

ETH

EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Berichte über Mathematik und Unterricht

Herausgeber: U. Kirchgraber

Bericht No. 95-06

Dezember 1995

Verfolgungsprobleme

G. Schiörscher, Vaduz

Eidgenössische Technische Hochschule

CH-8092 Zürich

VERFOLGUNGSPROBLEME

Georg Schierscher

Einander Exempel.



In Büd
lauffet ei
nem Ha
se nach/
vnnnd der Hase
hatt 30. sprüing
beuor Vnnnd als

offt der Hase 6. sprüing thüt / thüt der Hundt 8.
Ist die frag / in wie vil sprüingen ereilt der hund
den Hasen? Subtrahier 6. von 8. so bleiben 2.
Sprich / 2. werden einbracht von 8. von wie vilen
werden 30 einbracht? facit 120. In so vil sprüing
ereilt der Hundt den Hasen.

Item

Originaltext aus:

Jakob Köbel: Rechenbuch. 1531.
1549 Edition. Folio 88. "Von Wandern über Landt".
Mikrofilm zur Verfügung gestellt von der
Bayerischen Staatsbibliothek, Photostelle.
D-80328 München.
Vergrößerung auf Photopapier von Gabriel.

VORBEMERKUNG

Im Januar 1988 fand im "Seminar über Didaktik der Mathematik für aktive Lehrer" der ETH-Zürich ein Vortrag statt zum Thema "Mathematik mit dem Computer erleben". Dabei kam der Referent auf die Aufgabe zu sprechen, in der ein Jäger mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Waldstrasse wandert, während sein Hund im Dickicht immer den Pfeiftönen des Meisters folgt. Gefragt war nach der Bahn, die der Hund bei der Verfolgung seines Herrn einschlägt. Obwohl im simulierten Bewegungsvorgang der Hund damals noch recht holprig in Form eines H über den Textbildschirm "rannte", vermochte mich als spätberufener Computerneuling die Dynamik der Darstellung zu begeistern - ich war vom *Erlebniswert* überzeugt.

Wenige Jahre später schrieb ich in Turbo-Pascal von Borland ein "hauseigenes" Prozedurenpaket (Unit), mit dem sich **Turtlegraphiken** am Bildschirm erstellen und in PostScript-Qualität ausdrucken lassen. Das neue Werkzeug eröffnete ein Feld von Animationen: Ich erinnerte mich wieder an den *Jäger und seinen Hund*, an die Mücke, die spiralförmig an die Lichtquelle heranzieht, und an die bekannten "Käferaufgaben". Damit waren damals - von ein paar wenigen Aufsätzen abgesehen - meine (Literatur-)Kenntnisse über Verfolgungsprobleme im wesentlichen erschöpft.

Ab November 1994 durfte ich auf Einladung von Prof. Kirchgraber für drei Monate am Projekt "*ETH für die Schule*" teilnehmen. Meine anfängliche latente Angst, es könnte zum Thema *Verfolgungsprobleme* nur wenig geeignete Literatur vorliegen, verkehrte sich beim Bibliographieren rasch ins Gegenteil: In der Haupt- und Seminarbibliothek der ETH findet sich zum besagten Gegenstand ein unerwartet reiches, vor allem englisches Schrifttum, weit verstreut in Monographien und besonders in sehr vielen mathematischen Aufsätzen. Gewissermassen über Nacht wurde ich nach 25 Jahren des Lehrerseins in die Rolle des Schülers versetzt - eine wertvolle, beiläufige Erfahrung!

Alle abgebildeten Turtlegraphiken (TG) habe ich mit der oben erwähnten Unit programmiert, und zwar meistens vor der analytischen Beschreibung des Dargestellten. Während Bewegungsabläufe - beispielsweise Verfolgungen - auf dem Bildschirm in Farben nachge-

ahmt werden können, erscheinen Ausdrücke auf dem Papier umständehalber nur noch statisch und farblos, ein Mangel, der auch in diesem Heft zu bedauern ist. Überdies erfahren Verkleinerungen einen weiteren Qualitätsverlust. Die Vielzahl der Bilder hat mit meinem Bemühen zu tun, die Schülerin und den Schüler über das Auge zu mathematischer Einsicht zu bringen. Nach Friedrich Hebbel - Epigramme, Einem Ursprünglichen - ist "anzuschauen [...] freilich in Kunst und Leben das Höchste". Um den Lesefluss nicht zu stören, wurden ein Teil der Graphiken und längere formelmässige Herleitungen in den Anhang verlagert. Im übrigen habe ich einige Abbildungen bewusst manuell gezeichnet, um - bei aller Wertschätzung des Computers - auch die Hand zum Zuge kommen zu lassen.

Während meiner Zeit arbeitete Albert Gächter vom Gymnasium Friedberg in derselben Abteilung an seinem Heft über "INFINITESIMALGEOMETRIE am Beispiel der Kreisevolvente". So wie er mir schon mit seinen früheren Turtlegraphiken "den Speck durch den Mund gezogen" hatte, so blieb auch der osmotische Druck seiner Muster kinematischer Geometrie im Unterricht dank eines kollegialen Erfahrungsaustausches nicht ohne Wirkung auf mich. Beide Arbeiten sind infinitesimalgeometrisch verwandt: am Krümmungsbegriff beispielsweise besteht ein gemeinsames Interesse.

Danken möchte ich zum Schluss ganz besonders Prof. Kirchgraber für die Einladung über die Landesgrenze. An meiner versteckten Furcht vor seinen Erwartungen und denen der Leser trug er keine Schuld, im Gegenteil, bei unseren Gesprächen gab er mir stets freundlich und freudig grünes Licht zum Weitermachen. Prof. Jörg Waldvogel von der ETH danke ich für die anregenden Gespräche und für die hilfreiche Korrespondenz. Jedes Interesse aus dem Bekanntenkreis wirkte förderlich, insbesondere das von Prof. Baptist in Bayreuth. Der liechtensteinischen Schulbehörde verdanke ich die Freistellung vom Unterricht. Schliesslich bin ich dem Leser dankbar für Hinweise auf allfällige Fehler, Verbesserungsvorschläge oder mir unbekannte Quellen.

Georg Schierscher

INHALT

Einleitung	7
1. EINFÜHRUNG	
1.1 Die Hauptakteure und ihre Strategien	9
1.2 Diskretisation einer kontinuierlichen Bewegung	11
1.3 Beutefang - eine heikle Programmieraufgabe	12
2. HUNDEKURVEN	
2.1 Bouguers Verfolgungsproblem und die <i>Hundekurve</i>	14
2.1.1 Eigenschaften der Verfolgung nach Bouguer	17
2.1.2 Kegelschnitte als Isochronen	25
2.1.3 Die <i>Hundekurve</i> als isometrischer Streckenzug	28
2.1.4 Schwimmender Hund von Saint-Laurent und Sturm	31
2.2 Maupertuis' Verallgemeinerung der <i>Hundekurve</i>	33
2.2.1 Flucht auf dem Kreis	35
2.2.2 Käfer verfolgen Käfer	36
2.3 Geschichtliches	42
3. SCHLEPPKURVEN	
3.1 Perraults Taschenuhr und die <i>Traktrix</i>	44
3.1.1 Die Kettenlinie als Evolute der <i>Traktrix</i>	48
3.1.2 Die <i>Traktrix</i> als Erzeugende der Pseudosphäre	50
3.2 Die <i>Traktrix</i> des Kreises	53
3.3 Radspuren auf der Spur	55
3.3.1 Sinustraktrizen	56
3.3.2 Mit dem Fahrrad durchs Dorf	58
3.3.3 Äquitangentiale einer Sinuskurve	60
3.3.4 Gliederzug	61
4. SCHIELWINKELKURVEN	
4.1 Spiraliger Weg zur brennenden Kerze	64
4.2 Kreisbogengleiche - ein Beispiel mit variablem Schielwinkel	64
4.3 Von der Unterhaltungsmathematik zum Militär	65
Schluss	66
Anhang	67
Literaturverzeichnis	76

EINLEITUNG

Wenn, wie eingangs der Vorbemerkung erwähnt, ein Hund seinem Meister nachrennt, liegt ein typisches Verfolgungsproblem vor. Allgemein geht es darum, dass ein verfolgendes Objekt nach einer bestimmten Strategie einem Zielobjekt nachstellt, wobei letzteres sich auf einer gegebenen Linie wie Gerade, Kreis oder logarithmischer Spirale bewegt oder in Einzelfällen ruht. Der Vorgang spielt sich in der *Ebene* ab. Dabei geht es schwergewichtig um die Bestimmung der Verfolgungskurve. Die Modellierung solcher Bewegungen führt auf Differentialgleichungen 1. oder gar 2. Ordnung mit unter Umständen variablen Koeffizienten. Es ist zu erwarten, dass im Aufstellen der Differentialgleichungen und im Bemühen um deren Lösung(en) die einschneidendsten didaktischen Schwierigkeiten und Grenzen des Machbaren und Sinnvollen liegen.

In diesem Zusammenhang gilt es zu beachten, dass die neuere Didaktik aus guten Gründen einen exemplarischen Umgang mit Differentialgleichungen wünscht.¹ Diese sind das Werkzeug zur Modellbildung von dynamischen Systemen. Die verhältnismässig einfache Lösbarkeit in geschlossener Form ist kein ausschliessliches Kriterium mehr. Seit der Verfügbarkeit des Computers in der Schule lassen sich mit symbolisch rechnenden Programmen und graphisch-numerischen Rechenmethoden auch schwierigere Differentialgleichungen je nachdem exakt oder "wenigstens" näherungsweise lösen.

Die Gliederung der Arbeit ergibt sich zum Grossteil aus den ausgewählten Verfolgungsstrategien und der Art der Fluchtlinien.

Im ersten Kapitel geht es um die Beschreibung von ein paar Begriffen und Verfolgungsstrategien sowie um die Diskretisation der kontinuierlichen Probleme. Im Hauptabschnitt beschäftigen wir uns ausführlich mit der *Hundekurve* als Verfolgungsbahn bei der Geraden als Fluchtlinie. Anschliessend interessiert uns allgemeiner die Flucht auf dem Kreis und auf der logarithmischen Spirale, wobei wir fast zur Gänze auf formale analytische Untersuchungen verzichten (müssen). Im dritten Kapitel widmen wir uns einigen

¹ Vgl. Kirchgraber (1990) S. 13-17. - Schneebeili (1995) S. 46f.

Schleppkurven, allen voran der *Traktrix* und den alltäglich zu beobachtenden Fahrradspuren. In diesem, wie im vorhergehenden Kapitel, betrachten wir auch solche Verfolgungsprozesse, die mit vernünftigem Aufwand formal gar nicht mehr handhabbar sind, aber dennoch in Form *blosser* computergraphischer Experimente mathematische Ideen sowie qualitative und quantitative Einsichten zu vermitteln vermögen. Ein paar Anwendungsbeispiele weisen auf die praktische Bedeutung der behandelten Probleme hin und da und dort sind überwiegend "hausgemachte" Aufgaben eingestreut. Der kurze Abschnitt 4 streift mit zwei einfachen Beispielen die *Schielwinkelkurven*, eine Thematik, die mathematisch in aller Regel sehr anspruchsvoll ist.

Im Schlussteil stecken wir auf der mathematischen Landkarte ein paar jener Pfade ab, die sich beim Begehen dieses einen Weges eröffnet haben. Im Anhang schliesslich befinden sich ausladende Herleitungen von Gleichungen und Formeln sowie Turtlegraphiken und Befehlslisten zu Maple-Graphiken.

Im Kapitel über *Hundekurven* kommt - ausser implizit in den Turtlegraphiken - keine *natürliche Geometrie* zum Tragen. Im Rahmen der Zeit war ich leider nicht in der Lage, die anforderungsreiche einschlägige Literatur² zu verarbeiten, um mir die nötige Verfügungskompetenz anzueignen.

Verfolgungsprobleme werden gerne im Bereich der Unterhaltungsmathematik angesiedelt. Und genau diametral gegenüber - in den Militärwissenschaften - finden wir solche wieder. So ernst und wirklichkeitsnah wie diese sind die in der vorliegenden Arbeit behandelten Verfolgungsprobleme allerdings nicht, aber das erwartet wohl auch niemand. Ich bin zufrieden, wenn die Beispiele im Unterricht zu motivieren vermögen. Die Beschäftigung mit ihnen bedeutet ein Ziehen an vielen Registern der Schulmathematik.

² Siehe Cesàro (1883) S. 85-89 sowie (1886) S. 65-83 und ähnliche Schriften anderer Autoren.

1. EINFÜHRUNG

1.1 Die Hauptakteure und ihre Strategien

Wer Verfolgungsproblemen in der Literatur nachgeht, kommt sich vor wie im Zoo, in dem auch die "Krone der Schöpfung" beheimatet ist: Achilles rennt der Schildkröte nach, Herrchen zieht den Dackel an der Leine, der Bauer eilt seinem Schwein nach, der Hund verfolgt den Jogger, die Spinne krabbelt zur Fliege, der Habicht fliegt dem Spatz nach und der Hai jagt seine kleineren Artgenossen. Die Bandbreite reicht von der Idylle bis zum Prinzip von Fressen und Gefressenwerden. Schliesslich tauchen auch Piraten auf, die das Schiff mit dem ersehnten Schatz auf hoher See verfolgen.

Um die Wirklichkeitsnähe dieser Beispiele brauchen wir uns an dieser Stelle (noch) nicht zu kümmern. Bei der Mathematisierung der in den Bildern skizzierten Verfolgungsabläufe müssen wir ohnehin starke Abstriche an der "Realität" vornehmen: So darf der flüchtende Hase der Glätte der Kurven zuliebe keine Haken schlagen und die vor dem Hund flüchtende Katze nicht auf den nächsten Baum klettern - sie würde sonst die *EBENE* als unsere Bühne verlassen! Der geneigte Leser¹ wird also in seinem phantasievollen Ausmalen von Flucht- und Verfolgungsstrategien stark eingeengt.

Fluchtstrategie

Die *Fluchtstrategie* ist einheitlich: ein Punkt Z (der Flüchtende/die Beute/das Zielobjekt) bewegt sich mit **konstanter Fluchtgeschwindigkeit u** auf einer vorgegebenen *Fluchtlinie* z . Die Fluchtgeschwindigkeit kann in Einzelfällen null sein; dann haben wir es mit einem ruhenden Zielobjekt zu tun.

Verfolgungsstrategien

Die Bahn des Punktes P (Verfolger/Räuber) ist die uns interessierende *Verfolgungskurve* p . An Verfolgungsstrategien seien drei Varianten zugelassen, so dass der Sachverhalt wie folgt aussieht:

¹ Mit dem Leser und dem Schüler sind ab jetzt immer auch die Leserin bzw. die Schülerin gemeint.

Verfolgungsstrategie 1:

Ein Punkt P bewegt sich mit **konstanter Verfolgergeschwindigkeit v** so, dass seine Bewegungsrichtung immer auf Z zeigt (Abb. 1.1).

Verfolgungsstrategie 2:

Ein Punkt P bewegt sich bei **konstantem Abstand a** von Z so, dass seine Bewegungsrichtung stets auf Z zeigt (Abb. 1.2).

Verfolgungsstrategie 3:

In Abwandlung von Version 1 bildet der Verfolgerkurs von P mit der jeweiligen Visierlinie PZ einen Winkel σ ($\neq 0$), den sog. **Schielwinkel** (Abb. 1.3).

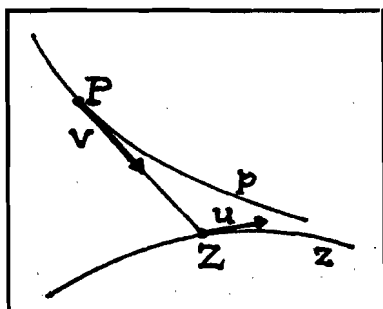


Abb. 1.1

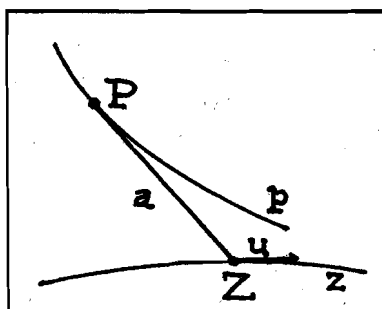


Abb. 1.2

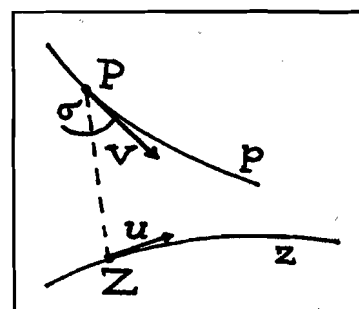


Abb. 1.3

Hier mag eine knappe Übersicht dienlich sein.²

Fluchtl.	Strategie	σ	Verfolgungskurve
Gerade	1	0	Hundekurve
andere	1	0	allgemeine Hundekurve
Gerade	2	--	Traktrix
andere	2	--	Schleppkurve
frei	3	konst.	Schielwinkelkurve
frei	3	var.	allg. Verfolgungskurve

² In Anlehnung an Hosemann (1953) S. 270.

Es überrascht vielleicht für den Augenblick, dass die Schleppkurven - speziell die Traktrix, wie sie im Idealfall beispielsweise der an der Leine gezogene Dackel beschreibt - unter die Verfolgungskurven eingeordnet werden. Diese Einteilung ist aber gerechtfertigt, wenn wir beachten, wie verwandt die beiden Verfolgungsstrategien 1 und 2 sind: In der Strategie 1 ist v konstant und a variabel; in der Strategie 2 ist es gerade umgekehrt - dort ist a konstant und v variabel - sonst besteht kein Unterschied.

1.2 Diskretisation einer kontinuierlichen Bewegung

Die Bewegung eines Verfolgers ist eine kontinuierliche und kann somit von der Turtle über ihrer endlichen Menge von Computerzahlen nicht in dieser Qualität simuliert werden. Für sie muss der Bewegungsvorgang durch *Diskretisation* der Zeit "mundgerecht" aufbereitet werden.

Zu diesem Zwecke wenden wir das schülerfreundliche *Eulerverfahren* als numerische Näherungsmethode an. Wir unterteilen die Zeit in gleich grosse Intervalle und berechnen die zu den Intervallgrenzen gehörenden Zustände Z_0, Z_1, Z_2, \dots bzw. P_0, P_1, P_2, \dots (Abb. 1.4). $P_n Z_n$ mit n aus N_0 sind die jeweiligen Visierlinien des Verfolgers. Indem wir entsprechende benachbarte Zustände durch Strecken verbinden und damit die Bewegung stückweise linearisieren, ergeben sich die Polygonzüge \tilde{z} und \tilde{p} als Näherungsgraphen der exakten Bahnen z und p . Je feiner wir diskretisieren, d.h., je kleiner die Zeitintervalle gewählt werden, desto glatter fallen die Kurven aus.

Verfolger und Flüchtender rücken zeitlich versetzt von Station zu Station. Wenn wir jetzt im Gegensatz zu oben zuerst den Flüchtenden statt den Verfolger auf den Kurs schicken, dann resultieren der Polygonzug $(P'_0=P_0)-P'_1-P'_2-\dots$ als Näherungskurve \tilde{p}' von p und die Visierlinien $P'_n Z_{n+1}$. p liegt nun - wie man überlegt - zwischen \tilde{p} und \tilde{p}' . Bei guter Konditionierung des Problems ist es auf diese Weise möglich, im Rahmen der Genauigkeit und unter Beachtung der Rechenzeit befriedigend nahe an die "wirkliche" Verfol-

gungskurve heranzukommen.³ Wir werden wiederholt die Gelegenheit haben, die Güte der Approximation durch Vergleich exakt und *numerisch* berechneter Werte zu beurteilen.

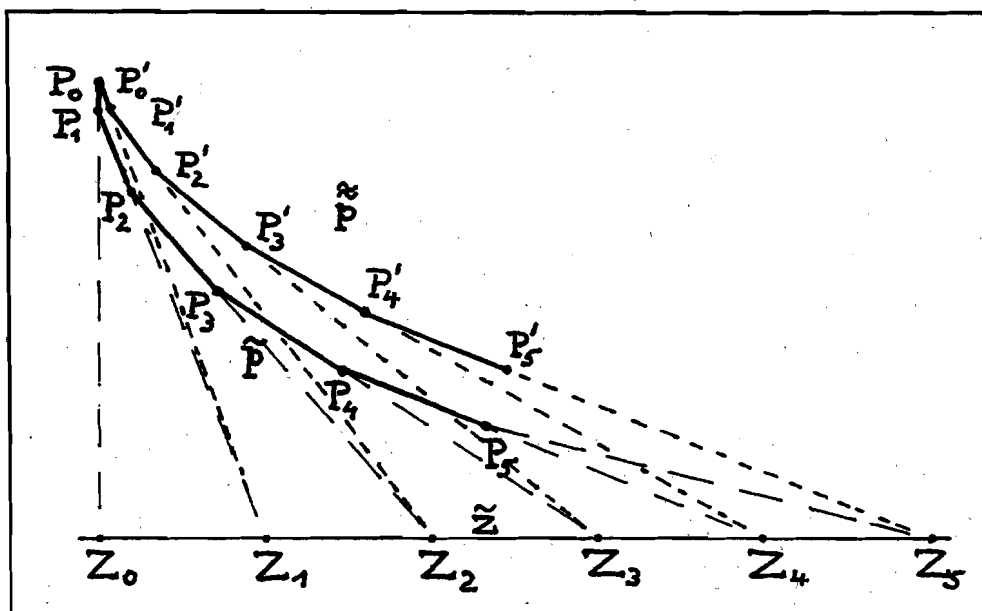


Abb. 1.4

Es ist vorteilhaft, wenn der Schüler zur Verinnerlichung des Eulerverfahrens Näherungskurven zuerst von Hand skizziert, wie dies in Abb. 1.4 geschehen ist. Die Schüler mögen in Gruppen ein Problem mit verschiedenen Diskretisationsweiten auf Transparentfolien bearbeiten und dann die aufeinandergelegten Handzeichnungen hinsichtlich Kurvengestalt, Änderung des Kurvenverlaufs und dergleichen mehr diskutieren.

1.3. Beutefang - eine heikle Programmieraufgabe

Da sich die Turtle wegen der Quantisierung der Zeit in "Quantensprüngen" vorwärtsbewegt, stellt zum Beispiel das Fangen der Beute durch den Räuber eine programmiermässige Herausforderung dar. Vorausgesetzt, dass es theoretisch zum Fang⁴ kommt, wird in aller Re-

³ Beim Ausdrucken der Turtlegraphiken in Postscript ist der relativ träge Druckerprozessor der Bremsklotz. Um die Zeit des Druckens in erträglichen Grenzen zu halten, habe ich die Diskretisationsweiten auf Kosten der Genauigkeit grösser gewählt als bei nur bildschirmorientierten Simulationen.

⁴ Ähnliches Vorgehen im Falle der asymptotischen Annäherung.

gel die verfolgende Turtle die flüchtende Turtle nicht genau treffen. Es ist dafür zu sorgen, dass erstere nicht "über das Ziel hinausschiesst". Wir haben uns daher folgendes *Fangkriterium* zurechtgelegt:

Wenn die verfolgende Turtle sich in einer "kreisförmigen" Umgebung der flüchtenden Turtle (Beute) von hinreichend kleinem Radius befindet, dann gilt die Beute als gefangen.

Beim Eindringen der verfolgenden Turtle in den Nahbereich der flüchtenden Turtle⁵ - zur Optimierung der Programmablaufgeschwindigkeit erst dann - verkleinert ein einprogrammierter Automatismus die ursprüngliche Diskretisationsweite in Abstimmung mit dem Umgebungsradius.

⁵ Radius von der Grössenordnung der Diskretisationsweite.

2. HUNDEKURVEN

2.1 Bouguers Verfolgungsproblem und die Hundekurve

Der Begriff der *Hundekurve* ist mit Bouguer ebenso sehr verknüpft wie etwa die Glockenkurve mit Gauss. Es ist daher angezeigt, einleitend ein paar biographische Daten über diese Person anzugeben.

PIERRE BOUGUER (1698 - 1758)

franz. Naturforscher

geboren am 10. Februar 1698 in Le Croisic (Bretagne)

gestorben am 15. August 1758 in Paris

Der Mathematiker, Physiker und Astronom Bouguer leitete zusammen mit einem Forschungskollegen die 1735 von der Pariser Académie des Sciences ausgesandte Expedition nach dem nördlichen Peru (heute Ecuador), die durch Gradmessungen die Abweichung der Erde von der genauen Kugelgestalt bestimmen sollte. Er beobachtete dort erstmals die Ablenkung des Lotes von der Senkrechten durch die Gebirgsmassen des Chimborasso (Bouguer-Anomalie).

Durch seine Messungen der Absorption des Lichtes von Himmelskörpern und dessen Ablenkung durch Brechung an der Erdatmosphäre wurde Bouguer zu einem der Begründer der Photometrie.

Bouguer hat zahlreiche wissenschaftliche Arbeiten u.a. über die Gestaltmessungen des Erdballs (*La figure de la terre* (1749)), die Navigationskunde (*Nouveau traité de navigation et de pilotage* (1753)) und die Lichtabsorption (Bouguersches Gesetz) veröffentlicht. Als Professor der Schifffahrtskunde in Le Havre hat er sich mit Stabilitätsfragen von Schiffen beschäftigt. In der Preisfrage der Pariser Akademie nach der besten Bemastung eines Schiffes hat er, nebenbei bemerkt, dem damals neunzehnjährigen Leonhard Euler den ersten Preis weggeschnappt. Später pflegten die beiden einen regen Briefkontakt miteinander.¹

Im Jahr 1732 verfasste Bouguer in den *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* eine 14-seitige Abhandlung mit dem Titel "SUR DE NOUVELLES COURBES auxquelles on peut donner le nom de LIGNES DE POURSUITE". Er formuliert darin jenes Verfolgungsproblem, das heute als *klassisch* bezeichnet werden darf und mit dem sich seitdem viele hervorragende Mathematiker auseinandergesetzt haben. **Bouguers Verfolgungsproblem** lautet kurzgefasst wie folgt:

Zwei Schiffe fahren mit konstanten Geschwindigkeiten auf hoher See; das eine hält immer Kurs auf das andere, welches sich auf einer Geraden bewegt. Was für eine Kurve beschreibt das Verfolgerschiff?

¹ Vgl. Maheu (1966) S. 206-224 sowie:
Brockhaus Enzyklopädie in 24 Bänden. Mannheim: F.A. Brockhaus
¹⁹1987. Bd. 3. S. 577.

Nachdem dieses Verfolgungsproblem in Frankreich nahezu 100 Jahre in Vergessenheit geraten war, tauchte es dort unter Namen wie Dubois-Aymé² und Saint-Laurent³ wieder auf mit dem Unterschied, dass jetzt *Hunde* Kurs auf ihren Meister nahmen. So ist aus der Kurve von Bouguers Verfolgungsschiff und den späteren *Hunden* die Bezeichnung **Hundekurve** hervorgegangen.

Wenn bei nachstehend abgebildeten Turtlegraphiken Katzen, Jogger oder Radfahrer von Hunden verfolgt werden, so mag der Leser diesem Scherz mit der nötigen Grosszügigkeit begegnen!

Gleichungen der Hundekurve⁴

Wir betrachten die beiden Schiffe als masselose Punkte Z (Fluchtschiff) und P (Verfolgerschiff) mit den entsprechenden (konstanten) Geschwindigkeiten u und v (>0). Z bewege sich auf der x -Achse des kartesischen Koordinatensystems in positiver Richtung. Die Abszisse von Z sei mit x_z , die Koordinaten von P seien mit x, y und das Verhältnis der Geschwindigkeiten $v:u$ mit k bezeichnet. s ist der Bogen von P_0 bis P. Mit der Startlage von P in $P_0(0, a)$, $a > 0$, und von Z im Koordinatenursprung $Z_0(0, 0)$ wählen wir rechnerisch vorteilhafte Anfangsbedingungen.

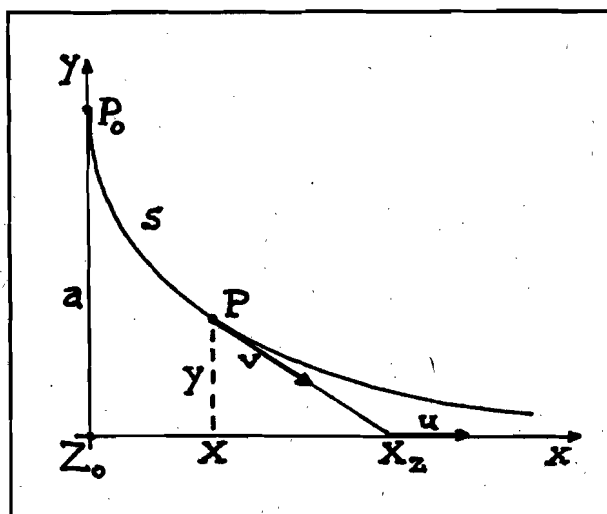


Abb. 2.1

Die nachstehende Beziehung zwischen dem Bogen s und der Abszisse x_z von Z (als Summe aus der Abszisse x und der Subtangente von P) ist charakteristisch für die Problemstellung:

² Siehe Correspondance sur l'École Polytechnique. tome II. 1814. S. 275.

³ Mehr darüber in einem unteren Abschnitt.

⁴ Vor der formalen Behandlung des Verfolgungsproblems wird man die Schüler im Sinne von Abschnitt 1.2 zu mehreren verschiedenen Parametern und Anfangsbedingungen Handzeichnungen anfertigen lassen, damit sie eine gewisse Vertrautheit mit der Thematik erwerben.

$$x_z = \frac{1}{k} s. \quad (1)$$

Weiter folgt aus den Bedingungen des Problems

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - x_z} \quad (2)$$

oder (bei Bezeichnung der Ableitungen von y nach x mit Strichen)

$$x_z = x - \frac{y}{y'}. \quad (3)$$

Aus (1), (2) folgt $s = k(x - \frac{y}{y'})$; es ist $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Wir betrachten x als unabhängige Variable und eliminieren s . Aus den vorangehenden Ausdrücken für s und ds gewinnen wir zwei formal verschiedene Terme für ds/dx und setzen diese gleich:

$$k \frac{yy''}{y'^2} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Nach einer kleinen Umformung gelangen wir zur folgenden **Differentialgleichung der Hundekurve**:

$$kyy'' - y'^2 \sqrt{1 + y'^2} = 0. \quad (4)$$

Es handelt sich um eine solche 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten. Es ist rechnerisch vorteilhaft, dass sie die unabhängige Variable x explizit nicht enthält; wir haben gute Aussicht, nach Einführung einer neuen Veränderlichen mit der Methode der Variablentrennung zur integralen Gleichung der Hundekurve zu kommen. Die Integration führen wir im Anhang A1 durch und übernehmen von dort die Lösung. Bei ihrer Herleitung sind die zwei Fälle $k \neq 1$ und $k=1$ zu unterscheiden.

Die Gleichung der Hundekurve:

$$\begin{aligned} x &= \frac{ky}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k-1} \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) + \frac{ka}{k^2-1} && \text{für } k \neq 1 \\ x &= \frac{1}{4a} \left(y^2 - a^2 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{y}{a} \right) \right) \right) && \text{für } k=1 \end{aligned} \quad (5)$$

Die Abbildung 2.2 zeigt das der Differentialgleichung (A1.5) im Anhang A1 zugrundeliegende Richtungsfeld samt einer Bahn. Die Graphik ist mit Maple hergestellt worden.⁵ Der Hund, um bildhaft zu bleiben, rennt einer auf der x -Achse fliehenden Katze mit deren

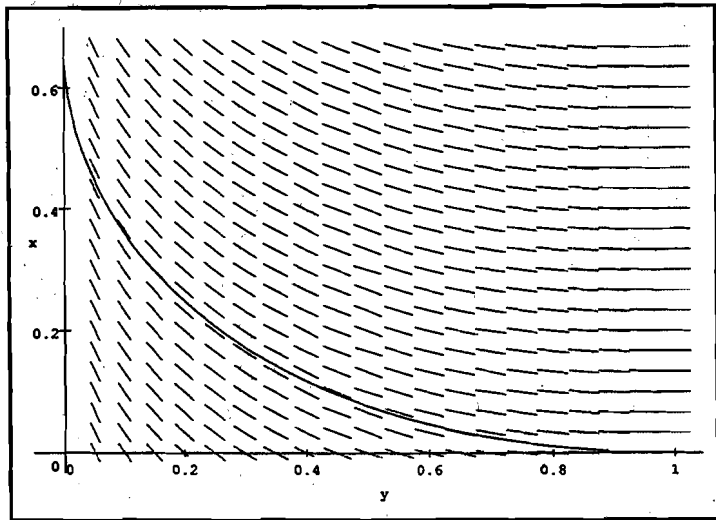


Abb. 2.2

doppelter Geschwindigkeit ($k=2$) nach.⁶ Zum Zeitpunkt des Startes war die Katze im Nullpunkt und der Hund im Punkt $(0,1)$ (d.h. $a=1$). Er erwischt sie offensichtlich, aber wo? An welchen Stellen musste er besonders wendig sein – oder anders gefragt – wo war die Gefahr des Ausrutschens am grössten? Hätte er sein Opfer auch erwischt, wenn er nur ein bisschen schneller gewesen wäre als dieses? Solchen Fragen wollen wir im nächsten Abschnitt nachgehen.

2.2.1 Eigenschaften der Verfolgung nach Bouguer

Zur Verfolgung nach Bouguer lassen sich viele interessante Fragen⁷ stellen, z.B.

- Wie gross sind unter gewissen Bedingungen die Weglängen von dem Verfolger und dem Flüchtenden sowie ihr Abstand?
- Unter welchen Umständen kann der Verfolger den Flüchtenden einholen (fangen, treffen); wo liegt gegebenenfalls der Treffpunkt und welches ist die Treffzeit?
- Wie sieht das Krümmungsverhalten der Verfolgungskurve aus?

⁵ Die Plotbefehle sind im Anhang A7 angegeben.

⁶ Die Koordinatenachsen sind vertauscht; es wollte leider nicht gelingen, sie in der üblichen Lage zu plazieren.

⁷ Vgl. Bacon (1950) S. 1065f.

Die Antworten lassen sich auf zweierlei Arten finden: exakt mit Schulmathematik aus den höheren Stockwerken und *numerisch-graphisch* durch Simulation am Bildschirm, wobei für den Schüler erst die zweite Methode Leben und Bewegung im wörtlichen und übertragenen Sinne in die Sache zu bringen vermag. Im übrigen bietet sich hier meines Erachtens eine günstige Gelegenheit zum Methodenvergleich.

Vorgängig muss ich in diesem Zusammenhang auf ein paar formale und didaktische Schwierigkeiten hinweisen und andeuten, wie ich sie zu lösen versucht habe.

Beim obigen Fragenkatalog muss beachtet werden, dass bei der Beantwortung von fast jeder Frage bis zu drei Fälle bezüglich k zu unterscheiden sind. Eine mit Text durchsetzte, formelmässig lückenlose Darlegung wäre somit sehr aufwendig und muss hier aus Platzgründen unterbleiben. Mit der Angabe der Schlüsselstellen zu den in knapper Form dargestellten mathematischen Antworten - sei es im Textteil oder im Anhang - ist dem Leser wohl soweit gedient, dass er mühelos selbst die Überlegungskette vervollständigen kann.

In der Formel für die Bogenlänge tritt beim Gebrauch kartesischer Koordinaten üblicherweise $y' = \frac{dy}{dx}$ und bei Krümmung und Krümmungsradius zusätz-

lich $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ auf. Nun erweist sich hier die Berechnung von Bogenlänge und

Krümmung mit diesen Differentialquotienten als sehr widerspenstig! Diese Schwierigkeit wird in gewissen Aufsätzen dadurch umgangen, dass das Zielobjekt auf der y -Achse flieht und der Verfolger auf der x -Achse startet. Von der theoretischen Seite her gesehen steht dem überhaupt nichts im Wege, wohl aber von der praktischen: Der Verfolgungsprozess, der sich meistens in die Richtung des Flüchtenden dahinzieht, fügt sich bei der von mir gewählten Konfiguration besser in meinen querformatigen Bildschirm. Wir betrachten daher mittelfristig y als unabhängige und x als abhängige Variable und

gelangen so mit $q' = \frac{dx}{dy}$ und $q'' = \frac{d^2x}{dy^2}$ klippenfrei zum Ziel. Man könnte natürlich schon zu Beginn mit dieser Betrachtungsweise arbeiten, aber dann wäre der Schüler nebst anderen Schwierigkeiten gleichzeitig auch noch mit dieser Umstellung konfrontiert, was ihm erspart werden mag.

Nach dieser Anmerkung kommen wir zur entsprechenden Beantwortung obiger Fragen. Es gelten weiterhin die bei der Herleitung der Gleichung der *Hundekurve* gewählten Bezeichnungen und Anfangsbedingungen.

1. Treffpunkt von Zielobjekt und Verfolger

Der Verfolger komme der Fluchtgeraden beliebig nahe; uns interessiert seine Lage im Vergleich zu jener des Zielobjektes. In (4) (Gleichung der *Hundekurve*) bilden wir den folgenden Grenzübergang

für $k > 1$: $x_T = \lim_{y \downarrow 0} \left(\frac{ky}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k-1} \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) + \frac{ka}{k^2-1} \right)$, d.h.

$$x_T = \frac{ka}{k^2-1}. \quad (6)$$

Bei der nachstehenden Abstandsprüfung wird sich herausstellen, dass die Distanz zwischen Zielobjekt und Verfolger null ist, sofern es sich bei x_T um die (endliche) Treffstelle der beiden handelt.

für $k \leq 1$: Divergenz, da $x \rightarrow \infty$ für $y \downarrow 0$. Damit steht fest, dass der Verfolger das Zielobjekt im Endlichen nicht einholt; mehr über die gegenseitige Lage der beiden erfahren wir ebenfalls bei der nachstehenden Abstandsuntersuchung.

2. Treff- oder Fangzeit von Zielobjekt und Verfolger

Sei $k > 1$, d.h. $v > u$. Genau dann holt der Verfolger das Zielobjekt im Endlichen ein, und die Treffzeit t_T berechnet sich ganz einfach so:

$$t_T = \frac{x_T}{u}, \text{ und wegen (6) gilt: } t_T = \frac{av}{v^2-u^2}. \quad (7)$$

3. Weglängen von Zielobjekt und Verfolger

In $Z(x_z, 0)$ hat das Zielobjekt den Weg x_z zurückgelegt.

Aus Gleichung (1) ergibt sich für die entsprechende Bogenlänge des Verfolgers der Wert $s = k \cdot x_z$.

Wir können s auch in Abhängigkeit der Position $V(x, y)$ des Verfolgers berechnen; aus dem Anhang A2 entnehmen wir für das Bogenelement

$$ds = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) dy. \quad (8)$$

Falls $k \neq 1$: Wir integrieren (8); im Startpunkt ist $y=a$ und $s=0$; daraus ergibt sich die Integrationskonstante zu $-\frac{k^2 a}{k^2-1}$ und somit

$$s(y) = \frac{ky}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k-1} \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) - \frac{k^2 a}{k^2-1}. \quad (9.1)$$

Falls $k=1$: (8) vereinfacht sich zu $ds = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{a} + \frac{a}{y} \right) dy$; bei analogem Vorgehen wie oben erhalten wir

$$s(y) = \frac{1}{4a} \left(y^2 - a^2 \left(2 \ln \left(\frac{y}{a} \right) + 1 \right) \right). \quad (9.2)$$

Im Grenzfall liefern uns (9.1) bzw. (9.2)

bei $k > 1$: $s = \lim_{y \downarrow 0} s(y) = k \cdot \frac{ka}{k^2 - 1}$, d.h. wegen (6) $s = k \cdot x_T$,
im Einklang mit der in (1) ausgedrückten
Grundeigenschaft;
bei $k \leq 1$: Divergenz, da $x \rightarrow \infty$ für $y \downarrow 0$.

4. Abstand Verfolger-Zielobjekt d_{vz}

Das Zielobjekt befinde sich in $(x_z, 0)$, der Verfolger in (x, y) . Nach Pythagoras gilt

$$d_{vz}^2 = (x_z - x)^2 + y^2 = y^2 \left(1 + \left(\frac{x - x_z}{y} \right)^2 \right);$$

in Kombination mit der Kehrform von (2) wird

$$d_{vz}^2 = y^2 \left(1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right).$$

Wir ersetzen den Differentialquotient durch den äquivalenten Term gemäss Formel (A2.1) im Anhang A2 und erhalten nach einer kleinen Umformung

$$d_{vz}^2 = \frac{y^2}{4} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right)^2 \quad \text{bzw.} \\ d_{vz} = \frac{y}{2} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right). \quad (10)$$

Uns interessiert vor allem der Grenzwert von d_{vz} bei $y \downarrow 0$. Seine Berechnung verlangt die folgende dreifache Fallunterscheidung bezüglich k .

$k < 1$: d_{vz} divergiert erwartungsgemäss gegen ∞ für $y \downarrow 0$; das Zielobjekt eilt dem langsameren Verfolger davon.

$k = 1$: $d = \lim_{y \downarrow 0} d_{vz}(y) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{y}{2} \left(\left(\frac{y}{a} \right) + \left(\frac{y}{a} \right)^{-1} \right) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{y^2 + a}{2a}$, also $d = \frac{a}{2}$.

Bei gleichen Geschwindigkeiten kommt der Verfolger im Unendlichen schliesslich bis an die halbe Startdistanz a an das Zielobjekt heran.⁸

⁸ Vgl. Steinhaus (1964) S. 166f. (Aufgabe 88). Dieses Ergebnis wird dort elementargeometrisch gewonnen.

k>1: Eine kleine Umformung von (10) liefert

$$d_{vz} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{k}} \left(a^{-\frac{2}{k}} y^{1+\frac{1}{k}} + y^{1-\frac{1}{k}} \right); \text{ wegen } 1-\frac{1}{k} > 0 \text{ ergibt sich}$$

$\lim_{y \downarrow 0} d_{vz}(y) = 0$; das bedeutet unter Berücksichtigung der obigen Resultate, dass der an Geschwindigkeit überlegene Verfolger das Zielobjekt im Endlichen trifft (einholt).

5. Krümmungsverhalten der 'Hundekurve'

Nach der Formel (A2.5) im Anhang A2 gilt für den Krümmungsradius R :

$$R(y) = \frac{kY}{4} \left(\left(\frac{Y}{a} \right)^{\frac{2}{k}} + \left(\frac{Y}{a} \right)^{-\frac{2}{k}} + 2 \right); \quad (11.1)$$

und auf unsere Bedürfnisse angepasst geschrieben:

$$R(y) = \frac{k}{4} \left(\left(\frac{Y}{a} \right)^{\frac{k+2}{k}} + 2y + a^{\frac{2}{k}} y^{\frac{k-2}{k}} \right). \quad (11.2)$$

Der hinterste Exponent zwingt uns für die weitere Behandlung zu folgender Fallunterscheidung:

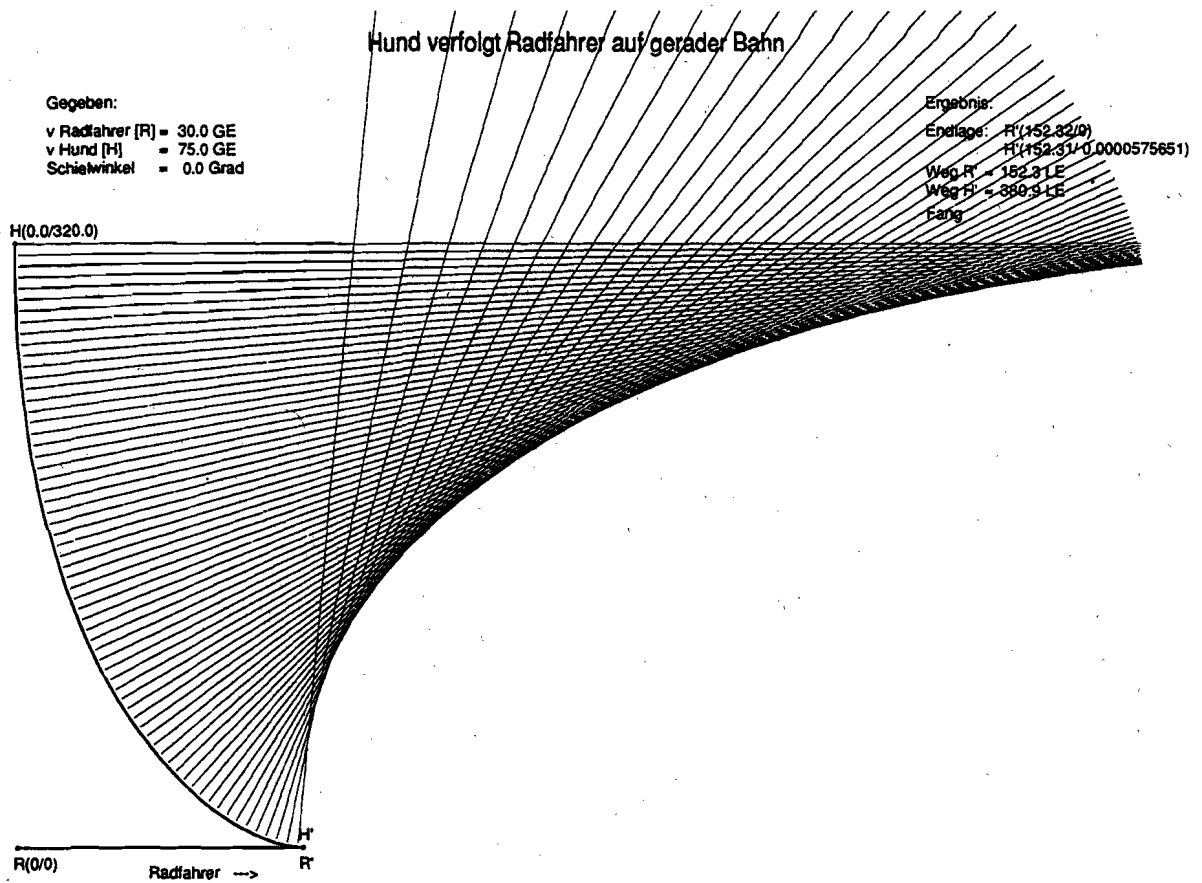
k>2: $R_T = \lim_{y \downarrow 0} R(y) = 0$; d.h., die Verfolgungskurve hat im Treffpunkt T den Krümmungsradius null, und daher ist dort die Krümmung unendlich: $K_T = \infty$ (siehe TG 2.1).⁹

k=2: (11.2) vereinfacht sich zu $R(y) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{Y}{a} \right)^2 + 2y + a \right)$; wir bekommen $R_T = \lim_{y \downarrow 0} R(y) = \frac{a}{2}$, und somit ist die Krümmung $K_T = \frac{2}{a}$ (siehe TG 2.2).

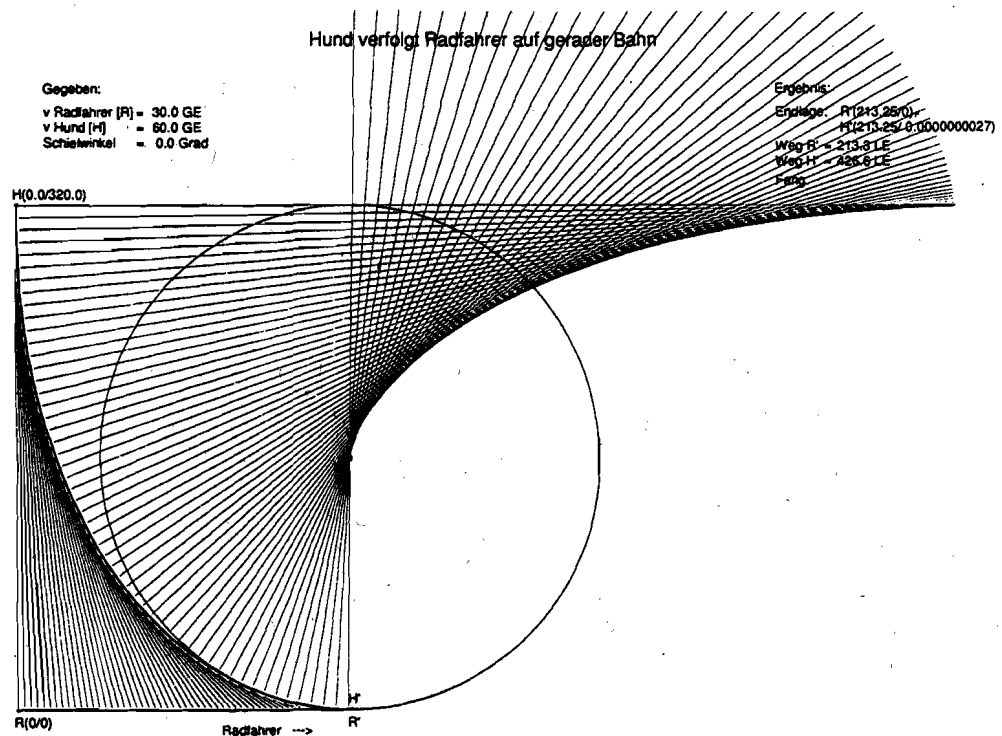
k<2: Der Krümmungsradius divergiert gemäss (11.2) bei $y \downarrow 0$ gegen ∞ , und es gilt daher für die Krümmung $K = 0$ (siehe TG 2.3).

Dieses Krümmungsverhalten überrascht: Das Einlenken des Verfolgers in die Fluchtgerade (mit der Krümmung null) verläuft nur im Falle $k < 2$ stetig, sonst unstetig, im Fall $k > 2$ sogar mit einem Unendlichkeitsprung. In den Graphiken TG 2.1-3 vermittelt die **Evolute** zur jeweiligen Hundekurve deren Krümmungsverhalten; die Evolute, Trägerin der Krümmungsmittelpunkte, ist als Einhüllende der Kurvennormalen gezeichnet.

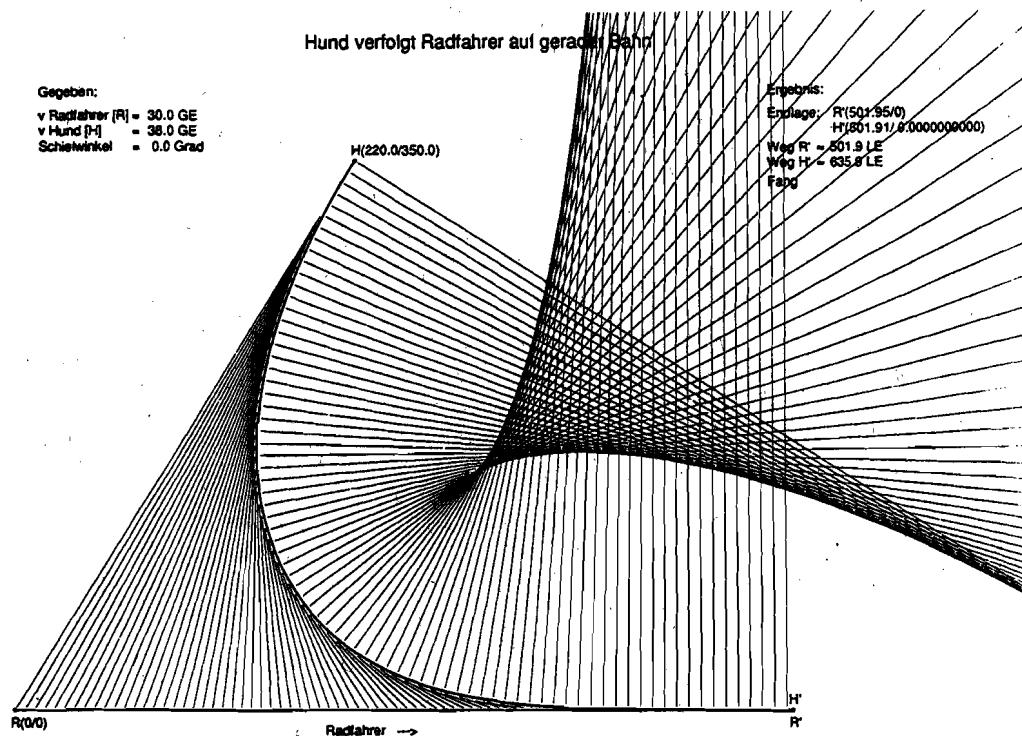
⁹ Über eine praktische Bedeutung siehe Abschnitt 4.3.



TG 2.1. Hundekurve mit Kurvennormalen und Evolute; $a = 320$, $k = 2,5$



TG 2.2. Hundekurve mit Visierlinien, Kurvennormalen, Evolute und Krümmungskreis; $a = 320$, $k = 2$



TG 2.3. Hundekurve mit Visierlinien, Kurvennormalen und Evolute; $a \approx 167$, $k \approx 1,27$

In den Abbildungen 2.3–5 sind die den Graphiken TG 2.1–3 entsprechenden Krümmungsradius-Funktionen $R(y)$ gemäss der Zuordnungsvorschrift (11.1) geplottet. Der Leser ist eingeladen, die Beziehungen innerhalb der drei Bildpaare zu beschreiben und daraus ergänzende qualitative und quantitative Aussagen abzuleiten.¹⁰

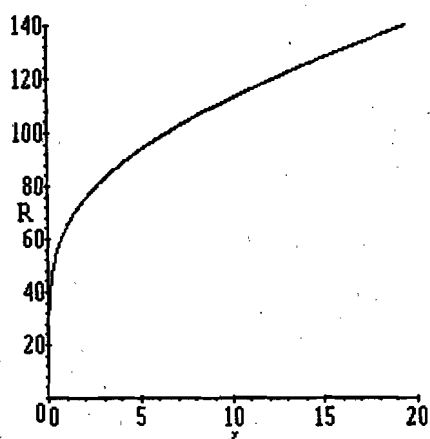


Abb. 2.3

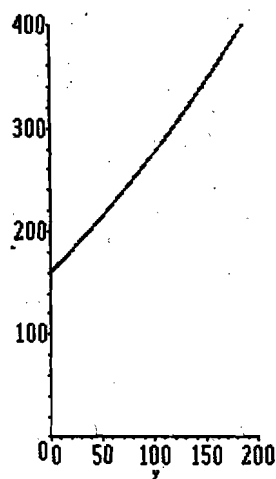


Abb. 2.4

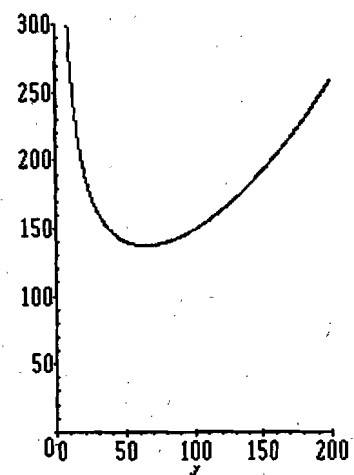


Abb. 2.5

Graphen der Krümmungsradius-Funktion nach (11.1) mit $(a, k) = (320; 2, 5)$, $(320; 2)$, $(167; 1, 27)$.

¹⁰ Siehe Aufgabe 2.3.

Aufgaben¹¹

- 2.1 Diskutiere die Gleichung (5) der Hundekurve für $a=1$ und $k=2$.¹² Verschiebe zu diesem Zweck den Kurvenscheitel in den Koordinatenursprung (Abb. 2.6). Bestimme den Scheitelkrümmungskreis und den Inhalt der vom Graph eingeschlossenen Fläche. Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurvenäste? Deute den neu hinzugekommenen Kurvenast.

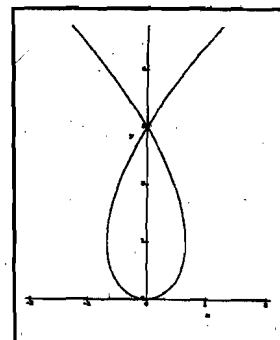


Abb. 2.6

- 2.2 Ein Zielobjekt flüchte mit der Geschwindigkeit u vom Nullpunkt aus in positiver Richtung der y -Achse. Sein Verfolger starte im Punkt $P_0(a/0)$, $a>0$, und bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf den Flüchtenden zu. Leite die Gleichung der Verfolgungskurve her.
- 2.3 Interpretiere anhand der Turtlegraphiken TG 2.1-3 und der entsprechenden Abbildungen 2.3-5 das Krümmungsverhalten der jeweiligen Hundekurve. In welchem Punkt der Hundekurve in TG 2.3 ist die Krümmung am grössten, und wie gross ist sie dort? Ermittle die Werte zeichnerisch und numerisch und vergleiche sie.
- 2.4 Stelle die Abstandsfunktion d_{v_2} gemäss (10) graphisch dar. Wähle interessante Werte für k . Wo kommt der Verfolger seiner Beute beispielsweise bei $a=320$ und $k=0,8$ am nächsten?
- 2.5 Die der Hundekurve zugrundeliegende Verfolgungsstrategie ist taktisch schlecht. Entwickle beispielsweise für die Seefahrt bessere Strategien und berechne den für das Verfolgerschiff sich ergebenden Zeit- oder Energiegewinn.¹³

¹¹ Ein gutes halbes Dutzend elementar lösbarer Verfolgungsprobleme nennt und löst Steinhaus (1964) S. 40-42 bzw. S. 165-170.

¹² Besser bekannt als Tschirnhaus-Kubik; sie ist auch die Katakaustik einer quadratischen Parabel (siehe Anhang A3). Eine eingehende Diskussion der Hundekurve für verschiedene k findet sich in Luterbacher (1909) S. 18-55.

¹³ Zu Aufgaben dieser Art siehe Steinhaus (1978) S. 126-138 sowie Dörrie (1979) S. 434f.

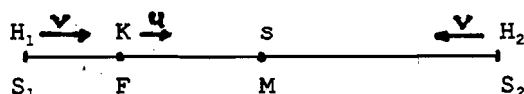
2.1.2 Kegelschnitte als Isochronen

Zu gewissen Jahreszeiten kann es vorkommen, dass gleichzeitig mehrere Kater einer einzigen Katze nachrennen. Wenn wir die Kater durch Hunde ersetzen – um dem Bild von Katz und Hund treu zu bleiben –, so stellt sich eine mathematisch reizvolle Frage:

Eine Katze renne geradlinig mit der Geschwindigkeit u von einem Punkt F zu einem schützenden Unterschlupf M . Es verfolgen sie eine Schar Hunde mit der Geschwindigkeit v ($>u$). Von welchen Punkten aus können die Hunde die Katze in M gerade noch erwischen, wenn sie diese frühestens in F wahrnehmen?¹⁴

Wir gewinnen auf die folgende Weise eine **Vermutung** über die Hülle des fraglichen Gebiets um M :

1. Betrachtung an der Achse (FM):



Die Hunde H_1 und H_2 sind zu Beginn der Verfolgung so positioniert, dass sie die Katze gleichzeitig in M erreichen. Wegen der Bedingungen der Aufgabe liegt M in der Mitte der Strecke $s=S_1S_2$, und F befindet sich $\frac{u}{v} \frac{s}{2}$ (LE) vor

M . Setzen wir wiederum $k=\frac{v}{u}$, so misst die Strecke $FM = \frac{1}{k} \frac{s}{2}$.

Hunde, die nicht auf der Strecke s starten, müssen **symmetrisch** um diese positioniert sein.

2. Turtlegraphisches Experiment am Bildschirm:

Wir setzen die Katze in den Punkt M und in geeigneter, hinreichender Nähe davon ein paar Hunde. Nun drehen wir den Spiess um: Die Katze renne mit der Geschwindigkeit u von M nach F , und die Hunde flüchten vor ihr mit der Geschwindigkeit v . Die Beobachtung weckt jene Vermutung, die wir nachstehend als Behauptung zu formulieren wagen.

Unter den Voraussetzungen der obigen Frage gilt die

Behauptung:

Die gesuchte Punktmenge wird von der Ellipse mit dem Mittelpunkt M und F als einem ihrer Brennpunkte eingehüllt.¹⁵

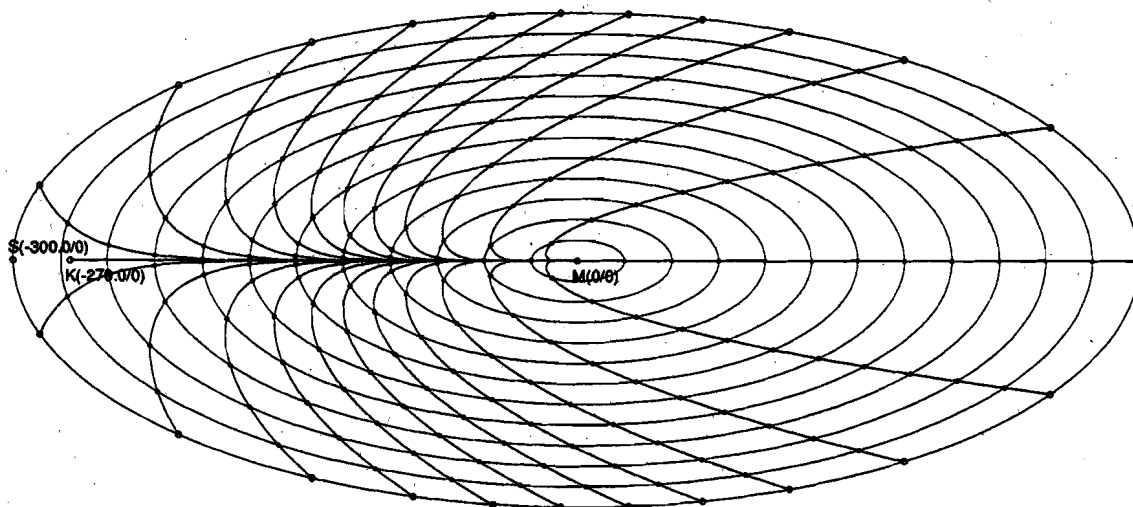
Mit anderen Worten: Alle Hunde, die mit gleicher Geschwindigkeit dieselbe an Schnelligkeit unterlegene Katze verfolgen ($k>1$) und zur gleichen Zeit (isochron) und am gleichen Treffpunkt erwischen, sind in jedem Augenblick auf einer Ellipse, in deren einem

¹⁴ Die Geschöpfe seien (auch ihrem Schutz zuliebe!) masselose Punkte; verfolgt wird nach Strategie 1 (S. 10).

¹⁵ Der interessierte Leser findet den Beweis im Anhang A4.

Brennpunkt sich jeweils die Katze befindet. Es liegt also eine unendliche Schar von sog. Ellipsen-Isochronen mit dem Treffpunkt als gemeinsamem Mittelpunkt vor.

In der TG 2.4 sehen wir 13 solcher Isochronen mit den zugehörigen 24 Hundekurven.¹⁶ Die Bahnabschnitte zwischen zwei Isochronen sind erwartungsgemäss alle gleich lang. ($u=18$ GE, $v=20$ GE, somit $k=\frac{10}{9}$)



TG 2.4

Apollonius von Perga hätte wohl seine Freude an den Hundekurven gehabt, treten doch in ihrem Zusammenhang alle Kegelschnitte auf.¹⁷ Analog wie oben erhalten wir nämlich im Falle $k=1$ Parabel- und bei $k<1$ Hyperbel-Isochronen. In den Turtlegraphiken 2.5-8 sind diese zusammen mit den zugehörigen Hundekurven abgebildet. TG 2.6-7 zeigen im besonderen die parabel- bzw. hyperbelförmige Front der die Katze K verfolgenden Hunde.

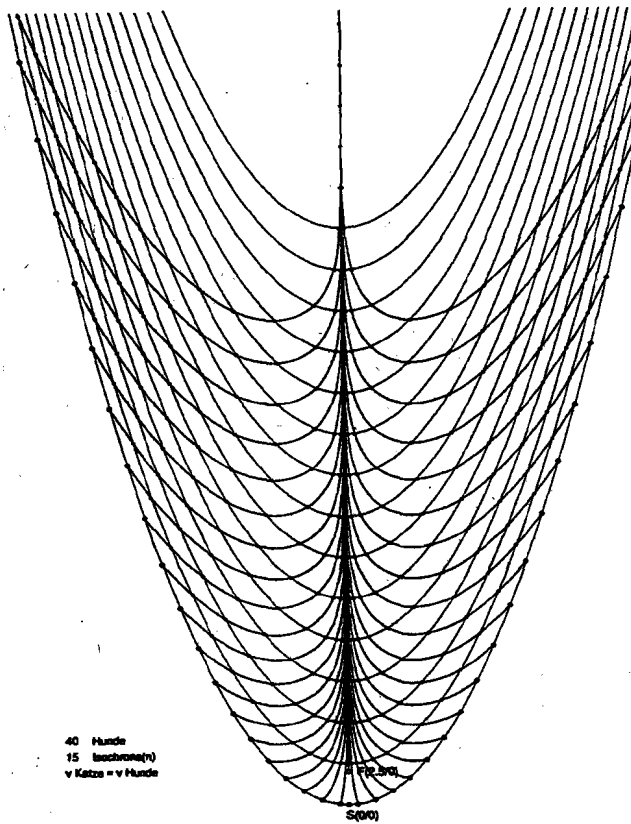
Aufgaben

- 2.6 Beweise, dass die Isochronen im Falle $k=1$ Parabeln und im Falle $k<1$ Hyperbeln sind. Schreibe ein Programm zur Simulation dieser Fälle am Bildschirm.

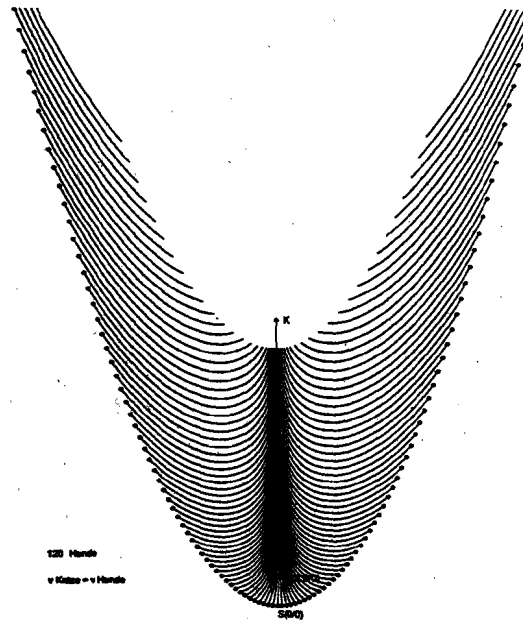
¹⁶ Wir zählen den Treffpunkt M als ausgeartete Ellipsenisochrone dazu.

¹⁷ Siehe dazu auch Anhang A3 sowie Aufgabe 2.1.

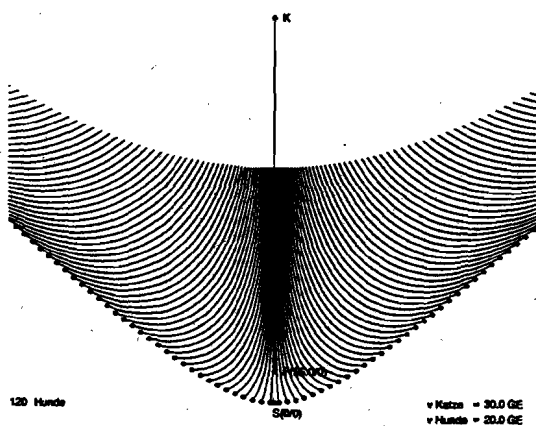
'Hundekurven', Parabel- und Hyperbel-Isochronen



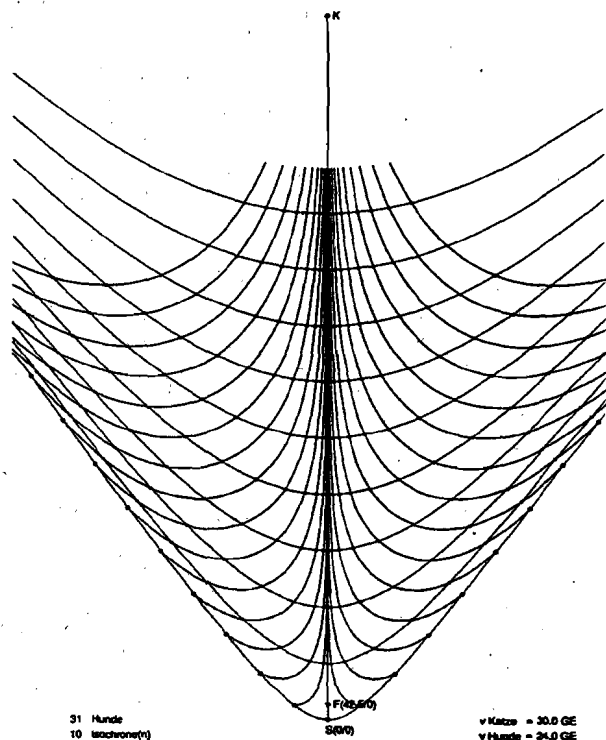
TG 2.5



TG 2.6



TG 2.7



TG 2.8

- 2.7 Stelle eine Beziehung her zwischen dem Geschwindigkeitsverhältnis k und der linearen Exzentrizität der Ellipsen-, Parabel- und Hyperbel-Isochronen. Was geschieht bei $k \downarrow 1$, $k \uparrow 1$, $k \rightarrow \infty$ mit den Isochronen?
- 2.8 Bestätige (wenigstens) durch Winkelmessung, dass es sich bei den Hundekurven um *isogonale Trajektorien* bezüglich der Isochronen handelt. (Miss zu diesem Zweck längs einer Bahn die Schnittwinkel zwischen ihr und den Isochronen.)
- 2.9 Beweise: Alle Hundekurven mit gleichem Geschwindigkeitsverhältnis k sind ähnlich. (Vgl. die Turtlegraphiken 2.4-5 und 2.8.)

2.1.3 Die 'Hundekurve' als isometrischer Streckenzug

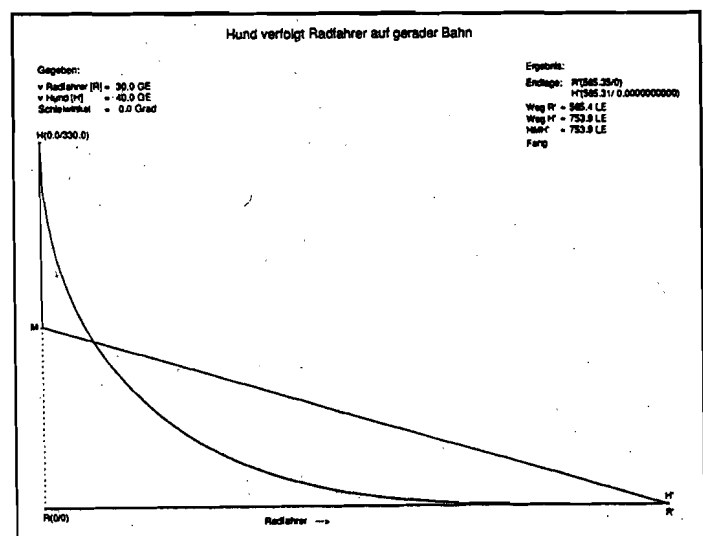
Der Versuch, gewisse Ergebnisse in Abschnitt 2.1.2 durch die Strategie des extremen Denkens plausibel zu machen, führt nach einer Phase des Spekulierens auf eine interessante Fährte bezüglich der Rektifikation der Hundekurve.

TG 2.9 lässt vermuten, dass die Längen des vom Hund zurückgelegten Kurvenbogens HH' ¹⁸ und des Streckenzuges HMH' numerisch übereinstimmen.

Nun zeigen wir, dass s und HMH' exakt gleich lang sind.

Voraussetzungsgemäss gilt: $k > 1$ (im Bild ist $k = 40/30$); $a = HR$ steht lotrecht zur TG 2.9.

Fluchtgerade; M ist der Mittelpunkt von HR . Die Länge der Strecke RH' hat nach Formel (6) den Wert $\frac{ka}{k^2-1}$. Für die Hypotenuse MH'



¹⁸ Mit dem Turtle-Hodometer gemessener Wert.

im rechtwinkligen Dreieck HRH' berechnen wir nach Pythagoras den Wert $\frac{a}{2} \frac{k^2+1}{k^2-1}$. Danach bekommen wir

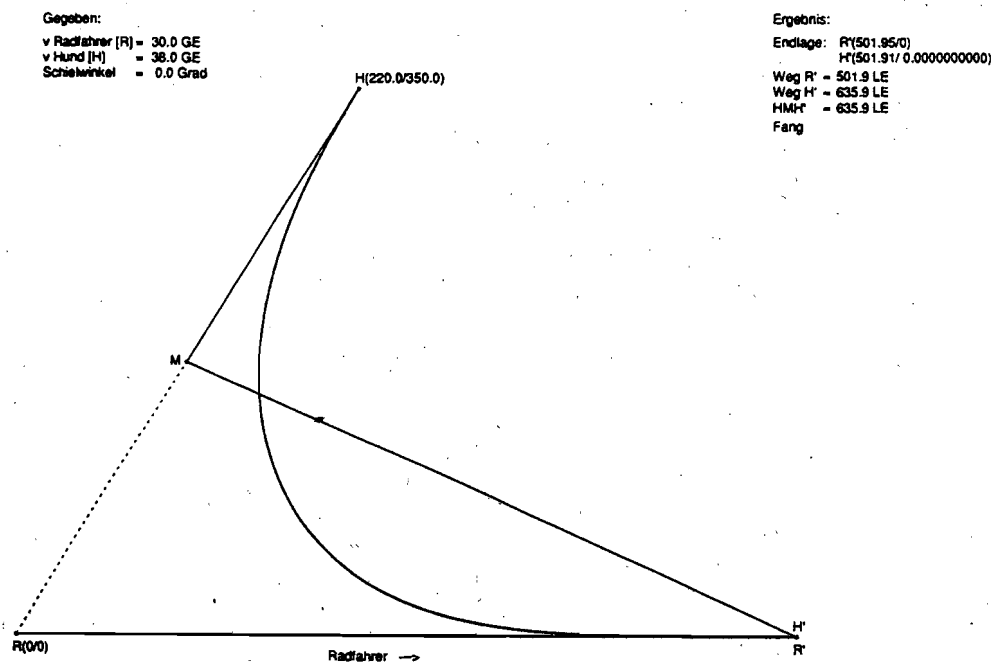
$HMH' = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \frac{k^2+1}{k^2-1}$ und nach Vereinfachung $HMH' = k \frac{ka}{k^2-1}$; im Bruchfaktor erkennen wir nach (6) die Treffstelle x_T von Radfahrer und Hund; sie hat nach (1) den Wert $\frac{1}{k}s$. Folglich erhalten wir $HMH'=s$, womit die Isometrie von Kurvenbogen und Streckenzug bewiesen ist.

Von hier ist es nur ein kleiner Schritt zum folgenden

Isometrie-Satz:

Ein geradeaus Flüchtender starte in R und sein Verfolger gleichzeitig in H ($\neq R$). Die Verfolgerbahn sei eine 'Hundekurve' mit $k>1$; M sei die Mitte des Tangentenabschnitts HR . Der Treffpunkt liege in H' . Dann gilt:

Der Kurvenbogen HH' ist gleich lang wie der aus HM und MH' zusammengesetzte Streckenzug.



TG 2.10. Hund verfolgt Radfahrer; Isometrie von Kurvenbogen HH' und Streckenzug HMH'

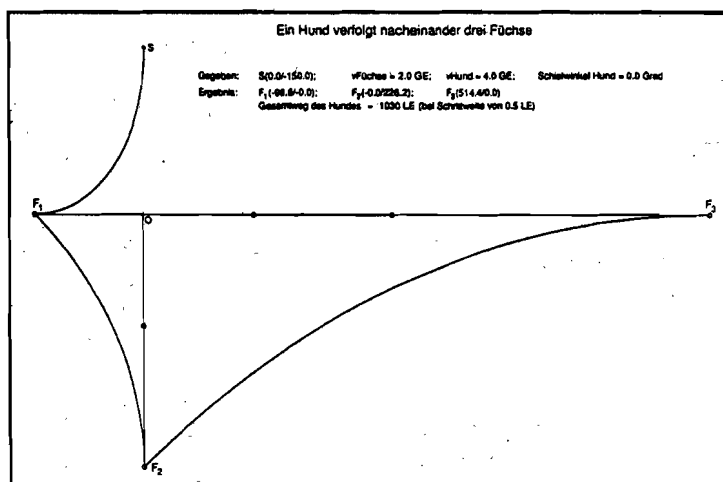
Der Beweis verläuft analog wie oben: MH' lässt sich mit dem Cosinussatz ausdrücken; mit $\phi := \angle(HRH')$, $q := HR$ und $e := RH'$ können wir auf einschlägige Formeln im Anhang A4 zugreifen. Für weitere Ausführungen vgl. Aufgabe 2.10.

Aufgaben

2.10 Beweise den Isometrie-Satz.¹⁹

2.11 Ein Habicht, ein Adler und ein Spatz sind in der Luft. Der Adler gleitet 50 Fuss über dem Spatz, der Habicht fliegt 100 Fuss unterhalb des Spatzes. Der Spatz fliegt geradeaus längs einer horizontalen Geraden. Der Habicht und der Adler fliegen beide auf den Spatz zu. Der Habicht fliegt doppelt so schnell wie der Spatz. Der Habicht und der Adler erreichen den Spatz zur selben Zeit. Wie weit fliegt jeder und mit welcher Geschwindigkeit fliegt der Adler?²⁰

2.12 Drei Füchse befinden sich im Punkt O und ein Hund im Punkt S, 150 Meter nördlich von O (TG 2.11). Sie starten alle gleichzeitig - die Füchse laufen mit derselben gleichförmigen Geschwindigkeit, und der Hund ist doppelt so flink. Der erste Fuchs läuft nach Westen, der zweite nach Süden und der dritte nach Osten. Der Hund rennt



TG 2.11

auf den ersten Fuchs zu und erwischt ihn in F_1 . Er verfolgt sofort den zweiten und erwischt ihn in F_2 ; dann verfolgt er den dritten Fuchs und erwischt ihn in F_3 . Wie weit muss der Hund rennen, um die drei Füchse zu fangen?²¹

¹⁹ Eine Beweisversion in knappen Zügen ist abgedruckt in Amer. Math. Monthly 47(1947)5. S. 320f. (E 387, Solution by Jack Lotsof).

²⁰ Vgl. die englische Originalaufgabe Nr. 3573 in Amer. Math. Monthly 39(1932) S. 549. Eine Lösung des Problems befindet sich in Amer. Math. Monthly 40(1933) S. 436f.

²¹ Vgl. die englische Originalaufgabe in Math. Monthly 2(1860) S. 413-415 (mit zwei Lösungen der Aufgabe).

2.1.4 Schwimmender Hund von Saint-Laurent und Sturm

1823 veröffentlichten Thomas de St-Laurent und der Genfer Ch. Sturm eine Lösung der folgenden

Kanalaufgabe: Ein Hund, der an einem gegebenen Punkt am Ufer eines geradlinigen Kanals konstanter Breite lauert, springt ins Wasser, um seinen Meister einzuholen, der sich an einem bestimmten Punkt am anderen Ufer befindet und mit konstanter Geschwindigkeit dem Ufer entlanggeht. Der Hund schwimmt mit stets gleicher Kraft auf seinen Herrn zu. Aber die Strömung des ihn mitziehenden Wassers lenkt ihn dauernd und gleichmässig von der gewollten Richtung ab. Gefragt wird nach der Kurve, die der Hund bei diesen verschiedenen Bedingungen auf der Oberfläche des Wassers beschreibt.²²

Hund verfolgt Meister auf geradlinigem Kanalufer

Geg.: $v_{\text{Meister}} [vM] = 3.0 \text{ GE}$;

$v_{\text{Hund}} [vH] = 6.0 \text{ GE}$;

$v_{\text{Wasser}} [vW] = -2.0 \text{ GE}$;

Schiefwinkel [Sw] = 30.0 Grad

Bahn1: ohne vW, Sw

M(195.7/ 0.0)
H(195.7/ -0.0)

Weg M = 196 LE
Weg H = 391 LE
Fang

Bahn2: mit vW, ohne Sw

M(421.1/ 0.0)
H(421.0/ 0.0)

Weg M = 421 LE
Weg H = 661 LE
Fang

Bahn3: ohne vW, mit Sw

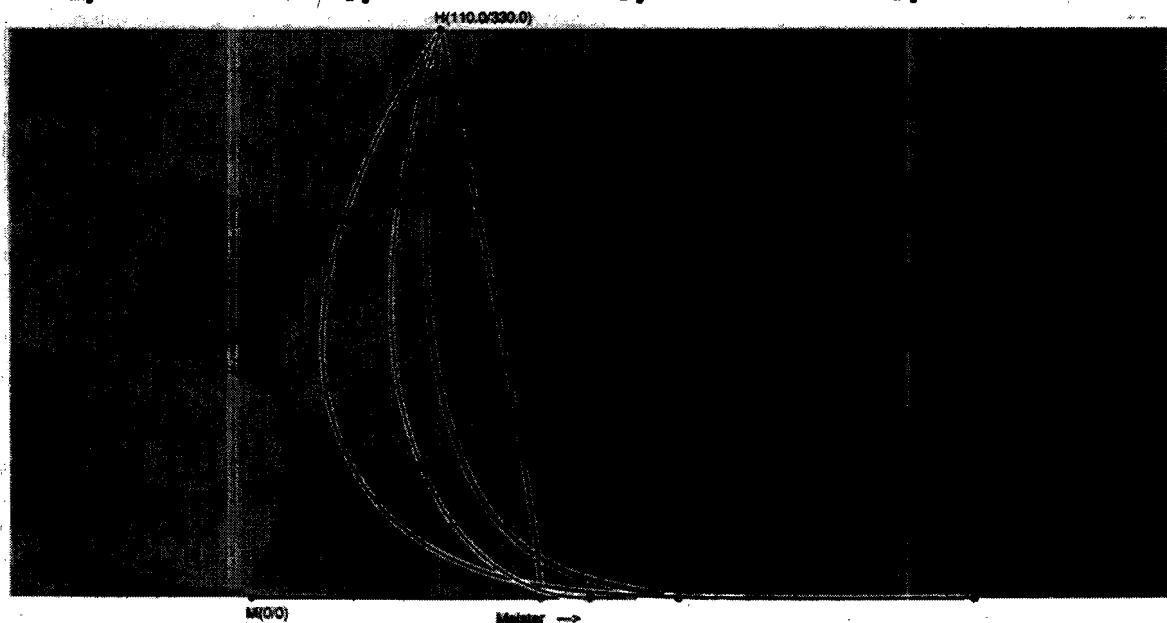
M(167.8/ 0.0)
H(167.6/ 0.0)

Weg M = 168 LE
Weg H = 335 LE
Fang

Bahn4: mit vW, Sw

M(248.0/ 0.0)
H(248.0/ 0.0)

Weg M = 248 LE
Weg H = 412 LE
Fang



TG 2.12

In der Turtlegraphik 2.12 ist der Kanal grau unterlegt dargestellt; die beiden Pfeile zeigen die Strömungsrichtung des Wassers an. Der Hund startet im

²² Annales de Mathématiques pures et appliquées 13(1823)9. S. 289. (Samt einer Lösung der Aufgabe, S. 289-303). Die Aufgabe ist von mir aus dem Französischen übersetzt worden.

Punkt H, der Meister in M. Wir haben die *Kanalaufgabe* mit zusätzlichen Bedingungen erweitert und, zu Vergleichszwecken, die jeweilige Verfolgungskurve gezeichnet (Bahn 1-4). Genaue Angaben bezüglich der Geschwindigkeiten, des Schielwinkels, der Flussbreite usw. können direkt oder indirekt aus dem Bild oder seiner Legende entnommen werden. Dort finden sich auch zu jeder der 4 Bahnen die numerisch gewonnen Koordinaten des Treffpunktes sowie die entsprechenden Bahnlängen von Meister und Hund.

- Bahn 1: Fliessgeschwindigkeit $[vW]$ und Schielwinkel $[Sw]$ gleich null; identisch mit Bouguers Verfolgungsproblem.
- Bahn 2: Bedingungen der *Kanalaufgabe*; zur Bewegung des Verfolgers nach Bouguer tritt zusätzlich eine durch die Fliessgeschwindigkeit des Wassers bestimmte Translation.
- Bahn 3: $vW=0$; Verfolgungsstrategie 3 bei $Sw=30^\circ$.
- Bahn 4: $vW=-2$; Verfolgungsstrategie 3 bei $Sw=30^\circ$.

Drei Monate nach Veröffentlichung der oben erwähnten Lösung der *Kanalaufgabe* hat Querret diese in einfacher Weise auf das Verfolgungsproblem von Bouguer zurückgeführt, so dass auch Bahn 2 eine *Hundekurve* ist.²³ Die Eigenschaft, *Hundekurve* zu sein, erweist sich als *translationsinvariant*.

Aufgaben

2.13 Simuliere die erweiterte *Kanalaufgabe* anhand eines selbstgeschriebenen Programmes am Bildschirm. Variiere die Ausgangsbedingungen, vergleiche die Ergebnisse und interpretiere sie.

2.14 Löse die *Kanalaufgabe* analytisch.

2.15 "A dog directly opposite his master on the banks of a stream, flowing with uniform speed, swims at a still-water speed of two miles per hour heading directly towards his master at all times. The man notes that the dog does not stop drifting down stream until he is two-thirds across measured perpendicularly to the banks, and that it takes five minutes longer to make the trip than if the water had been still. How wide is the stream?"²⁴

²³ Annales de Mathématiques pures et appliquées 13(1823)12. S. 391f.

²⁴ Aufgabe Nr. 3690 (J.B. Reynolds). In: Amer. Math. Monthly 64(1957)2. S. 22.

2.2 Maupertuis' Verallgemeinerung der Hundekurve

Einige Tage nach Bouguers Vortrag seiner Abhandlung über das der Hundekurve zugrundeliegende Verfolgungsproblem (S. 14) ersann Maupertuis eine Lösung "assés courte du même problème".²⁵ Diese Bemerkung mag ein Licht werfen auf die damalige Aktualität des Themas. Wichtig für dessen weitere Entwicklung ist jedoch der Umstand, dass Maupertuis seiner Lösung ein anderes Verfolgungsproblem hinzufügte, in dem – im Unterschied zu Bouguer – die Fluchtlinie nicht bloss eine Gerade, sondern eine beliebige Kurve sein kann.²⁶

Ab jetzt konnte das Zielobjekt auf einem der Kegelschnitte – um ein paar harmlose Kurvenbeispiele zu nennen – flüchten. Die Hundekurve nach Bouguer wurde zu einem Spezialfall der **allgemeinen Hundekurve** nach Maupertuis. So klein der Schritt zu dieser Verallgemeinerung sein mochte, so gross war (und bleibt) deren mathematische Herausforderung. Schon im einfachen Falle des Kreises als Fluchtlinie gelangt Loria zur Beschreibung der entsprechenden Verfolgungskurve auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die "jedoch noch nicht integriert worden" ist.²⁷

Maupertuis' Sympathie für Verfolgungsprobleme hat vielleicht mit ein paar Ähnlichkeiten zwischen seiner und Bouguers Biographie zu tun.

PIERRE LOUIS MOREAU DE MAUPERTUIS (1698–1759)

franz. Naturforscher, Mathematiker und Philosoph
geboren am 28. September 1698 in Saint-Malo
gestorben am 27. Juli 1759 in Basel

Maupertuis war Mitglied der Pariser Académie des Sciences, in deren Auftrag er 1736/37 eine Forschungsreise nach Lappland unternahm, auf der er durch Gradmessung Newtons Theorie von der Abplattung der Erde an den Polen bestätigen konnte. 1746–56 war er, der "aplatisseur de la terre", Präsident der Akademie der Wissenschaften in Berlin und folglich Vorgesetzter von Leonhard Euler. Sein Prinzip der kleinsten Aktion (1744) als einer Art Weltformel bescherte ihm Streitigkeiten und Spott, so dass er sich 1756 verbittert aus dem öffentlichen Leben zurückzog.²⁸

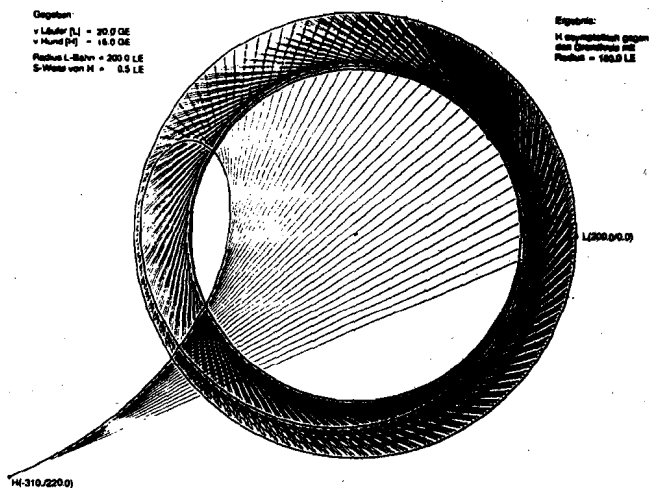
²⁵ Maupertuis (1732) S. 15.

²⁶ "Je vais chercher les courbes que doit décrire un Vaisseau pour en poursuivre un autre qui fuit par quelque courbe donnée que ce soit [...]." (1732) S. 15f.

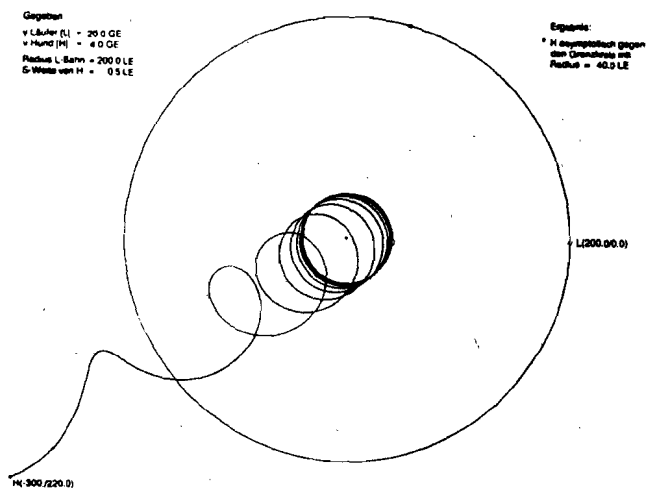
²⁷ Loria (1902) S. 610.

²⁸ Vgl. Emil A. Fellmann: Leonhard Euler. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch 1995. S. 75–84. – Rüdiger Thiele: Leonhard Euler. Leipzig: BSB G.G. Teubner 1982. S. 69–87.

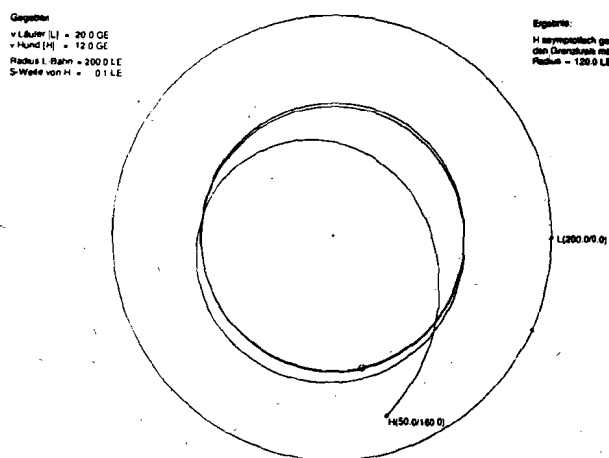
Hund verfolgt Läufer auf Kreisbahn



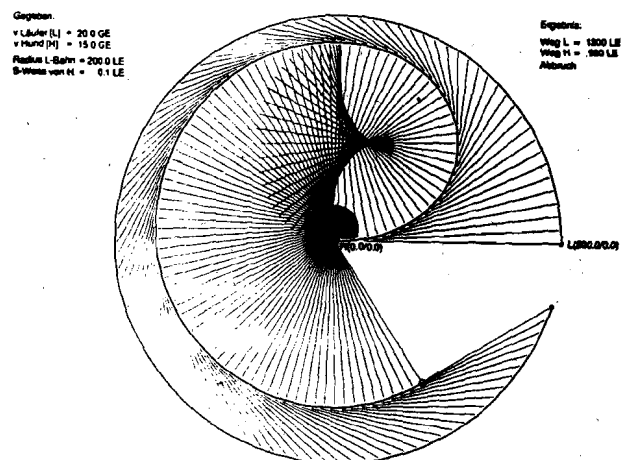
TG 2.13



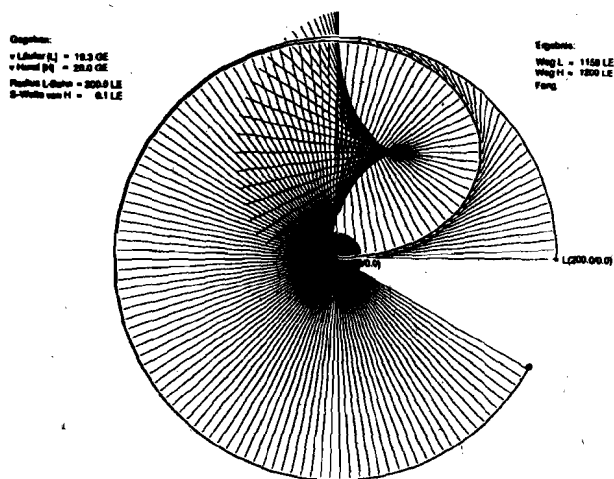
TG 2.14



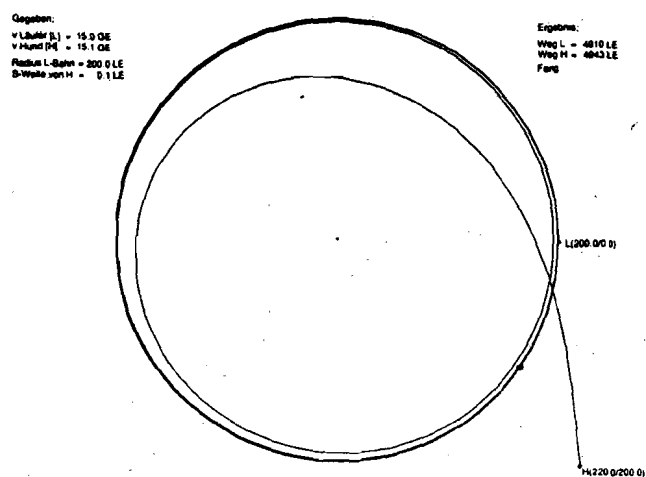
TG 2.15



TG 2.16



TG 2.17



TG 2.18

2.2.1 Flucht auf dem Kreis

Maupertuis veranlasst uns zu einem kleinen Szenenwechsel, bei dem wir es wieder mit zwei Darstellern zu tun haben, nämlich einem Läufer, der auf einer kreisförmigen Finnenbahn (Radius $R = 200$ LE) im Gegenurzeigersinn seine Trainingsrunden absolviert und dabei von einem Hund nach gewohnter Hundemania (Verfolgungsstrategie 1) verfolgt wird (TG 2.13-18). Der Läufer startet in jedem Bild im Punkt L und joggt, wie sein im Punkt H losrennender Verfolger, mit konstanter (skalärer) Geschwindigkeit.²⁹ In den Graphiken 2.13, 14 und 18 kommt der Hund von aussen gerannt, in TG 2.15-17 von innen, in TG 2.16-17 speziell vom Kreisbahnmittelpunkt. In TG 2.13, 16 und 17 sind (in zeitlich konstanten Abständen) Visierlinien des Hundes eingezeichnet; in TG 2.16-17 sind zusätzlich die Normalen zur Verfolgerkurve, welche die Evolute erzeugen, gezeichnet. Der Leser möge unter Beachtung der jeweiligen Bildlegende diese Graphiken studieren, um daraus Vermutungen und Erkenntnisse zu gewinnen.

Wir bezeichnen mit k wieder das Verhältnis der Geschwindigkeiten von Verfolger und Verfolgtem und nennen in diesem Zusammenhang ein paar Ergebnisse aus der Theorie der Kreisverfolgung:

- $k < 1$:** Der Verfolger kann den Flüchtenden nicht einholen. Die Verfolgungskurve geht in den zum Fluchtkreis konzentrischen Grenzkreis oder Grenzzyklus³⁰ mit Radius $r = k \cdot R$ über; die Annäherung des Verfolgers an den Grenzkreis erfolgt asymptotisch.
- $k = 1$:** $r = R$, d.h. der Grenzkreis und der Fluchtkreis decken sich.
- $k > 1$:** Der Flüchtende wird vom Verfolger (in endlicher Zeit) eingeholt.

²⁹ Es kommt auch hier – wie früher – nicht auf die Konstanz der Geschwindigkeiten von Flüchtendem und Verfolger an, sondern nur auf die Konstanz des Geschwindigkeitsverhältnisses.

³⁰ "This example thus presents us with a phenomenon, which is often present in nonlinear systems, namely, that of a fixed curve toward which the motion tends asymptotically. To such a curve Poincaré gave the name of *limit cycle*." Davis (1962) S. 123.

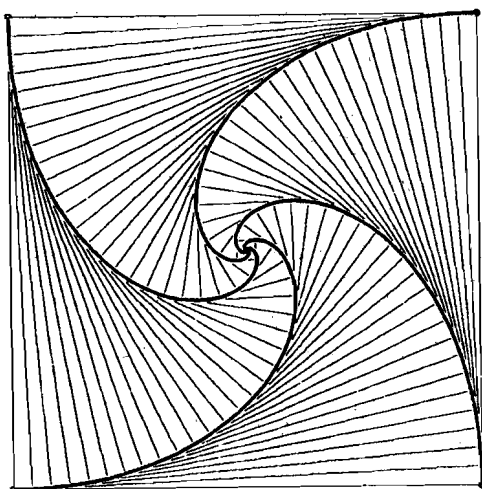
Die analytische Behandlung der Kreisverfolgung ist nach meiner Einschätzung zu schwierig für die gymnasiale Stufe. Ich verzichte daher auf eingehendere Theorie und verweise den Leser auf weiterführendes Schrifttum im Literaturverzeichnis.

2.2.2 Käfer verfolgen Käfer

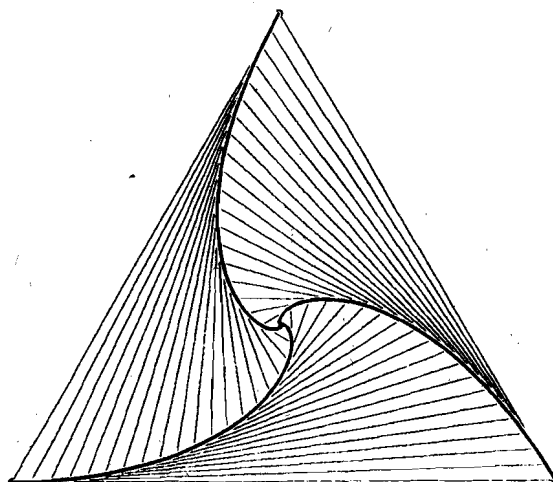
Ein Aufsatz über Verfolgungsprobleme darf sich nicht über das sogenannte *Käferproblem* ausschweigen, das sich folgendermassen beschreiben lässt:

n Käfer starten in den n Ecken eines regulären Polygons und verfolgen einander in zyklischer Reihenfolge (im oder gegen den Uhrzeigersinn) mit gleicher konstanter Geschwindigkeit.

Gefragt sind die Form, die Länge und die Krümmung der Verfolgungskurve, der augenblickliche Abstand der Käfer während der Verfolgung usw.



TG 2.19



TG 2.20

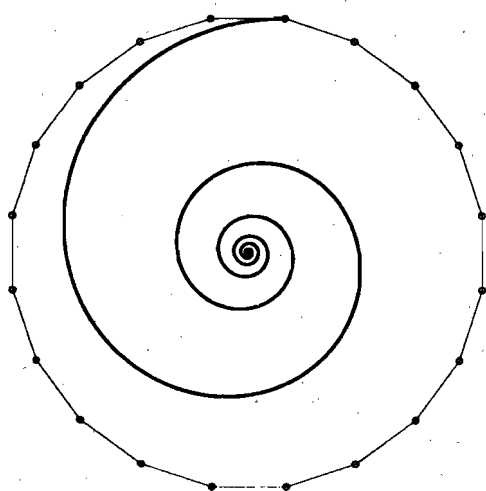
Die Mathematiker Brocard, Lucas, Gardner, Steinhaus und viele andere haben sich mit diesem Problem beschäftigt und ihre Lieblingstiere – meistens Käfer, aber auch Hunde oder "verliebte Mäuse" – ins Rennen geschickt.³¹ Es ist ein dankbares Thema für den Unterricht, weil viel beziehungshaltige Mathematik anfällt

³¹ Brocard/Lucas (1877) S. 280. – Gardner (1959) S. 113. – Steinhaus (1964) S. 40. – Hainer/Stein (1974) S. 33f. – Abelson/diSessa (1986) S. 72–76.

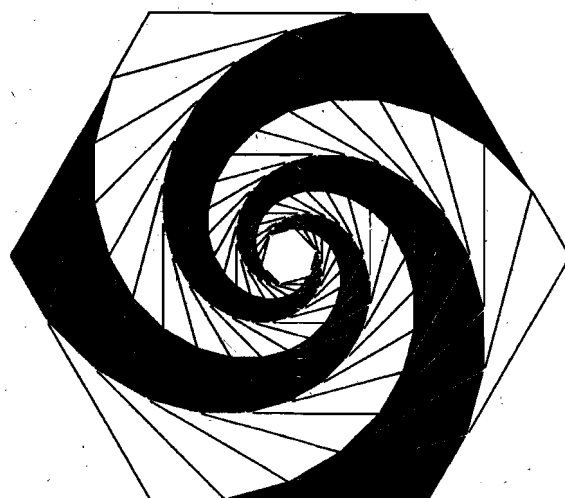
wie Trigonometrie, komplexe Zahlen, Reihen, Rekursion, vollständige Induktion, Grenzwerte, Bernoullische Ungleichung, Rektifikation, Krümmung, Quadratur und logarithmische Spirale. Letztere ist für sich allein schon ein schier unergründlicher Unterrichtsgegenstand. Man kann zudem den Spieltrieb etwas ausleben und die ästhetische Seite der Mathematik genießen.³² In den letzten Jahren sind einige sehr leserswerte Aufsätze dazu erschienen, insgesamt so umfassend – auch bezüglich des Aufgabenmaterials –, dass wir uns hier mit ein paar wenigen, vorwiegend graphischen Ergänzungen begnügen dürfen.³³

1. Käfer auf logarithmischen Spiralen

Brocard weist in faszinierender Weise – ohne Rechnung – nach, dass die Verfolgungs- und Fluchtkurven der Käfer **logarithmische Spiralen** mit dem Polygonzentrum als Pol sind (TG 2.19–2.23). In den Turtlegraphiken 2.19–20 sind zusätzlich Visierlinien der Käfer eingezeichnet.



TG 2.21

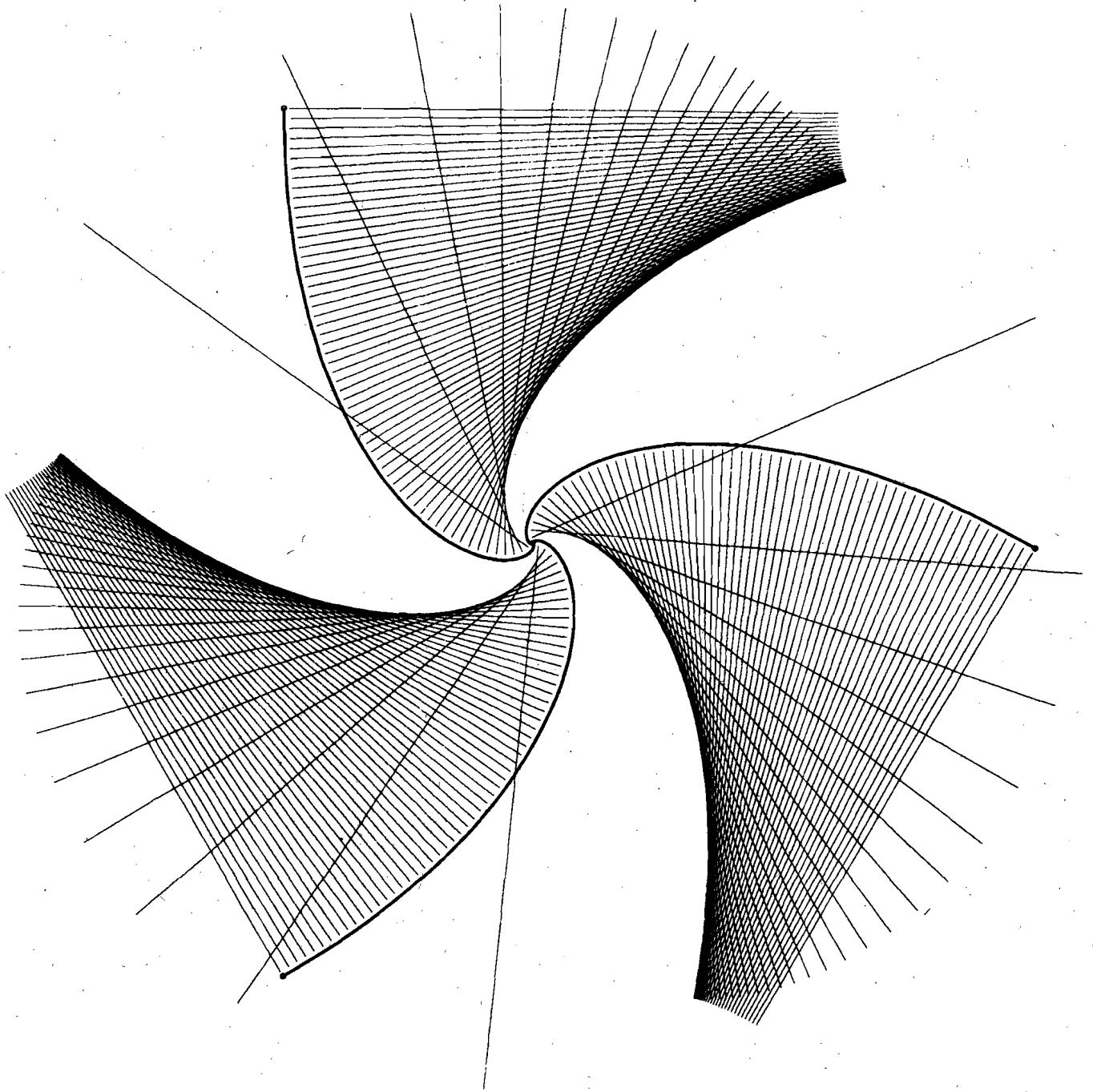


TG 2.22

TG 2.21 zeigt die Verfolgung am regulären 20-Eck mit einer der 20 logarithmischen Kurven. In TG 2.23 ist die Verfolgung im gleichseitigen Dreieck dargestellt.

³² Vgl. Rutherford, Boyd: *Mathematical ideas in design*. In: *Scripta Mathematica* 14 (1948) S. 128–35.

³³ Bikner (1985) S. 385–92. – Kern (1986) S. 4–11. – Pöppe (1990) S. 10–13.

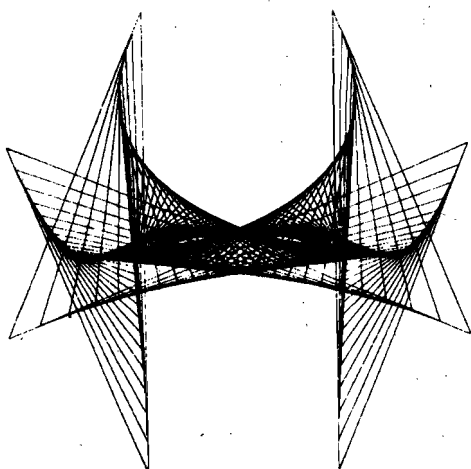


TG 2.23. Logarithmische Spiralen und ihre Evoluten

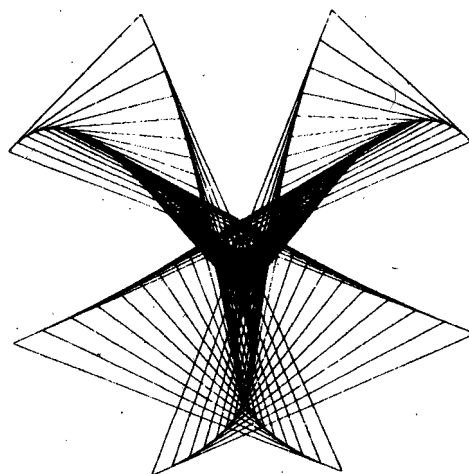
Die Evoluten als Einhüllende der Kurvennormalen sind wieder logarithmische Spiralen, eine der Eigenschaften, die für deren Entdecker Jakob Bernoulli zum Symbol für die Unsterblichkeit wurden.³⁴

2. Eine Verallgemeinerung des Käferproblems

Wir zeigen anhand der Turtlegraphiken 2.24-25, wie sich das Käferproblem auf eine erste Art verallgemeinern lässt. Die Ecken der regulären Achtecke seien – je bei der Ecke oben links beginnend – im Gegenuhrzeigersinn mit K_1 bis K_8 benannt. Anstatt der zyklischen Verfolgungssequenz gelten nun in TG 2.24-25 die Reihenfolgen $K_1-K_3-K_7-K_5-K_8-K_6-K_2-K_4-K_1$ beziehungsweise $K_1-K_5-K_3-K_7-K_8-K_4-K_6-K_2-K_1$.



TG 2.24



TG 2.25

Die vielen Kombinationsmöglichkeiten liefern beschauliche Muster mit und ohne Symmetrien.

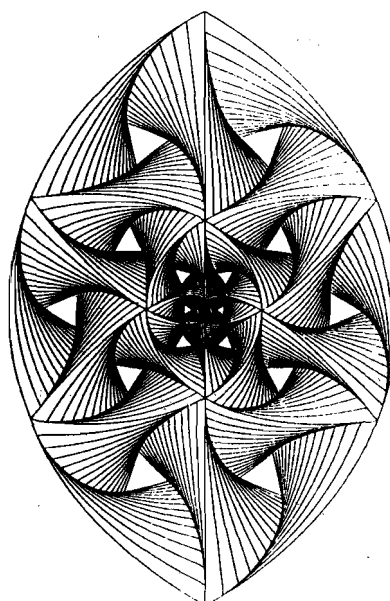
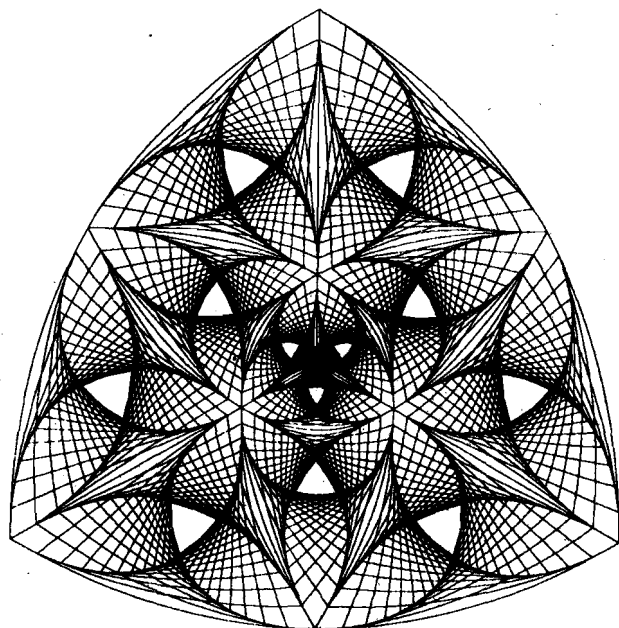
3. (Fast) ohne Rechnung bitte!

In Aufgabensammlungen begegnen wir wiederholt der Aufforderung, die Bahnlänge der Käfer bei der Verfolgung im Quadrat – im Stil des Käferproblems – ohne Rechnung zu bestimmen.³⁵ (Wir kommen darauf zurück.)

³⁴ Er liess eine solche Spirale (*Spira Mirabilis*) auf seinen Grabstein in Basel meisseln und gab ihm die Inschrift *Eadem mutata resurgo* (Verwandelt kehr ich als dieselbe wieder).

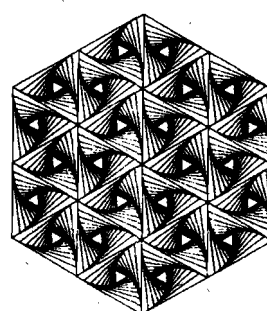
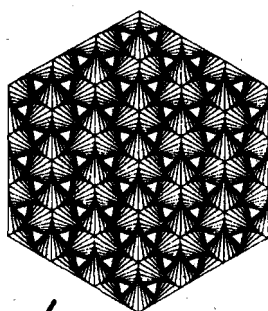
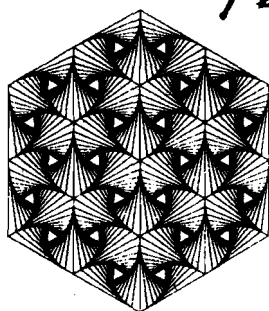
³⁵ Butchart, J.H., Leo Moser: *No calculus, please*. In: *Scripta Mathematica* 18(1952) S. 223. – Gardner (1959) S. 113. – und andere.

Verfolgung in der Gauss-Ebene



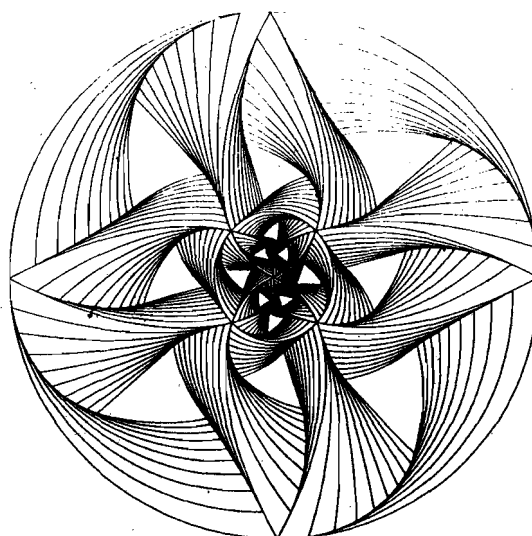
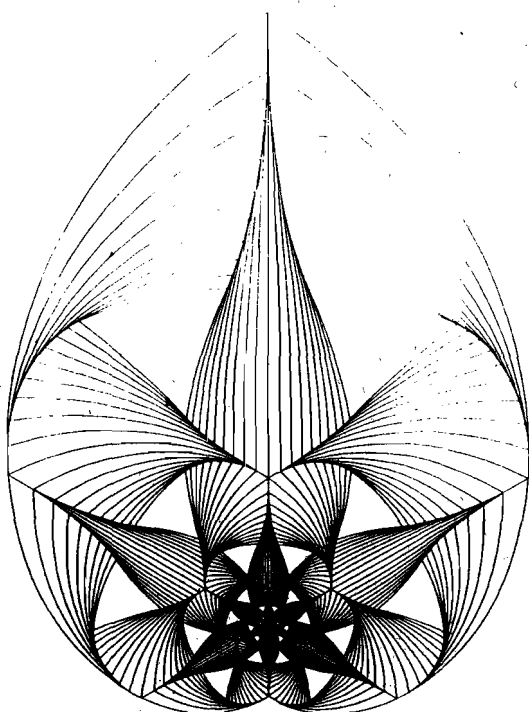
z^2

z^3



$\exp(z)$

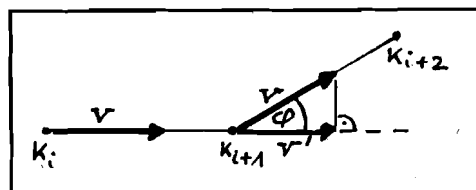
$\sin z$



TG 2.26-2.32 (von links oben nach rechts unten)

Diese Aufgabe erweitern wir zum reizvollen Auftrag an die Schüler, die Bahnlänge der Käfer bei der Verfolgung im regulären n -Eck schlechthin *fast ohne Rechnung* zu ermitteln.

Lösung: Die Käfer befinden sich zu jedem (endlichen) Zeitpunkt der Verfolgung in den Ecken eines regulären n -Ecks mit gemeinsamem Mittelpunkt und dem Aussenwinkel $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Das Startpolygon habe die Seitenlänge s ; K_1 , K_{i+1} und K_{i+2} seien drei seiner benachbarten, mit den Käfern identifizierten Ecken. v sei die Verfolgungsgeschwindigkeit, v' die skalare Komponente in Richtung der Geraden ($K_1 K_{i+1}$) gemäss nebenstehender Skizze. Der Käfer K_1 nähert sich K_{i+1} mit der Geschwindigkeit $v-v'$. Wenn wir die Treffzeit mit τ und die Bahnlänge mit L_n bezeichnen, dann gilt:



$s = (v-v')\tau = (v-v\cos\varphi)\tau = v\tau(1-\cos\varphi) = L_n(1-\cos\varphi)$,
also

$$L_n = \frac{s}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}.$$

Im Falle des Quadrates ist jeder der vier Käfer ein *Querläufer* bezüglich seines Verfolgers. Der Cosinus verschwindet: Die einzelne Verfolgungskurve ist ebenso lang wie die Quadratseite.

4. Käfer wagen sich in die GAUSS-Ebene

In den Turtlegraphiken 2.28-30 sind drei aus gleichseitigen Dreieckszellen zusammengesetzte Sechsecke abgebildet. In den Zellen ihrerseits sind die Bahnen und Visierlinien einander verfolgender Käfer zu erkennen. Diese krabbeln in den ersten beiden Figuren abwechselnd links- und rechtsherum, während sie in der dritten Figur dem Gegenuhrzeigersinn treu bleiben.

Jedem Käfer im Sechseck ist ein "Bildkäfer" in der GAUSS-Ebene zugeordnet, der dort nach einer der vier komplex-analytischen Zuordnungsvorschriften $f(z) = z^2$, z^3 , $\exp(z)$ oder $\sin(z)$ mit krummem Blick seine Verfolgungspur zieht (TG 2.26, 27, 31, 32). Die mathematische Interpretation der Bilder wollen wir dem Leser ebenso überlassen wie die Beurteilung des künstlerischen Talents der Bildkäfer.

Aufgaben

- 2.16 Löse das *Käferproblem* analytisch für ein beliebiges n und beantworte die dazu gestellten Fragen. Bestätige insbesondere die obige Formel für die Bahnlänge L_n . Diskutiere Deine Ergebnisse für den Fall, dass n gegen unendlich strebt.
- 2.17 Der Inhalt einer schwarzen (oder weissen) Spiralfläche in TG 2.22 ergibt sich unmittelbar aus der Zeichnung. Ermittle ihn übungshalber auch noch rechnerisch.
- 2.18 Erzeuge mit dem Computer weitere Käferverfolgungsmuster im Sinne von Abschnitt 2, S. 39.
- 2.19 Das *Käferproblem* lässt sich beispielsweise noch auf die folgenden drei Arten verallgemeinern:
a) Verzicht auf die Regularität des Startpolygons und/oder
b) Verzicht auf die Gleichheit der Geschwindigkeiten.
Untersuche diese Fälle graphisch-numerisch.

2.3 Geschichtliches

Verfolgungsprobleme dürften so alt sein wie der Jagdtrieb von Mensch und Tier, werden aber für die Geschichte der Mathematik erst mit ihrer mathematischen Beschreibung und eventuellen Lösung bedeutungsvoll. Nach Tropfke sind Bewegungsaufgaben und damit Verfolgungsprobleme im besonderen "in den ägyptischen und babylonischen Texten nicht überliefert".³⁶ Das bekannteste Beispiel aus der frühen Literatur ist wohl die Bewegungsstudie des Zenon von Elea (um 490 bis 430 v. Chr.) über "Achilles und die Schildkröte", die den Denker in Widersprüche zwischen Theorie und Erfahrung verwickelt hatte. War das ein Grund, dass Verfolgungsprobleme "merkwürdigerweise [...] auch in den griechischen Aufgabensammlungen" fehlen?³⁷

³⁶ Tropfke (1980) S. 588.

³⁷ Tropfke (1980) S. 588. - Ähnlich äussert sich Smith (1917) S. 69f.

Wir finden Verfolgungsaufgaben "erstmalig bei den Chinesen [schon im Chiu Chang Suan Shu, einem Rechenbuch der frühen Hanzeit (202 v.Chr. bis 9 n.Chr.)], dann bei den Indern und Arabern, über die sie dann ins Abendland gelangt sind".³⁸ Dabei ging es um die Verfolgung etwa von Boten, Dieben, geflüchteten Sklaven oder Schiffen. Das schon in China benutzte Motiv vom den Hasen verfolgenden Hund war besonders im Spätmittelalter recht beliebt (vergleiche Titelbild).

Bis dahin verlief die Verfolgung stets längs einer Geraden, "les courbes de poursuite à deux dimensions n'ont pas été étudiées avant le XVIII^e siècle".³⁹ Rund 50 Jahre nach der Begründung der Infinitesimalrechnung durch Leibniz löst Bouguer 1732 mit ihrer Hilfe sein Verfolgungsproblem (S. 14). Die *courbe du chien* und das verallgemeinerte Problem von Maupertuis (S. 33) machen die Runde nach England (*the Curve of Pursuit*), Italien (*curva di caccia*), Deutschland (*Hundekurve* oder selten *Hasenlinie*) und knapp 100 Jahre später wieder zurück nach Frankreich. Seitdem gibt es eine Fülle von Abhandlungen – auch von namhaften Mathematikern, wie wir schon früher erwähnt haben – in deren Zentrum des Interesses häufig die Flucht auf dem Kreis steht. An die Stelle des vom Hund verfolgten Hasen tritt die längs des Randes eines kreisförmigen Wasserbeckens schwimmende Ente.⁴⁰

"Present-day textbooks ignore the curve of pursuit altogether", schreibt Puckette, und meint: "Nothing essentially new appears to have been introduced since Maupertuis' problem, either here or abroad".⁴¹ Er relativiert diese Aussage aber mit der berechtigten Vermutung, dass die Theorie der Verfolgung mit der Konstruktion selbstgesteuerter Lenkwaffen eine neue Aktualität und Entwicklung erfahren habe (vgl. Abschnitt 4.3).

³⁸ Tropfke (1980) S. 589.

³⁹ Clarinval (1957) S. 25.

⁴⁰ Der an Verfolgungsproblemen und ihrer Geschichte interessierte Leser sei auch verwiesen auf Arthur Bernhart:
 – *Curves of pursuit*. In: Scripta Math. 20(1954) S. 125–141;
 – *Curves of pursuit II*. In: Scripta Math. 23(1957) S. 49–65;
 – *Polygons of pursuit*. In: Scripta Math. 24(1959) S. 23–50;
 – *Curves of general pursuit*. In: Scripta Math. 24(1959) S. 189–207.

⁴¹ Puckette (1953) S. 258.

3. SCHLEPPKURVEN

Unser Hund, die zentrale Figur im vorigen Kapitel, hat inzwischen seine "Angriffslust" verloren und sich zum Schlittenhund gewandelt. Als solcher zieht er nun - der sog. *Leitkurve* (der *Fluchtlinie* entsprechend) wie Gerade oder Kreis folgend - an einer Deichsel fester Länge einen Schlitten, dessen Kufen Spuren im Schnee hinterlassen. Es sind die aus der Verfolgungsstrategie 2 (S. 10) sich ergebenden *Schleppkurven*. Der bisherigen Redensart gemäss können wir zwanglos feststellen: Der auf den Hund ausgerichtete Schlitten "verfolgt" jenen, den "Flüchtenden", unter Wahrung eines konstanten Abstandes.

Was für Bouguer die *Hundekurve* und für Maupertuis die *allgemeinen Hundekurven* sind, bedeuten für Perrault die *Traktrix* und für Euler und andere die *allgemeinen Traktrixkurven*. Diese Analogien zeichnen den Weg und die Methoden für die nächsten zwei Abschnitte gewissermassen vor und erlauben Abkürzungen. Obwohl wir das Bild vom Hund-Schlitten-Gespann nun verlassen, kommt der Hund doch noch nicht ganz zur Ruhe.

Im Gegensatz zu Bouguer hat Perrault, wie wir gleich erfahren werden, sein Problem lediglich gestellt - gelöst wurde es zuerst von Huygens, der der erzeugten Kurve den Namen *Tractoria* (Zuglinie) gab (1693).⁴²

3.1 Perraults Taschenuhr und die Traktrix

"Claude Perrault (1613-1688), ein vielseitig gebildeter Pariser Arzt, der als Musiker, als Mechaniker, als Architekt [...] bekannt ist, stellte vielen Mathematikern, zuletzt auch Leibniz, die von ihm selbst [...] nicht bewältigte Aufgabe, die Curve zu finden, welche ein an dem Ende B eines Fadens AB befestigtes Gewicht beschreibt, während das andere Fadenende A längs einer geraden Linie hingeführt wird. Als Beispiel benutzte Perrault dabei seine silberne an einer Kette befestigte Taschenuhr, welche er in der vorgeschriebenen Art über den Tisch zog."⁴³

Diese dynamisch erzeugte Kurve, die *Traktrix*, lässt sich geometrisch-statisch wie folgt charakterisieren:

Die Traktrix ist eine Kurve mit der Eigenschaft, dass der Tangentenabschnitt zwischen Berührungspunkt und einer festen Geraden g konstante Länge a hat.

⁴² Cantor (1901) S. 214f.

⁴³ Cantor (1901) S. 214.

1. Gleichungen der Traktrix

Als feste Gerade g wählen wir die x -Achse; $P(x, y)$ und $Z(x_z, 0)$ seien die Endpunkte des Tangentenabschnitts mit der konstanten Länge a . Die Starttangente liege auf der y -Achse; $A(0, a)$ ist demzufolge der Startpunkt, s der Kurvenbogen von A bis P . Der betragsmässig unendlich grossen Steigung der Starttangente weichen wir aus, indem wir zur

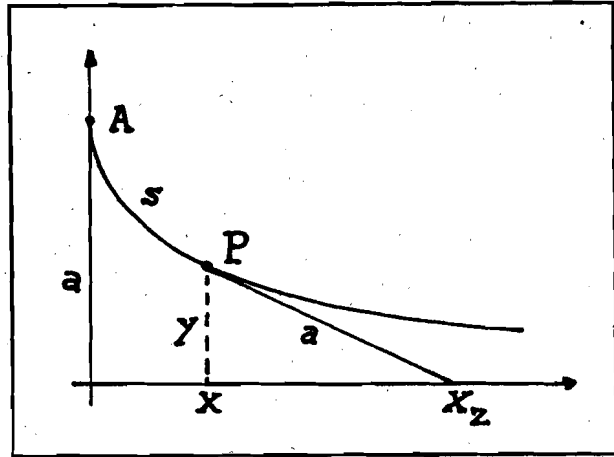


Abb. 3.1

Erstellung der Differentialgleichung den reziproken Wert des (im ersten Quadranten negativen) Tangentenanstiegs einbringen. Es ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - x_z}{y}; \quad (12)$$

Mit $PZ=a$ bekommen wir nach Pythagoras

$$\frac{x - x_z}{y} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}. \quad (13)$$

Wir setzen (13) in (12) ein und erhalten bereits die **Differentialgleichung der (halben) Traktrix:**

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}. \quad (14)$$

Nach der einfachen Variablentrennung bleibt das Integral mit der Integrationskonstanten C

$$x = -\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy + C \quad (15)$$

zu berechnen. Je nach Anspruch greift man zur Formelsammlung, lässt die Aufgabe von einem symbolisch rechnenden Programm erledigen oder löst sie selbst. Wir führen die Integration im Anhang A5 durch und übernehmen von dort die (integrale)

Gleichung der (halben) Traktrix:

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}. \quad (16)$$

Abb. 3.2 zeigt das der Differentialgleichung (14) zugrundeliegende Richtungsfeld samt einer Bahn.⁴⁴ Für die mit Maple hergestellte Graphik wurde $a=1$ gewählt.⁴⁵

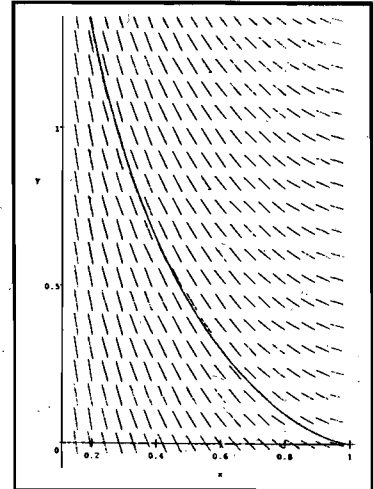


Abb. 3.2

2. Rektifikation der 'Traktrix'

Nebst dem Bogendifferential ds sind die Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{d^2x}{dy^2}$ Schlüsselemente bezüglich Bogenlänge und Krümmung der *Traktrix*. $\frac{dx}{dy}$ ist mit (14) schon bekannt. Mit Bezug auf Gleichung (16) bestätigt man leicht durch Nachrechnen, dass gilt:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{a^2}{y^2 \sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (17)$$

Aus $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ bilden wir $\frac{ds}{dy} = -\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}$ und erhalten nach Einsetzen von (14)

$$\frac{ds}{dy} = -\frac{a}{y}.$$

Trennung der Variablen und anschließende Integration führt zu $s = -a \ln y + C$. Da der Kurvenbogen in $A(0, a)$ beginnen soll, ist $s(a) = 0$ und somit $C = a \ln a$. Die Länge des Kurvenbogens AP (Abb. 3.1) berechnet sich daher

⁴⁴ Wir beschränken uns bis auf weiteres auf den im 1. Quadranten gelegenen Teil der *Traktrix*. Die Ergebnisse lassen sich wegen der Symmetrie zur y -Achse leicht auf den im 2. Quadranten gelegenen Teil übertragen (vgl. Aufgabe 3.2).

⁴⁵ Zu den Plotbefehlen siehe Anhang A7. Die Koordinatenachsen liessen sich leider nicht wie gewohnt platzieren.

nach der Formel

$$s = a \ln \frac{a}{y} \quad \text{mit } 0 < y \leq a. \quad (18)$$

3. Krümmung und natürliche Gleichung der Traktrix

Im Anhang A2 haben wir für den Krümmungsradius R die folgende Formel hergeleitet

$$R(y) = \frac{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}.$$

Unter Einbezug der Gleichungen (14) und (17) erhalten wir nach kurzer Rechnung für den **Krümmungsradius R** der Traktrix das Resultat

$$R(y) = a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad (19)$$

und für die **Krümmung K** den reziproken Wert

$$K(y) = \frac{y}{a\sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (20)$$

Die Krümmung strebt gegen ∞ für $y \uparrow a$ und erwartungsgemäss gegen 0 für $y \downarrow 0$.

Wir machen bei dieser Gelegenheit den Krümmungsradius R auch noch in Abhängigkeit der Bogenlänge s verfügbar, weil wir später darauf angewiesen sind.

Dazu schreiben wir $R(y)$ in der Form $R(y) = a \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1}$

und ersetzen $\frac{a}{y}$ dank Gleichung (18) durch $e^{\frac{s}{a}}$, was uns zum gewünschten Ergebnis führt:

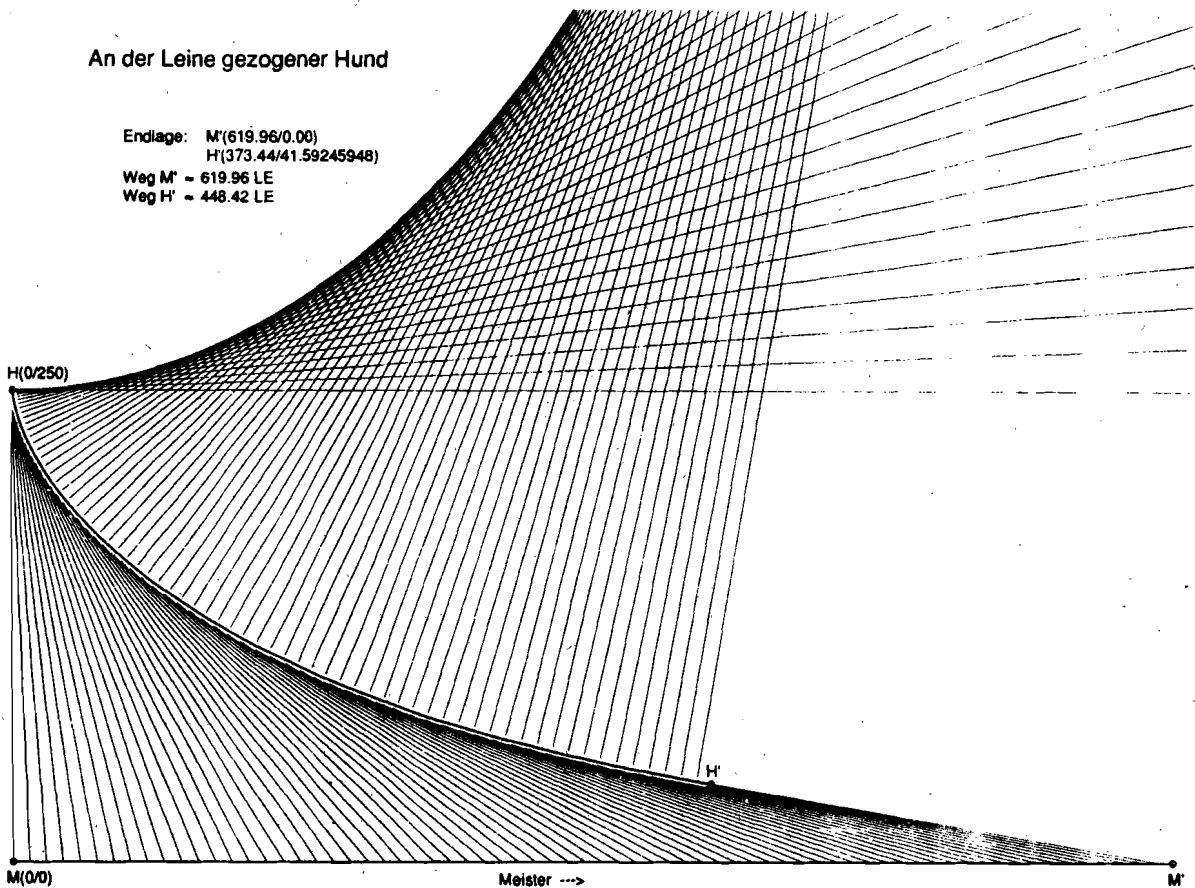
$$R(s) = a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}. \quad (21)$$

Das ist gleichzeitig die **Gleichung der Traktrix in den natürlichen Koordinaten R und s** .

Die Gleichung (21) ist in dieser Form unabhängig von der Einbettung der Traktrix in die Ebene.

3.1.1 Die Kettenlinie als Evolute der 'Traktrix'

Die Traktrix ist die Animatorin zu einem interessanten Stelldichlein des "Trio E", bestehend aus **Envelope**, **Evolute** und **Evolvente** – drei Begriffe, die wir als bekannt voraussetzen.



TG 3.1

In der Turtlegraphik 3.1 zieht (schleppt) der Meister auf seinem Spaziergang längs der **Geraden** von M nach M' den Hund an der Leine von H nach H'. Der als Punkt gedachte Vierbeiner beschreibt dabei bekanntlich eine **Traktrix**.⁴⁶ Die abstandsweise vom Hund zum Meister gezeichneten Tangentenabschnitte stehen für die Leine oder die Visierlinien des Geschleppten. Die Schar der dazugehörenden, nach oben verlaufenden Kurvennormalen

⁴⁶ Achtung vor einer Sprachverwirrung! Das in der Literatur vorkommende Motiv des an der Leine gezogenen Hundes ist Ursache dafür, dass in älteren, aber gelegentlich auch noch in jüngeren Schriften statt der Bezeichnung Traktrix der inzwischen mehrheitlich in unserem Sinne gebrauchte Begriff der Hundekurve (!) aufscheint.

besitzt eine *Envelope* (Hüllkurve); es ist die *Evolute* (Krümmungsmittelpunkts-Kurve) der *Traktrix*, die als deren Ausgangskurve selbst eine *Evolvente* (Abwicklungskurve) der *Evolute* ist.

Ist die *Evolute* der *Traktrix* eine Parabel (wie Galilei in einem anderen Zusammenhang vermutete)? Die Antwort ergibt sich aus der analytischen Beschreibung, die wir zwecks Methodenvergleich in drei Versionen - "urchig", "mittelbar" und "elegant" - angehen wollen.

"Urchige" Methode: Die (glatte) Ausgangskurve besitze im Punkt P einen Krümmungskreis mit endlichem Radius. Wenn wir einen benachbarten Kurvenpunkt P' von P nach P streben lassen, dann rähert sich der Schnittpunkt der Kurvennormalen durch P bzw. P' dem Mittelpunkt des Krümmungskreises von P und kommt im Grenzfall auf ihn zu liegen. Diese Methode führt beispielsweise bei den Kegelschnitten "leicht" zur Evolutengleichung, benimmt sich aber im Falle der *Traktrix* rechnerisch so widerspenstig, dass wir sie nicht weiter verfolgen.

"Mittelbare" Methode: $P(x,y)$ sei ein von $A(0,a)$ verschiedener Punkt auf der *Traktrix*, $Z(x_z,0)$ der zugeordnete Schnittpunkt der Tangente durch P mit der x -Achse. Dann gilt nach dem Satz des Nikolaides (1866), dass die Kurvennormale n_T durch P und die Normale n_B auf die Leitkurve (x -Achse) durch Z einander im Mittelpunkt M des Krümmungskreises von P schneiden.

Wenn wir in den Gleichungen von n_T : $\eta = -\frac{dx}{dy}\xi + (y + \frac{dx}{dy}x)$ und von n_B : $\xi = x + \sqrt{a^2 - y^2}$ den Term $\frac{dx}{dy}$ und die Variable x mit Hilfe von (14) bzw. (16) durch die entsprechenden Terme in y ersetzen, ergibt der Schnitt von n_T und n_B den Mittelpunkt $M(u,v)$ mit

$$u = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad \text{und} \quad v = \frac{a^2}{y}.$$

Durch Elimination von y erhalten wir die gesuchte Ortskurve von M , die **Evolute**, in der Gestalt $v = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}} \right)$ und nach Umbenennung von u und v in x bzw. y in der Form

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right). \quad (22)$$

(22) ist die Gleichung der **Kettenlinie** in den kartesischen Koordinaten x und y .⁴⁷

⁴⁷ *Merkhilfe* zu (22): Die Punkte P der Kettenlinie sind die Mittelpunkte der auf der Vertikalen durch P liegenden Punkte der Graphen von $y = ae^{\pm \frac{x}{a}}$.

"Elegante" Methode: Cesàro, einer der Väter der natürlichen Geometrie, hätte wahrscheinlich geschmunzelt über die Lösungsmethode 2, ganz zu schweigen vom Lösungsversuch 1. Seinen Pfaden folgend bezeichnen wir die Bogenlänge der Evolute mit s_1 , den Kontingenzwinkel mit $d\varphi_1$ und den Krümmungsradius mit R_1 . Die Bogenlänge der Evolute ändert sich jeweils um das Stück, um das sich der Krümmungsradius der *Traktrix* ändert, d.h. $ds_1 = dR$. Bei geeignet gewählter Integrationskonstanter folgt daraus $s_1 = R$. Da definitionsgemäss $R_1 = \frac{ds_1}{d\varphi_1}$ ist und die Kontingenzwinkel $d\varphi$ und $d\varphi_1$ gleich sind, gilt:

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\varphi_1} = \frac{dR}{d\varphi} = \frac{dR}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = \frac{dR}{ds} R.$$

Um die Bogenlänge s_1 ins Spiel zu bringen, ersetzen wir R durch den rechten Term $a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}$ von Gleichung (21). Das führt nach dem Ableiten von R nach s unter Beachtung von $s_1 = R$ sogleich zu

$$R_1 = a + \frac{s_1^2}{a}. \quad (23)$$

Das ist die Gleichung der **Kettenlinie** in den natürlichen Koordinaten s_1 und R_1 .

Die Kettenlinie oder Seilkurve, von Huygens *Catenaria* genannt (1690), ist für den Physiker ein Bogenstück mit möglichst tiefem Schwerpunkt. In der kinematischen Geometrie erscheint sie als Ortslinie des Brennpunktes einer auf einer Geraden abrollenden Parabel.

3.1.2 Die 'Traktrix' als Erzeugende der Pseudosphäre

Wir lassen die *Traktrix* um ihre Asymptote rotieren und erhalten so die in Abb. 3.3 dargestellte Rotationsfläche mit ein paar eingezeichneten Krümmungslinien - Schnittkurven mit Ebenen durch die Drehachse (*Traktrizen*) und senkrecht zur Drehachse (Kreise). Zu jedem beliebigen, nicht auf der Kante sitzenden Punkt P der Drehfläche gibt es zwei orthogonale Tangentenrichtungen, bezüglich derer eine

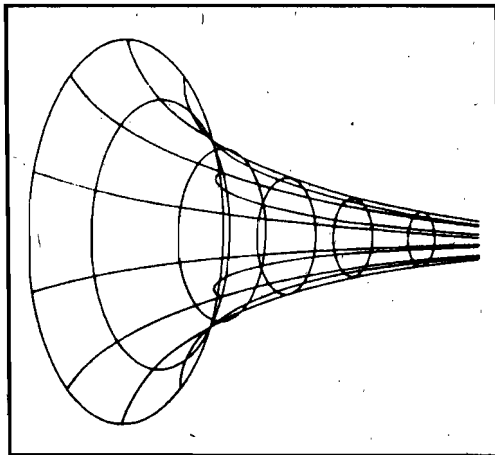


Abb. 3.3

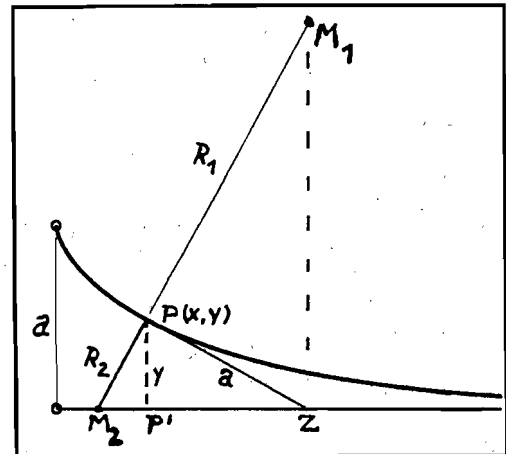


Abb. 3.4

Normalschnitt (*Traktrix*) – das dreidimensionale Koordinatensystem sei so gelegt, dass letzere wie in Abb. 3.1 zu liegen kommt – maximale positive Krümmung K_1 , der andere Normalschnitt minimale negative Krümmung K_2 hat. R_1 und R_2 seien die zugehörigen Krümmungsradien (Abb. 3.4).

Nach Gleichung (20) ist $K_1 = \frac{y}{a\sqrt{a^2-y^2}}$. Es gilt nun

$K_2 = \frac{1}{R_2}$ zu berechnen. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PM_2P' und ZPP' erhalten wir (unter Beachtung, dass $R_2 < 0$ ist) $R_2 = -\frac{ay}{\sqrt{a^2-y^2}}$; somit ist $K_2 = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{ay}$.

Man erkennt unmittelbar, dass das Produkt der beiden Krümmungen $K_1 K_2 = -\frac{1}{a^2}$ ist, d.h.:

Die Gauss-Krümmung der Rotationsfläche der Traktrix hat konstanten negativen Wert. Die Strecke a ist Höhe im rechtwinkligen Dreieck M_1M_2Z (Abb. 3.4).

Pseudosphäre: Die Kugel (Sphäre) hat eine konstante positive Gauss-Krümmung. Die durch Rotation der *Traktrix* um ihre Asymptote erzeugte Fläche wird in Analogie dazu **Pseudosphäre** genannt.

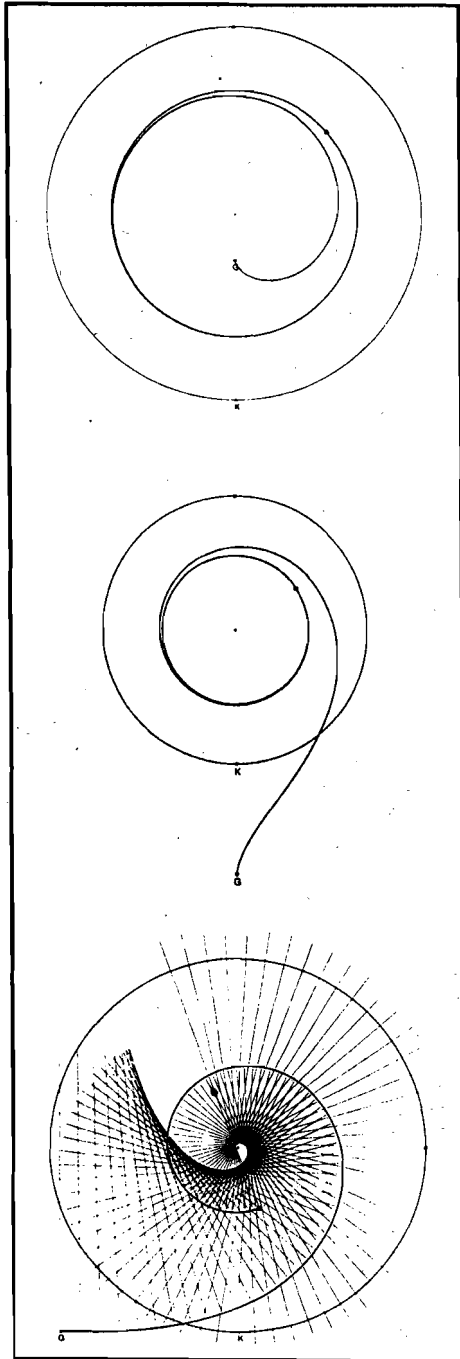
Anmerkung: Es scheint mir sinnvoll, im Unterricht propädeutisch an die Thematik der Krümmung im Raum heranzuführen. Methodisch hilfreich für das Begreifen ist die Tätigkeit der Schüler an selbstgebastelten Modellen aus geeignetem Material (Styropor, Kitt usw.). Das didaktisch Mögliche wird nicht nur durch die Schwierigkeit des Themas, sondern mindestens so sehr durch die fehlende Musse und durch das tendenziell sinkende durchschnittliche Leistungsniveau in der Klasse eingeengt.

Aufgaben

- 3.1 Studiere den *Satz des Nikolaides* und zeige, dass er sich an der Turtlegraphik 3.1 bewahrheitet.
- 3.2 In den Unterabschnitten 3.1-3.4 haben wir uns auf den im 1. Quadranten gelegenen Teil der *Traktrix* beschränkt. Leite die entsprechenden Ergebnisse für den im 2. Quadranten gelegenen Teil der *Traktrix* her. Was ändert – was bleibt gleich? Besteht Einklang mit Deinen Erwartungen?
- 3.3 Durch Ziehen eines schweren Massepunktes an einem Faden lässt sich unter Beibehaltung der Zugrichtung höchstens die halbe *Traktrix* bilden. Inwiefern nimmt die mathematische Aussagekraft des mechanischen Modells zu, wenn wir den Faden durch eine Stange vernachlässigbarer Masse ersetzen?
- 3.4 Berechne die Länge des in der Turtlegraphik 3.1 dargestellten Weges, den der Hund zurückgelegt hat. Die nötigen Angaben lassen sich aus der Bildlegende ermitteln. Vergleiche mit dem von der Turtle gemessenen Wert. Wie gross ist der prozentuale Fehler?
- 3.5 Betrachte die *Traktrix* über dem Intervall $[0, a]$ und berechne:
 - a) die zwischen ihr und ihrer Asymptote gelegenen Fläche;
 - b) das Volumen des bei der Rotation um die Asymptote entstehenden Drehkörpers;
 - c) die Oberfläche dieses Drehkörpers.
- 3.6 Welcher Kurve folgt ein beliebiger Punkt zwischen den Leinenenden beim Schleppen des Hundes längs einer Geraden? Beantworte die Frage graphisch (Computerprogramm) und analytisch.
- 3.7 Beweise: Alle Kettenlinien sind ähnlich.
- 3.8 Berechne die Bogenlänge der Kettenlinie über dem Intervall von $x=a$ (≥ 0) bis $x=b$.
- 3.9 Bestimme die Menge der Punkte auf der Pseudosphäre, in denen die maximale bzw. die minimale Krümmung der durch sie laufenden Normalschnitte betragsmässig gleich gross sind.

3.2 Die Traktrix des Kreises

Es liegt in der Luft, dass wir – Maupertuis folgend – als Leitkurven nunmehr Kreise, Klothoiden usw. zulassen und so die *Traktrix* einer beliebigen Kurve erhalten.



TG 3.2-4

Im Falle des Kreises als Leitkurve ist es schon Riccati (1676-1754) und Euler (1707-1783) im Jahre 1752 bzw. 1775 gelungen, die Kreistraktrix durch Integration der betreffenden Differentialgleichung zu finden. Wir lassen uns nicht auf die Analysis der Kreistraktrizen ein. Abhandlungen darüber finden sich bei Loria (1902), S. 566-572, und bei Heinemann (1972), S. 20-27.

Das Motiv zu den Turtlegraphiken 3.2-4 entstammt einer Kindheitserinnerung: Ein Kind (K) zieht auf einem frisch geteerten, kohlrabenschwarzen Parkplatz (damals eine Neuheit!) einen an einer Schnur befestigten weissen, seine Spur aufzeichnenden Gipsklotz (G) hinter sich her. Für das Weitere sind bei diesem "Erlebnis" nur noch der Radius R des Kreises, den das Kind – im tiefsten Punkt K startend – im Gegenuhrzeigersinn abschreitet, und die Länge $L=KG$ ($<R$) der Schnur von Belang.

In jeder der drei Graphiken nähert sich die Schleppkurve asymptotisch dem zum Basiskreis konzentrischen *Grenzkreis* mit Radius r (vgl. Aufgabe 3. 12). In TG 3.4 sind zusätzlich Normale zur Schleppkurve gezeichnet;

ihre Einhüllende bildet bekanntlich die *Evolute* der Ausgangskurve. (Um das Bild nicht zu überladen, haben wir das Kind nach einer Drehung von 450° gestoppt.)

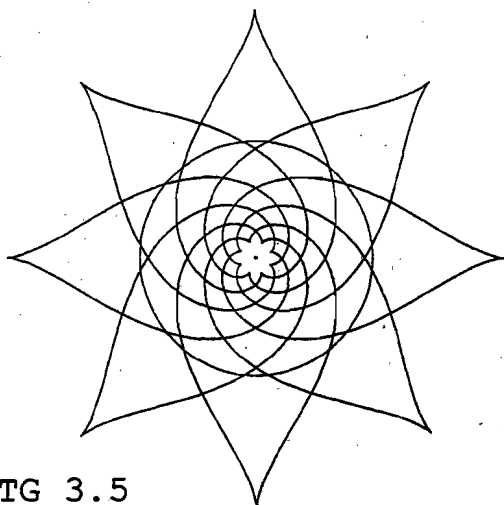
Die Kreistraktrizen in TG 3.5-6 sind geschlossen. Es lässt sich zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn das Verhältnis aus L und $\sqrt{L^2 - R^2}$ rational ist. Dies bedingt $L > R$, so dass die Schnur durch eine Stange (vernachlässigbarer Masse) zu ersetzen ist, damit der Klotz G auch gestossen werden kann.

Wenn wir für L und R nur ganzzahlige Werte zulassen, dann besagt die obige Rationalitätsbedingung: Es gibt eine positive ganze Zahl S - setzen wir für diese S -, so dass $L^2 = R^2 + S^2$ ist. (Zur Bedeutung von S vgl. Aufgabe 3.13.)

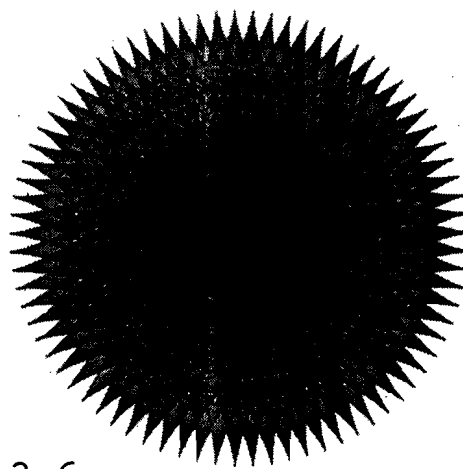
Fazit: Wenn (L, R, S) ein pythagoreisches Zahlentripel (mit $L > R, S$) bildet, dann ist die Traktrix des Kreises mit dem Radius R und der Stangenlänge L eine **geschlossene Kurve mit $2 \cdot S / \text{ggT}(L, R)$ Spitzen**.

Aufgaben

- 3.10 Erkunde die Bedeutung der Schleppkurven in der Praxis des Strassen- und Schienenbaues.
- 3.11 Zeichne mit Turtle-Graphik Schleppkurven von Kegelschnitten und der Klothoide.
- 3.12 Es sei $L < R$. Stelle eine Beziehung her zwischen L , R sowie r und erprobe diese an TG 3.5 und TG 3.6. Erläutere den Spezialfall $L = R$.
- 3.13 Erzeuge Bilder wie TG 3.5 (Tripel (17,15,8)) und TG 3.6 (Tripel (85,36,77)); bestätige experimentell, dass das Doppelte von S die Zahl der Spitzen der geschlossenen Kreistraktrix angibt.



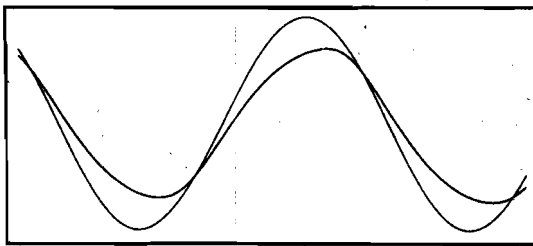
TG 3.5



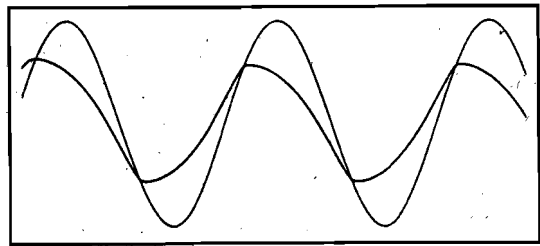
TG 3.6

3.3 Radspuren auf der Spur

Das "Stahlross" ist nebst den Beinen das meistverbreitete Fortbewegungsmittel des Homo sapiens. Nach Schätzungen des Velohandels werden im Jahr weltweit rund 100 Millionen Fahrräder produziert. Die Werbung weiss es - *Radfahren hält gesund, macht fit und schont die Umwelt* - und beruft sich auf die Aussage von Winston Churchill, dass keine Stunde im Leben, die man im Sattel verbringt, verloren ist! Nachdem der Fahrradboom zu überborden droht, schlagen wir die Einführung einer obligatorischen Führerprüfung vor und liefern der Verordnungsbehörde gleich ein paar Prüfungsaufgaben.



TG RS1



TG RS2

In den Turtlegraphiken RS1 und RS2 sind die Spuren eines Fahrrades gezeichnet. Die Velofahrprüfung hat bestanden, wer die folgenden Aufgaben zu 99% richtig gelöst hat.

1. Ordnen Sie in TG RS1 und RS2 das Vorder- und das Hinterrad der entsprechenden Spur zu.
2. Lässt sich in TG RS1 und RS2 aus den Spuren die Fahrtrichtung (\rightarrow oder \leftarrow) erkennen?
3. Ist es einerlei, ob Kilometerzähler und Dynamo am Vorder- oder am Hinterrad montiert sind?
4. Erklären Sie die Lenkgeometrie des Fahrrades.
5. Ermitteln Sie in TG RS1 den ungefähren Abstand der Auflagepunkte V und H des Vorder- bzw. des Hinterrades beim Mass-Stab 1:140.
6. Beschreiben Sie die Vorder- (v) und die Hinterradkurve (h) hinsichtlich Symmetrie und Krümmungsverlauf. Decken Sie die Zusammenhänge zwischen v und h einerseits und zwischen TG RS1 sowie TG RS2 andererseits auf. Ziehen Sie dabei die Schnittpunkte der Spuren mit in Betracht.
7. Das Hinterrad eines Velos fährt von einer Geraden in einen rechtsdrehenden Viertelkreis ($r=6\text{cm}$) und verlässt diesen tangential zur Ausfahrtrichtung. Konstruieren Sie die zugehörige Vorderradkurve (bei $VH=2\text{cm}$).

Erlaubte Hilfsmittel: Papier, Bleistift, Geodreieck, Meterstab und ein Fahrrad samt einer länglichen Wasserpfütze im sonst trockenen, geteerten Innenhof des Prüfungsgebäudes.

Die Kurvendiskussion etwa im Sinne von "Prüfungsaufgabe" 6 soll bis zum Schluss des Kapitels Auftrag zum vorliegenden Anschauungsmaterial bleiben. Es werden dabei (fast) keine Rechnungen angepeilt - wir würden uns damit ohnehin die Zähne ausbeissen. Die Thematik ermöglicht auch ohne formalen Kalkül in vorzüglicher Weise, Mathematik "von unten her" zu lernen: "Fragen sehen und produktiv damit umgehen".⁴⁸ Das Aufspüren von Unerwartetem, ja Paradoxem nimmt den Radspuren die Langeweile alltäglicher Erscheinungen und fördert bizarre, ansprechende Formen zu Tage. Auch wenn unsere vom Computer gezeichneten 'Radspuren' mehr oder weniger starke Idealisierungen sind, so ist ihr Bezug zur Wirklichkeit doch erkennbar. Man wird den Schüler ohnehin den Weg vom Experiment bis zur mathematischen Aufbereitung und Verallgemeinerung des Themas gehen lassen. Zum Experiment braucht es, wie oben angedeutet, nicht viel: ein Fahrrad mit nassen Reifen und eine geeignete Unterlage.

Es bleibt noch die Frage nachzuholen, inwieweit die Spur des Hinterrades als *Schleppkurve* der Vorderradspur angesehen werden kann. Wegen der geschwungenen Gabelscheide verkleinert sich der Abstand der Auflagepunkte V und H - d.h. die Länge des Tangentenabschnitts zwischen den Spuren - umsomehr, als der Lenker von der Orthogonalen zur Ebene des Fahrradrahmens abweicht. Mechanik kommt ins Spiel!⁴⁹ Der Konstanz des Abstandes der Auflagepunkte V und H zuliebe sei die Vorderradgabel unseres "Fahrrades" - wie diejenige eines billigen Kinderdreirades - geradlinig und stehe zur Fahrtrichtung orthogonal.

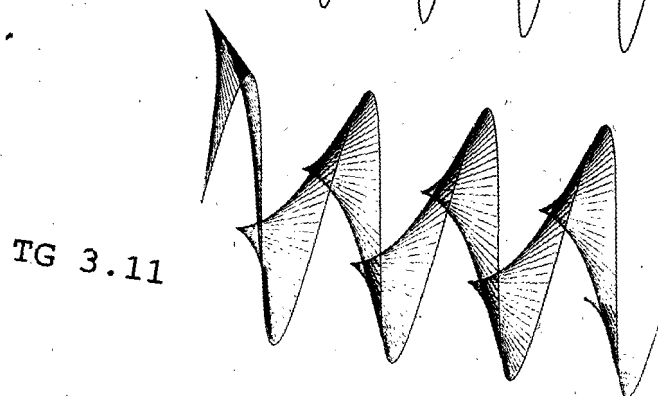
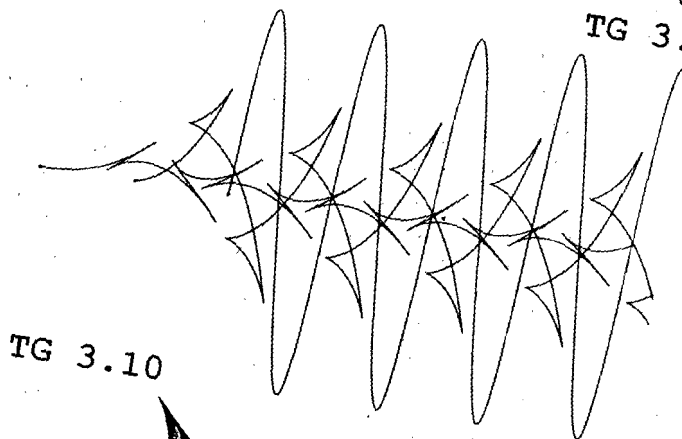
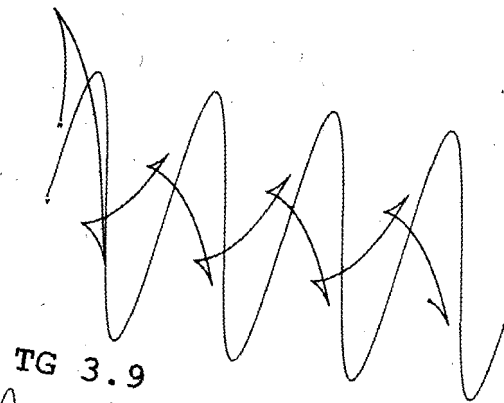
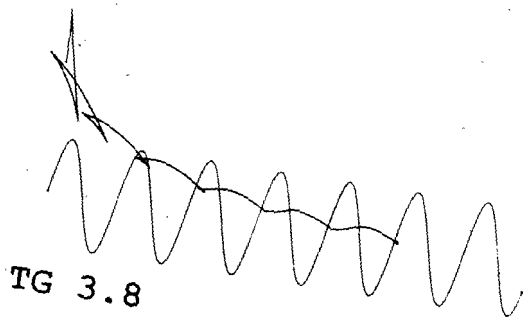
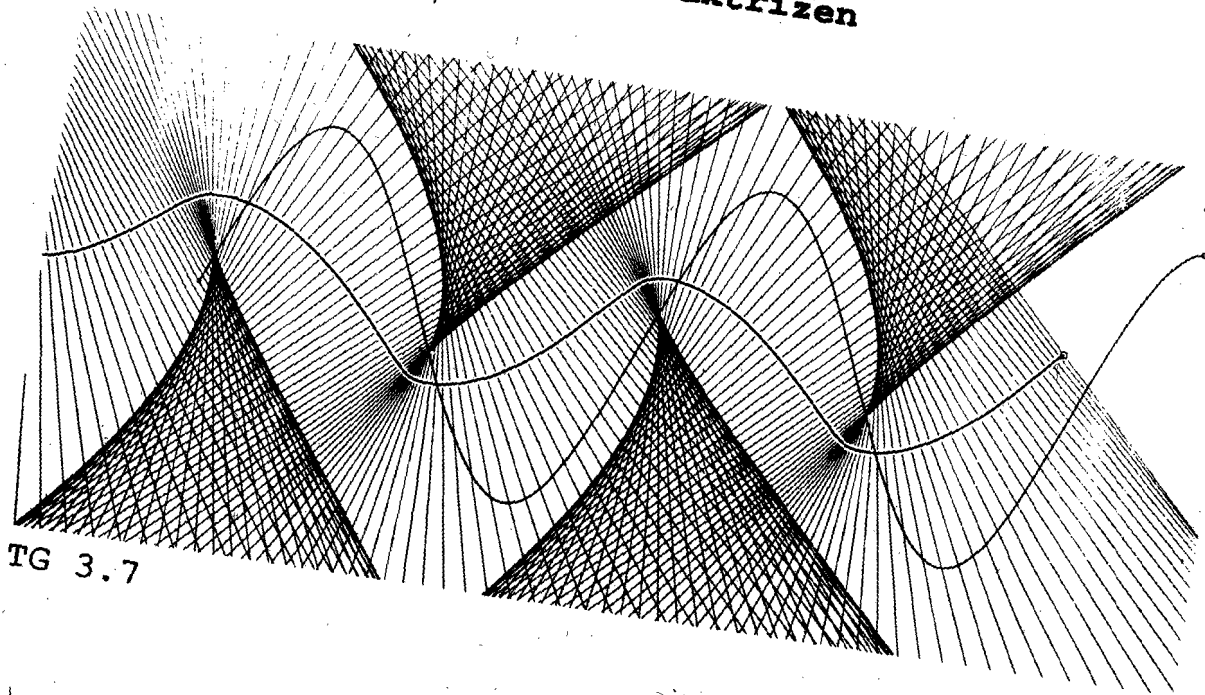
3.3.1 Sinustraktrizen

In TG 3.7-11 folgt das Vorderrad einer mehr oder weniger stark gestauchten Sinuslinie, während das Hinterrad die zugehörige *Sinustraktrix* als Spur hinterlässt (vgl. Aufgabe 3.20). In TG 3.7 gibt die Evolute Aufschluss über das Krümmungsverhalten. TG 3.10: Spuren eines Fahrrades mit Einrad-Anhänger; TG 3.11 enthält noch eine Schar von Tangentenabschnitten.

⁴⁸ Martin Wagenschein: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken. Stuttgart: Klett 1970. Band 2. S. 179.

⁴⁹ Vgl. Jänecke (1914) S. 94-102.

Sinustraktrizen



3.3.2 Mit dem Fahrrad durchs Dorf

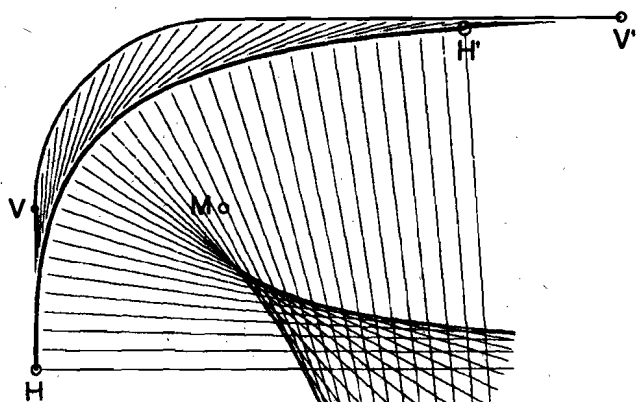
In unserem Dorf sind die Kaufläden noch nicht unter einem Dach, so dass Hausfrau oder Hausmann mit dem Fahrrad durchs ganze Dorf fahren muss, um den Einkaufskorb fürs Wochenende zu füllen. Unterwegs sind allerlei Manöver fällig: hier *um die Ecke zur Molke-
rei abbiegen*, dort einem parkierten Auto ausweichen, vor der Kreuzung die *Spur wechseln*, auf halbem Heimweg *wenden*, weil das Petersiliensträusschen vergessen ging. So oder ähnlich könnte die Vorgeschichte zu den Zeichnungen auf der nächsten Seite lauten.

In den Turtlegraphiken 3.12, 3.14, 3.16 und 3.18 der **linken Spalte** bewegt sich das **Vorderrad** nach der Ausfahrt (V) aus einer Geraden auf einem oder mehreren Viertelkreisen und folgt dann nach dem Verlassen des letzten Kreisbogens der Tangente im Ausfahrtspunkt. Das Hinterrad beschreibt, in H beginnend, die entsprechende *Schleppkurve*, die sich gegen Ende asymptotisch der Geraden nähert. Die Evolute der *Schleppkurve* vermittelt deren Krümmungsverlauf. (Wie reagiert die Milch in der Kanne hinten auf dem Gepäcksträger beim Überfahren eines Wendepunktes?).

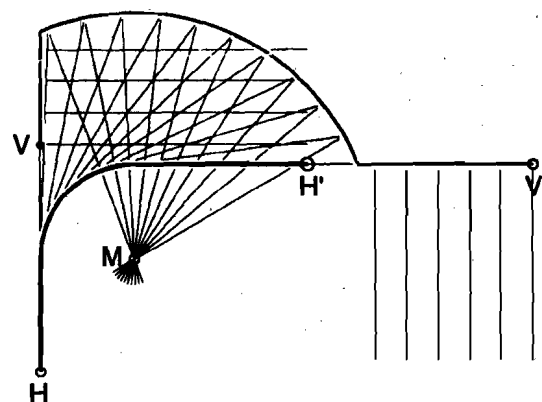
In den Turtlegraphiken 3.13, 3.15, 3.17 und 3.19 der **rechten Spalte** bewegt sich das **Hinterrad** nach der Ausfahrt (V) aus einer Geraden auf einem oder mehreren Viertelkreisen und folgt dann nach dem Verlassen des letzten Kreisbogens der Tangente im Ausfahrtspunkt H'. Die einander zugeordneten krummen Abschnitte der Leit- und der *Schleppkurve* sind konzentrische Kreisbogen. Welch ruppige Fahrt: An den vielen Knickstellen wechselt die Krümmung sprunghaft entweder betragsmässig zwischen null und dem Kehrwert der Radiuslänge des beteiligten Kreisbogens oder von einem endlichen Wert in den additiv inversen. Diese Bilder haben keine praktische Bedeutung.

Je schmaler die wirkliche Fahrbahn und je grösser die zulässige Höchstgeschwindigkeit sind, desto risikoreicher ist die Durchfahrt durch die Knickstellen - die Fahrzeuge scheren dort nämlich in Richtung der Einfahrtstangente aus. Bei übergeordneten Strassen werden in der Praxis solche kritischen Übergänge durch eine Folge von verschiedenen Kreisbogen *sanfter* oder - technisch eleganter - durch Klothoidenbogen *flüssig* gestaltet.

Abbiegen um die Ecke

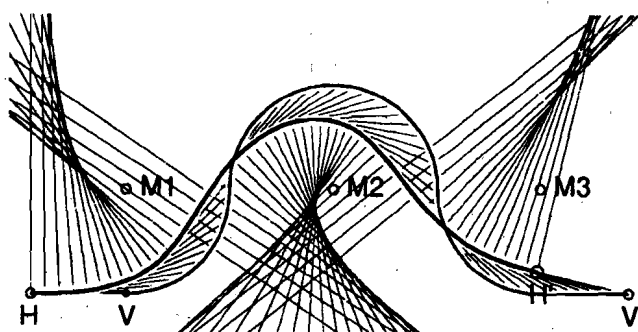


TG 3.12

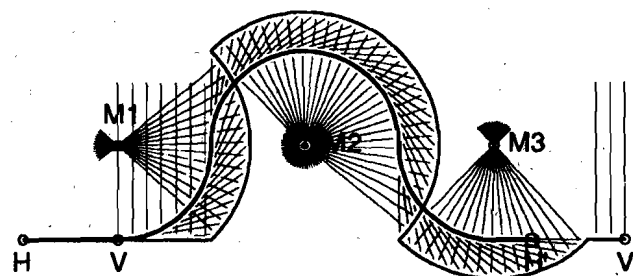


TG 3.13

Ausweichen

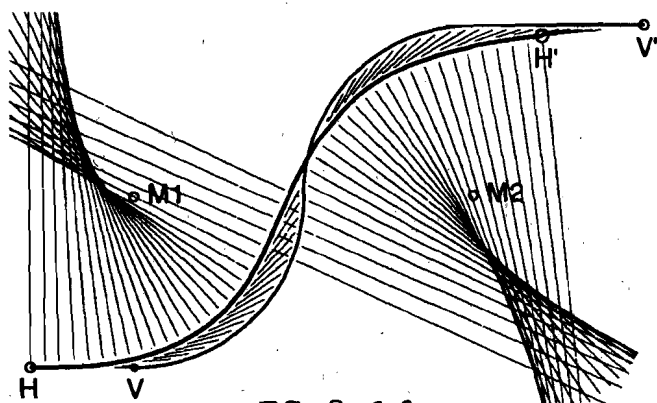


TG 3.14

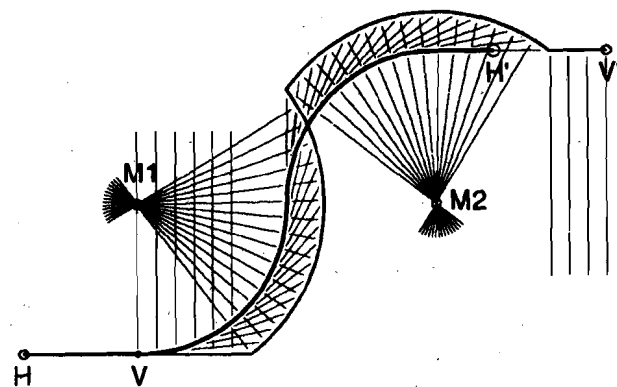


TG 3.15

Spurwechsel

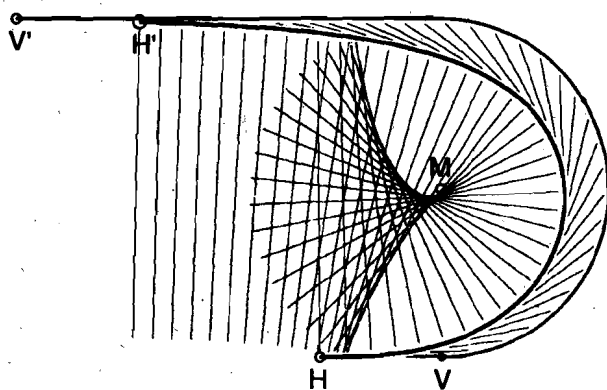


TG 3.16

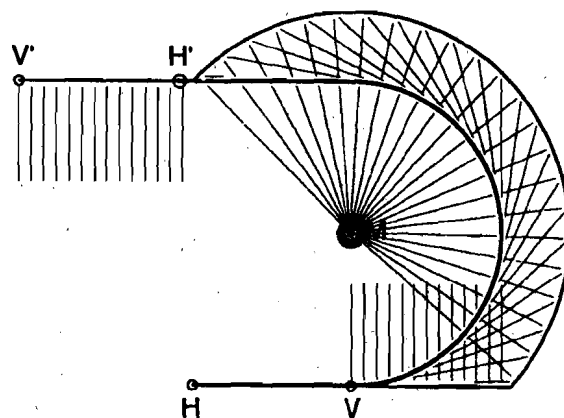


TG 3.17

Wenden



TG 3.18



TG 3.19

3.3.3 Äquitangentiale einer Sinuskurve

Ausgangslage:

Gegeben sei eine glatte Kurve C^* . Gesucht ist eine Kurve C , die für C^* Leitkurve (S. 44) ist mit der Tangentenabschnitts-Länge a .

Die Idee zur Herleitung der Kurvengleichung von C stehlen wir der Turtle, da sie zur Darstellung der Kurve ohne die Gleichung auskommt.

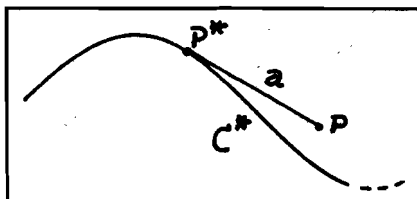
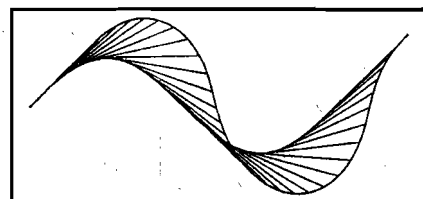


Abb. 3.5



TG 3.20

Wir beobachten das "Treiben" der Turtle an einem beliebigen Punkt P^* ihres Wanderweges C^* . Dort geht sie auf der Tangente durch P^* um a Schritte vorwärts zu dem P^* zugeordneten Punkt P (Abb. 3.5). Dass die Turtle zu P^* zurückkehrt und die Prozedur im "nächsten" Kurvenpunkt wiederholt, kümmert uns schon nicht mehr. Der Ort der Punkte P bildet die gesuchte Kurve C , welche man Äquitangentiale von C^* nennt.⁵⁰ TG 3.20 sowie TG 3.24-25 zeigen die Äquitangentiale von $y = \sin x$ bzw. von $y = 4 \sin(4x)$ mit $a = 15$ bzw. 10 und 16 LE.

Im Anhang A6 ist die Gleichung der Äquitangentiale einer Sinusfunktion von der Form $y = A \sin x$ hergeleitet. Kernstück ist dort die *Differentiation* (A6.2) zur Ermittlung der Steigung der Tangente mit dem Berührungspunkt P^* . Rückblickend können wir die Abhängigkeit zwischen Leitkurve C und Schleppkurve C^* schematisch wie folgt darstellen:



Auf unsere Radspuren angewandt heisst das:

Zu einer gegebenen Hinterradkurve C^* gibt es genau eine Vorderradkurve C . Zu einer gegebenen Vorderradkurve C gibt es unendlich viele Hinterradkurven C^* . Aus der Wahl der Anfangsstellung des Hinterrades (Anfangswertproblem) berechnet sich die Integrationskonstante.

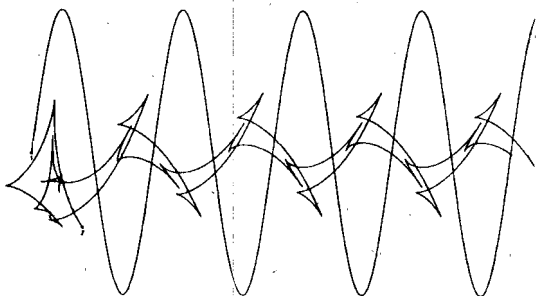
⁵⁰ Die Turtle kann auch a Schritte rückwärts gehen; dadurch entsteht eine Kurve, die mit C bis auf die Lage identisch ist.

3.3.4 Gliederzug

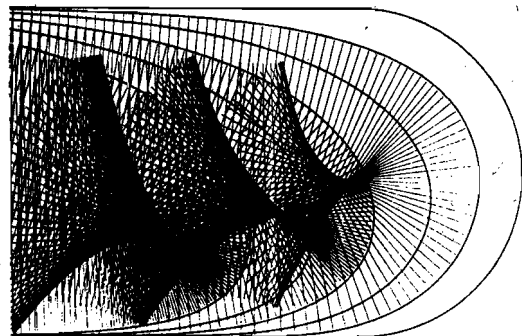
Beim Geschicklichkeitsfahren müssen die Wettbewerbsteilnehmer manchmal einen Traktor samt Anhänger in einem engen, geschwungenen Korridor rückwärtsfahren – eine gefürchtete Übung (nicht nur für jene, die in Rechtskurven mit dem Hinterrad ihres Autos auf den Gehsteig geraten)! Jedenfalls entwickelten Fahrzeugtechniker vor Jahren ein sog. *Elektronisches Rückfahrsystem ERS* als Lenkhilfe für – wohlgemerkt – berufsmässige Fahrer von LKWs mit Anhänger. Auf Schweizer Strassen verkehren zur Zeit rund ein halbes Dutzend mit *ERS* ausgestattete Gliederzüge. Beim Rückwärtsfahren melden

"Sensoren in der Anhängerkupplung und am Drehkranz [...] laufend die Position des Anhängerzuges an die Fahrzeugelektronik. Mit dem Lenkhebel wird manuell die zu fahrende Spur fein dosiert vorgegeben. Aus diesen Daten berechnet der Mikroprozessor die nötigen Lenkeinschläge."
(Auskünfte und die im Literaturverzeichnis angegebenen Unterlagen verdanke ich dem Nutzfahrzeug-Center Neuendorf in CH-4623 Neuendorf.)

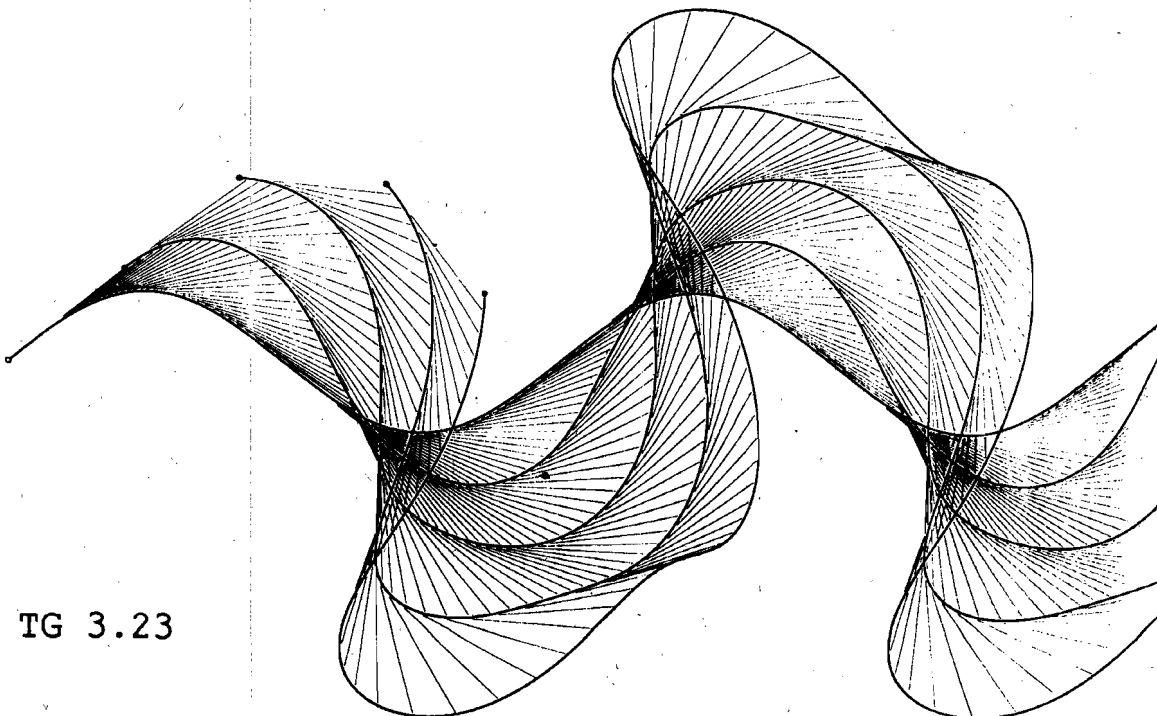
TG 3.21-23 zeigen, wie "leicht" die *Turtle* drei- und mehrelementige (einspurige) Gliederzüge vor- und rückwärtschauffiert.



TG 3.21



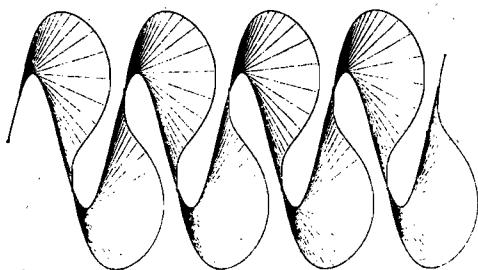
TG 3.22



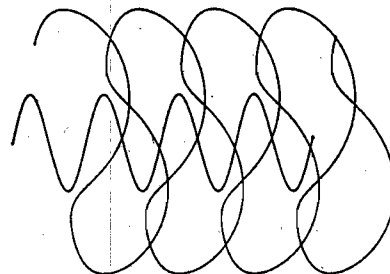
TG 3.23

Aufgaben

- 3.14 a) Miss bei Deinem Fahrrad den Abstand der Auflagepunkte V und H in Abhängigkeit von der Lenkerstellung.
b) Erzeuge mit Deinem Fahrrad eine Traktrix C^* zu einer Geraden als Leitkurve C . Stelle den Velo-rahmen zu Beginn orthogonal zu C .
c) Welchen Weg legt das Vorderrad zurück, bis H noch 50, 20, 10 cm seitlich von C liegt? Vergleiche mit den errechneten Werten.
Wo stecken welche Fehlerquellen?
- 3.15 a) Schiebe Dein Velo so, dass das Hinterrad einer Sinuskurve folgt. Trage die Messwerte zur Vorderradspur in eine Tabelle ein und vergleiche sie mit den errechneten Werten.
b) Konstruiere zu einer beliebig angenommenen Hinterradkurve die Vorderradkurven zu zwei verschiedenen Rahmenlängen a und vergleiche.
- 3.16 Zeichne mit Turtlegraphik die Radspuren bei einer frei gewählten Leitkurve (wie Klothoide oder Kegelschnitt) C und lass die Turtle die Spurlängen von C und C^* messen.
- 3.17 Miss eine Zeitlang Deine 'Radkilometer' mit je einem Kilometerzähler am Vorder- und am Hinterrad und ermittle die prozentuale Abweichung. Wie funktioniert der Tachometer beim Auto?
- 3.18 Ein Hobbyfahrer addiert am Saisonende die vom Velocomputer gemessenen Trainingseinheiten und notiert: 4232,7 km. Äussere Dich zu diesem Eintrag aus mathematischer Sicht.
- 3.19 Decke etwaige Abhängigkeiten zwischen den "Prüfungsaufgaben" 1 bis 7 (S. 55) auf.
- 3.20 Diskutiere die Graphiken TG 3.24-25. Welche Abschnitte der Leitkurven wirken geradezu paradox?



TG 3.24



TG 3.25

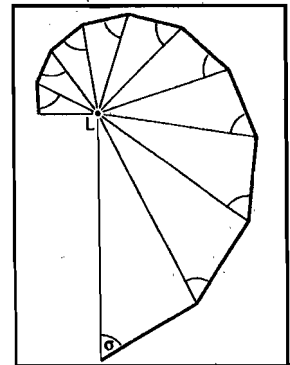
4. SCHIELWINKELKURVEN

Beim Tontaubenschiessen zielt der Jäger auf einen geeigneten "Punkt" vor der fliegenden Taube, um das Flugobjekt zu treffen. In Fachkreisen heisst der Winkel zwischen Visier- und Schusslinie der Vorhalt und entspricht genau dem *Schielwinkel* in der danach benannten Verfolgungsstrategie 3 (S. 10). Dieser Schielwinkel kann nun während der Verfolgung konstant oder variabel sein.

4.1 *Spiraliger Weg zu einer brennenden Kerze*

Ein schönes Beispiel einer *Schielwinkelkurve* verdanken wir der Natur. An warmen Sommerabenden lässt sich der eigenartige Flug gewisser Insekten (wie Nachtfalter und Mücken) beobachten, wenn sie z.B. von der punktförmigen Lichtquelle einer Kerze angezogen werden.

"Infolge der Struktur ihrer Komplexaugen können diese Insekten nicht geradeaus sehen, sondern fliegen in einem bestimmten Winkel auf einen Lichtstrahl zu. Da sie ihren Flug fortwährend diesem konstanten Winkel anpassen, führt sie ein spiralförmiger Weg schliesslich zum Ziel."⁵¹



TG 4.1

Die zur gleichwinkligen Spirale idealisierte Fluglinie lässt sich als Verfolgungskurve mit konstantem Schielwinkel σ und der Lichtquelle L als ruhendem Ziel deuten.⁵²

4.2 *Kreisbogengleiche - ein Beispiel mit variablem Schielwinkel*

In einer seiner vielen "mathematische[n] Unterhaltungen" lässt Ian Stewart u.a. einen Löwen nach einer bestimmten "Kreis-Strategie" einen Gladiator in der Arena verfolgen.⁵³ Dieses Beispiel greifen wir auf und modifizieren es für unser Bedürfnis. (Aus Platzgründen müssen wir - ganz im Gegensatz zu Stewart - die Darstellung sehr nüchtern und knapp halten.)

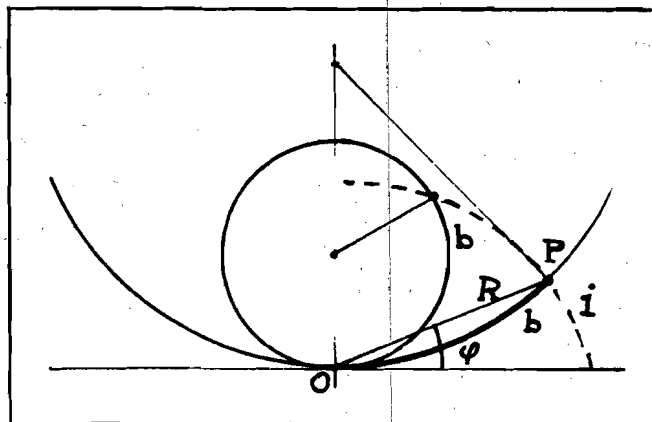
Gegeben sei ein Kreisbüschel mit dem Koordinatenursprung 0 als Büschelpunkt.

⁵¹ Thompson (1973) S. 222.

⁵² Vgl. das Unterkapitel Käfer verfolgen Käfer, S. 36. Erinnerung sei auch an die Schielwinkelkurve zur Kanalaufgabe in TG 2.12, S. 31.

⁵³ Stewart (1992) S. 9.

Gesucht ist vorerst der Ort i der Punkte P , für die der im positiven Drehsinn gemessene Kreisbogen OP die vorgegebene Länge b hat (Abb. 4.1). Wir nennen i die *Kreisbogengleiche* zu b .

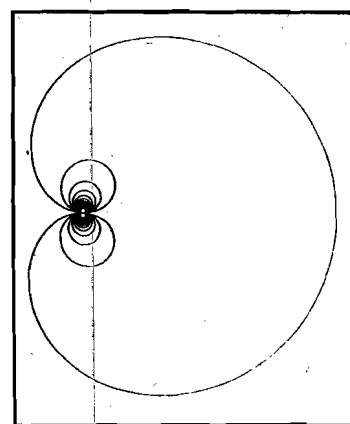


Ihre Gleichung lässt sich in den Polarkoordinaten R und φ (im Bogenmass) aus wenigen elementargeometrischen Beziehungen gewinnen:

$$R = b \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

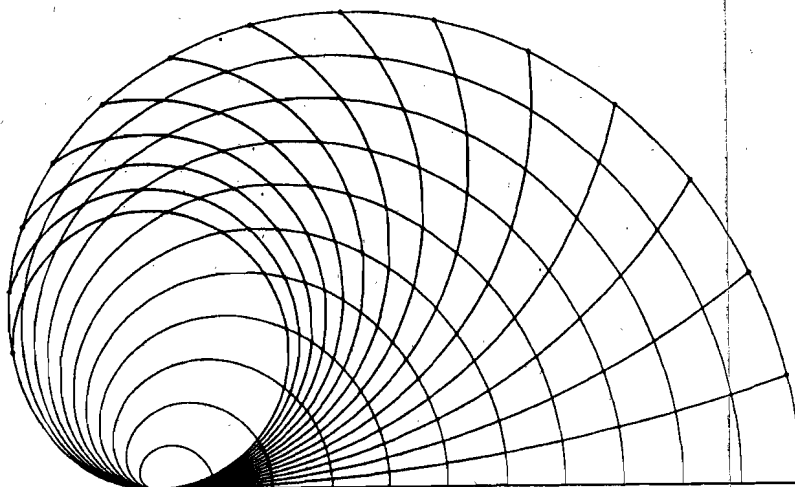
In TG 4.2 nimmt φ die Werte aus $[-18\pi, 18\pi]$ an.

Nun können wir eine rein mathematikbezogene Deutung im folgenden Sinne vornehmen (TG 4.3):



TG 4.2

Die Punkte P einer Kreisbogengleiche bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit v längs des jeweiligen Kreisbogens PO auf O zu. Sie peilen dabei Schritt für Schritt das ruhende Zielobjekt O an und schlagen zur momentanen Blickrichtung den variablen Schielwinkel $\sigma = \varphi$ zwischen der Visierlinie und dem Geschwindigkeitsvektor \vec{v} in P . Die Verfolger befinden sich laufend auf einer gemeinsamen, zum jeweiligen Bogen PO gehörenden Kreisbogengleiche, der damit die Bedeutung einer *Isochrone* zukommt.



TG 4.3

4.3 Von der Unterhaltungsmathematik zum Militär

Für Bouguer sind *Hundekurven* alltägliche Erscheinungen. Konkret erwähnt er in seiner Abhandlung den Fehler in der Marine, "de diriger exactement la Prouë vers les Vaisseaux auxquels on donnoit chasse" (S. 2). Vielleicht dachte er des weiteren an die nach Nahrung jagenden Tiere im Wasser, auf dem Lande und in der Luft. Verfolgungskurven sind auch zu beobachten, wenn Kinder einem an ihnen vorbeierollenden Ball nachlaufen oder wenn sich in einem Fussballmatch Spieler und Gegenspieler gegenseitig in ihren läuferischen Aktionen "bewachen".

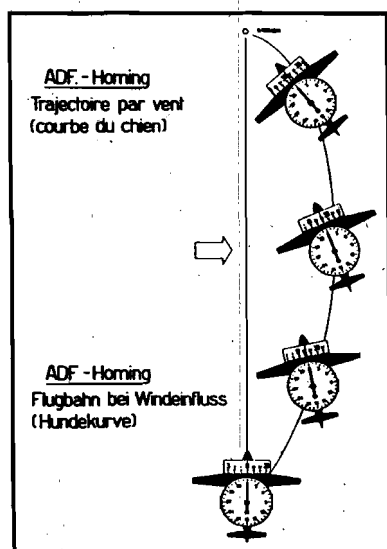


Abb. 4.2

Flugschul-Lehrgänge warnen vor den Gefahren des Abdriftens. In der Abb. 4.2 fliegt ein Flugzeug ein im Norden gelegenes Funkfeuer an: Von Seitenwind abgetrieben, hält es laufend Kurs auf die Station und folgt so der eingezeichneten *Hundekurve*.⁵⁴

Während des Zweiten Weltkrieges haben die Verfolgungskurven eine neue, militärische Bedeutung durch die Entwicklung zielsuchender Geschosse erhalten. Bouguers Verfolgungsmodell war nicht praktikabel: Zum einen nähert sich der Verfolger dem Zielobjekt stets nur von hinten, zum andern müsste der Drehradius des Geschosses beim Geschwindig-

keitsverhältnis $k > 2$ null (!) sein, weil in diesem Falle die Verfolgerkurve im Fangpunkt unendlich stark gekrümmt ist. Angesichts der Beschränkungen von Wendigkeit und Laufzeit des Verfolgers brachten "Verfolgungskurven mit geeignet geregeltem Schielwinkel [...] neue Vorteile".⁵⁵

Und heute? Den Golfkrieg von 1991 haben die Alliierten mit hochentwickelter Elektronik, Hochleistungscomputern und modernster Lasertechnik geführt. Es ist anzunehmen, dass die den Raketensystemen (wie Tomahawk-Cruise-Missiles und Patriot) einprogrammierten, interaktiven Verfolgungsstrategien entsprechend raffiniert sind. Militärisches Geheimnis!

⁵⁴ Aus: Avi, G.: Radionavigation. (Lehrgang). Hg. v. Eidgenössischen Luftamt in Bern. (Vorwort vom 1. November 1967). Anhang. S. 3. Das Bild erinnert uns unwillkürlich an die Kanalaufgabe (S. 31).

⁵⁵ Hosemann (1953) S. 271.

Schluss

Die Beschäftigung mit Verfolgungsproblemen hat uns in die Geometrie der Kurven und am Beispiel der Pseudosphäre ansatzweise in die der Flächen geführt. Angelpunkte waren stets die auftretenden Differentialgleichungen, die nur in den einfachsten Fällen integriert werden konnten. In der Auseinandersetzung der Methoden - Eleganz versus Praktikabilität - musste die "Königin der exakten Wissenschaften" meistens vor der Turtle kapitulieren, die sich im Eldorado der Differentialgeometrie sichtlich wohl fühlt.

Verfolgungsprobleme haben einen Wurzelstock mit vielen Ablegern. Plakativ und ohne Rangordnung seien ein paar Ausblicke genannt:

- Natürliche Geometrie der *Hundekurven*;
- Verfolgung auf der *Kugel* und allgemein auf der *Fläche* und im *Raum*;
- Zulassung zusätzlicher Verfolgungsstrategien;
- Isochronen und Isometriesatz im Falle der Schielwinkelstrategie;
- Variation der Methoden;⁵⁴
- Ergänzung der Sammlung an Aufgaben und Anwendungen.

Dieses Heft will brachliegendes Material aus der Verfolgungsthematik zur didaktischen Aufbereitung für den exemplarischen Mathematikunterricht offenlegen. Es ist im Einzelfall zu prüfen, was sich für die Schule eignet. Die Freude am Thema kommt zwar dem Unterricht zugute, darf aber nicht die alleinige Norm für die Stoffauswahl sein. Keinesfalls ist es meine Absicht - auch die obigen Ausblicke hegen nicht das Ziel - "Prestigestoff" in den Unterricht einzuschleusen. Der sich verengende schulische Rahmen sowie meine Grenzen und die der Schüler tendieren eher ins Gegenteil. Wie dem auch sei - zum Schluss der Arbeit bleibt mir angesichts der Fülle der mathematischen Eindrücke der letzten Monate verwehrt, wie Goethe festzustellen: 'Nun weiss man erst, was Rosenknospe sei. Jetzt, da die Rosenzeit vorbei.'

Vom Leser erhoffe ich mir, dass er ein wenig von Verfolgungsproblemen "verfolgt" wird.

⁵⁴ Vgl. Wunderlich (1957) S. 277-311.

Anhang

A1. Integrale Gleichung der Hundekurve

Die in Abschnitt 2.1 hergeleitete Differentialgleichung der Hundekurve lautet

$$ky y'' - y'^2 \sqrt{1+y'^2} = 0. \quad (\text{A1.1})$$

Wir führen eine neue Variable $y' = p$ ein und erhalten

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p;$$

in die Gleichung (A1.1) eingesetzt, bekommen wir

$$ky \frac{dp}{dy} p - p^2 \sqrt{1+p^2} = 0. \quad (\text{A1.2})$$

Die Lösung $p = 0$ impliziert wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-x_z}$ (S. 16) $y = 0$, also die Verfolgung auf der Geraden.

Nach der Trennung der Variablen y und p in (A1.2) bekommen wir

$$\frac{1}{p\sqrt{1+p^2}} dp = \frac{1}{k} \frac{1}{y} dy. \quad (\text{A1.3})$$

Der Term auf der linken Seite ist (bei Beachtung der Negativität von p) äquivalent zum Ausdruck

$$- \frac{dp}{p^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{p}\right)^2}}.$$

Dieser kann durch die Substitution $u = \frac{1}{p}$ auf die bekanntermassen integrierbare Gestalt

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

gebracht werden; die Integration von (A1.3) liefert

$$\ln \left(\frac{1}{p} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{p}\right)^2} \right) = \frac{1}{k} (\ln y + \ln C_1)$$

und in delogarithmierter Form

$$\frac{1}{p} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{p^2}\right)} = (C_1 y)^{\frac{1}{k}}. \quad (\text{A1.4})$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 setzen wir die Anfangsbedingungen $y=a$ und $1/p=0$ ein und erhalten $C_1=1/a$. Mit diesem Wert schreibt sich (A1.4)

$$y^{\frac{1}{k}} dy - a^{\frac{2}{k}} y^{-\frac{1}{k}} dy = 2a^{\frac{1}{k}} dx. \quad (\text{A1.5})$$

wurzelfrei und nach den Variablen getrennt wie folgt:

Für die zweite Integration müssen die beiden Fälle $k \neq 1$ und $k=1$ unterschieden werden.

Fall 1: $k \neq 1$

Wir integrieren (A1.5) und bekommen unmittelbar

$$\frac{k}{k+1} y^{\frac{1}{k}+1} - a^{\frac{2}{k}} \frac{k}{k-1} y^{1-\frac{1}{k}} = 2a^{\frac{1}{k}} x + C_2.$$

Mit den Anfangswerten $x=0$ und $y=a$ ermittelt man für C_2 den Wert $-2a^{\frac{1}{k}+1} \frac{k}{k^2-1}$; wir setzen ihn oben ein, isolieren x und erhalten die

Gleichung der Hundekurve

$$x = \frac{ky}{2} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k-1} \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) + \frac{ka}{k^2-1}.$$

Fall 2: $k=1$

Die Gleichung (A1.5) vereinfacht sich zu

$$y dy - a^2 \frac{1}{y} dy = 2a dx.$$

Bei analogem Vorgehen wie im Fall 1 bekommen wir mit denselben Anfangswerten die

Gleichung der Hundekurve

$$x = \frac{1}{4a} \left(y^2 - a^2 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{y}{a} \right) \right) \right).$$

A2. Differentialgeometrische Elemente

Im Abschnitt 2.2.1 haben wir bezüglich äquivalenter Terme für $\frac{dx}{dy}$ und $\frac{d^2x}{dy^2}$ sowie für ds und den Krümmungsradius R auf den Anhang A2 verwiesen. Diese Elemente sollen nachstehend aufbereitet werden.

1. Aus der Gleichung (A1.5) gewinnen wir unmittelbar die Beziehung

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} - \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right). \quad (\text{A2.1})$$

2. Wegen $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gilt in anderer Form

$$ds = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}. \quad (\text{A2.2})$$

Andererseits führt $\frac{1}{k} s = x_z$ zur Gleichung $\frac{1}{k} s = x - y \frac{dx}{dy}$; die Ableitung nach y liefert die Beziehung

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{1}{ky} \frac{ds}{dy}. \quad (\text{A2.3})$$

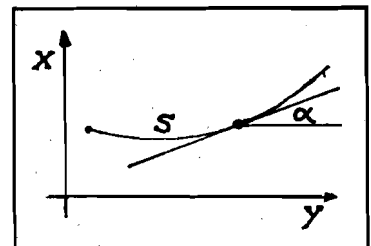
3. Wir ersetzen in (A2.2) den Differentialquotienten durch den rechten Term in (A2.1) und erhalten

$$ds = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) dy. \quad (\text{A2.4})$$

4. Aus der Definition der Krümmung

$K = \frac{d\alpha}{ds}$ ergibt sich

$$K(y) = \frac{d\alpha}{dy} \frac{dy}{ds} = \frac{d\alpha}{dy} \frac{1}{\frac{ds}{dy}}.$$

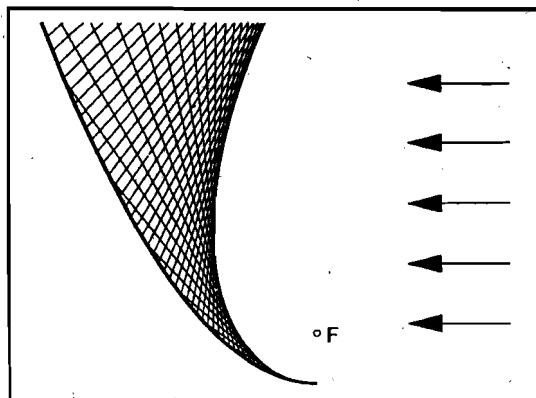


Mit $\alpha = \arctan\left(\frac{dx}{dy}\right)$ und (A2.1-4) errechnen wir, da für den Krümmungsradius $R=1/K$ gilt:

$$R(y) = \frac{\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}} = \frac{ky}{4} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^{\frac{2}{k}} + \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{2}{k}} + 2 \right).$$

A3. Die Hundekurve als Katakaustik der Parabel

In der Turtlegraphik A3.1 wird ein Bündel horizontal einfallender Lichtstrahlen - angedeutet durch die fünf Pfeile - an der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ reflektiert. Uns interessieren die nach der ersten Reflexion ausfallenden Strahlen: Ihre Einhüllende ist die Katakaustik der Parabel und wird in der Literatur Tschirnhaus-Kubik genannt. Dem Leser ist



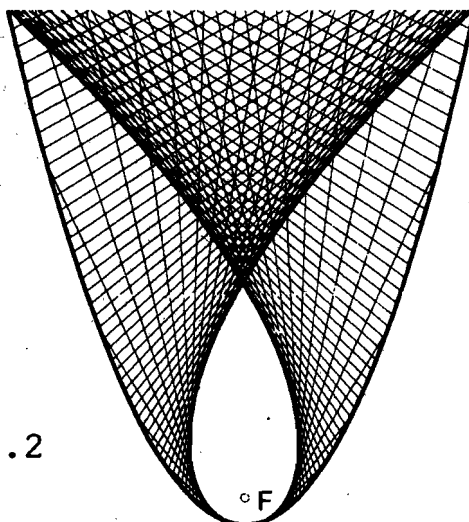
TG A3.1

sie vielleicht als negative Fusspunktkurve der Parabel bekannt. In unserem Falle liegt das Überraschende aber darin, dass sie eine Hundekurve darstellt, bei der der Verfolger doppelt so schnell ist wie die Beute ($k=2$).¹ Anstoss zur näheren Untersuchung der Tschirnhaus-Kubik mit der Gleichung - soviel sei verraten -

$$y^3 - 6y^2 + 9y - 9x^2 = 0$$

gibt die Aufgabe 2.1 (S. 24).

Die Katakaustik in TG A3.1 kann man sich dadurch zur Turtlegraphik A3.2 erweitert denken, dass Licht horizontal von der Symmetrieachse aus nach beiden Seiten zur Parabel fällt² und dort zurückgeworfen wird.



TG A3.2

¹ Wir müssen den Beweis aus Platzgründen schuldig bleiben. Der geneigte Leser führe ihn selbst oder lese zum Beispiel bei Wieleitner (1908) S. 53-56 nach.

² Der Schlichtheit der Figur zuliebe nicht gezeichnet.

A4. Beweis zur Ellipsenisochrone

Wir beweisen die Behauptung in Abschnitt 2.1.2 (S. 25) betreffend die Ellipsenisochrone und übernehmen die dort gewählten Bezeichnungen. Die Darstellung erfolgt vorteilhaft in Polarkoordinaten;³ die kart. Koordinaten x und y leisten Starthilfe.

Im ersten Schritt legen wir den Pol in den Punkt F , wählen (FM) als Polarachse und ϱ, ϕ als Polarkoordinaten (Abb. A4.1). In der Folge stoßen wir erwartungsgemäss auf die Brennpunktsgleichung der Ellipse. Da diese Form eher ungewohnt ist, führen wir sie im zweiten Schritt mittels der Polarkoordinaten r, φ mit dem Pol im Treffpunkt M in die bekannte Polargleichung (mit dem Mittelpunkt als Pol) über.

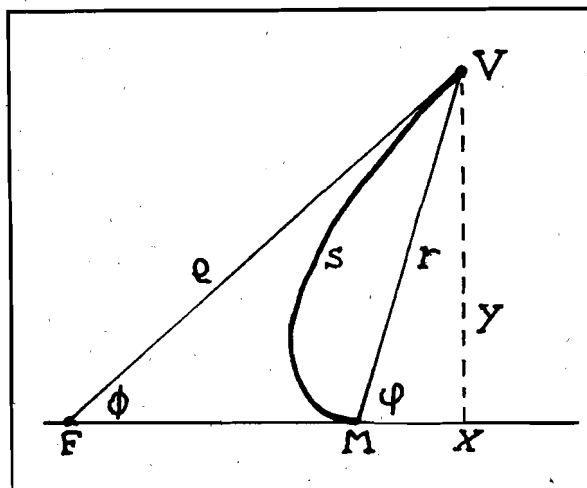


Abb. A4.1

VF ist ein Abschnitt auf der Tangente an die Hundekurve durch V , s ist die Länge des Kurvenbogens VM .

Mit $\varepsilon := \frac{1}{k}$ gilt $FM = \varepsilon s$. Aus $\cos \phi = \frac{\varepsilon s + x}{\varrho}$ folgt

$$x = \varrho \cos \phi - \varepsilon s, \quad \text{aus } \sin \phi = \frac{y}{\varrho} \quad \text{wird } y = \varrho \sin \phi.$$

Zur Elimination von x und y leiten wir diese nach s ab:

$$\frac{d\varrho}{ds} \cos \phi - \varrho \sin \phi \frac{d\phi}{ds} - \varepsilon = \cos \phi \quad (\text{A4.1})$$

$$\frac{d\varrho}{ds} \sin \phi + \varrho \cos \phi \frac{d\phi}{ds} = \sin \phi. \quad (\text{A4.2})$$

Wir multiplizieren (A4.1) mit $\cos \phi$ und (A4.2) mit $\sin \phi$. Die anschliessende Addition liefert

$$\frac{d\varrho}{ds} = 1 + \varepsilon \cos \phi. \quad (\text{A4.3})$$

³ Vgl. Lotka (1928) S. 421f.

(A4.3) in (A4.2) eingesetzt führt zu

$$\varrho \frac{d\phi}{ds} = -\varepsilon \sin\phi. \quad (\text{A4.4})$$

Diese beiden Gleichungen multiplizieren wir mit $1-\varepsilon\cos\phi$ bzw. mit $\varepsilon\sin\phi$ und erhalten nach der Addition

$$(1-\varepsilon\cos\phi) \frac{d\varrho}{ds} + \varrho\varepsilon\sin\phi \frac{d\phi}{ds} = 1-\varepsilon^2$$

oder in anderer Form: $d((1-\varepsilon\cos\phi)\varrho) = (1-\varepsilon^2)ds$.
Integration von 0 bis s ergibt mit $e:=\varepsilon s$

$$\frac{\varrho\varepsilon}{1-\varepsilon^2} (1-\varepsilon\cos\phi) = e. \quad (\text{A4.5})$$

Damit ist der erste Schritt zu Ende.

Nun zeigen wir im zweiten Schritt, dass es sich bei (A4.5) um die Polargleichung einer Ellipse mit der numerischen Exzentrizität ε und der linearen Exzentrizität e handelt.

Aus der Abb. A4.1 entnehmen wir unmittelbar, dass $x=r\cos\phi$ und $x=\varrho\cos\phi-e$ gilt. Gleichsetzen führt zu

$$\varrho\cos\phi = r\cos\phi + e. \quad (\text{A4.6})$$

Mit dem Cosinussatz erhalten wir im Dreieck FMV die Beziehung $\varrho^2 + e^2 - 2e\varrho\cos\phi = r^2$; den Faktor $\varrho\cos\phi$ ersetzen wir durch die rechte Seite von (A4.6), radizieren und bekommen

$$\varrho = \sqrt{r^2 - e^2 + 2e(r\cos\phi + e)}. \quad (\text{A4.7})$$

In der nennerfrei geschriebenen Form von (A4.5) ersetzen wir die Faktoren $\varrho\cos\phi$ und ϱ durch die äquivalenten Terme gemäss (A4.6) und (A4.7) und erhalten nach ein paar einfachen Umformungen die Gleichung

$$r^2 (1-\varepsilon^2 \cos^2\phi) = \frac{e^2 (1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2}.$$

Mit $\varepsilon = \frac{e}{a}$ und $a^2 - e^2 = b^2$ gelangen wir schliesslich zu

$$r^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2 \cos^2\phi}. \quad (\text{A4.8})$$

Das ist die bekannte Polargleichung der Ellipse (mit dem Mittelpunkt als Pol).

A5. Integrale Gleichung der Traktrix

Nach Gleichung (15) im Abschnitt 3.1 ist

$$x = -\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy + C. \quad (\text{A5.1})$$

Mit der Substitution $y = a \sin t$, $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$, wird daraus

$$x = -a \cos t - a \int \frac{dt}{\sin t} + C. \quad (\text{A5.2})$$

Mit nochmaliger Substitution $t = 2u$ mit $0 < u \leq \frac{\pi}{4}$ bringen wir das verbleibende Integral in die Form

$$\int \frac{d(\tan u)}{\tan u}, \text{ also gleich } \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right). \text{ Aus (A5.2) wird}$$

$$x = -a \cos t - a \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right) + C. \quad (\text{A5.3})$$

Wegen $\tan \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$ erhalten wir nach Erweiterung des rechten Bruchterms mit a , bei $y = a \sin t$, die Gleichung

$$\tan \frac{t}{2} = \frac{y}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (\text{A5.4})$$

Einsetzen von (A5.4) in (A5.3) liefert nach einer kurzen Umrechnung von $a \cos t$

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln \frac{y}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} + C.$$

Aus der Anfangsbedingung, dass $A(0, a)$ ein Punkt der Kurve sein soll, ergibt sich für C der Wert 0.

Wir erhalten somit für die "rechte Hälfte" der **Traktrix** die folgende **Gleichung**:

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}. \quad (\text{A5.5})$$

A6 Äquitangentiale einer Sinuskurve

Wir beziehen uns auf die Abbildung 3.5 (Seite 60) und wählen zur Beschreibung der Ausgangskurve C^* den Parameter t , d.h.

$$C^*: y(t) = A \sin t. \quad (\text{A6.1})$$

P^* als beliebiger Punkt auf C^* hat dann die Koordinaten t bzw. $A \sin t$. Von P^* gelangen wir nach Durchmessen der Strecke a in Richtung des Tangentenvektors zum zugeordneten Punkt $P(x, y)$ auf der gesuchten Äquitangentialen C von C^* . Wir sind am Ziel, wenn es uns gelungen ist, die Koordinaten x und y von P in Abhängigkeit des Parameters t auszudrücken.

Die Rechnung gestaltet sich kurz skizziert wie folgt:

Die Steigung der Tangente bekommen wir durch **Ableiten** von y nach t :

$$\dot{y} = a \cos t. \quad (\text{A6.2})$$

Die Punkt-Steigungsform der Geraden (P^*P) liefert

$$\frac{y - A \sin t}{x - t} = A \cos t. \quad (\text{A6.3})$$

Für den Term $y - A \sin t$ gewinnen wir nach Pythagoras die Beziehung

$$(y - A \sin t)^2 = a^2 - (x - t)^2. \quad (\text{A6.4})$$

Quadrieren von (A6.3) und Einsetzen von (A6.4) ergibt nach kurzer Rechnung das Ergebnis

$$x(t) = t + \frac{a}{\sqrt{1 + A^2 \cos^2 t}}. \quad (\text{A6.5})$$

Analoges Vorgehen bezüglich y führt nach ebenso kurzer Rechnung zum Resultat

$$y(t) = A \sin t + \frac{a A \cos t}{\sqrt{1 + A^2 \cos^2 t}}. \quad (\text{A6.6})$$

Mit den Gleichungen (A6.5) und (A6.6) liegt nun die Darstellung der gesuchten Äquitangentiale der Ausgangskurve C^* in Parameterform vor.⁴

⁴ Jetzt lassen sich die Leitkurve C^* und ihre Äquitangentiale C ohne Programmierarbeit z.B. in Maple plotten.

A7 Befehlsliste zu Maple-Graphiken

Maple ist ein Computeralgebra-System der Waterloo Maple Software.

Die nachstehenden Befehlszeilen sind in Maple V Release 2.0 geschrieben worden.

Erzeugung der Abbildung 2.2 (S. 17):

Richtungsfeld zur Differentialgleichung der
Hundekurve mit einer Trajektorie

```
> with(DEtools):
> a:=1:
> k:=2:
> DQ:=(1/2)*((y/a)^(1/k)-(y/a)^(-1/k));
```

$$DQ := \frac{1}{2} \sqrt{y} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}}$$

```
> pp1:=phaseportrait(DQ,[y,x],y=0..a,{x(a)=0},stepsize=0.001):
> df1:=dfieldplot(DQ,[y,x],y=0..a,x=0..2/3*a,arrows=LINE):
> with(plots):
> display([pp1,df1],scaling=constrained);
```

Erzeugung der Abbildung 3.2 (S. 46):

Richtungsfeld zur Differentialgleichung der
Traktrix mit einer Trajektorie⁵

```
> with(DEtools):
> a:=1:
> DQ:=-sqrt(a^2-x^2)/x;
```

$$DQ := - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

```
> pp:=phaseportrait(DQ,[x,y],x=0.15..a,{y(a)=0},stepsize=0.001,limitrange=true):
> df:=dfieldplot(DQ,[x,y],x=0.15..1.05,y=0..1.5,arrows=LINE):
> with(plots):
> display([pp,df],scaling=constrained);
```

⁵ Wir verweisen bei dieser Gelegenheit auf Gander, W. und Jiří Hřebíček: Solving problems in scientific computing using MAPLE and MATLAB. Heidelberg: Springer-Verlag 1993. (Chapter 1. The Tractrix and Similar Curves. S. 1-14).

Literaturverzeichnis

Verzeichnis der abgekürzt zitierten Literatur

- Bacon, Ralph Hoyt: *The pursuit course*. In: *Journal of Applied Physics* 21(1950). S. 1065f.
- Bikner, Angelika: *Das Käferproblem*. In: *Praxis der Mathematik* 27(1985). S. 385-392.
- Brocard/Lucas
Aufgabe Nr. 250 von H. Brocard. Aufgabe Nr. 251 von É. Lucas. In: *Nouvelle Correspondance Mathématique* 13(1877). S. 175f. und S. 280.
- Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig: B.G. Teubner 1901. Bd. 3.
- ClarINVAL, André: *Esquisse historique de la courbe de poursuite*. In: *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 10(1957). S. 25-37.
- Davis, Harold T.: *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. New York: Dover Publications 1962.
- Dörrie, Heinrich: *Mathematische Miniaturen*. Nendeln: Sändig Reprint 1979 (unveränd. Ndr. von 1948).
- ERS *Elektronisches Rückfahrssystem*. Ein System für alle Arten von Anhängerzügen. Eine Entwicklung der Georg Fischer Fahrzeugtechnik GmbH, Singen (o.J.). 17 Seiten (mit Einbau- und Funktionsschema sowie 23 Abbildungen).
- Gardner, Martin: *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*. New York: Simon and Schuster 1959.
- Hainer, Karl und Gunter Stein: *Computer im Mathematikunterricht*. Teil II. In: *Lernzielorientierter Unterricht* 2(1974). S. 33-48.
- Heinemann, Rolf: *Schleppkurven. Funktionale Erfassung und Anwendung auf die Fahrbahngeometrie*. In: *Veröffentlichungen des Instituts für Strassenbau und Eisenbahnwesen der Universität Karlsruhe* (1972) 9. S. 3-99.
- Hosemann, R.: *Verfolgungskurven*. In: *Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939-46*. Bd. 3. *Angewandte Mathematik*. Teil I. Hrsg. von Alwin Walther. Weinheim: Verlag Chemie 1953. S. 269-307.
- Jänecke, Ernst: *Kann man aus der Spur eines Rades die Fahrtrichtung erkennen?* In: *Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* 45(1914). S. 94-102.
- Kern, Hans: *Ein Verfolgungsproblem am regulären n -Eck*. In: *Praxis der Mathematik* 28(1986)1. S. 4-11.
- Kirchgraber, Urs: *Von Mathematik und Mathematikunterricht*. In: *Berichte über Mathematik und Unterricht*. Hrsg. von Urs Kirchgraber. ETH Zürich (1990), Bericht No. 90-01.
- Loria, Gino: *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*. Leipzig: B.G. Teubner 1902 (deutsche Ausgabe von Fritz Schütte).
- Lotka, Alfred J.: *Families of curves of pursuit, and their isochrones*. In: *Am. Math. Monthly*. 35(1928). S. 421-424.
- Luterbacher, Jos.: *Die Verfolgungskurven einer Geraden*. Bern 1909. Inaugural-Diss. der phil. Fakultät der Univ. Bern.
- Maheu, Gilles: *La vie scientifique au milieu du XVIII^e siècle: Introduction à la publication des lettres de Bouguer à Euler*. In: *Revue d'Histoire des Sciences* XIX(1966). S. 206-224.

- De Maupertuis: *Sur les courbes de poursuite*. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 1732.
- Pöppe, Christoph: *Verliebte Mäuse, verschlungene Wege und ganz gewöhnliche Differentialgleichungen*. In: *Spektrum der Wissenschaft* (1990)2. S. 10-13.
- Puckette, C.C.: *The curve of pursuit*. In: *The Mathematical Gazette* 37(1953). S. 256-260.
- Schneebeli, Hans Rudolf: *Differentialgleichungen für den Fall des Falles*. In: *Der Mathematikunterricht* 41(1995)2. S. 46-57.
- Smith, David Eugene: *On the origin of certain typical problems*. In: *The American Mathematical Monthly* 24(1917). S. 64-71.
- Steinhaus, Hugo: *One hundred problems in elementary mathematics*. New York: Basic Books 1964.
- Steinhaus, H.: *Mathematical snapshots*. New York: Oxford University Press 1978.
- Stewart, Ian: *Ein geschickter Gladiator kann selbst dann mit dem Leben davorkommen, wenn er nur ebenso schnell zu laufen vermag wie der Löwe, der ihn in der Arena verfolgt*. In: *Spektrum der Wissenschaft*. (1992)11. S. 9-11.
- Thompson, d'Arcy: *Über Wachstum und Form*. Basel: Birkhäuser 1973. Wissenschaft und Kultur Bd. 26. S. 222.
- Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik*. Berlin: Walter de Gruyter 1980. Bd. 1. (vollst. neu bearb.)
- Wieleitner, Heinrich: *Spezielle Ebene Kurven*. Sammlung Schubert LVI. Leipzig: G.J. Göschen'sche Verlagsbuchhandlung 1908.

Weiterführende Literatur

- Bourlet, C.: *Traité des bicycles et bicyclettes suivi d'une application à la construction des vélodromes*. Paris: Gauthier-Villars (o.J.). (Vorwort vom 4. Dezember 1894).
- Bozzo, C.: *Problèmes de poursuite 2D et 3D. Caractérisation de la trajectoire et de la cinématique d'un mobile manoeuvrant*. In: *Sciences et Techniques de l'Armement. Mémorial de l'Artillerie française* 57(1983). S. 221-281.
- Cesàro, Ernesto: *Propriétés d'une courbe de poursuite*. In: *Nouvelles Annales de Mathématiques* 42(1883). S. 85-89.
- Cesàro, Ernesto: *Sur les lignes de poursuite*. In: *Nouvelles Annales de Mathématiques* 45(1886). S. 65-83.
- Dunoyer, L.: *Sur les courbes de poursuite d'un cercle*. In: *Nouvelles Annales de Mathématiques* 4(1906). S. 193-222.
- Marx, Erich: *Konstruktion von Schleppkurven*. In: *Strassenforschung*. Hg. von: Bundesministerium für Bauten und Technik in Wien. 1975. Heft 48.
- Morley, F.B.: *A curve of pursuit*. In: *The American Mathematical Monthly* 28(1921). S. 54-61. (Numerische Lösung zur Verfolgung am Kreis).
- Osterloh, Horst: *Strassenplanung mit Klothoiden und Schleppkurven*. Wiesbaden: Bauverlag 1977.
- Wunderlich, Walter: *Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel*. In: *Monatshefte für Mathematik* 61(1957). S. 277-311.

89-01	H. Walser	Fraktale
89-02	H.R. Schneebeli	Zwei Fallstudien zur Geometrie
89-03	W. Büchi	Astronomie im Mathematikunterricht
89-04	M. Adelmeyer	Theorem von Sarkovskii
90-01	U. Kirchgraber	Von Mathematik und Mathematikunterricht
90-02	A. Kirsch	Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es "verstehen"?
90-03	U. Kirchgraber	Mathematik im Chaos: Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II
91-01	A. Barth	Formalisierung und künstliche Intelligenz – eine mögliche Behandlung in der Schule
91-02	U. Kirchgraber	Smale's Beweis des Fundamentalsatzes
91-03	M. Federer	Preistheorie
91-04	M. Gauglhofer	Zur Theorie der sozialen Entscheidungen: Das Arrow-Paradoxon bei Abstimmungen über mehrere Alternativen
92-01	U. Kirchgraber	Chaotisches Verhalten in einfachen Systemen
93-01	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Annäherung an den Goldenen Schnitt
93-01(I)	M. Huber, U. Manz, H. Walser	Approccio alla Sezione Aurea
93-02	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Perspektive und Axonometrie
93-02(I)	P. Gallin, H. Keller, H. Stocker	Prospettiva e Assonometria
93-03	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Verzweigungsphänomene
93-03(I)	H.R. Schneebeli, N. Sigrist, F. Spirig	Fenomeni di Biforcazione
93-04	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Der Fallschirmspringer
93-04(I)	H. Biner, H.P. Dreyer, W. Hartmann, A. Moretti	Il Paracadutista
93-05	H.R. Schneebeli	Alles fliesst – Mit dem Graphikrechner zu den Quellen der Analysis
93-06	H. Biner	Kongruenzabbildungen und Symmetrien im Euklidischen Raum
93-07	U. Kirchgraber	Hundert Jahre Störungstheorie – Differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev
94-01	U. Maurer	Kryptologie: Mathematik zwischen Anwendung und Ästhetik
94-02	H. Klemenz	Computergestützte Raumgeometrie
94-03	F. Barth	Erstens kommt es anders und zweitens als man denkt - Paradoxien im Umfeld der bedingten Wahrscheinlichkeit
94-04	W. Henn	Auto und Verkehr – Beispiele aus der Analysis zum realitätsnahen Mathematikunterricht
95-01	N. Sigrist	Auf der Kippe

95-02	U.Kirchgraber U. Kirchgraber, N. Sigrist	Als Poincaré, Hadamard und Perron die Invarianten Mannigfaltigkeiten entdeckten. Feigenbaum-Universalität: Beschreibung und Beweisskizze
95-03	A. Gächter	Infinitesimalgeometrie - am Beispiel der Kreisevolvente
95-04	P. Gallin	Grund- und Aufrissmethode in der Wahrschein- lichkeitsrechnung
95-05	P. Bolli	The unreasonable effectiveness of mathematics
95-06	G. Schierscher	Verfolgungsprobleme