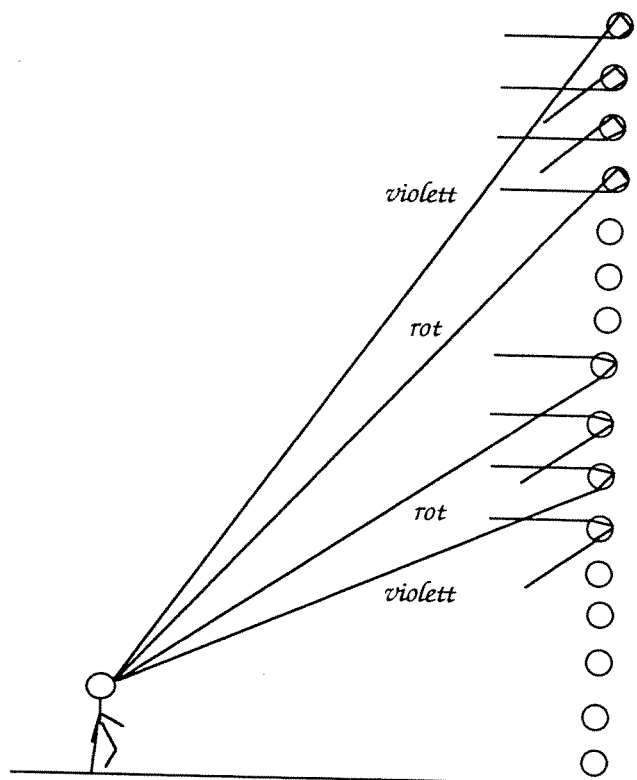
Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte P , deren Summe von Abständen zu den zwei Punkten A und B konstant ist:

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \text{konst} \\ \overline{AP} + \overline{BP} &= 2a\end{aligned}$$

A und B heissen Brennpunkte der Ellipse, a und b (bei uns $a \approx 1.33$, $b = 1$) sind ihre Halbachsen, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ = Exzentrizität ist der Abstand der Brennpunkte von der Mitte.

(b) **Darstellung des Haupt- und des Nebenregenbogens**

Vertikal aneinandergereihte Regentropfchen mögen eine Regenwand darstellen. Den Regenbogenfarben entsprechende Fäden könnten anzeigen, welche Strahlen auf das Beobachteraue am Boden treffen.



(c) **Darstellung mittels Computeranimation**

Bei Verwendung eines DGS, eines CAS oder einer Programmiersprache gibt es viele Möglichkeiten der bewegten Sichtbarmachung der Strahlengänge im Regentropfchen.

6 Referenzen

6.1 Glossar

Eintrittshöhe ist der Abstand zwischen dem einfallenden Sonnenstrahl und der dazu parallel gedachten Tröpfchenachse.

Stossparameter ist die Eintrittshöhe des Sonnenstrahls in ein Regentröpfchen, dessen Radius auf 1 normiert wurde.

Einfallswinkel ist der gegenüber der Flächennormalen gemessene Winkel beim Eintritt des Lichtstrahls in die Fläche.

Ausfallswinkel ist der gegenüber der Flächennormalen gemessene Winkel beim Austritt des Lichtstrahls aus der Fläche.

Reflexion Trifft ein Lichtstrahl auf die Grenzfläche eines Mediums, so wird ein Teil des Lichtstrahls von dieser zurückgeworfen. Bei der Reflexion sind Einfalls- und Ausfallswinkel gleich gross.

Brechung Durchdringt ein Lichtstrahl die Grenzfläche eines Mediums, so wird er beim Eintritt in dieses Medium in seiner Fortpflanzungsrichtung abgelenkt. Bei der Brechung gilt $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, wobei α der Einfallswinkel, β der Brechungswinkel und n der Brechungsindex beim Übergang von Luft in das Material ist.

Dispersion Durchdringt ein weisser Lichtstrahl die Grenzfläche eines Mediums, so erfährt er beim Eintritt in dieses Medium eine Auffächerung in ein Spektrum von ineinander übergehenden Farben Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett. Dies ist eine Folge der verschiedenen Brechungsindizes für verschiedene Wellenlängen des Lichtes.

Hauptregenbogen ist das intensivere Sonnenspektrum, das man am Himmel beobachten kann, wenn man vor sich eine Regenwand und hinter sich die Sonne hat. Die Reihenfolge der Farben ist von aussen nach innen Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett.

Nebenregenbogen ist der schwächere, dafür breitere Bogen, den man zuweilen ausserhalb des Hauptregenbogens beobachten kann. Die Farben sind gegenüber denjenigen des Hauptregenbogens in umgekehrter Reihenfolge angeordnet.

Überzählige Bögen sind sich rosa und hellgrün abwechselnde Bögen im Bereich innerhalb des Hauptregenbogens. Sie beruhen auf der Interferenz von Lichtwellen.

Alexandersches Dunkelband ist der zwischen Haupt- und Nebenregenbogen liegende Bereich und ist infolge eines Mangels an Strahlen, die in diesen Winkelbereich gestreut werden, dunkler als der Rest des Himmels.

Winkelbreite des Regenbogens ist die Differenz der Streuwinkel zwischen dem roten und dem violetten Rand des Regenbogens.

Taubogen ist der hyperbelförmige Bogen von Regenbogenfarben, den man auf einer von der Morgensonne beschienenen, taubenetzten Wiese beobachten kann. Der Taubogen beruht auf der Reflexion von Strahlen 2. Ordnung an den Grashalmen.

6.2 Literatur

1. Boyer, Carl, B., **The Rainbow From Myth to Mathematics**, Princeton University Press, 1959
(Der Klassiker in der Literatur über den Regenbogen.)
2. Bühler, W., **Das Pentagramm und der goldene Schnitt als Schöpfungsprinzip**, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 1996
3. Descartes, René, 1637, **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences**, Les météores, De l'arc-en-ciel
4. Eastwood, Bruce S., **Astronomy and Optics from Pliny to Descartes**, Variorum Reprints, London, 1989, p. 313–332
5. Fraser, Alistair B., 1972, **Inhomogeneities in the Color and Intensity of the Rainbow**, Journal of Atmospheric Sciences, 29, p. 211–212.
6. Gage, John, **Kulturgeschichte der Farbe: von der Antike bis zur Gegenwart**, übers. von M. Moses und B. Opstelten, Ravensburger Buchverlag, 1997, 6. Die Zerlegung des Regenbogens, p. 93–115
7. Goethe, J.W., **Zur Farbenlehre**, hrsg. von Peter Schmidt
8. Greenler, Robert, **Rainbows, Halos, and Glories**, Cambridge University Press, 1980
9. Heilermann, **Über den dritten Regenbogen**, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, XI (1880), p. 72–73
10. Henn, H. W., Jock W., **Arbeitsbuch CABRI Géomètre**, Computer-Praxis Mathematik, Dümmler, 1993, p. 156–166
11. Henn, H. W., **Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE**, Computer-Praxis Mathematik, Dümmler, 1996, p. 13–24
12. Henn, H. W., **Die Theorie des Regenbogens als Beispiel für beziehungs-haltige Analysis im Oberstufenunterricht**, Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 1 (1980), Heft 1/2, p. 62

13. Janke, Steven, **Somewhere Within the Rainbow**, The UMAP Journal 13.2, p. 153–174, 1992
(Sehr klare Darstellung der analytischen Erklärung des Regenbogens, enthält ausserdem auch einen beugungstheoretischen Teil der Regenbogentheorie.)
14. Lynch, David K. and Livingston, William, **Color and Light in Nature**, Cambridge University Press, 1995
(Hervorragende, anschauliche Beschreibung der geometrischen Bedingungen, ohne analytische Berechnungen, die zu den lichtstreuenden Erscheinungen von Wassertropfen führen. Differenzierte Klassifizierung in Regenbogen, Taubogen, Höfe, Heiligenschein, Alexandersches Dunkelband, irisierende Wolken, etc.)
15. Minnaert, M., **The Nature of Light and Color in the Open Air**, Dover, 1954, and **Light and Color in the Outdoors**, Springer, 1993, p. 185–258
(Physikalische Beschreibung der verschiedenen Klassen von lichtstreuenden Erscheinungen, mit Photographien davon.)
16. Newton, I., (1704), **Optik** oder Abhandlungen über Spiegelungen, Brechungen, Beugungen und Farben des Lichts, übersetzt und herausgegeben von W. Abendroth, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1983, p. 109–115, 1. Buch, 2. Teil, 9. Proposition, 4. Aufgabe.
17. Nussenzweig, H. Moyses, **The Theory of the Rainbow**, Scientific American 236, p. 116–127, 1977
18. Nussenzweig, H. M. and Khare, V., **Theory of the Rainbow**, Physical Review Letters, vol. 33, no. 16, p. 976–980, Oct. 14, 1974
19. Rother, Susanne, **Der Regenbogen. Eine malereigeschichtliche Studie**, Boehlau-Verlag Köln, 1992
20. Sabra A. I., **The Theories of Light From Descartes To Newton**, p. 60–68
21. Scott J. F., **The Scientific Work of René Descartes**, Taylor & Francis Ltd, London, 1976, p. 71–81
22. Seiler U. und Hardmeier W., **Lehrbuch der Physik II**, Optik und Wärmelehre, Polygraphischer Verlag Zürich, 1970, p. 267–268
23. Seydel R. und Bulirsch R., **Vom Regenbogen zum Farbfernsehen**, Springer Verlag, 1988
24. **Spinoza's Algebraic Calculation of the Rainbow and Calculation of Chances**, ed. and transl. by M. J. Petry, Martinus Nijhoff Publishers, 1985
25. Speiser, A. P., **Der Regenbogen als Naturerscheinung**, Artikel in der Neuen Zürcher Zeitung, 7. Juni 1995

26. Tammer R. und Vollmer M., **Regenbögen in Wasser und edleren Tropfen**, Praxis der Naturwissenschaft—Physik, 3/46, Jg. 1997, S. 15–23
27. van Beeck, J. P. A. J., 1997, **Rainbow Phenomena: development of a laser-based, non-intrusive technique for measuring droplet size, temperature, and velocity**, CIP-Data Library Technische Universiteit Eindhoven (ISBN 90-386-0557-9)
(Dissertation, die mit Hilfe der Regenbogentheorie optische, nicht-eingreifende Methoden zur Bestimmung der Tröpfcheneigenschaften von Sprühmitteln entwickelt.)
28. van de Hulst H. C., **Light Scattering by Small Particles**, John Wiley and Sons, 1957, Dover Publ. 1981, pp. 240
(behandelt den Regenbogen als Interferenzerscheinung)
29. Verspohl, Theresa, **Entstehung und Geheimnis des Regenbogens**, J. Ch. Mellinger Verlag, Stuttgart, 1992
30. Walker, Jearl, **How to create and observe rainbows in a single drop of water**, The Amateur Scientist, Scientific American, July 1977
31. Walker, Jearl, **Der fliegende Zirkus der Physik**, R. Oldenbourg, 1994, ISBN 3-486-22793-9, p. 135–139
32. Young H. D. and Freedman R. A., **University Physics**, Addison-Wesley, 1996, ISBN 0-201-57157-9, p. 1064

6.3 Internetadressen

1. Lynds, Beverly T.; 1995: **About Rainbows**
<http://www.unidata.ucar.edu/staff/blynds/RnbwEx.html>
(Die ganze Website gibt eine schöne Übersicht über Geschichtliches und neuere Erkenntnisse zur Regenbogentheorie mit Verweisen auf zahlreiche Literatur und Webadressen. Die oben angegebene Seite beschreibt Experimente zur Erzeugung von Regenbögen.)
2. Wicklin, F.J. and Edelman, P.; 1995–1997: **Circles of Light: The Mathematics of Rainbows**
<http://www.geom.umn.edu/education/calc-init/rainbow/>
3. CoVis, 1995: **Guide to Atmospheric Optics**
[http://ww2010.atmos.uiuc.edu/\(Gh\)/guides/mtr/opt/wtr/rnbw/frm.rxml](http://ww2010.atmos.uiuc.edu/(Gh)/guides/mtr/opt/wtr/rnbw/frm.rxml)
4. **Questions about Rainbows**,
<http://www.deltatech.com/rainbowx.html>
(Enthält Antworten zu häufig gestellten Fragen.)

5. Strom, Karon; 1994: **Rainbows**
<http://hanksville.phast.umass.edu/defs/rainbow.html>
6. Gavrin, **What is Physics good for?**
<http://webphysics.iupui.edu/251/251Sp97GFApr7.html>
7. Sarapik, Virve; **Rainbow, Science and Mythology**
<http://haldjas.folklore.ee/folklore/vol6/rainbow.htm>
8. Hwang, F. K; 1997: **Rainbow**
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/class/demolab/java/Rainbow/rainbow.html>
<http://www.physics.gatech.edu/academics/tutorial/phys2121/Java/%20Applets/ntnjava/Rainbow/>
 (Ein Programm, das interaktives Einsehen in die Strahlengänge erlaubt.)
9. Mäkelä, Veikko; **Atmosphere and weather**
<http://www.funet.fi/pub/astro/html/eng/obs/meteoptic/links.html>
10. **The Mathematics of Rainbows**
<http://gauss.hawcc.hawaii.edu/math/bows.html>
11. Parks, Beverly L.; 1996–1998: **Cloudbow**
<http://www.primenet.com/cloudbow/index.html>
12. **Die Physik des Regenbogens**
<http://www-hermes.desy.de/erlangen/ws9697/rain.html>
13. Beeson, Steve; 1995: **Patterns in Nature: Light and Optics**
<http://accept.la.asu.edu/PiN/mod/light/opticsnature/>
14. Mechling, Roland; 1997: **EUKLID**
<http://home.t-online.de/home/roland.mechling/>
 (Von hier kann das Shareware-Geometrie-Programm EUKLID geladen werden.)
15. **History of Mathematics Archive**
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/>
 (Im “Biographies Index” findet man Porträts und Biographien bedeutender Mathematiker und Mathematikerinnen über die Jahrhunderte hinweg.)
16. **Internet Classics Archive: Meteorology, by Aristotle**
<http://classics.dcs.mit.edu/Aristotle/meteorology.3.iii.html>
 (In seiner Meteorologie, 3. Buch, Teile 2, 4, 5 beschreibt und erklärt Aristoteles den Regenbogen.)

Prof. U. Kirchgraber
 Eidg. Technische Hochschule Zürich
 Mathematik
 8092 Zürich

Berichte über Mathematik und Unterricht

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90-01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90-02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
91-01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91-02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91-03	M. Federer	Preistheorie
91-04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92-01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93-01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93-01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93-02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93-02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93-03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93-03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93-04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93-04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93-05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93-06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93-07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94-01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94-02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94-03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94-04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95-01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95-02	U. Kirchgraber U. Kirchgraber, N. Sigrist	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten. Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95-03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95-04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
95-05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95-06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme
96-01	W. Burgherr	Schwimmende Prismen mit Schlagseite
96-02	M. Struwe	Sattelpunkte oder Variationsprinzipien in Geometrie und Mechanik
96-03	M. Huber	Warum denn ist $\exp(x^2)$ nicht elementar integrierbar?
97-01	B. Eicke, E. Holzherr	Analysis – mit dem Computer-Algebra-System des TI-92 (Preis: Fr. 8.- inkl. MWSt)
97-02	C. Blatter	Notizen zu einer Mathematik fürs Leben
97-03	F. Spirig	Elemente zur Kugelgeometrie
98-01	U. Kortenkamp, J. Richter-Gebert	Geometry and Education in the Internet Age
98-02	M. Adelmeyer	KS Flight Simulator
98-03	H. Struve	Geometrie aus Schülersicht: Charakteristika und Probleme
98-04	M. Ludwig	Platonische Durchdringungen – ein Projekt im Mathematikunterricht der Klasse 10 (Preis: Fr. 5.- inkl. MWSt)
98-05	M. Adelmeyer, W. Durandi, M. Kopp	Schullotto – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98-06	J.-P. David, P. Hänsli, M. Leupp	Parabeln – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98-07	B. Dzung Wong, H.-W. Henn	Der Regenbogen – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)
98-08	M. Bettinaglio, F. Lehmann	Billard – ein Projekt im Mathematikunterricht (Preis: Fr. 4.- inkl. MWSt)