Mathematik und ihre Anwendungen I

Komplexe Zahlen

Notizen, Beispiele und Aufgaben

fürs Schwerpunktfach

Jan-Mark Iniotakis

29. April 2020

Impressum

Autor: Jan-Mark Iniotakis

Illustrationen: Patrick Bütler und Sébastien Garmier

Finanzielle und ideelle Förderung durch das Programm „ETH für die Schule“

Inhalt

1 Grundlagen

Dass Zahlenmengen erweitert werden, ist nicht neu: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ werden zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitert, in denen uneingeschränkt subtrahiert werden kann. Mit Hilfe der in $\mathbb{Z}$ enthaltenen negativen Zahlen können so Summengleichungen der Form $3 + x = 0$ oder $15 + x = 7$ gelöst werden – welche sich in $\mathbb{N}$ zwar formulieren, aber nicht lösen lassen.

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ werden ihrerseits erweitert zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, in denen eine (bis auf die Division durch 0) uneingeschränkte Division möglich ist. Denn mit Hilfe der in $\mathbb{Q}$ enthaltenen Brüche ist es möglich, die Lösungen für Produktgleichungen der Form $3 \cdot x = 1$ oder $15 \cdot x = 7$ anzugeben.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wiederum erweitert man zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Denn in $\mathbb{R}$ ist es möglich, zum Beispiel die Gleichung $x^2 = 2$ zu lösen oder den Zahlenwert π für die Fläche des Einheitskreises anzugeben.

Doch auch in $\mathbb{R}$ gibt es einfache Potenzgleichungen wie etwa $x^2 = -1$, die sich zwar aufstellen, aber nicht lösen lassen. Dies legt es nahe, auch $\mathbb{R}$ zu erweitern. Wie dies geht, werden wir im weiteren Verlauf des Kapitels sehen. Das Resultat dieser Erweiterung wird die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sein, in der insbesondere die Potenzgleichung $x^2 = -1$ eine Lösung haben wird – nämlich die sogenannte imaginäre Einheit i.

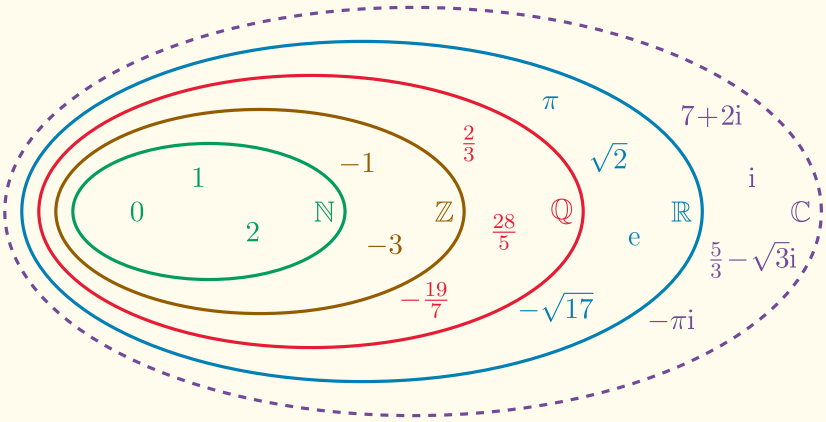


Abbildung 1.1: Die Zahlenmengen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Die Einsatzmöglichkeiten der komplexen Zahlen gehen weit über die Lösung von Potenzgleichungen hinaus. Im weiteren Verlauf dieses Buches werden wir einige ihrer Vorteile kennenlernen. Zuvor wollen wir uns jedoch der Frage zuwenden, wie sich $\mathbb{R}$ überhaupt zu $\mathbb{C}$ erweitern lässt. Um dieser Frage besser nachgehen zu können, betrachten wir zunächst einige relevante Aspekte der Erweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$.

Ein erstes Beispiel: die Erweiterung von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$

Gehen wir aus von der Menge $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ der **natürlichen Zahlen**. Bekanntlich sind auf dieser Menge zwei Operationen definiert, die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$, welche folgende Eigenschaften aufweisen:

- Addition und Multiplikation sind **assoziativ**. Das heisst, für alle $l, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(l + m) + n = l + (m + n), \qquad\qquad (l + m) + n = l + (m + n)$$

- Addition und Multiplikation sind **kommutativ**. Das heisst, für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$m + n = n + m, \qquad\qquad m \cdot n = n \cdot m$$

- Addition und Multiplikation sind **distributiv**. Das heisst, für alle $l, m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n, \qquad\qquad (l + m) \cdot n = l \cdot n + m \cdot n$$

Die Menge $\mathbb{N}$ enthält die Zahlen 0 und 1. Erstere bezeichnet man als das **Neutralelement der Addition**, Letztere als das **Neutralelement der Multiplikation**. Denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n + 0 = n, \qquad\qquad n \cdot 1 = n$$

In $\mathbb{N}$ lassen sich einige fundamentale Gleichungen formulieren – aber nicht lösen. Um zum Beispiel die Addition mit einer natürlichen Zahl n rückgängig zu machen, benötigt man deren **additives Inverselement**, üblicherweise als $-n$ notiert. Definiert ist $-n$ als diejenige Variable x, welche die Summengleichung $n + x = 0$ löst. In $\mathbb{N}$ gibt es jedoch keinen Lösung für diese Gleichung. Man erweitert deshalb die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen um die Menge aller additiven Inverselemente zur Menge $\mathbb{Z}$ der **ganzen Zahlen**:

$$\mathbb{Z} \;:=\; \mathbb{N} \cup \{-n \,\big|\, n \in \mathbb{N}\} \;=\; \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Man beachte: Durch diese Definition ist $\mathbb{Z}$ zunächst nur als Menge von Zahlenelementen ohne Rechenoperationen definiert. Auch das Minus-Zeichen vor den Inverselementen $-n$ dient nur der formalen Notation, solange keine Rechenoperationen in der Menge $\mathbb{Z}$ erklärt sind.

Bekanntlich lassen sich die Addition und die Multiplikation von der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen auf die so definierte Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen fortsetzen. Einige relevante Aspekte dieser Fortsetzung wollen wir im Folgenden genauer betrachten. Um dabei nachvollziehbar zu machen, auf welche Zahlenmenge sich die jeweiligen Rechenoperationen beziehen, wollen wir die Addition und die Multiplikation auf der erweiterten Zahlenmenge $\mathbb{Z}$ provisorisch durch $\oplus$ und $\odot$ bezeichnen.

- Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ sind kommutativ und assoziativ. Wie beim Rechnen in $\mathbb{N}$ ist die Multiplikation auf Summen distributiv.
- Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$ setzen die beiden entsprechenden Rechenoperationen in $\mathbb{N}$ fort. Für alle $n, m \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ gilt also:

$$m \oplus n \;=\; m + n \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad m \odot n \;=\; m \cdot n$$

- Jedes neue Element der Form $-n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, das heisst jede negative ganze Zahl, erfüllt die definierende Gleichung für additive Inverselemente. Für alle $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ gilt also:

$$n \oplus -n \;=\; 0$$

  Damit hat jedes Element in $\mathbb{Z}$ ein additives Inverselement. Das additive Inverselement von $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ist $-n$, und dasjenige von $-n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ist n.

Diese Eigenschaften der Rechenoperationen $\oplus$ und $\odot$ auf $\mathbb{Z}$ haben weitreichende Konsequenzen. Zum Beispiel sind durch sie bereits die Werte aller Produkte in $\mathbb{Z}$ festgelegt:

Beispiel 1.1

Für alle $m, n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ gilt $-m \odot n \;=\; -(m \cdot n)$, denn:

$$0 \overset{(1)}{=} 0 \odot n \overset{(2)}{=} \big(m \oplus -m\big) \odot n \overset{(3)}{=} m \odot n \oplus -m \odot n \overset{(4)}{=} m \cdot n \oplus -m \odot n$$

Hierbei folgen die Gleichheiten (1) und (4) daraus, dass die Multiplikation $\odot$ in $\mathbb{Z}$ der Multiplikation $\cdot$ in $\mathbb{N}$ entsprechen soll. Die Gleichheit (2) ergibt sich aus der Definition des additiven Inverselements. Die Gleichheit (3) gilt aufgrund der Distributivität. Damit ist $-m \odot n$ das additive Inverselement zu $m \cdot n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, nämlich $-(m \cdot n)$.

Beispiel 1.2

Für alle $m, n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ gilt $-m \odot -n \;=\; m \cdot n$, denn:

$$0 \overset{(1)}{=} -m \odot 0 \overset{(2)}{=} -m \odot \big(n \oplus -n\big) \overset{(3)}{=} -m \odot n \oplus -m \odot -n \overset{(4)}{=} -(m \cdot n) \oplus -m \odot -n$$

Hierbei folgen die Gleichheiten (1) und (4) gemäss Beispiel 1.1. Die Gleichheit (2) ergibt sich aus der Definition des additiven Inverselements. Die Gleichheit (3) gilt aufgrund der Distributivität. Damit ist $-m \odot -n$ das additive Inverselement von $-(m \cdot n) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, nämlich $m \cdot n$.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ werden also zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitert. Zu jeder ganzen Zahl $z \in \mathbb{Z}$ existiert ein additives Inverselement $-z \in \mathbb{Z}$. Dies erlaubt es, auf ganz $\mathbb{Z}$ die zur Addition inverse Rechenoperation, die **Subtraktion**, einzuführen: Die Subtraktion von $z \in \mathbb{Z}$ ist definiert durch die Addition des additiven Inverselements $-z \in \mathbb{Z}$. Sobald die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erweitert sind, kann man analog auch die zur Multiplikation inverse Rechenoperation der **Division** einführen. Zu jeder rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gibt es ein **multiplikatives Inverselement** $q^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Damit lässt sich die Division durch $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ als Multiplikation mit $q^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definieren. Auf den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ stehen also die vier „Grundrechenarten" zur Verfügung, die sich auf die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen.

Die Menge der komplexen Zahlen

Der Ausgangspunkt, um die reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen zu erweitern, ist die Gleichung $z \cdot z = -1$, die im Reellen aufgestellt, aber nicht gelöst werden kann:

Definition 1.3 ▶ imaginäre Einheit

Die **imaginäre Einheit** i ist eine Variable, welche die Gleichung $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ löst.

Mit Hilfe der imaginären Einheit lässt sich die Menge der komplexen Zahlen wie folgt einführen:

Definition 1.4 ▶ komplexe Zahl, Realteil, Imaginärteil, komplex Konjugierte

- Eine **komplexe Zahl** z ist in ihrer **Normalform** durch zwei reelle Zahlen x und y definiert, die mit Hilfe der imaginären Einheit i wie folgt notiert werden:

$$z \;:=\; x + \mathrm{i}y$$

- Die reelle Zahl x nennt man den **Realteil** von $z = x + \mathrm{i}y$, die reelle Zahl y den **Imaginärteil** von z:

$$\mathrm{Re}\,(z) \;=\; \mathrm{Re}\,(x + \mathrm{i}y) \;:=\; x, \qquad \mathrm{Im}\,(z) \;=\; \mathrm{Im}\,(x + \mathrm{i}y) \;:=\; y$$

- Die **komplex Konjugierte** einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist:

$$\overline{z} \;:=\; x - \mathrm{i}y \;:=\; x + \mathrm{i}(-y)$$

- Die Menge aller komplexen Zahlen bezeichnet man durch $\mathbb{C}$.

In dieser Definition kann die Notation $x+\mathrm{i}y$ zunächst nur formal aufgefasst werden. Denn noch ist auf der Menge $\mathbb{C}$ weder eine Addition noch eine Multiplikation definiert. Wie man den Realteil, den Imaginärteil und die komplex Konjugierte einer komplexen Zahl erhält, lässt sich aus dieser formalen Notation dagegen leicht ablesen (siehe A1.2, A1.3):

Beispiel 1.5

Für die komplexe Zahl $2 - 3\mathrm{i}$ erhält man:

$$\mathrm{Re}\,(2 - 3\mathrm{i}) = 2, \qquad \mathrm{Im}\,(2 - 3\mathrm{i}) = -3, \qquad \overline{2 - 3\mathrm{i}} = 2 + 3\mathrm{i}$$

Die Notation komplexer Zahlen in Normalform legt nahe, verschwindende Imaginär- oder Realteile bei komplexen Zahlen der Form $x + 0\mathrm{i}$ oder $0 + \mathrm{i}y$ komplett zu ignorieren:

Definition 1.6 ▶ reelle Zahl in $\mathbb{C}$, imaginäre Zahl

- Eine komplexe Zahl der Form $x + 0\mathrm{i}$ wird ihrem Realteil, der reellen Zahl x, gleichgesetzt und als **reell** bezeichnet.
- Eine komplexe Zahl der Form $0 + \mathrm{i}\,y$ bezeichnet man als **imaginär**. Eine solche Zahl wird abkürzend auch als $\mathrm{i}y$ notiert. Die komplexen Zahl $0 + 1\mathrm{i}$ wird mit der imaginären Einheit i gleichgesetzt.

Die Gleichsetzung von $x \in \mathbb{R}$ mit $x + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ spielt eine fundamentale Rolle. Denn durch sie können wir die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als eine Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen. Geometrisch wird dies leicht nachvollziehbar, wenn man die komplexen Zahlen in der sogenannten **Zahlenebene** darstellt:

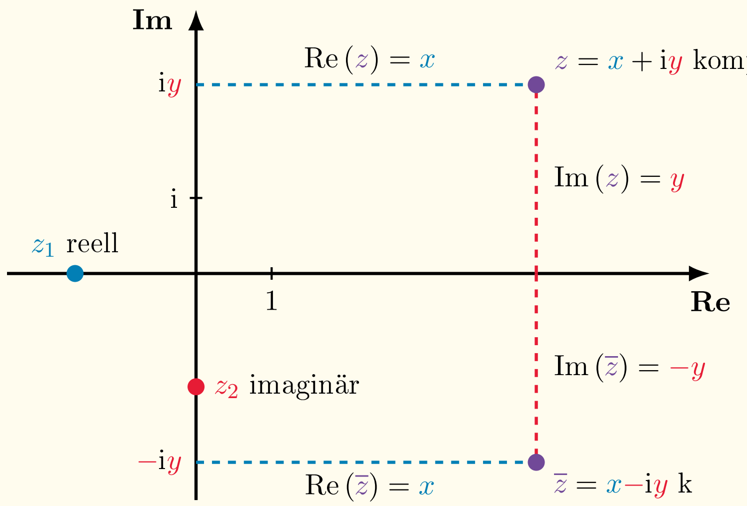


Abbildung 1.2: Komplexe Zahlen in der Zahlenebene.

Da eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ durch die beiden reellen Zahlen $\mathrm{Re}\,(z) = x$ und $\mathrm{Im}\,(z) = y$ eindeutig bestimmt ist, kann man sie durch einen Punkt der zweidimensionalen Zahlenebene darstellen. Wie Abbildung 1.2 illustriert, trägt man dabei den Realteil entlang der horizontalen **reellen Achse** ab, und den mit der imaginären Einheit i versehenen Imaginärteil entlang der vertikalen **imaginären Achse**. Auf der reellen Achse der Zahlenebene liegen damit genau diejenigen komplexen Zahlen, deren Imaginärteil verschwindet. Sie entspricht damit der Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Auf der imaginären Achse sind dagegen alle imaginären Zahlen aufgetragen.

Die imaginäre Einheit i

Im letzten Abschnitt wurde die imaginäre Einheit i als Variable eingeführt, welche der Gleichung $\mathrm{i}^2 = -1$ genügen soll. Natürlich steht hinter dieser Definition die Absicht, mit der Hilfe von i die Quadratwurzeln negativer Radikanden bestimmen zu können. Warum definieren wir also nicht einfach „$\mathrm{i} := \sqrt{-1}$“ und rechnen mit komplexen Zahlen gemäss der suggestiven Notation in Definition 1.4, wann immer negative Radikanden auftreten? Betrachten wir zwei Beispiele, um die Reichweite dieser Frage besser erfassen zu können:

Eine typische Aufgabe, bei der das Rechnen mit reellen Zahlen an seine Grenzen stösst, ist die Lösung reeller quadratischer Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ mit negativer Diskriminante. Wie bekannt lassen sich die (eventuell identischen) reellen Lösungen x_1 und x_2 einer solchen Gleichung mit Hilfe der quadratischen Lösungsformel bestimmen, sofern die Diskriminante $D := b^2 - 4ac$ unter der Wurzel nicht negativ ist (vgl. Kapitel 5):

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Versuchen wir in einem Beispiel, diese Lösungsformel im Fall einer negativen Diskriminante anzuwenden, indem wir i mit $\sqrt{-1}$ identifizieren und die bekannten reellen Rechengesetze für die Rechnung im Komplexen naiv beibehalten:

Beispiel 1.7

Für $z^2 - 2z + 5 = 0$ mit der Diskriminante $D = -16 < 0$ ergibt die Lösungsformel:

$$z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \; „\overset{(1)}{=}“ \; \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{-1} \; „\overset{(2)}{=}“ \; 1 \pm 2\mathrm{i}$$

Tatsächlich sind $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = 1 - 2\mathrm{i}$ die komplexen Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 - 2z + 5 = 0$, wie wir in Kapitel 5 sehen werden. Dennoch ist bei zwei Schritten der Herleitung Vorsicht angebracht: bei der Anwendung des Potenzgesetzes in (1) und bei der Gleichsetzung von i mit $\sqrt{-1}$ in (2). Erweitert man nämlich den Geltungsbereich des Potenzgesetzes und die Definition der Quadratwurzel auf naive Weise ins Komplexe, so folgen auch falsche Aussagen:

Beispiel 1.8

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} \; „\overset{(1)}{=}“ \; \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \; „\overset{(2)}{=}“ \; \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$$

Beispiel 1.8 zeigt, wie sich mit der Notation „$\sqrt{-1}$“ subtile Widersprüche ergeben können. Es ist deshalb allgemein üblich, diese Notation nicht zu verwenden.

In welcher Form Potenzgesetze für komplexe Zahlen gelten und wie die Wurzeln komplexer Zahlen sinnvoll definiert sind, werden wir in der Diskussion am Ende von Kapitel 4 ausführlich erörtern. Doch zuvor muss erst einmal geklärt werden, wie mit komplexen Zahlen überhaupt gerechnet werden kann.

Wie kann man mit komplexen Zahlen rechnen?

Um die Menge der komplexen Zahlen zu erhalten, wurde die Menge der reellen Zahlen mit Hilfe einer Variablen i erweitert, welche die reell nicht-lösbare Gleichung $\mathrm{i}^2 = -1$ lösen soll. Dass sich die Grundrechenarten der reellen Zahlen auf deartige Mengen-Erweiterungen konsistent fortsetzen lassen, ist jedoch keineswegs selbstverständlich:

Beispiel 1.9

Erweitern wir die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um die Variable ∞, welche die reell nicht lösbare Gleichung $0 \cdot \infty = 1$ lösen soll.

Will man nun die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ von $\mathbb{R}$ sinnvoll zu einer Addition $\oplus$ und einer Multiplikation $\odot$ auf der erweiterten Zahlenmenge $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fortsetzen, so sollten wenigstens zwei Bedingungen erfüllt sein:

- Die definierende Gleichung der Variablen ∞ sollte gelten:

$$0 \odot \infty = 1$$

- Eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ sollten $\oplus$ und $\odot$ mit $+$ und $\cdot$ übereinstimmen:

$$x_1 \oplus x_2 := x_1 + x_2 \qquad \text{und} \qquad x_1 \odot x_2 := x_1 \cdot x_2 \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Doch bereits diese beiden Bedingungen führen zu einem Widerspruch, sobald die Assoziativität der Multiplikation beim Rechnen in $\mathbb{R}^*$ erhalten bleiben soll (vgl. A1.6*):

$$0 \overset{(1)}{=} 0 \odot 1 \overset{(2)}{=} 0 \odot (0 \odot \infty) \overset{(3)}{=} (0 \odot 0) \odot \infty \overset{(4)}{=} 0 \odot \infty \overset{(5)}{=} 1$$

Die Gleichheiten (1) und (4) dieses Widerspruchs folgen daraus, dass die Multiplikation $\odot$ zweier reeller Faktoren der reellen Multiplikation $\cdot$ entsprechen soll. Die Gleichheiten (2) und (5) ergeben sich aus der definierenden Gleichung für ∞. Die Gleichheit (3) gilt, sobald die Multiplikation $\odot$ assoziativ ist.

Dieses Beispiel wirft eine fundamentale Frage auf: Kann man auf der Menge der komplexen Zahlen die Grundrechenarten überhaupt sinnvoll und widerspruchsfrei definieren? Und wenn ja, wie?

Eine erste, sinnvolle Forderung an die auf der Menge der komplexen Zahlen definierten Grundrechenarten der Addition $\oplus$ und der Multiplikation $\odot$ ist, dass sie auf der Teilmenge der reellen Zahlen mit der reellen Addition $+$ und der reellen Multiplikation $\cdot$ übereinstimmen sollen. Dies lässt sich wegen der Identifikation von $x\mathbb{R}$ mit $+0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ wie folgt formulieren:

$$(x_1 + 0\mathrm{i}) \oplus (x_2 + 0\mathrm{i}) \;:=\; (x_1 + x_2) + 0\mathrm{i}$$

$$(x_1 + 0\mathrm{i}) \odot (x_2 + 0\mathrm{i}) \;:=\; (x_1 \cdot x_2) + 0\mathrm{i}$$

Doch wie kann man die Summe $z_1 \oplus z_2$ und das Produkt $z_1 \odot z_2$ zweier beliebiger komplexer Zahlen z_1 und z_2 mit nicht-verschwindendem Imaginärteil definieren?

Frage 1.10: Wie kann man mit komplexen Zahlen rechnen?

Versuchen Sie, auf der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen eine Addition zu erklären: Definieren Sie dazu den Real- und den Imaginärteil der Summe $z_1 \oplus z_2$ mit Hilfe der gegebenen Real- und Imaginärteile $\mathrm{Re}\,(z_1), \mathrm{Im}\,(z_1), \mathrm{Re}\,(z_2)$ und $\mathrm{Im}\,(z_2)$.

Versuchen Sie Entsprechendes für die Multiplikation $z_1 \odot z_2$ zweier komplexer Zahlen.

Betrachten Sie einfache Beispiele: Was sollte etwa geschehen, wenn man eine beliebige komplexe Zahl z_1 mit der reellen Zahl $z_2 = 2 + 0\mathrm{i} = 2$ addiert oder multipliziert?

Probieren Sie Definitionen von $\oplus$ und $\odot$ aus. Prüfen Sie insbesondere:

- Entsprechen $\oplus$ und $\odot$ eingeschränkt auf die reellen Zahlen den bekannten $+$ und $\cdot$?
- Gilt für $\mathrm{i} = 0+1\mathrm{i}$ und $\odot$ die der Erweiterung zugrunde liegende Identität $\mathrm{i}\odot\mathrm{i} = -1$?
- Sind $\oplus$ und $\odot$ auf den komplexen Zahlen kommutativ, assoziativ und distributiv?

Falls Sie keine Idee haben, lassen Sie sich von A1.7* inspirieren.

Aufgaben

Aufgabe 1.1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungen jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

a) $(z^2-2)(z-3)(3z+2)=0$ b) $(z^2-4)(z^2+1)=0$

Aufgabe 1.2. Geben Sie die Real- und Imaginärteile der komplexen Zahlen an. Welche Zahlen sind reell, welche imaginär?

a) $z_1 = 2 - \mathrm{i}$ b) $z_2 = -1 + 2\mathrm{i}$ c) $z_3 = \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ d) $z_4 = -2$

Aufgabe 1.3. Stellen Sie die komplexen Zahlen aus A1.2 samt ihrer komplex Konjugierten in der Zahlenebene dar. Wie lässt sich die komplexe Konjugation geometrisch beschreiben?

Aufgabe 1.4. Stellen Sie die Zahlenmengen in der Zahlenebene graphisch dar.

a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,(z) = 1\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) + 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(z) < 1 \wedge \mathrm{Im}\,(z) = 3\}$ d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$

Aufgabe 1.5. Beschreiben Sie die Teilmengen der Zahlenebene mit Hilfe von Gleichungen oder Ungleichungen für die Real- oder die Imaginärteile:

a) Imaginäre Achse b) Parallele zur imaginären Achse durch $-1 + \mathrm{i}$

c) Zweiter Quadrant ohne Rand d) Strecke zwischen $-1 - \mathrm{i}$ und $1 + \mathrm{i}$

Aufgabe 1.6*. Erweitern Sie Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wie in Beispiel 1.9 zur Menge $\mathbb{R}^*$, indem sie zu $\mathbb{R}$ die Variable ∞ als formale Lösung der Gleichung $0 \cdot \infty = 1$ hinzufügen.

Zeigen Sie analog zu Beispiel 1.9: In $\mathbb{R}^*$ lässt sich nicht widerspruchsfrei rechnen, sobald das Distributivgesetz gilt.

Aufgabe 1.7*. Bezeichnen Sie durch $\sqrt{2}$ eine formale Lösung x der rational nicht lösbaren Gleichung $x^2 = 2$. Definieren Sie damit die folgende Erweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:

Jede Zahl q aus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ist durch zwei rationale Zahlen a und b definiert, die mit Hilfe der Variablen $\sqrt{2}$ wie folgt notiert werden:

$$q \ := \ a + \sqrt{2}\, b$$

Dabei sei $\mathbb{Q}$ durch die Gleichsetzung $a \equiv a + 0\sqrt{2}$ als Teilmenge in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ enthalten.

Erklären Sie auf der Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$: Definieren Sie dazu die Summe $q_1 \oplus q_2$ und das Produkt $q_1 \odot q_2$ zweier Zahlen $q_1 = a_1 + \sqrt{2} b_1$ und $q_2 = a_2 + \sqrt{2} b_2$ mit Hilfe von a_1, b_1, a_2, b_2.

Überprüfen Sie, ob Ihre Definitionen von $\oplus$ und $\odot$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \big(a_1 + 0\sqrt{2}\big) \oplus \big(a_2 + 0\sqrt{2}\big) \ = \ (a_1 + a_2) + 0\sqrt{2} \\
\text{(ii)} & \big(a_1 + 0\sqrt{2}\big) \odot \big(a_2 + 0\sqrt{2}\big) \ = \ (a_1 \cdot a_2) + 0\sqrt{2} \\
\text{(iii)} & \big(0 + 1 \cdot \sqrt{2}\big) \odot \big(0 + 1 \cdot \sqrt{2}\big) \ = \ 2 + 0 \cdot \sqrt{2}
\end{array}$$

Welche Bedeutung haben diese Eigenschaften?

2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Am Ende des letzten Kapitels stand die Frage, wie mit komplexen Zahlen sinnvoll und widerspruchsfrei gerechnet werden kann. Diese Frage wollen wir im Folgenden klären.

Die Notation komplexer Zahlen in Normalform legt zusammen mit der Definition der imaginären Einheit drei Grundsätze für die Einführung der komplexen Grundrechenarten nahe:

1. Eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ wird als Summe der reellen Zahl x und des reellen Vielfachen $\mathrm{i}y$ der imaginären Einheit i aufgefasst.
2. Mit der imaginären Einheit i wird gerechnet wie mit einer Variablen.
3. Alle zweiten und höheren Potenzen von i werden mit Hilfe der Relation $\mathrm{i}^2 = -1$ ersetzt.

Wie diese drei abstrakt formulierten Grundsätze bei der Addition oder bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen konkret zum Tragen kommen, zeigen die unten stehenden Beispiele 2.1 und 2.4. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir sehen, dass sich mit den drei eben formulierten Grundsätzen alle vier vom Rechnen mit reellen Zahlen bekannten Grundrechenarten auf die Menge der komplexen Zahlen fortsetzen lassen. Zur Notation dieser Grundrechenarten in $\mathbb{C}$ werden wir deshalb von vorneherein die vom Rechnen in $\mathbb{R}$ bekannten Symbole verwenden.

Addition und Subtraktion

Betrachten wir zunächst an einem Beispiel, was sich aus den vorangestellten Grundsätzen für die Addition zweier komplexer Zahlen ergibt:

Beispiel 2.1

Die Summe von $2 - 3\mathrm{i}$ und $-1 + \mathrm{i}$ ist:

$$(2 - 3\mathrm{i}) + (-1 + \mathrm{i}) \;=\; 2 - 3\mathrm{i} - 1 + \mathrm{i} \;=\; (2 - 1) + (1 - 3)\mathrm{i} \;=\; 1 - 2\mathrm{i}.$$

Ausgehend von der Normalform, welche jeden der beiden komplexen Summanden als Summe einer reellen und einer imaginären Zahl notiert, liefert der erste Schritt eine Summe von vier Summanden, die entweder reell oder rein imaginär sind. Gemäss dem Rechnen mit Variablen, wie hier mit der Variablen i, werden im zweiten Schritt einmal die reellen Summanden addiert und einmal die imaginären Summanden, was die Darstellung der Summe in Normalform erlaubt. Da keine zweiten oder höheren Potenzen von i auftreten, entfällt deren Ersetzen. Dementsprechend lautet die allgemeine Definition der komplexen Addition:

Definition 2.2 ▶ komplexe Addition

Die **Summe** zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ ist:

$$z_1 + z_2 \;:=\; (x_1 + x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 + y_2)$$

Der Realteil der Summe ist also die Summe der Realteile der Summanden, und der Imaginärteil der Summe die Summe der Imaginärteile der Summanden. Damit ist $0 \equiv 0 + 0\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ offensichtlich das **Neutralelement** der komplexen Addition. Das **additive Inverselement** $-z$ einer komplexen Zahl z ergibt sich also als Lösung w der Gleichung $z + w = 0$. Für $z = x + \mathrm{i}y$ erhält man damit aus einer einfachen Rechnung $-z = -x - \mathrm{i}y$. Wie üblich kann nun die Subtraktion einer komplexen Zahl z als Addition des Inverselements $-z$ definiert werden:

Definition 2.3 ▶ komplexe Subtraktion

Die **Differenz** zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ ist:

$$z_1 - z_2 \;:=\; z_1 + (-z_2) \;=\; \big(x_1 + (-x_2)\big) + \mathrm{i}\,\big(y_1 + (-y_2)\big) \;=\; (x_1 - x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 - y_2)$$

Einfaches Einsetzen zeigt nun, dass die so definierte komplexe Addition beziehungsweise Subtraktion eingeschränkt auf die Teilmenge der reellen Zahlen in $\mathbb{C}$ genau die bekannten Ergebnisse liefert. Denn für zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 gilt:

$$(x_1 + 0\mathrm{i}) + (x_2 + 0\mathrm{i}) \;=\; (x_1 + x_2) + \mathrm{i}\,(0 + 0) \;=\; (x_1 + x_2) + 0\mathrm{i} \;=\; x_1 + x_2$$

$$(x_1 + 0\mathrm{i}) - (x_2 + 0\mathrm{i}) \;=\; (x_1 - x_2) + \mathrm{i}\,(0 - 0) \;=\; (x_1 - x_2) + 0\mathrm{i} \;=\; x_1 - x_2$$

Multiplikation

Betrachten wir nun die Multiplikation. Gemäss den drei oben formulierten Grundsätzen berechnet man das Produkt zweier komplexer Zahlen wie folgt:

Beispiel 2.4

Das Produkt von $3 - 2\mathrm{i}$ und $-5 + 7\mathrm{i}$ ist:

$$\begin{aligned}(3 - 2\mathrm{i}) \cdot (-5 + 7\mathrm{i}) \;&=\; 3 \cdot (-5) + 3 \cdot 7\mathrm{i} - 2\mathrm{i} \cdot (-5) - 2\mathrm{i} \cdot 7\mathrm{i} \;=\; -15 + (21 + 10)\mathrm{i} - 14\mathrm{i}^2 \\ &\overset{(*)}{=}\; -15 + (21 + 10)\mathrm{i} - 14 \cdot (-1) \;=\; (-15 + 14) + 31\mathrm{i} \;=\; -1 + 31\mathrm{i}\end{aligned}$$

Ausgehend von der Normalform, welche jeden der beiden komplexen Faktoren als Summe einer reellen und einer imaginären Zahl notiert, erhält man zunächst durch Ausmultiplizieren eine Summe aus einem rein reellen Term, rein imaginären Termen und einem Vielfachen von i^2. Im darauf folgenden Umformungsschritt $(*)$ wird i^2 durch -1 ersetzt und das Ergebnis auf Normalform gebracht.

Dieses Beispiel lässt sich leicht auf zwei beliebige komplexe Zahlen verallgemeinern:

$$\begin{aligned}(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2) &= x_1x_2+\mathrm{i}x_1y_2+\mathrm{i}y_1x_2+\mathrm{i}^2y_1y_2 = x_1x_2+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)+\mathrm{i}^2y_1y_2 \\ &\overset{(*)}{=} x_1x_2+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)+(-1)y_1y_2 = (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)\end{aligned}$$

Dies legt nahe, die komplexe Multiplikation wie folgt zu definieren:

Definition 2.5 ▶ komplexe Multiplikation

Das **Produkt** zweier komplexen Zahlen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ ist:

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Auch wenn die so definierte Multiplikation in Normalform etwas aufwändiger erscheint als die einfache, komponentenweise Addition, so ist sie dennoch sinnvoll: Zum Ersten hat sie nach wie vor $1 \equiv 1 + 0\mathrm{i}$ als **Neutralelement**. Zum Zweiten setzt sie die bekannte Multiplikation reeller Zahlen fort. Für die komplexe Multiplikation zweier reeller Zahlen x_1 und x_2 gilt nämlich:

$$(x_1+0\mathrm{i})\cdot(x_2+0\mathrm{i}) = (x_1x_2-0\cdot 0)+\mathrm{i}\,(x_1\cdot 0+x_2\cdot 0) = (x_1x_2)+0\mathrm{i} = x_1\cdot x_2$$

Zum Dritten liefert die so definierte komplexe Multiplikation genau diejenige Relation, welche die imaginäre Einheit i definitionsgemäss zu erfüllen hat:

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = (0+1\mathrm{i})\cdot(0+1\mathrm{i}) = (0\cdot 0-1\cdot 1)+\mathrm{i}\,(0\cdot 1+0\cdot 1) = -1+0\mathrm{i} = -1$$

Division

Wie üblich lässt sich die Division durch einen komplexen Divisor $z \neq 0$ als Multiplikation mit seinem **multiplikativen Inverselement** z^{-1} beziehungsweise $\frac{1}{z}$ erklären. Für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ ist z^{-1} dabei als Lösung w der Gleichung $z \cdot w = 1$ definiert. Um die benötigte Normalform von z^{-1} bzw. $\frac{1}{z}$ aus derjenigen von z zu bestimmen, kann man den Bruch $\frac{1}{z}$ einfach mit dem zu z komplex konjugierten $\bar{z}$ erweitern:

Beispiel 2.6

Die Normalform von $(2+3\mathrm{i})^{-1}$ erhält man durch Erweiterung des Bruchs mit der komplex Konjugierten des Nenners $2 + 3\mathrm{i}$:

$$(2+3\mathrm{i})^{-1} = \frac{1}{2+3\mathrm{i}} = \frac{1\cdot(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})\cdot(2-3\mathrm{i})} = \frac{2-3\mathrm{i}}{2^2+3^2} = \frac{2}{13}-\frac{3}{13}\,\mathrm{i}$$

Auch allgemein kann man so vorgehen, um die Normalform des multiplikativ Inversen einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ zu bestimmen (vgl. A2.12*):

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Der dabei im Nenner auftretende Term $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ ist stets nicht-negativ reell. Mit ihm lässt sich jeder komplexen Zahl die folgende reelle Grösse zuordnen, deren geometrische Bedeutung (siehe A2.7) in den nächsten Abschnitten eine wichtige Rolle spielen wird:

Definition 2.7 ▶ Betrag

Der **Betrag** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ ist definiert als die Quadratwurzel aus dem reellwertigen Produkt $z \cdot \bar{z}$, das heisst:

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wie üblich wird die komplexe Division als Multiplikation mit dem multiplikativen Inverselement definiert, was sich mit Hilfe des Betrags wie folgt darstellen lässt:

Definition 2.8 ▶ komplexe Division

Der **Quotient** zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ ist:

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Um einen Quotienten komplexer Zahlen von Hand zu bestimmen, ist die rechte Seite dieser Definition allerdings weniger geeignet. Vielmehr bietet sich dafür an, die Definition Schritt für Schritt nachzuvollziehen – das heisst, den Bruch wie in Beispiel 2.6 mit dem komplex Konjugierten des Nenners zu erweitern und dann mit Hilfe des Betrags des Nenners auf Normalform zu bringen:

Beispiel 2.9

Der Quotient von $5 - 5\mathrm{i}$ durch $1 - 3\mathrm{i}$ ist:

$$\frac{5 - 5\mathrm{i}}{1 - 3\mathrm{i}} = \frac{(5 - 5\mathrm{i})(1 + 3\mathrm{i})}{(1 - 3\mathrm{i})(1 + 3\mathrm{i})} = \frac{\big(5 \cdot 1 - (-5) \cdot 3\big) + \big(5 \cdot 3 + (-5) \cdot 1\big)\mathrm{i}}{1^2 + 3^2} = 2 + \mathrm{i}$$

Damit sind die Grundrechenarten für die komplexen Zahlen eingeführt. Fundamentale Eigenschaften bleiben allerdings noch nachzuweisen:

Dass die komplexe Addition sowohl assoziativ als auch kommutativ ist, wird in A2.10* gezeigt. Dass beides auch für die komplexe Multiplikation gilt, sehen wir in A3.15*. Dass für die Addition und Multiplikation zusammen Distributivität gilt, wird in A2.11* bewiesen.

Bemerkung 2.10

Vom Standpunkt der höheren Mathematik erfüllt die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die Axiome einer besonderen algebraischen Struktur, nämlich die eines Körpers.

Mit den Ergebnissen dieses Kapitels und den Nachweisen der Assoziativität, Kommutativität und Distributivität von Addition und Multiplikation in A2.10*, A2.11* und A3.15* wird gezeigt, dass auch die Menge der komplexen Zahlen die Körper-Axiome erfüllt.

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird also durch das Hinzufügen der imaginären Einheit i zum Körper $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\mathrm{i}]$ der komplexen Zahlen erweitert.

Die Addition in der Zahlenebene

Vorangehend wurden die Grundrechenarten für die komplexen Zahlen rein algebraisch definiert. Mit Hilfe der Zahlenebene ergibt sich alternativ die Möglichkeit, die Grundrechenarten auch geometrisch zu beschreiben. Die Art und Weise, wie komplexe Zahlen in der Zahlenebene dargestellt werden, legt nahe, dass eine komplexe Zahl auch als 2-dimensionaler reeller Vektor intepretiert werden kann:

$$z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C} \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(z) \\ \mathrm{Im}\,(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Wie Abbildung 2.1 illustriert, entspricht die Addition komplexer Zahlen in dieser Interpretation genau der bekannten Addition von Vektoren des $\mathbb{R}^2$. Insbesondere bei der Anwendung der komplexen Zahlen in der Wechselstromrechnung in Kapitel 6* werden wir darauf zurückkommen.

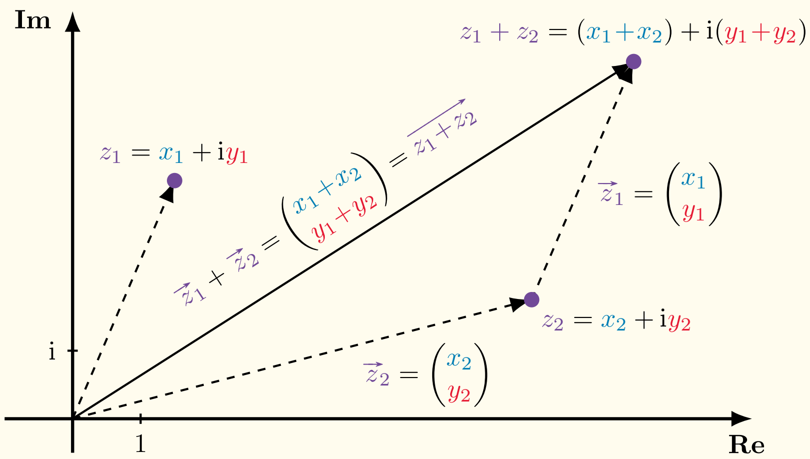


Abbildung 2.1: Die Addition komplexer Zahlen in der Zahlenebene.

Diese elegante geometrische Beschreibung der komplexen Addition wirft die Frage auf, ob auch die komplexe Multiplikation geometrisch nachvollzogen werden kann. Betrachten wir diese Frage ein wenig, bevor wir sie im Verlauf des nächsten Kapitels klären werden.

Frage 2.11 : Wie kann man die Multiplikation geometrisch interpretieren?

Untersuchen Sie diese Frage anhand von Beispielen in der Zahlenebene:

Um herauszufinden, wie sich etwa die Multiplikation mit dem Faktor 2 geometrisch auswirkt, können Sie z und $2 \cdot z$ für einige komplexe Zahlen z Ihrer Wahl in ein Diagramm einzeichnen.

Untersuchen Sie analog die geometrische Auswirkung der folgenden Multiplikationen auf repäsentative Punkte z der Zahlenebene:

$$\mathrm{i} \cdot z, \qquad (-1+\mathrm{i}) \cdot z, \qquad (1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}) \cdot z$$

Welche Rolle spielt dabei der Betrag des ersten Faktors?

Aufgaben

Aufgabe 2.1. Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner:

a) i^2 b) i^3 c) $-\mathrm{i}^3$ d) i^4 e) $-\mathrm{i}^4$ f) $\mathrm{i}^{100} - \mathrm{i}^{98}$

Aufgabe 2.2. Bringen Sie ohne Taschenrechner auf Normalform:

a) $(7+2\mathrm{i})+(8+3\mathrm{i})$ b) $(1+5\mathrm{i})-(5-7\mathrm{i})$ c) $27\mathrm{i}-(-6+\mathrm{i})$ d) $(3+\mathrm{i})-(-2-\mathrm{i})$

e) $(-8+2\mathrm{i})(7-3\mathrm{i})$ f) $(3+7\mathrm{i})(3-7\mathrm{i})$ g) $5\,(6-7\mathrm{i})$ h) $(3+2\mathrm{i})^2$

i) $(6+4\mathrm{i}) : 2$ j) $-16 : 4\mathrm{i}$ k) $9\mathrm{i} : (-12\mathrm{i})$ l) $(-12+18\mathrm{i}) : (-6\mathrm{i})$

Aufgabe 2.3. Bringen Sie ohne Taschenrechner auf Normalform:

a) $\dfrac{4+2\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}}$ b) $\dfrac{41+13\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$ c) $\dfrac{83+64\mathrm{i}}{12-5\mathrm{i}}$ d) $\dfrac{5-13\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

e) $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\mathrm{i}}{\frac{1}{2}-\frac{7}{3}\mathrm{i}}$ f) $\dfrac{\frac{7}{6}+\frac{5}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{i}}$ g) $\dfrac{7\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}\mathrm{i}}$ h) $\dfrac{9+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-9\mathrm{i}}$

Aufgabe 2.4. Berechnen Sie ohne Taschenrechner für $z_1 = 2+\mathrm{i}$ und $z_2 = -5+2\mathrm{i}$:

a) $\mathrm{Re}\,(z_1+4z_2)$ b) $\mathrm{Im}\,(z_1^2 z_2)$ c) $\mathrm{Re}\,(z_1 z_2^2)$ d) $\mathrm{Im}\,(2z_1-3z_2)$

Aufgabe 2.5. Stellen Sie $\mathrm{Re}\,(z)$ und $\mathrm{Im}\,(z)$ jeweils durch einen Term aus z und $\overline{z}$ dar.
(Tipp: Interpretieren Sie z und $\overline{z}$ als Vektoren in der Zahlenebene.)

Aufgabe 2.6. Berechnen Sie ohne Taschenrechner jeweils $-z$, $|z|$ und z^{-1}:

a) $z = 2 - \mathrm{i}$ b) $z = -4 + 3\mathrm{i}$ c) $z = -6 - 8\mathrm{i}$ d) $z = 1 + 2\mathrm{i}$

Aufgabe 2.7. a) Geben Sie mit Hilfe einer Skizze eine geometrische Interpretation des Betrags $|z|$ in der Zahlenebene.

b) Stellen Sie die Zahlenmengen in der Zahlenebene graphisch dar:

i) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$ ii) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, 3 < |z| < 4\}$ iii) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - 2\mathrm{i}| < 1\}$

c) Begründen Sie: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt die Dreiecksungleichung:

$$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \;\leq\; \big|z_1 + z_2\big| \;\leq\; |z_1| + |z_2|$$

Aufgabe 2.8. Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation mit den vier Grundrechenarten in $\mathbb{C}$ verträglich ist. Weisen Sie dazu für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die vier Identitäten nach:

a) $\overline{z_1 + z_2} \;=\; \overline{z_1} + \overline{z_2}$, b) $\overline{z_1 - z_2} \;=\; \overline{z_1} - \overline{z_2}$,

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} \;=\; \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, d) $\overline{z_1 : z_2} \;=\; \overline{z_1} : \overline{z_2}, \quad z_2 \neq 0$

Aufgabe 2.9. Die Zahlen a, b sind reell. Bringen Sie auf Normalform:

a) $\mathrm{i}\,\overline{(a + \mathrm{i}b)} + \dfrac{1}{\mathrm{i}}\,(a + \mathrm{i}b)$ b) $\overline{(a - \mathrm{i}b)}\,(a + \mathrm{i}b)^{-1}$ c) $\mathrm{i}\overline{b} + \overline{\left(\dfrac{\mathrm{i}}{b}\right)} + \overline{\left(\dfrac{b}{\mathrm{i}}\right)} + \overline{\overline{\left(\dfrac{\mathrm{i}}{b}\right)}}$

Aufgabe 2.10*. a) Zeigen Sie die Assoziativität der Addition in $\mathbb{C}$. Weisen Sie dazu für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ algebraisch nach:

$$(z_1 + z_2) + z_3 \;=\; z_1 + (z_2 + z_3)$$

b) Zeigen Sie die Kommutativität der Addition in $\mathbb{C}$. Weisen Sie dazu für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ algebraisch nach:

$$z_1 + z_2 \;=\; z_2 + z_1$$

c) Begründen Sie die Aussagen in a) und b) geometrisch.

Aufgabe 2.11*. Zeigen Sie die Distributivität von Multiplikation und Addition in $\mathbb{C}$. Weisen Sie dazu für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ algebraisch nach:

$$\big(z_1 + z_2\big) \cdot z_3 \;=\; z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

Aufgabe 2.12*. Betrachten Sie ein Element $q = a + \sqrt{2}b$ mit $q \neq 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$ aus der in A1.7* definierten Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Geben Sie das multiplikative Inverselement q^{-1} in der Form $c + d\sqrt{2}$ mit $c, d \in \mathbb{Q}$ an.

3 Die Polarform

Wie kann man die Multiplikation komplexer Zahlen in der Zahlenebene geometrisch interpretieren? Dieser Frage wollen wir im Verlauf des Kapitels nachgehen. Ihre Beantwortung wird dadurch erleichtert, dass sich komplexe Zahlen nicht nur in der Normalform darstellen lassen, sondern alternativ dazu in einer sogenannten Polarform.

Betrachten wir zunächst an einem Beispiel, wie sich die Multiplikation mit einem reellen Faktor beziehungsweise mit einem imaginären Faktor in der Zahlenebene auswirkt:

Beispiel 3.1

Als Produkt einer komplexen Zahl z mit 2 beziehungsweise mit i erhält man:

$$z = x + \mathrm{i}y \xmapsto{\cdot 2} 2z = 2x + 2\,\mathrm{i}y, \qquad z = x + \mathrm{i}y \xmapsto{\cdot \mathrm{i}} \mathrm{i}z = -y + \mathrm{i}x$$

Die Multiplikation mit 2 entspricht damit einer zentrischen Streckung mit Zentrum 0 und Steckfaktor 2 in radialer Richtung, die Multiplikation mit i einer Drehung um 90° um das Zentrum 0 (siehe Abbildung 3.1).

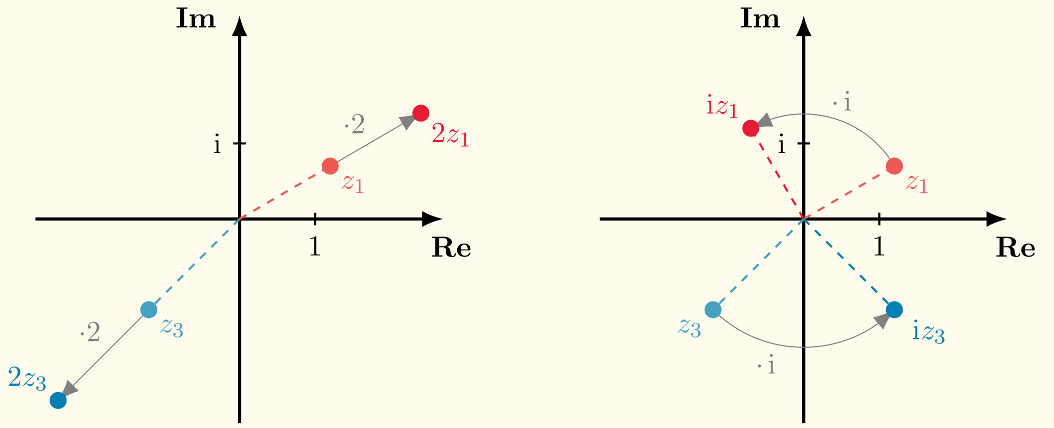


Abbildung 3.1: Die Multiplikation komplexer Zahlen mit 2 (links) und mit i (rechts).

Die trigonometrische Polarform

Beispiel 3.1 zeigt eine Möglichkeit auf, wie sich die komplexe Multiplikation geometrisch besser verstehen lässt: nämlich dadurch, dass die Position einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ in der Zahlenebene nicht durch das cartesische Koordinatenpaar aus Realteil x und Imaginärteil y beschrieben wird, sondern stattdessen durch den radialen Abstand r von z zu Null und den von der reellen Achse gegen Uhrzeigersinn bis zu z gemessenen Zentriwinkel φ.

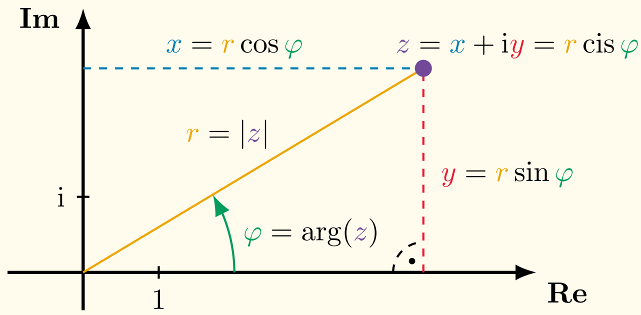


Abbildung 3.2: Die Polarkoordinaten r und φ einer komplexen Zahl z.

Wie Abbildung 3.2 zeigt, besteht zwischen den cartesischen Koordinaten x und y und den sogenannten **Polarkoordinaten** r und φ ein einfacher trigonometrischer Zusammenhang:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \qquad\qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

Jede komplexe Zahl lässt sich damit alternativ zur Normalform wie folgt darstellen:

Definition 3.2 ► trigonometrische Polarform, Betrag, Argument

Eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ wird in **trigonometrischer Polarform** dargestellt durch:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) =: r\,\mathrm{cis}\,\varphi$$

Der radiale Abstand r ist dabei der bereits aus Definition 2.7 bekannte **Betrag** $|z|$ von z. Der ab der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessene Zentriwinkel φ wird als das **Argument** $\arg(z)$ von z bezeichnet, in der Physik manchmal auch als **Phasenwinkel** von z.

Hinweis: Die oben verwendete Notation „$\mathrm{cis}\,\varphi$“ steht abkürzend für „$\underline{\cos}\,\varphi + \underline{\mathrm{i}}\,\underline{\sin}\,\varphi$“. Ihr Gebrauch ist allerdings auf die Schulmathematik beschränkt.

Betrachten wir zunächst noch etwas genauer, wie sich die beiden Darstellungen einer komplexen Zahl in einander umrechnen lassen:

Ist eine komplexe Zahl in Polarform gegeben, dann erhält man ihre Normalform durch die einfache Auswertung der trigonometrischen Funktionen des Sinus und Cosinus. Zum Beispiel gilt:

Beispiel 3.3

$$2\,\mathrm{cis}\,120^\circ \;=\; 2\left(\cos 120^\circ + \mathrm{i}\,\sin 120^\circ\right) \;=\; 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right) \;=\; -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Will man umgekehrt von der Normalform einer komplexen Zahl auf deren Polarform schliessen, so muss man vorab eine grundlegende Eigenschaft der Polarform beachten: Das Argument einer komplexen Zahl lässt sich aufgrund der 360°-Periodizität des Sinus und des Cosinus niemals eindeutig bestimmen. So gilt zum Beispiel:

Beispiel 3.4

$$2\,\mathrm{cis}\,120^\circ \;=\; 2\,\mathrm{cis}\,480^\circ \;=\; 2\,\mathrm{cis}\,(-240^\circ) \;=\; 2\,\mathrm{cis}\,840^\circ \;=\; \ldots \;=\; -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

In der Regel gibt man das nicht-eindeutige Argument $\varphi = \arg z$ durch den sogenannten **Hauptwert** aus dem Intervall $[0^\circ, 360^\circ[$ an (vgl. Aufgabe 3.4). Sehen wir nun, wie sich gemäss dieser Konvention aus der Normalform einer komplexen Zahl die Polarform berechnen lässt:

Beispiel 3.5

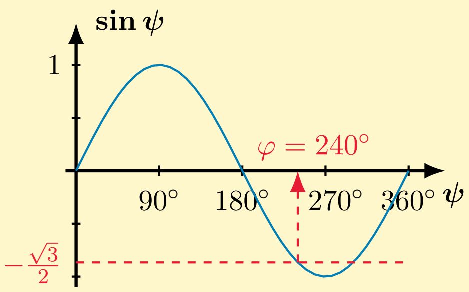
Stellen wir $z = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ mit $x = \mathrm{Re}\,(z) = -1$ und $y = \mathrm{Im}\,(z) = -\sqrt{3}$ in Polarform dar: Die radiale Koordinate r der Polarform erhält man als Betrag von z:

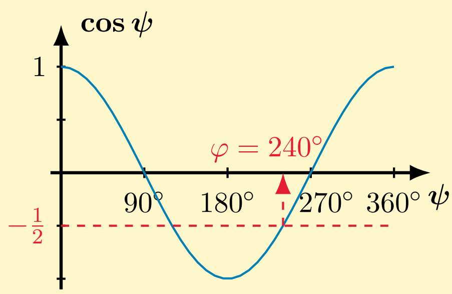
$$r \;=\; |z| \;=\; \sqrt{x^2 + y^2} \;=\; \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} \;=\; 2$$

Zur Berechnung der Winkelkoordinate φ sind wegen der Symmetrien von sin und cos die beiden folgenden Gleichungen simultan zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi \;&=\; \arcsin\frac{y}{r} \;=\; \arcsin\frac{-\sqrt{3}}{2} \in \{240^\circ, 300^\circ\} \\ \varphi \;&=\; \arccos\frac{x}{r} \;=\; \arccos\frac{-1}{2} \in \{120^\circ, 240^\circ\} \end{aligned}\right\} \;\Longrightarrow\; \varphi \;=\; \arg z \;=\; 240^\circ$$

Alternativ wählt man aus der Lösungsmenge einer der beiden Gleichungen diejenige Lösung als φ aus, die dem im dritten Quadranten liegenden z entspricht: $\varphi = 240^\circ$





Die Multiplikation in Polarform

Im Beispiel 3.1 wirkt die Multiplikation mit der reellen Zahl 2 in der Zahlenebene als Streckung, die Multiplikation mit der imaginären Einheit i als Drehung. Dies legt die Frage nahe, ob sich die Multiplikation mit einer allgemeinen komplexen Zahl als Drehstreckung auffassen lässt. Diese Frage können wir nun mit Hilfe der Polarform algebraisch untersuchen. Für das Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1$ und $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \varphi_2$ gilt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \operatorname{cis} \varphi_1) \cdot (r_2 \operatorname{cis} \varphi_2) = (r_1 \cos \varphi_1 + \mathrm{i}\, r_1 \sin \varphi_1) \cdot (r_2 \cos \varphi_2 + \mathrm{i}\, r_2 \sin \varphi_2) \\ &= (r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - r_1 r_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \mathrm{i}\,(r_1 r_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + r_1 r_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \big[(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \mathrm{i}\,(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)\big] \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \big[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\, \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big] = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Damit gilt für die komplexe Multiplikation in Polarform, was für die komplexe Addition in Normalform gilt. Sie kann koordinatenweise und daher besonders einfach durchgeführt werden:

Satz 3.6 : Multiplikation in Polarform

Das Produkt zweier komplexen Zahlen $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1$ und $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \varphi_2$ ist:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\, r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Geometrisch interpretiert bestätigt dieser Satz, dass die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1$ in der Zahlenebene als Drehstreckung um das Zentrum 0 wirkt: Wie Abbildung 3.3 illustriert, tritt dabei der Betrag $|z_1| = r_1$ als Streckfaktor in radialer Richtung auf und das Argument $\arg(z_1) = \varphi_1$ als Drehwinkel.

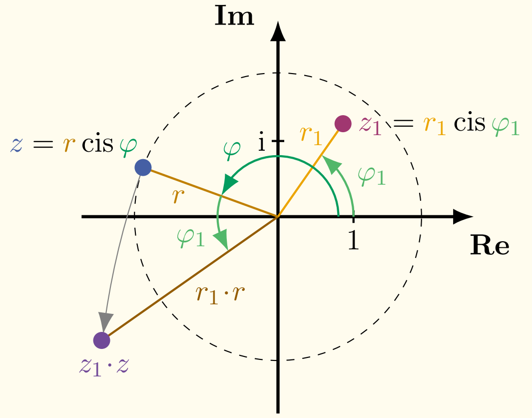


Abbildung 3.3: Die komplexe Multiplikation mit $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1$ als Drehstreckung.

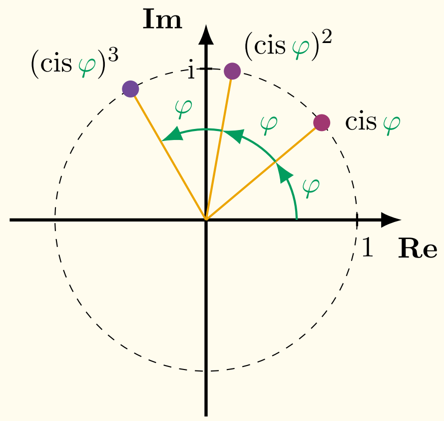


Abbildung 3.4: Zweite und dritte Potenz einer Zahl $\operatorname{cis} \varphi$ auf dem Einheitskreis.

Mit Satz 3.6 reduziert sich insbesondere die wiederholte Multiplikation komplexer Zahlen auf dem Einheitskreis der Zahlenebene zur wiederholten Addition ihrer Argumente (siehe Abbildung 3.4). Dies hat den nach Abraham de Moivre (1667-1754) benannten Satz zur Folge:

Satz 3.7: Satz von de Moivre

Für jede komplexe Zahl $\operatorname{cis}\varphi$ auf dem Einheitskreis der Zahlenebene gilt:

$$(\operatorname{cis}\varphi)^n \;=\; (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n \;=\; \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi) \;=\; \operatorname{cis}(n\varphi)$$

Ganz nebenbei lassen sich aus dem Satz von de Moivre mit Hilfe der binomischen Formeln für höhere Potenzen weitere trigonometrische Identitäten ableiten (vgl. A3.9):

Beispiel 3.8

Nach dem Satz von de Moivre gilt für jedes reelle Argument φ:

$$\begin{aligned}\cos(3\varphi) + \mathrm{i}\sin(3\varphi) &= (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi + 3\,\mathrm{i}\sin\varphi\,\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi\,\cos\varphi - \mathrm{i}\sin^3\varphi\end{aligned}$$

Werden diese Terme auf Real- und Imaginärteil aufgeteilt, ergeben sich die Identitäten:

$$\cos(3\varphi) = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\,\cos\varphi, \qquad \sin(3\varphi) = 3\sin\varphi\,\cos^2\varphi - \sin^3\varphi$$

Die Euler'sche Formel

Die Anwendungen des Satzes von de Moivre sind nicht auf die Ableitungen diverser trigonometrischer Identitäten beschränkt. Wie wir gleich sehen werden, kann mit ihm ein fundamentaler Zusammenhang zwischen dem komplexen Winkelterm $\operatorname{cis}\varphi$ der trigonometrischen Polarform und der imaginären Potenz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ der Euler'schen Zahl abgeleitet werden: die nach Leonhard Euler (1707-1783) benannte Euler'sche Formel.

Zunächst ist jedoch zu klären, wie imaginäre Potenzen von e überhaupt definiert sind. Nach Euler sind reelle Potenzen von e durch den folgenden Grenzwert gegeben:

$$\mathrm{e}^x \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Analog dazu lassen sich die imaginären Potenzen von e wie folgt definieren:

Definition 3.9 ▶ imaginäre Potenz der Euler'schen Zahl

Die **imaginäre Potenz** der Euler'schen Zahl e mit dem imaginären Exponenten $\mathrm{i}\varphi$ ist:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \;:=\; \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\mathrm{i}\,\varphi}{n}\right)^n \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\varphi}{n}\right)^n$$

Abbildung 3.5 illustriert die Konvergenz der in Definition 3.9 auftretenden Folge am Beispiel des Arguments $\varphi = \pi$. Dass der behauptete Grenzwert allgemein existiert, ist in A3.17* zu klären.

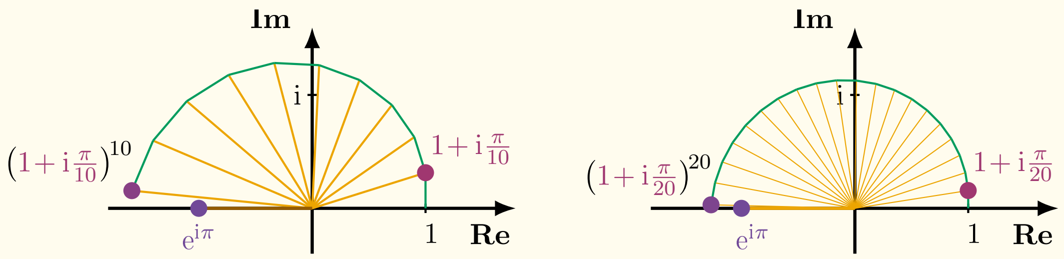


Abbildung 3.5: Approximation von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ durch $\left(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{n}\right)^n$ für $n = 10$ und für $n = 20$.

Wir können nun den Zusammenhang zwischen $\operatorname{cis}\varphi$ und der so definierten imaginären Potenz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ herstellen. Aus dem Satz von de Moivre folgt für einen reellen Winkel φ und jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi \;=\; \cos\!\left(n\cdot\tfrac{\varphi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\!\left(n\cdot\tfrac{\varphi}{n}\right) \;=\; \left(\cos\!\left(\tfrac{\varphi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\!\left(\tfrac{\varphi}{n}\right)\right)^n$$

Je grösser dabei n, desto kleiner wird das bei Sinus und Cosinus auftretende Argument $\frac{\varphi}{n}$, und desto genauer gelten die aus der Physik bekannten **Kleinwinkel-Näherungen** $\cos\frac{\varphi}{n} \approx 1$ und $\sin\frac{\varphi}{n} \approx \frac{\varphi}{n}$. Für den Grenzfall $n \to \infty$ legt dies nahe (siehe A3.18*):

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi \;=\; \left(\cos\!\left(\tfrac{\varphi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\!\left(\tfrac{\varphi}{n}\right)\right)^n \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1 + \mathrm{i}\,\tfrac{\varphi}{n}\right)^n \;=\; e^{\mathrm{i}\,\varphi}$$

Diese Identität geht auf Leonhard Euler zurück. Sie bildet die Grundlage für zahlreiche Anwendungen der komplexen Zahlen wie etwa in der Wechselstromrechnung (siehe Kap. 6*):

Satz 3.10 : Euler'sche Formel

Für jedes reelle Argument φ gilt:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} \;=\; \cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi$$

Wird die Euler'schen Formel für den Spezialfall $\varphi = \pi$ ausgewertet (siehe Abbildung 3.5), so ergibt sich eine bemerkenswerte Gleichung, in der mit $0, 1, \mathrm{i}, \mathrm{e}$ und π gleich fünf fundamentale Zahlen der Mathematik auftreten – verknüpft durch die drei Operationen der Addition, der Multiplikation und der Exponentiation:

Satz 3.11 : Euler'sche Identität

Es gilt:

$$\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}} + 1 \;=\; 0$$

Neben der eben vorgestellte Herleitung der Euler'schen Formel wird in der höheren Mathematik üblicherweise ein alternativer Zugang gewählt – welcher zwar zusätzliche Kenntnisse zur

Konvergenz unendlicher Reihen voraussetzt, sich im weiteren Verlauf der höheren Analysis aber als wesentlich praktikabler erweisen wird:

Bemerkung 3.12

Die Exponentialfunktion kann für ein beliebiges Argument $z \in \mathbb{C}$ durch die folgende unendliche Reihe definiert werden:

$$\mathrm{e}^z \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n \ = \ 1 + z + \frac{1}{2}\, z^2 + \frac{1}{6}\, z^3 + \frac{1}{24}\, z^4 + \ldots$$

Analog lassen sich auch die Sinus- und die Cosinusfunktion für alle $z \in \mathbb{C}$ definieren:

$$\sin z \ := \ \frac{e^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\,\mathrm{i}} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \ = \ z - \frac{1}{6}\, z^3 \pm \ldots$$

$$\cos z \ := \ \frac{e^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n} \ = \ 1 - \frac{1}{2}\, z^2 + \frac{1}{24}\, z^4 \mp \ldots$$

Motiviert sind die Definitionen aller drei Funktionen durch die jeweiligen Taylorreihen. Die Euler'sche Formel ergibt sich aus ihnen durch eine einfache Rechnung:

$$\cos z + \mathrm{i}\,\sin z \ = \ \frac{e^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{e^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\,\mathrm{i}} \ = \ e^{\mathrm{i}\,z}$$

Mit diesen allgemeinen Definitionen wird es zum Beispiel bei der Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen möglich sein, gewisse Wachstums-, Dämpfungs- oder Oszillationsvorgänge konzeptionell einheitlich zu behandeln.

Die Exponentialform

Dank der Euler'schen Formel kann man nun eine Alternative zur trigonometrischen Notation der Polarform erhalten, indem man den dort auftretenden komplexen Winkelterm $\operatorname{cis}\varphi$ einfach durch die imaginären Potenz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ersetzt:

Definition 3.13 ▶ Exponentialform

Die exponentielle Darstellung der Polarform – kurz: die **Exponentialform** – einer komplexen Zahl $z = r\operatorname{cis}\varphi$ ist:

$$z \ = \ r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

Die radiale Koordinate $r := |z|$ ist auch hier durch den Betrag von z gegeben, und die Winkelkoordinate $\varphi := \arg(z)$ durch das Argument von z. Letzteres wird bei der Exponentialform stets im Bogenmass angegeben.

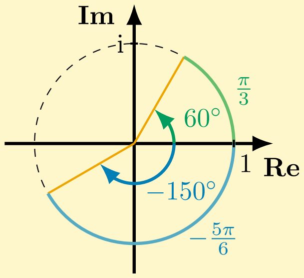
Beispiel 3.14

In Polarform beziehungsweise Exponentialform lauten $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ und $z_2 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$:

$$z_1 \;=\; 4\,\mathrm{cis}\,60^\circ \;=\; 4\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\,\mathrm{i}}, \qquad\qquad z_2 \;=\; 2\,\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\,\mathrm{i}} \;=\; 2\,\mathrm{cis}\,(-150^\circ)$$

Zur Erinnerung: Beim **Bogenmass** wird jeder Winkel durch die orientierte Länge des ihm entsprechenden Sektorbogens auf dem Einheitskreis gemessen. Das heisst:

Gradmass:	Bogenmass:
$\varphi_1 = 60^\circ$	$\varphi_1 = 60^\circ \cdot \dfrac{2\pi}{360^\circ} = \dfrac{\pi}{3}$
Bogenmass:	Gradmass:
$\varphi_2 = -\dfrac{5\pi}{6}$	$\varphi_2 = -\dfrac{5\pi}{6} \cdot \dfrac{360^\circ}{2\pi} = -150^\circ$



Die Exponentialform wird bei zahlreichen Anwendungen komplexer Zahlen in Mathematik und Physik bevorzugt verwendet. Dieser Konvention werden wir uns in den folgenden Kapiteln anschliessen. Ein Vorteil der Exponentialform besteht nicht zuletzt darin, dass in ihr zwei komplexe Zahlen genau so multipliziert werden, wie es den vom reellen Rechnen bekannten Potenzgesetzen entspricht. Ersetzt man nämlich in der Notation von Satz 3.6 die trigonometrische Polarform durch die Exponentialform, so erhält man:

Satz 3.15: Multiplikation in Exponentialform

Das Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ ist:

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; r_1\,r_2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Durch die koordinatenweise Berechnung von Produkten in der Polar- oder Exponentialform lassen sich auch höhere Potenzen komplexer Zahlen einfach darstellen. Dies legt die Frage nach der zum Potenzieren inversen Operation, dem Radizieren oder Wurzelziehen, nahe – auf welche wir im nächsten Kapitel 4 zurückkommen werden.

Frage 3.16: Was sind Wurzeln einer komplexen Zahl?

Wie kann man Quadratwurzeln einer komplexen Zahl definieren? Wie dritte, vierte oder allgemein n-te Wurzeln? Überlegen Sie sich die Antwort mit Hilfe einfacher Beispiele:

- Welche komplexen Zahlen könnte man sinnvoll als Quadratwurzeln von 1, -1 oder i ansehen? Welche als Quadratwurzeln von 4, -4 oder 4i?
- Welche komplexen Zahlen könnte man sinnvoll als dritte Wurzeln von 1, -1 oder i ansehen? Welche als dritte Wurzeln von 8, -8 oder 8i?

Aufgaben

Aufgabe 3.1. Beschreiben Sie die Teilmengen der Zahlenebene durch (Un-)Gleichungen für die Beträge beziehungsweise Argumente:

a) Ursprungskreis mit Radius 5
b) Ursprungskreissegment zwischen $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ und $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$
c) Gerade durch $-1-\mathrm{i}$ und $1+\mathrm{i}$
d) Strecke zwischen $-\sqrt{3}+3\mathrm{i}$ und $-3\sqrt{3}+9\mathrm{i}$

Aufgabe 3.2. Bestimmen Sie alle Lösungen $\varphi \in [0°, 360°[$ der trigonometrischen Gleichungen:

a) $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\varphi = \arctan(-\sqrt{3})$

Aufgabe 3.3. Bringen Sie ohne Taschenrechner auf Normalform:

a) $3 \operatorname{cis} 90°$ b) $3\sqrt{2} \operatorname{cis} 135°$ c) $4 \operatorname{cis}(-30°)$ d) $\sqrt{3} \operatorname{cis}(-240°)$

Aufgabe 3.4. Geben Sie ohne Taschenrechner die trigonometrischen Polarformen von $z_1 = 1+\mathrm{i}$ und $z_2 = 1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ an. Berechnen Sie:

a) $\arg(z_1 - z_2)$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

Aufgabe 3.5. Drücken Sie mit Hilfe des Satzes von de Moivre durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ aus:

a) $\cos(2\varphi)$ b) $\sin(2\varphi)$ c) $\cos(4\varphi)$ d) $\sin(4\varphi)$

Aufgabe 3.6. Bringen Sie ohne Taschenrechner auf Normalform:

a) $4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ b) $2\mathrm{e}^{0}$ c) $3\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$ d) $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}$
e) $2\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{i}}$ f) $6\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ g) $6\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$ h) $8\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}$

Aufgabe 3.7. Geben Sie ohne Taschenrechner in Exponentialform an:

a) $2+2\mathrm{i}$ b) $-2+2\mathrm{i}$ c) $-2-2\mathrm{i}$ d) $2-2\mathrm{i}$
e) $2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$ f) $-2+2\sqrt{3}\mathrm{i}$ g) $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ h) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

Aufgabe 3.8. Geben Sie jeweils $-z$, $\bar{z}$ und z^{-1} ohne Taschenrechner in Exponentialform an:

a) $z = 4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ b) $z = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$ c) $z = 8\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{9}\mathrm{i}}$

Aufgabe 3.9. Bestimmen Sie das Ergebnis ohne Taschenrechner in Exponentialform:

a) $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{9}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$ b) $\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}} : \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right) : \mathrm{e}^{\frac{10\pi}{9}\mathrm{i}}$ c) $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} : \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}$ d) $\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} : \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$

Aufgabe 3.10. Berechnen Sie ohne Taschenrechner für $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{9}\mathrm{i}}$, $z_2 = 3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ und $z_3 = 2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}$ in Exponentialform:

a) z_1^5 b) $z_1 z_2 z_3$ c) $z_1^2 z_2 : z_3$ d) z_3^{-3}

Aufgabe 3.11. Zeichnen Sie für $z = \frac{11}{10}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ die Potenzen $z^{-6}, z^{-5}, \ldots, z^6$ in der Zahlenebene. Begründen Sie, warum alle diese Potenzen auf einer logarithmischen Spirale liegen.

Aufgabe 3.12. a) Beschreiben Sie die Abbildung der Zahlenebene geometrisch:

i) $z \mapsto w = f(z) = -\mathrm{i} \cdot z$ ii) $z \mapsto w = f(z) = (3 + 4\mathrm{i}) \cdot z$

b) Geben Sie eine Funktionsgleichung für die Abbildung der Zahlenebene an:

i) Drehstreckung um 30° gegen UZS mit dem Streckfaktor 2 um das Zentrum 0

ii) Punktspiegelung am Punkt 0

iii) Drehstreckung um 45° mit UZS mit dem Streckfaktor $\sqrt{2}$ um das Zentrum $2 + 3\mathrm{i}$

Aufgabe 3.13. Ein positiv orientiertes, reguläres Sechseck $ABCDEF$ hat den Mittelpunkt 0 und die Ecke $A = \sqrt{3} + i$. Berechnen Sie seine übrigen Ecken.

Aufgabe 3.14*. Bestimmen Sie ohne Taschenrechner exakt mit Hilfe bekannter, exakter Sinus- und Cosinus-Werte:

a) $\sin 15°$ b) $\sin 105°$ c) $\cos 105°$ d) $\cos 165°$

Tipp: Berechnen Sie zum Beispiel $\sin 15° = \mathrm{Im}\left(\mathrm{cis}\,(15°)\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{cis}\,(45° - 30°)\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{cis}\,45°}{\mathrm{cis}\,30°}\right)$.

Aufgabe 3.15*. a) Zeigen Sie die Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$. Weisen Sie dazu für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ nach:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \;=\; z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

b) Zeigen Sie die Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$, indem Sie für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ nachweisen:

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; z_2 \cdot z_1$$

Aufgabe 3.16*. Geben Sie eine geometrische Interpretation des Distributivgesetzes, gemäss dem für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\left(z_1 + z_2\right) \cdot z_3 \;=\; z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

Aufgabe 3.17*. Zeigen Sie für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\varphi}{n}\right)^n$ existiert.
Tipp: Argumentieren Sie in Polarform. Weisen Sie einmal die Konvergenz der Betragsquadrate von $\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\varphi}{n}\right)^n$ nach und einmal die Konvergenz der Argumente.

Aufgabe 3.18*. Zeigen Sie die Identität $\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\varphi}{n}\right)^n$.

4 Radizieren

Analog zum Reellen bezeichnet man auch im Komplexen die zum Potenzieren inverse Operation als Radizieren beziehungsweise Wurzelziehen:

Definition 4.1 ▶ n-te Wurzel, Radikand

Als **n-te Wurzel** des komplexen **Radikanden** w bezeichnet man jede komplexe Zahl z, welche die folgende Potenzgleichung löst:

$$z^n = w$$

Im Verlauf dieses Kapitels wollen wir verstehen, wie sich die so definierten Wurzeln für beliebige komplexe Radikanden berechnen lassen. Da das Potenzieren gemäss Kapitel 3 in Polarform wesentlich einfacher nachvollziehbar ist, werden wir beim Radizieren im Folgenden von Radikanden in Polarform ausgehen.

Ein erstes Beispiel

Nach dem Satz von de Moivre erhält man die zweite Potenz einer komplexen Zahl auf dem Einheitskreis, indem man deren Argument verdoppelt. Dementsprechend sollte man eine Quadratwurzel eines komplexen Radikanden auf dem Einheitskreis dadurch erhalten können, dass man dessen Argument halbiert:

Beispiel 4.2

Die Zahl $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ ist eine Quadratwurzel von $-1 = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}}$, da gilt:

$$\mathrm{i}^2 = \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$$

Allerdings ist diese Quadratwurzel nicht die einzige des Radikanden -1. Auch die Zahl $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}$ ist eine Quadratwurzel von $-1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$, da gilt:

$$(-\mathrm{i})^2 = \left(\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\cdot\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$$

Abbildung 4.1 illustriert, warum man zwei Quadratwurzeln i und $-$i erhält: Einmal wird das Argument $\arg(-1) = \pi$ des Radikanden halbiert, welches dem Hauptwert entspricht, und einmal das alternative Argument $\arg(-1) = 3\pi$.

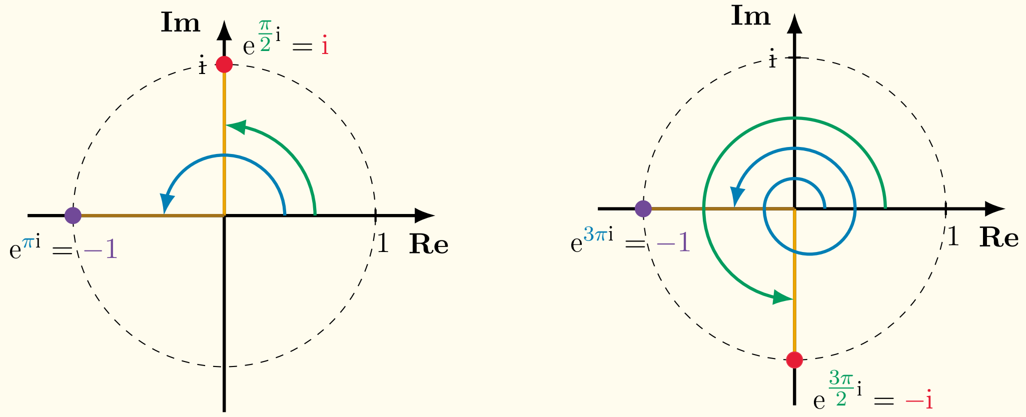


Abbildung 4.1: Zwei Quadratwurzeln i und $-$i von -1.

Die Einheitswurzeln

Beschränkt man sich also beim Radizieren in Polarform darauf, das Argument des Radikanden nur durch seinen Hauptwert darzustellen, so gehen manche Wurzeln unausweichlich verloren. Gleichzeitig stellt sich die Frage, wie viele n-te Wurzeln ein Radikand überhaupt haben kann. In diesem Abschnitt untersuchen wir diese Frage zunächst für den einfachsten, nicht-trivialen Radikanden, nämlich für $w = 1$:

Definition 4.3 ▶ n-te Einheitswurzel, Kreisteilungsgleichung

Als ***n*-te Einheitswurzel** bezeichnet man jede n-te Wurzel des Radikanden $w = 1$, das heisst jede komplexe Zahl z, welche die sogenannte **Kreisteilungsgleichung** löst:

$$z^n = 1$$

Der Radikand $w = 1$ liegt auf dem Einheitskreis. Gemäss dem Satz von de Moivre reduziert sich damit das n-fache Radizieren darauf, das Argument einer Polardarstellung von $w = 1$ durch n zu dividieren. Allerdings gibt es für $w = 1$ aufgrund der 2π-Periodizität von Sinus und Cosinus unendlich viele, gleichwertige Polardarstellungen mit unterschiedlichen Argumenten.

Abbildung 4.1 gibt einen ersten Eindruck, auf welche Weise unterschiedliche Argumente eines Radikanden zu unterschiedlichen Wurzeln führen können. Betrachten wir nun genauer, wie zum Beispiel die dritten Einheitswurzeln im Einzelnen von den Argumenten des Radikanden $w = 1$ abhängen:

Beispiel 4.4

Die drei dritten Einheitswurzeln ζ_0, ζ_1 und ζ_2 erhält man wie folgt (siehe Abbildung 4.2):

$$w = e^{0\cdot i} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \zeta_0 = e^{\frac{0}{3}\cdot i} = 1$$

$$w = e^{2\pi i} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \zeta_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w = e^{4\pi i} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \zeta_2 = e^{\frac{4\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Damit sind bereits alle dritten Einheitswurzeln bestimmt. Denn jedes weitere Argument von $w = 1$ liefert nach Division durch 3 ein Argument, das äquivalent ist zu einem dieser drei dritten Einheitswurzeln. So gilt etwa:

$$w = e^{6\pi i} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \zeta_0 = e^{\frac{6\pi}{3}i} = e^{2\pi i} = 1$$

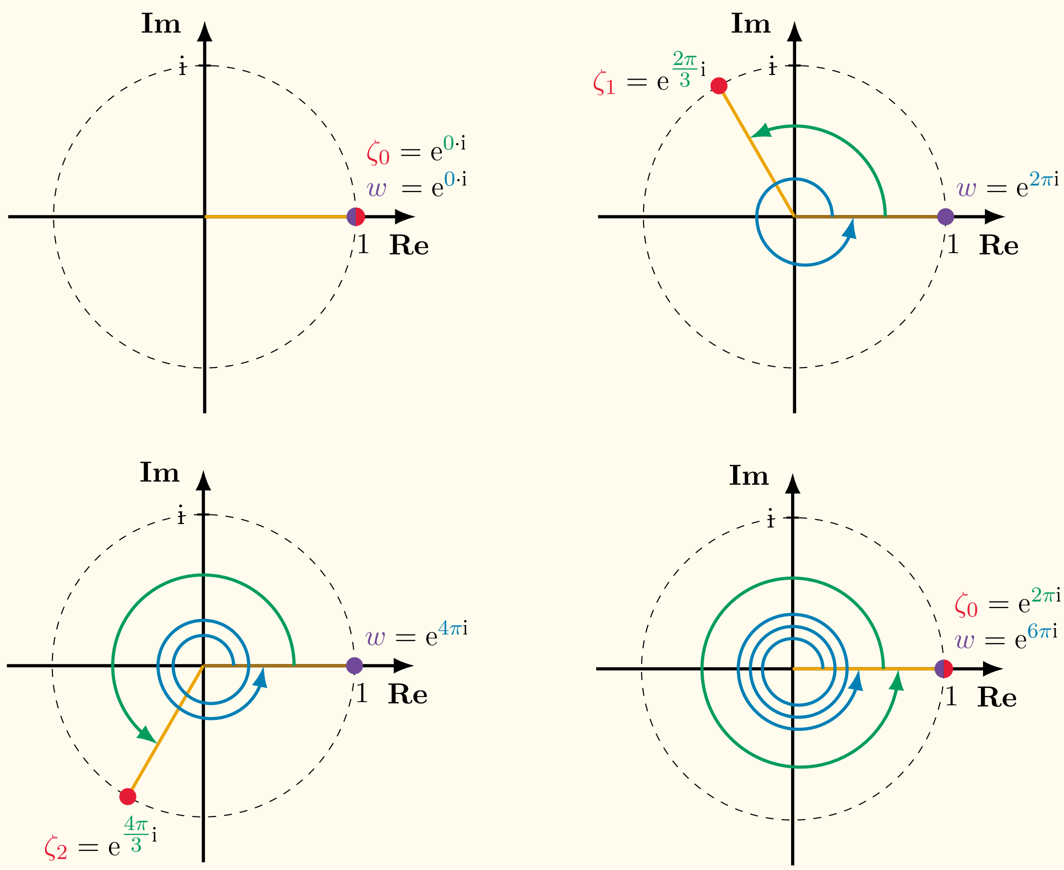


Abbildung 4.2: Die drei dritten Einheitswurzeln ζ_0, ζ_1 und ζ_2.

Abbildung 4.2 illustriert, wie die Lösungen der Kreisteilungsgleichung $z^3 = 1$, die drei dritten Einheitswurzeln, davon abhängen, welches Argument in der Polardarstellung des Radikanden $w = 1$ verwendet wird. Dies lässt sich ohne Probleme auf die allgemeine Kreisteilungsgleichung $z^n = 1$ mit einem beliebigem Exponenten $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern:

Satz 4.5 : Gestalt der n-ten Einheitswurzeln

Die Kreisteilungsgleichung $z^n = 1$ hat genau n Lösungen, nämlich die folgenden n-ten Einheitswurzeln:

$$\zeta_0 = \mathrm{e}^{\frac{0\cdot 2\pi}{n}\,\mathrm{i}} = 1, \qquad \zeta_1 = \mathrm{e}^{\frac{1\cdot 2\pi}{n}\,\mathrm{i}}, \qquad \ldots\ldots \qquad \zeta_{n-1} = \mathrm{e}^{\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}\,\mathrm{i}}$$

Gemäss dem Satz von de Moivre kann man damit jede n-te Einheitswurzel ζ_k als die k-te Potenz von ζ_1 erhalten:

$$\zeta_k \;=\; \mathrm{e}^{\frac{k\cdot 2\pi}{n}\,\mathrm{i}} \;=\; \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}}\right)^k \;=\; \zeta_1{}^k$$

Bei der Berechnung der vier vierten Einheitswurzeln zeigt sich dies zum Beispiel wie folgt:

Beispiel 4.6

$$\zeta_0 = \mathrm{e}^{\frac{0\cdot 2\pi}{4}\,\mathrm{i}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}\right)^0 = \mathrm{i}^0 = 1, \qquad \zeta_1 = \mathrm{e}^{\frac{1\cdot 2\pi}{4}\,\mathrm{i}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}\right)^1 = \mathrm{i}^1 = \mathrm{i},$$

$$\zeta_2 = \mathrm{e}^{\frac{2\cdot 2\pi}{4}\,\mathrm{i}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}\right)^2 = \mathrm{i}^2 = -1, \qquad \zeta_3 = \mathrm{e}^{\frac{3\cdot 2\pi}{4}\,\mathrm{i}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}}\right)^3 = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$$

Die Darstellungen der n-ten Einheitswurzeln als Potenzen von $\zeta_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\,\mathrm{i}}$ lassen sich geometrisch einfach interpretieren: Jede Multiplikation mit einem Faktor ζ_1 entspricht einer Drehung um $\frac{2\pi}{n}$ in der Zahlenebene. Abbildung 4.3 verdeutlicht dies am Beispiel der zweiten, dritten und vierten Einheitswurzeln. Deren Lage auf dem Einheitskreis motiviert gleichzeitig, warum die Potenzgleichung $z^n = 1$ üblicherweise als Kreisteilungsgleichung bezeichnet wird.

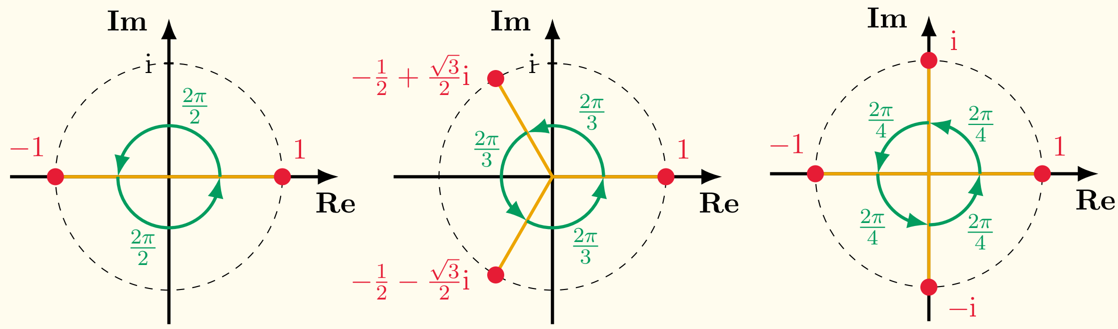


Abbildung 4.3: Die zweiten, dritten und vierten Einheitswurzeln (von links nach rechts).

Die Wurzeln allgemeiner Radikanden

Wie Beispiel 4.2 bereits andeutet, sollten auch die Lösungen einer allgemeinen Potenzgleichung $z^n = w$ davon abhängen, welches Argument bei der Polardarstellung des Radikanden w verwendet wird. Betrachten wir dies an einem Beispiel:

Beispiel 4.7

Die vier vierten Wurzeln von $w = 2e^{\frac{4\pi}{9}\mathrm{i}} \approx 0.347 + 1.970\,\mathrm{i}$ erhält man zum Beispiel aus den folgenden Argumenten von w:

$$
\begin{aligned}
w &= 2e^{\frac{4\pi}{9}\mathrm{i}} &\Longrightarrow\quad z_1 &= \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{4\pi}{9\cdot 4}\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\pi}{9}\mathrm{i}} \approx 1.117 + 0.407\,\mathrm{i}\\
w &= 2e^{\frac{22\pi}{9}\mathrm{i}} &\Longrightarrow\quad z_2 &= \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{22\pi}{9\cdot 4}\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{11\pi}{18}\mathrm{i}} \approx -0.407 + 1.117\,\mathrm{i}\\
w &= 2e^{\frac{40\pi}{9}\mathrm{i}} &\Longrightarrow\quad z_3 &= \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{40\pi}{9\cdot 4}\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{10\pi}{9}\mathrm{i}} \approx -1.117 - 0.407\,\mathrm{i}\\
w &= 2e^{\frac{58\pi}{9}\mathrm{i}} &\Longrightarrow\quad z_4 &= \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{58\pi}{9\cdot 4}\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{29\pi}{18}\mathrm{i}} \approx 0.407 - 1.117\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

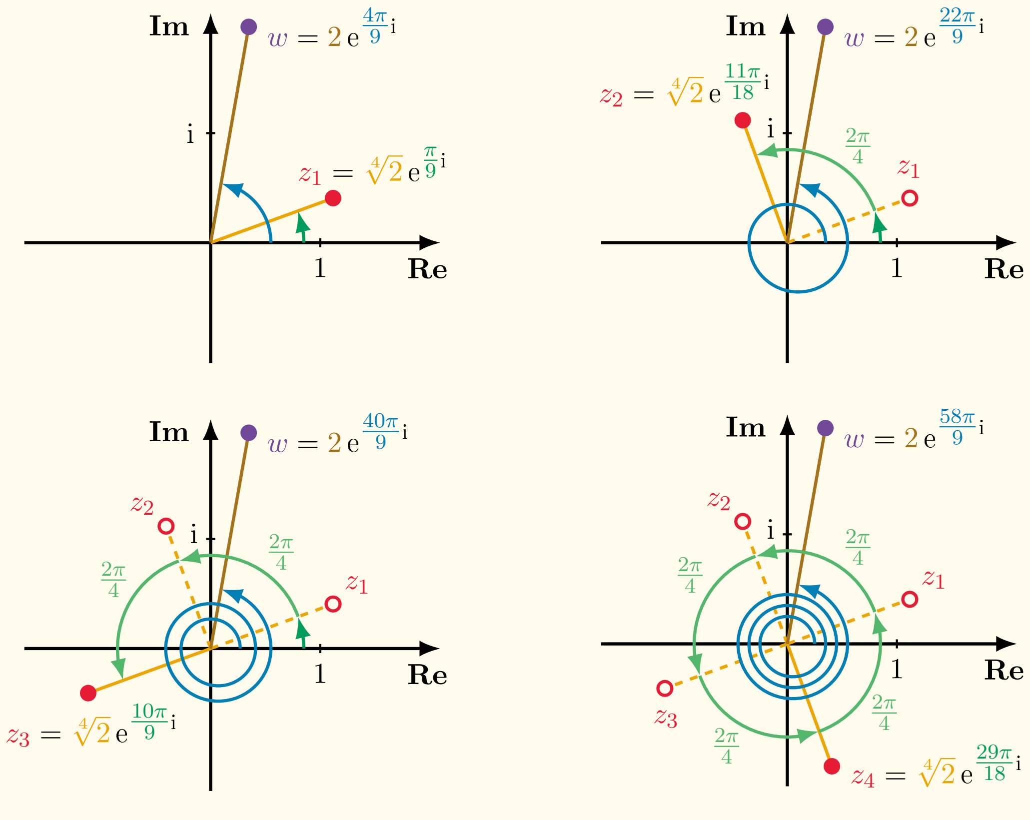


Abbildung 4.4: Die vier vierten Wurzeln z_1, z_2, z_3 und z_4 von $w \approx 0.347 + 1.970\,\mathrm{i}$.

Abbildung 4.4 legt nahe, dass sich die Zusammenhänge zwischen den vier vierten Wurzeln aus Beispiel 4.7 mit Hilfe der vierten Einheitswurzeln erfassen lassen:

Beispiel 4.8

Die vier vierten Wurzeln $z_1, \ldots, z_4$ von $w = 2\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{9}\mathrm{i}} \approx 0.347 + 1.970\,\mathrm{i}$ ergeben sich aus z_1 durch Multiplikation mit den vier vierten Einheitswurzeln $\zeta_0, \ldots, \zeta_3$:

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{9}\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{9}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}} = z_1 \cdot \zeta_0, \qquad z_2 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{18}\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{9}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{4}\mathrm{i}} = z_1 \cdot \zeta_1,$$
$$z_3 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{10\pi}{9}\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{9}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{4}\mathrm{i}} = z_1 \cdot \zeta_2, \qquad z_4 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{29\pi}{18}\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{9}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{6\pi}{4}\mathrm{i}} = z_1 \cdot \zeta_3$$

Wie Beispiel 4.6 zeigt kann man damit auch aus einer der vier vierten Wurzeln von w die übrigen drei durch sukzessive Multiplikationen mit $\zeta_1 = \mathrm{i}$ erhalten. Geometrisch entsprechen diese Multiplikationen mit $\zeta_1 = \mathrm{i}$ genau den in Abbildung 4.4 dargestellten Drehungen um $\frac{2\pi}{4}$ von einer vierten Wurzel von w zur nächsten:

Beispiel 4.9

Die vier vierten Wurzeln $z_1, \ldots, z_4$ von $w = 2\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{9}\mathrm{i}} \approx 0.347 + 1.970\,\mathrm{i}$ ergeben sich aus z_1 durch sukzessive Multiplikation mit der vierten Einheitswurzel $\zeta_1 = \mathrm{i}$:

$$z_1 \approx 1.117 + 0.407\,\mathrm{i}, \qquad z_2 = z_1 \cdot \mathrm{i} \approx -0.407 + 1.117\,\mathrm{i},$$
$$z_3 = z_2 \cdot \mathrm{i} \approx -1.117 - 0.407\,\mathrm{i}, \qquad z_4 = z_3 \cdot \mathrm{i} \approx 0.407 - 1.17\,\mathrm{i}$$

Die Ergebnisse der Beispiele 4.7, 4.8 und 4.9 gelten allgemein für die Lösungsmenge einer komplexen Potenzgleichung $z^n = w$. Sie lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Satz 4.10: Gestalt der n-ten Wurzeln

- Die Potenzgleichung $z^n = w$ hat genau n Lösungen, nämlich die n folgenden n-ten Wurzeln des Radikanden w:

$$z_1 = \sqrt[n]{|w|}\,\mathrm{e}^{\frac{\arg w}{n}\mathrm{i}}, \qquad \ldots \qquad z_n = \sqrt[n]{|w|}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{\arg w}{n} + \frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}\right)\mathrm{i}}$$

- Aus einer n-ten Wurzel z_1 von w lassen sich alle n-ten Wurzeln von w durch Multiplikation mit den n-ten Einheitswurzeln $\zeta_0 = 1, \ldots, \zeta_{n-1}$ erhalten:

$$z_1 = z_1 \cdot \zeta_0, \qquad z_2 = z_1 \cdot \zeta_1, \qquad z_3 = z_1 \cdot \zeta_2, \qquad \ldots \qquad z_n = z_1 \cdot \zeta_{n-1}$$

- Aus einer n-ten Wurzel z_1 von w lassen sich alle n-ten Wurzeln von w durch wiederholte Multiplikation mit der n-ten Einheitswurzel $\zeta_1 = e^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}}$ erhalten:

$$z_1, \qquad z_2 = z_1 \cdot \zeta_1, \qquad z_3 = z_2 \cdot \zeta_1, \qquad \ldots \qquad z_n = z_{n-1} \cdot \zeta_1$$

Diskussion

Nachdem der Wurzel-Begriff für komplexe Radikanden geklärt ist, können wir nun eine der Fragen aufgreifen, die sich am Ende von Kapitel 1 stellte: Kann man i nicht einfach mit „$\sqrt{-1}$“ identifizieren?

Bereits die Notation „$\sqrt{\ }$“ setzt implizit voraus, dass sich eine der beiden Quadratwurzeln des Radikanden als *die* Quadratwurzel auszeichnen lässt. So wird beim Radizieren im Reellen, woher das Wurzel-Symbol stammt, von den beiden Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 = w$ mit positivem Radikanden w stets die positive Lösung als *die* Quadratwurzel von w ausgezeichnet. So ist zum Beispiel $\sqrt{4} = 2$ und $\sqrt{4} \neq -2$.

Im Komplexen befindet sich unter den n Lösungen von $z^n = w$, den n verschiedenen n-ten Wurzeln von des Radikanden w, jedoch keine, die sich sinnvoll als *die* n-te Wurzel „$\sqrt[n]{w}$“ definieren liesse - auch nicht die in der Zahlenebene „erstgelegene“ Wurzel, bei deren Berechnung der Hauptwert des Radikanden-Arguments $\arg(w)$ verwendet wird. Denn eine solche Definition würde zu verschiedenen Widersprüchen führen:

Wird die in der Zahlenebene „erstgelegene“ Lösung von $z^n = w$ als „$\sqrt[n]{w}$“ definiert, ergibt sich zum Ersten ein Widerspruch zur üblichen Definition der Wurzel im Reellen:

Beispiel 4.11

$$-2 \;=\; \sqrt[3]{-8} \;\neq\; \text{„}\sqrt[3]{-8}\text{“} \;=\; \sqrt[3]{8}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \;=\; 1+\sqrt{3}$$

Zum Zweiten ist diese Definition von „$\sqrt[n]{w}$“ nicht verträglich mit dem Potenzgesetz, das gemäss Satz 3.15 insbesondere für alle n-ten Wurzeln ergibt:

$$\sqrt[n]{r_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_1}{n}} \cdot \sqrt[n]{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi_2}{n}} \;=\; \sqrt[n]{r_1 r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{n}\right)}$$

Diese Unverträglichkeit wird insbesondere am Beispiel „$\sqrt{-1}$“ aus Kapitel 1 deutlich:

Beispiel 4.12

$$\begin{tikzcd}
(-1) \arrow[d, "\text{„}\sqrt{\ }\text{“}"'] & \cdot & (-1) \arrow[d, "\text{„}\sqrt{\ }\text{“}"] & = & \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} \arrow[d, "\text{„}\sqrt{\ }\text{“}"'] & \cdot & \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} \arrow[d, "\text{„}\sqrt{\ }\text{“}"] & = & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} \arrow[d, dashed, "\text{„}\sqrt{\ }\text{“}"', "?"] & = & 1 \arrow[d, phantom, "\nparallel"] \\
\mathrm{i} & \cdot & \mathrm{i} & = & \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} & \cdot & \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} & = & \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} & = & -1
\end{tikzcd}$$

Der im Beispiel 1.8 erzielte Widerspruch beim Rechnen mit „$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$“ entstand also dadurch, dass die „erste“ Lösung i der Potenzgleichung $z^2 = -1$ mit der vermeintlich wohldefinierten Wurzel „$\sqrt{-1}$“ gleichgesetzt wird.

Allerdings lieferte die naive Gleichsetzung „$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$“ im Falle der quadratischen Lösungsformel wie etwa im Beispiel 1.7 durchaus die richtigen Ergebnisse. Betrachten wir deshalb den speziellen Fall der Quadratwurzeln eines negativen reellen Radikanden genauer, der zum Beispiel bei der Lösung reeller quadratischer Gleichungen mit negativer Diskriminante $D < 0$ auftritt: Gemäss Satz 4.10 unterscheiden sich die beiden Quadratwurzeln eines beliebigen Radikanden um den Faktor $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$. Für den negativ-reellen Radikanden $D = |D|\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$ ist die naive Definition der Quadratwurzel deshalb bis aufs Vorzeichen eindeutig:

$$„\sqrt{D}“ \;=\; \sqrt{|D|}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \sqrt{|D|}\,\mathrm{i} \qquad \text{oder} \qquad „\sqrt{D}“ \;=\; \sqrt{|D|}\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}} = -\sqrt{|D|}\,\mathrm{i}$$

Damit lässt sich jede dieser beiden „Wurzeln“ heuristisch zur Lösung einer reellen quadratischen Gleichung mit negativer Diskriminante D einsetzen. Denn gemäss der reellen quadratischen Lösungsformel sind ohnehin beide Vorzeichen vor der Wurzel zu berücksichtigen.

Komplexe Potenzfunktionen

Zur Vorbereitung des folgenden Kapitels wollen wir den bisherigen Inhalt dieses Kapitels aus einem weiteren Blickwinkel betrachten: Analog zum Reellen lassen sich auch im Komplexen Funktionen definieren. Einfachen Beispielen sind wir bereits in A3.12 im Kapitel 3 begegnet. Wie im Reellen so kann man auch im Komplexen die Potenzgleichung $z^n = w$ als Funktionsgleichung einer **komplexen Potenzfunktion** auffassen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y = p(x) = x^n \qquad \text{vs.} \qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w = p(z) = z^n$$

Im Reellen liegt die Definitionsmenge einer Funktion üblicherweise auf der x-Achse, die Zielmenge auf der y-Achse. Im Komplexen folgen die entsprechenden Bezeichnungen dem Gebrauch der Variablen z und w: Diejenige Zahlenebene, in welcher die Definitionsmenge der Funktion liegt, bezeichnet man als ***z*-Ebene**, und diejenige, welche die Zielmenge enthält, als ***w*-Ebene**.

Frage 4.13: Wie sieht der Graph einer komplexen Potenzfunktion aus?

Untersuchen Sie den Graphen der Potenzfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w = p(z) = z^3$:

- Betrachten Sie den Punkt $w_\varphi := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ für den Parameterwert $\varphi = \frac{\pi}{2}$ auf dem Einheitskreis der w-Ebene. Wo in der z-Ebene liegen die Urbilder $f^{-1}(w_\varphi)$ von w_φ unter f? Wie verändern sich diese Urbildpunkte, wenn der Parameter φ das gesamte Intervall $[0, 2\pi[$ durchläuft?
- Betrachten Sie nun den Punkt $z_\varphi := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ in der z-Ebene. Wenn der Parameter φ das Intervall $[0, 2\pi[$ durchläuft, dann durchläuft z_φ einmal den Einheitskreis der z-Ebene. Was geschieht dabei mit dem Bildpunkt $f(z_\varphi)$ von z_φ unter f in der w-Ebene?
- Was ändert sich bei obigen Urbildern $f^{-1}(w_\varphi)$ und Bildern $f(z_\varphi)$, wenn w_φ beziehungsweise z_φ Ursprungskreise mit beliebigen Radien durchlaufen?

Auf diese Frage werden wir im Beispiel 5.7 des nächsten Kapitels zurückkommen. Mehr komplexen Funktionen, insbesondere komplexer Potenzfunktionen, wird dann im Band zu komplexen Abbildungen zu finden sein.

Aufgaben

Aufgabe 4.1. a) Bestimmen Sie die Einheitswurzeln. Stellen Sie sie in der Zahlenebene dar:

i) $\zeta^5 = 1$ ii) $\zeta^6 = 1$ iii) $\zeta^8 = 1$

b) Betrachten Sie die n-ten Einheitswurzeln $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$:

i) Wie gross ist die Summe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k$? ii) Wie gross ist das Produkt $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k$?

Aufgabe 4.2. Bestimmen Sie die Lösungen, und stellen Sie sie in der Zahlenebene dar:

a) $z^3 = 27\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{10}\mathrm{i}}$ b) $z^3 = 8\,\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{5}\mathrm{i}}$ c) $z^2 = 6\,\mathrm{e}^{\frac{16\pi}{9}\mathrm{i}}$ d) $z^4 = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$

Aufgabe 4.3. Berechnen Sie die Lösungen. Runden Sie in Normalform auf drei Dezimalen:

a) $z^4 = 4 + 3\mathrm{i}$ b) $z^4 + 64 = 0$ c) $z^5 = 1 + \mathrm{i}$ d) $z^6 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 1$

Aufgabe 4.4. Geben Sie die Lösungen in Exponentialform an:

a) $z^3 = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}}\right)^2$ b) $z^6 = \left(\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^4$ c) $z^3 = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^3$ d) $z^2 = \left(4\,\mathrm{e}^{-\frac{8\pi}{9}\mathrm{i}}\right)^3$

Aufgabe 4.5. a) Die Gleichung $z^5 = a$ hat $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}}$ als Lösung. Geben Sie alle weiteren Lösungen in Exponentialform an.

b) Die Gleichung $z^4 = b$ hat die Lösung $z_1 = 1 + \mathrm{i}$. Geben Sie alle weiteren Lösungen in Normalform an.

Aufgabe 4.6. Lösen Sie mit Hilfe einer Substitution:

a) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ b) $z^8 + 12z^4 - 64 = 0$

5 Polynomiale Gleichungen

Die reellen Zahlen werden durch die Hinzunahme der imaginären Einheit i zu den komplexen Zahlen erweitert. Doch nicht nur die i definierende quadratische Gleichung $z^2 = -1$ lässt sich in $\mathbb{C}$ lösen, sondern – wie im Kapitel 4 gezeigt – jede Potenzgleichung $z^n = w$ von beliebigem Grad $n \geq 2$. Dass es in den komplexen Zahlen sogar zu jeder polynomialen Gleichung eine Lösung gibt, werden wir in diesem Kapitel sehen. Die Existenz einer solche Nullstelle garantiert der Fundamentalsatz der Algebra. Eine Idee zu seinem Beweis werden wir nachvollziehen. Abschliessend wollen wir betrachten, welche Konsequenzen sich aus der Existenz von Nullstellen für die Faktorisierung eines Polynoms ergeben.

Definition 5.1 ▶ Polynom, Grad, Nullstelle, polynomiale Gleichung

- Ein komplexes **Polynom** $p(z)$ vom **Grad** n in der komplexen Variablen z mit den Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ist ein Term der Form

  $$p(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0.$$

  Dabei ist $a_n \neq 0$ der sogenannte **Leitkoeffizient**.
- Ein Polynom vom Grad 2 nennt man auch **quadratisch**, ein Polynom vom Grad 3 auch **kubisch**.
- Ein Polynom heisst **reell**, wenn alle seine Koeffizienten reell sind.
- Eine **Nullstelle** des Polynoms p ist eine Lösung z der **polynomialen Gleichung**

  $$p(z) = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0 \;=\; 0.$$

Die Nullstellen quadratischer Polynome

Für reelle quadratische Gleichungen lässt sich die bekannte quadratische Lösungsformel mit Hilfe einer geeigneten quadratischen Ergänzung herleiten. Dies kann analog auch für quadratische

Gleichungen $az^2 + bz + c = 0$ mit komplexen Koeffizienten a, b und c durchgeführt werden:

$$a\,z^2 + b\,z + c \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 4a^2\,z^2 + 4ab\,z + 4ac \;=\; 0$$

$$\Longleftrightarrow\quad 4a^2\,z^2 + 4ab\,z + b^2 \;=\; b^2 - 4ac \quad\Longleftrightarrow\quad \big(2a\,z + b\big)^2 \;=\; b^2 - 4ac$$

Aus den beiden in der Regel unterschiedlichen Quadratwurzeln w_1 und w_2 der **Diskriminante** $D := b^2 - 4ac$ lassen sich also durch Auflösen der beiden Gleichungen

$$2a\,z_1 + b \;=\; w_1 \qquad \text{und} \qquad 2a\,z_2 + b \;=\; w_2$$

direkt die zugehörigen Lösungen z_1 und z_2 bestimmen:

Satz 5.2 : quadratische Lösungsformel

Die quadratische Gleichung $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ wird gelöst durch

$$z_1 \;=\; \frac{1}{2a}\big(-b + w_1\big) \qquad \text{und} \qquad z_2 \;=\; \frac{1}{2a}\big(-b + w_2\big) \;=\; \frac{1}{2a}\big(-b - w_1\big),$$

wobei w_1 und w_2 die Quadratwurzeln der Diskriminante $D := b^2 - 4ac$ sind.

Mit dieser Lösungsformel lassen sich sämtliche komplexen quadratischen Gleichungen lösen:

Beispiel 5.3

Betrachten wir eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten:

$$\mathrm{i}\,z^2 - 3\mathrm{i}\,z - 1 + 3\mathrm{i} \;=\; 0$$

Aus $a = \mathrm{i}$, $b = -3\mathrm{i}$, $c = -1 + 3\mathrm{i}$ lässt sich die komplexe Diskriminante berechnen:

$$D \;=\; b^2 - 4ac \;=\; 3 + 4\mathrm{i}$$

Die beiden zweiten Wurzeln von D erhält man durch Radizieren:

$$w_1 \;=\; \sqrt{|D|}\,\mathrm{e}^{\frac{\arg(D)}{2}\mathrm{i}} \;=\; 2 + \mathrm{i} \qquad \text{und} \qquad w_2 \;=\; -w_1 = -(2 + \mathrm{i})$$

Setzt man $w_1 = 2 + \mathrm{i}$ und $w_2 = -(2 + \mathrm{i})$ in die quadratische Lösungsformel ein, so ergeben sich die beiden Lösungen z_1 und z_2 der quadratischen Gleichung:

$$z_1 \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(3\mathrm{i} + (2 + \mathrm{i})\Big) \;=\; 1 + \mathrm{i} \qquad \text{und} \qquad z_2 \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}}\Big(3\mathrm{i} - (2 + \mathrm{i})\Big) \;=\; 2 - \mathrm{i}$$

Wie im Reellen kann man mit der quadratischen Lösungsformel auch gewisse komplexe polynomiale Gleichungen höheren Grades behandeln. So kann zum Beispiel eine komplexe **biquadratische Gleichung** mit Hilfe einer Substitution gelöst werden (vgl. A4.6, A5.1):

Beispiel 5.4

Betrachten wir eine biquadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten:

$$z^4 + (4 - 2\mathrm{i})\, z^2 - 8\mathrm{i} \;=\; 0$$

Substituiert man $s := z^2$, so wird daraus eine quadratische Gleichung für s:

$$s^2 + (4 - 2\mathrm{i})\, s - 8\mathrm{i} \;=\; 0$$

Wie im vorherigen Beispiel 5.3 berechnet man die beiden zweiten Wurzeln w_1 und w_2 der Diskriminante $D = 12 + 16\mathrm{i}$:

$$w_1 \;=\; \sqrt{|D|}\,\mathrm{e}^{\frac{\arg(D)}{2}\mathrm{i}} \;=\; 4 + 2\,\mathrm{i} \qquad \text{und} \qquad w_2 \;=\; -w_1 \;=\; -(4 + 2\,\mathrm{i})$$

Eingesetzt in die quadratische Lösungsformel ergibt dies die beiden Lösungen s_1 und s_2 der quadratischen Gleichung für s:

$$s_1 = \frac{1}{2}\Big(-(4 - 2\mathrm{i}) - (4 + 2\mathrm{i})\Big) = -4, \qquad s_2 = \frac{1}{2}\Big(-(4 - 2\mathrm{i}) + (4 + 2\mathrm{i})\Big) = 2\,\mathrm{i}$$

Aus der Resubstitution $z^2 = s$ kann man nun durch nochmaliges Radizieren die vier Lösungen der gegebenen biquadratischen Gleichung in z erhalten:

$$\begin{aligned}
z^2 &= s_1 = -4 = 4\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} &&\Longrightarrow\quad z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{i}, &&z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}} = -2\,\mathrm{i}\\
z^2 &= s_2 = 2\,\mathrm{i} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} &&\Longrightarrow\quad z_3 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}, &&z_4 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}} = -1 - \mathrm{i}
\end{aligned}$$

Unter welchen Umständen es algebraische Lösungsformeln für allgemeine polynomiale Gleichungen höheren Grades gibt, war über lange Zeit eine offene Frage:

Bemerkung 5.5

Die Nullstellen komplexer Polynome dritten und vierten Grades lassen sich explizit durch algebraische Formeln darstellen, auch wenn diese aufwändiger sind als im quadratischen Fall: Für Polynome dritten Grades gibt es die nach Gerolamo Cardano (1501-1576) benannten Cardanischen Formeln. Für Polynome vierten Grades wurden Lösungsformeln von Lodovico Ferrari (1522-1565) und Leonhard Euler (1707-1783) angegeben.

Im Unterschied dazu lassen sich die Nullstellen von Polynomen fünften oder höheren Grades im Allgemeinen nicht mehr durch algebraische Terme darstellen, selbst wenn alle Koeffizienten des Polynoms ganzzahlig sind. Dies folgt aus dem nach Paolo Ruffini (1765-1822) und Niels Abel (1802-1829) benannten Satz von Abel-Ruffini sowie aus der auf Evariste Galois (1811-1832) zurückgehenden Galois-Theorie. Eine Diskussion dieser Resultate geht allerdings weit über den Rahmen der vorliegenden Notizen hinaus.

Der Fundamentalsatz der Algebra

Für die Nullstellen von Polynomen höheren Grades gibt es also im Allgemeinen keine algebraische Lösungsformel. Dennoch ist die Existenz solcher Nullstellen in den komplexen Zahlen garantiert:

Satz 5.6 : Fundamentalsatz der Algebra

Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Für den Fundamentalsatz der Algebra gibt es zahlreiche, konzeptionell völlig unterschiedliche Beweise. Die unten vorgestellte Beweisidee basiert darauf, das betreffende Polynom als Funktionsterm einer komplexen Funktion aufzufassen, deren Graphen man untersucht. Zur Vorbereitung dieses Zugangs betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel:

Beispiel 5.7

Das Polynom z^3 kann als Funktionsterm der komplexen Potenzfunktion f vom Grad 3 aufgefasst werden:

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto w = f(z) = z^3$$

Wir wollen etwas genauer betrachten, wie f die z-Ebene auf die w-Ebene abbildet.

Dazu sehen wir uns zunächst die Urbilder von Ursprungskreisen in der w-Ebene an: Durchläuft der Winkelparameter φ das Intervall $[0, 2\pi[$, dann durchläuft der Punkt $w_\varphi := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ einmal den Einheitskreis k_1^w in der w-Ebene. Gemäss der Funktionsgleichung von f besteht das Urbild $f^{-1}(w_\varphi)$ von w_φ aus den drei Lösungen der Potenzgleichung $z_\varphi^3 = w_\varphi$, nämlich aus den drei Punkten $z_{\varphi,1}$, $z_{\varphi,2}$ und $z_{\varphi,3}$ auf dem Einheitskreis k_1^z in der z-Ebene:

$$z_{\varphi,1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{3}}, \qquad z_{\varphi,2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \qquad z_{\varphi,3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

Durchläuft der Punkt w_φ also einmal den Einheitskreis k_1^w in der Bildebene, dann durchlaufen seine drei Urbildpunkte $z_{\varphi,1}$, $z_{\varphi,2}$ und $z_{\varphi,3}$ unter f simultan je ein Drittelsegment des Einheitskreises k_1^z in der Urbildebene (siehe Abbildung 5.1, links). Das Urbild $f^{-1}(k_r^w)$ eines Ursprungskreises k_r^w von beliebigem Radius r in der w-Ebene besteht dementsprechend aus den drei Drittelsegmenten des Urspungskreises $k_{\sqrt[3]{r}}^z$ in der z-Ebene.

Betrachten wir nun die Bilder von Ursprungskreisen in der z-Ebene: Durchläuft der Winkelparameter φ das Intervall $[0, 2\pi[$, dann durchläuft der Punkt $z_\varphi := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ einmal den Einheitskreis k_1^z in der z-Ebene. Gemäss der Funktionsgleichung von f erhält man für z_φ das Bild $f(z_\varphi)$ auf dem Einheitskreis k_1^w in der w-Ebene:

$$w_\varphi := f(z_\varphi) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^3 = \mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,\varphi}$$

Das Bild $f(k_1^z)$ des Einheitskreises in der z-Ebene windet sich also dreimal um den Einheitskreis k_1^w in der w-Ebene (siehe Abbildung 5.1, rechts). Dementsprechend windet sich das Bild $f(k_r^z)$ eines Ursprungskreises k_r^z von beliebigem Radius r in der z-Ebene dreimal um den Ursprungskreis $k_{r^3}^w$ in der w-Ebene.

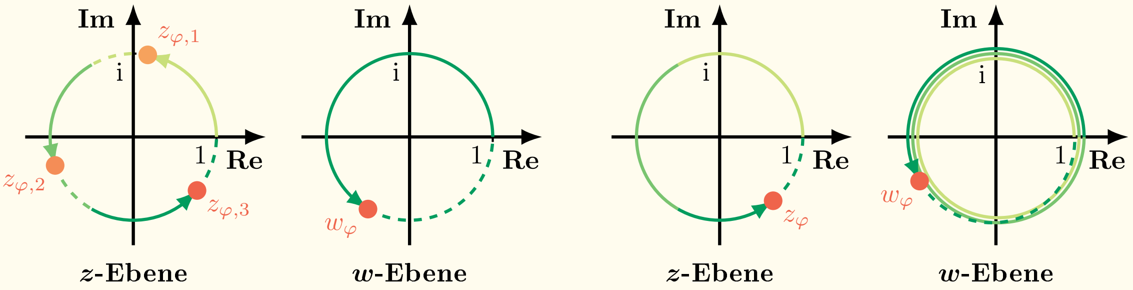


Abbildung 5.1: Die Potenzfunktion $f(z) = z^3$: dreifaches Urbild des in der Bildebene einfach durchlaufenen Einheitskreises (links), dreifach durchlaufenes Bild des in der Urbildebene einfach durchlaufenen Einheitskreises (rechts).

Beispiel 5.7 lässt sich leicht auf Potenzfunktionen $f(z) = z^n$ von beliebigem Grad $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern: Das Bild $f(k_r^z)$ eines Ursprungskreises vom Radius r in der Urbildebene windet sich n-fach um den Ursprungskreis $k_{r^n}^w$ in der Bildebene. Sehen wir nun, wie man diese Überlegungen zu den Bildern von Ursprungskreisen unter Potenzfunktionen einsetzen kann, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Auf die Graphen komplexer Abbildungen werden wir im Band über komplexe Abbildungen noch ausführlicher zurückkommen.

Beweisidee für den Fundamentalsatz der Algebra

Gegeben sei ein komplexes Polynom $p(z) = a_n\, z^n + \ldots + a_1\, z + a_0$ vom Grad $n \geq 1$, für welches wir die Existenz einer Nullstelle zeigen wollen.

Es reicht im Folgenden, die Überlegungen für den Fall $a_n = 1$ anzustellen. Denn ist $a_n \neq 1$, dann können wir anstelle des Polynoms p das Polynom $\frac{1}{a_n}\, p$ betrachten, das in seinen Nullstellen exakt mit p übereinstimmt:

$$p(z_0) \;=\; a_n\, z_0^n + \ldots + a_0 \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{a_n}\, p(z_0) \;=\; z_0^n + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \;=\; 0$$

Des Weiteren können wir von $a_0 \neq 0$ ausgehen. Denn falls $a_0 = 0$ gilt, so ist mit $z_0 = 0$ offensichtlich eine Nullstelle von p vorhanden:

$$z_0 \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p(z_0) \;=\; z_0^n + \ldots + a_1 z_0 + 0 \;=\; z_0 \left(z_0^{n-1} + \ldots + a_1 \right) \;=\; 0$$

Nach diesen Vorüberlegungen kann man die Existenz einer Nullstelle von p einsehen, indem man den Graphen der durch p gegebenen komplexen Abbildung untersucht:

$$p:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ :\ z \mapsto w = p(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0$$

Wertet man $p(z)$ für z von sehr grossem Betrag aus, dann dominiert die höchste Potenz z^n die übrigen Summanden des Polynoms. Damit entspricht Bild der Polynomabbildung p für derartige z näherungsweise dem Bild der Potenzabbildung $f(z) = z^n$ vom Grad n (vgl. A5.7*, A5.8*). Für einen Urspungskreis k_{gross} von sehr grossem Radius in der z-Ebene windet sich deshalb das Bild $p(k_{\text{gross}})$ in der w-Ebene in n Schleifen in weitem Abstand um 0 (siehe Abbildung 5.2).

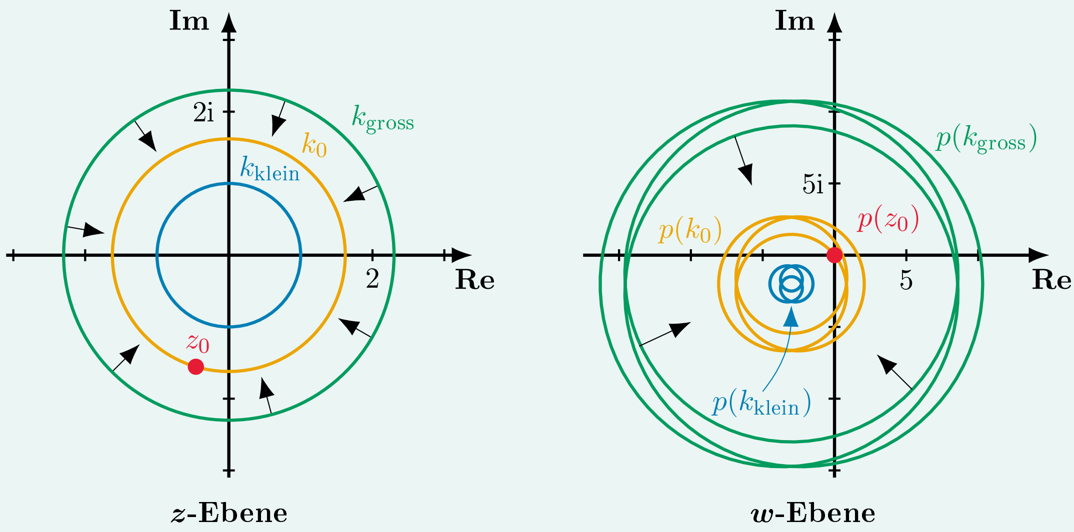


Abbildung 5.2: Windungsverhalten der Bildkurven am Beispiel $p(z) = z^3 + \frac{1}{2}z - 3 - 2\mathrm{i}$

Wertet man dagegen $p(z)$ für z von sehr kleinem Betrag aus, so dominiert die Konstante $a_0 \neq 0$ die übrigen Summanden des Polynoms. Für einen Ursprungskreis k_{klein} mit sehr kleinem Radius in der z-Ebene befindet sich die Bildkurve $p(k_{\text{klein}})$ in der w-Ebene deshalb nahe bei a_0 (vgl. A5.7*, A5.8*). Da $a_0 \neq 0$ ist, liegt 0 in der w-Ebene ausserhalb der Bildkurve $p(k_{\text{klein}})$ (siehe Abbildung 5.2).

Fassen wir zusammen: In der w-Ebene liegt 0 innerhalb der Bildkurve $p(k_{\text{gross}})$ eines Ursprungskreises k_{gross} von sehr grossem Radius, jedoch ausserhalb der Bildkurve $p(k_{\text{klein}})$ eines Ursprungskreis k_{klein} von sehr kleinem Radius. Verändert man deshalb den Radius eines Ursprungskreises in der z-Ebene kontinuierlich von sehr gross nach sehr klein, dann muss es im Verlauf der Änderung einen Kreis k_0 geben, von dessen Bildkurve $p(k_0)$ wenigstens eine Schleife exakt durch 0 in der w-Ebene geht. Das Urbild $p^{-1}(0)$ auf dem Kreis k_0 enthält deshalb eine Nullstelle z_0 (siehe Abbildung 5.2). $\square$

Bemerkung 5.8

Um diese Idee zu einem Beweis im Sinne der höheren Mathematik zu vervollständigen, müsste insbesondere die Stetigkeit der polynomialen Funktion p noch angemessen ins Spiel gebracht werden. Dies geht allerdings über die Möglichkeiten der vorliegenden Notizen hinaus.

Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert, dass jedes Polynom eine Nullstelle besitzt. Er macht jedoch keine Aussage darüber, wie eine solche Nullstelle zu bestimmen ist. Und wie bereits in Bemerkung 5.5 angemerkt gibt es für allgemeine Polynome von fünftem oder höherem Grad keine Lösungsformel, um Nullstellen algebraisch zu berechnen. Dafür werden wir im Band zu komplexen Abbildungen mit dem Newton-Verfahren eine Methode kennenlernen, wie sich Nullstellen polynomialer Gleichungen beliebigen Grades numerisch-approximativ berechnen lassen.

Die Faktorisierung von Polynomen

Auch wenn sich mit dem Fundamentalsatz der Algebra keine Nullstellen von Polynomen berechnen lassen, so kann man aus dem Wissen um die Existenz einer Nullstelle eine wichtige Konsequenz für die algebraische Struktur der Polynome ableiten:

Satz 5.9 : Faktorisierung komplexer Polynome

Jedes komplexe Polynom p vom Grad $n \geq 1$ kann ohne Rest in n nicht notwendig verschiedene, komplexe Linearfaktoren zerlegt werden:

$$p(z) \;=\; a_n\, z^n + \ldots + a_1\, z + a_0 \;=\; a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

Die dabei auftretenden $z_1, \ldots, z_n$ sind durch die Nullstellen von p gegeben.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir seine Aussagen genauer verstehen:

Beispiel 5.10

Wie in Beispiel 5.4 berechnet hat das komplexe Polynom $p(z) = z^4 + (4 - 2\mathrm{i})z^2 - 8\mathrm{i}$ vom Grad 4 die vier Nullstellen:

$$z_1 \;=\; 2\,\mathrm{i}, \qquad z_2 \;=\; -2\,\mathrm{i}, \qquad z_3 \;=\; 1 + \mathrm{i}, \qquad z_4 \;=\; -1 - \mathrm{i}$$

Gemäss Satz 5.9 lässt sich p als Produkt der vier durch diese Nullstellen gegebenen Linearfaktoren schreiben:

$$p(z) \;=\; z^4 + (4 - 2\,\mathrm{i})\, z^2 - 8\,\mathrm{i} \;=\; \big(z - 2\,\mathrm{i}\big) \cdot \big(z + 2\,\mathrm{i}\big) \cdot \big(z - (1 + \mathrm{i})\big) \cdot \big(z - (-1 - \mathrm{i})\big)$$

Die Gleichheit kann man durch Ausmultiplizieren leicht bestätigen.

In diesem Beispiel besteht die Faktorisierung des Polynoms aus paarweise verschiedenen Linearfaktoren. Bei der Faktorisierung gemäss Satz 5.9 kann allerdings ein und derselbe Linearfaktor auch mehrfach auftreten:

Definition 5.11 ▶ Vielfachheit einer Nullstelle

Die Potenz, in der ein Linearfaktor $z - z_k$ in der Faktorisierung eines komplexen Polynoms gemäss Satz 5.9 auftritt, nennt man die **Vielfachheit** der Nullstelle z_k.

Wie das folgende Beispiel zeigt, lassen sich Nullstellen von Polynomen leicht in beliebiger Vielfachheit realisieren, wenn man vom Produkt der Linearfaktoren in der entsprechenden Potenz ausgeht:

Beispiel 5.12

Ein Polynom p, bei dem die Nullstelle $z_1 = \mathrm{i}$ mit der Vielfachheit 1 und die Nullstelle $z_2 = 1$ mit der Vielfachheit 2 auftritt, ist gegeben durch:

$$p(z) \;=\; (z-\mathrm{i})\cdot(z-1)^2 \;=\; z^3-(2+\mathrm{i})\,z^2+(1+2\,\mathrm{i})\,z-\mathrm{i}$$

Aus der durch Satz 5.9 gegebenen Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren lässt sich deshalb nur die folgende Abschätzung zur Anzahl seiner Nullstellen ableiten:

Satz 5.13: Anzahl der Nullstellen eines Polynoms

Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat in den komplexen Zahlen mindestens eine und höchstens n verschiedene Nullstellen.

Nach dieser Diskussion der Aussage von Satz 5.9 kommen wir nun zu seinem Beweis:

Beweis von Satz 5.9

Gegeben sei ein komplexes Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ vom Grad $n \geq 1$. Gemäss dem Fundamentalsatz der Algebra hat p eine Nullstelle z_1, auch wenn diese durch den Fundamentalsatz nicht explizit angegeben wird.

Im ersten Schritt zeigen wir, dass der zur Nullstelle z_1 gehörende Linearfaktor $z - z_1$ von $p(z)$ durch Polynomdivision ohne Rest abgespalten werden kann: Dividiert man $p(z)$ durch $z - z_1$, so erhält man in jedem Fall ein Quotientenpolynom $p_1(z)$ und ein Restpolynom $r_1(z)$:

$$\frac{p(z)}{z-z_1} \;=\; p_1(z)+\frac{r_1(z)}{z-z_1}$$

Wie bei jeder Polynomdivision ist auch hier der Grad des Restpolynoms $r_1(z)$ um eins kleiner als der Grad des Divisorpolynoms $z - z_1$. Also ist $r_1(z)$ ein Polynom vom Grad 0, das heisst eine von z unabhängige komplexe Konstante r_1:

$$p(z)-p_1(z)\cdot(z-z_1) \;=\; r_1(z) \;=\; r_1$$

Wertet man die linke Seite dieser Gleichung an der Nullstelle $z = z_1$ aus, so folgt:

$$p(z_1)-p_1(z_1)\cdot(z_1-z_1) \;=\; 0-p_1(z_1)\cdot 0 \;=\; 0 \;=\; r_1$$

Damit verschwindet der Rest r_1, und $p(z)$ ist durch $z-z_1$ ohne Rest teilbar. So erhält man das Quotientenpolynom $p_1(z) := p(z) : (z - z_1)$ vom Grad $n - 1$. Für die Faktorisierung des gegebenen Polynoms p bedeutet dies:

$$p(z) \;=\; (z-z_1)\cdot p_1(z)$$

Im zweiten Schritt betrachten wir nun das Quotientientenpolynom p_1 vom Grad $n - 1$: Ist $n - 1 \geq 1$, dann hat p_1 gemäss dem Fundamentalsatz eine Nullstelle z_2. Mit denselben

Argumenten wie im ersten Schritt kann man nun zeigen, dass sich der zur Nullstelle z_2 gehörende Linearfaktor $z - z_2$ von $p_1(z)$ durch Polynomdivision ohne Rest abspalten lässt. Als Quotientenpolynom erhält man so $p_2(z) := p_1(z) : (z - z_2)$ vom Grad $n - 2$. Dies bedeutet für die Faktorisierung des gegebenen Polynoms p:

$$p(z) \;=\; (z - z_1) \cdot p_1(z) \;=\; (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot p_2(z)$$

Sukzessiv lässt sich mit diesem Vorgehen ein Linearfaktor nach dem anderen von p abspalten - und zwar solange, bis das verbleibende Quotientenpolynom p_n den Grad 0 hat, d.h. konstant ist:

$$p(z) \;=\; a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \;=\; (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots (z - z_n) \cdot p_n$$

Damit entspricht p_n dem Leitkoeffizienten a_n vor der höchsten Potenz z^n in p. $\square$

Im Verlauf dieses Beweises wurde ein wichtiger Schritt wiederholt durchgeführt: Der zu einer Nullstelle des Polynoms gehörende Linearfaktor wird durch Polynomdivision abgespalten. Dieses Vorgehen kann man auch in der Praxis einsetzen, um die Suche nach den weiteren Nullstellen eines Polynoms zu vereinfachen, sobald eine Nullstelle bekannt ist (siehe A6.3*):

Beispiel 5.14

Das Polynom $p(z) = \mathrm{i}z^3 + 4\mathrm{i}z^2 - (1 - 6\mathrm{i})z + 1 - 3\mathrm{i}$ vom Grad 3 hat die Nullstelle $z_1 = 1$. Um die weiteren Nullstellen leichter zu berechnen, kann man den Linearfaktor $z - 1$ von $p(z)$ durch Polynomdivision abspalten:

$$\begin{array}{l}
\big(\mathrm{i}z^3 - 4\mathrm{i}z^2 - (1-6\mathrm{i})z + 1 - 3\mathrm{i}\big) \;:\; \big(z - 1\big) \;=\; \mathrm{i}z^2 - 3\mathrm{i}z - 1 + 3\mathrm{i} \\
\underline{\mathrm{i}z^3 - \;\mathrm{i}z^2} \\
\quad - 3\mathrm{i}z^2 - (1-6\mathrm{i})z \\
\quad \underline{- 3\mathrm{i}z^2 + \qquad 3\mathrm{i}\, z} \\
\qquad\quad - (1-3\mathrm{i})z + 1 - 3\mathrm{i} \\
\qquad\quad \underline{- (1-3\mathrm{i})z + 1 - 3\mathrm{i}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Das Quotientenpolynom $q(z) = \mathrm{i}z^2 - 3\mathrm{i}z - 1 + 3\mathrm{i}$ hat den Grad 2, weshalb sich nun die quadratische Lösungsformel anwenden lässt. Mit ihr erhält man $z_2 = 1 + \mathrm{i}$ und $z_3 = 2 - \mathrm{i}$ als die Nullstellen von q beziehungsweise als die weiteren Nullstellen von p.

Die Faktorisierung reeller Polynome

Wie eben gesehen lassen sich Polynome vollständig in komplexe Linearfaktoren zerlegen. Dass es keine analoge Zerlegung reeller Polynome in reelle Linearfaktoren geben kann, zeigt das bekannte

Beispiel $z^2 + 1 = 0$. Allerdings gibt es zwischen den beiden komplexen Nullstellen $z_1 = +\mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$ dieses reellen Polynoms einen Zusammenhang, denn z_1 ist das komplex Konjugierte von z_2. Dies ist kein Zufall. Denn bei reellen Polynomen treten nicht-reelle komplexe Nullstellen immer paarweise mit ihrem komplex Konjugierten auf:

Satz 5.15 : konjugierte Nullstellen bei reellen Polynomen

Ist z_0 eine komplexe Nullstelle eines reellen Polynoms p mit der Vielfachheit k, so ist auch das komplex konjugierte $\overline{z}_0$ eine Nullstelle von p mit der Vielfachheit k.

Beweis

Gegeben sei ein reelles Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$. Da alle Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ reell sind, folgt aus den in A2.8 gezeigten Rechenregeln der komplexen Konjugation:

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a}_n \, \overline{z}^{\,n} + \ldots + \overline{a}_1 \overline{z} + \overline{a}_0 \;=\; a_n \, \overline{z}^{\,n} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \;=\; p(\overline{z}) \end{aligned}$$

Ist $\overline{z}_0$ komplex konjugiert zu einer Nullstelle z_0 von p, so gilt deshalb:

$$p(\,\overline{z}_0) \;=\; \overline{p(z_0)} \;=\; \overline{0} \;=\; 0$$

Damit ist $\overline{z}_0$ ebenfalls eine Nullstelle von p.

Sobald z_0 nicht reell ist, sind z_0 und $\overline{z}_0$ verschieden – und damit auch die Linearfaktoren $z - z_0$ und $z - \overline{z}_0$ in der komplexen Faktorisierung von p. Haben z_0 und $\overline{z}_0$ die Vielfachheiten k beziehungsweise k', dann gilt

$$p(z) \;=\; a_n \cdot (z - z_0)^k \cdot (z - \overline{z}_0)^{k'} \cdot (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-k-k'}),$$

wobei z_0 und $\overline{z}_0$ mit keiner der möglicherweise übrigen Nullstellen $z_1, \ldots, z_{n-k-k'}$ übereinstimmen. Dass dabei $k = k'$ gilt, sieht man mit folgendem Widerspruchsbeweis:

Falls $k' > k$ ist, lassen sich sukzessive k Paare aus den Linearfaktoren $z - z_0$ und $z - \overline{z}_0$ von dieser Faktorisierung von p abspalten. Bei jeder dieser k Polynomdivisionen wird durch das reelle quadratische Polynom

$$(z - z_0) \cdot (z - \overline{z}_0) \;=\; z^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0)\, z + |z_0|^2$$

dividiert, so dass das resultierende Quotientenpolynom

$$q(z) \;=\; a_n \cdot (z - \overline{z}_0)^{k'-k} \cdot (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_{n-k-k'})$$

nach wie vor reell ist. Da $\overline{z}_0$ eine Nullstelle von q ist, muss – wie oben gesehen – auch das dazu konjugierte $z_0 = \overline{\overline{z}}_0$ eine Nullstelle von q sein. Setzt man z_0 jedoch in die Faktorisierung von q ein, so ist $q(z_0)$ ein Produkt von ausschliesslich von Null verschiedenen Faktoren, so dass $q(z_0) \neq 0$ gilt. Widerspruch!

Analog führt der Fall $k' < k$ zum Widerspruch. □

Für Faktorisierung reeller Polynome folgt aus diesem Satz unmittelbar:

Satz 5.16: Faktorisierung reeller Polynome

Jedes reelle Polynom p vom Grad $n \geq 1$ kann ohne Rest in reelle lineare und quadratische Faktoren zerlegt werden:

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \\ &= a_n \left(z - x_1\right) \cdot \ldots \cdot \left(z - x_j\right) \Big((z - c_1) \cdot (z - \bar{c}_1) \Big) \cdot \ldots \cdot \Big((z - c_k) \cdot (z - \bar{c}_k) \Big) \\ &= a_n \left(z - x_1\right) \cdot \ldots \cdot \left(z - x_j\right) \Big(z^2 - 2\mathrm{Re}(c_1) z + |c_1|^2 \Big) \cdot \ldots \cdot \Big(z^2 - 2\mathrm{Re}(c_k) z + |c_k|^2 \Big) \end{aligned}$$

Dabei sind die $x_1, \ldots, x_j$ durch die reellen Nullstellen von p gegeben und die $c_1, \bar{c}_1, \ldots, c_k, \bar{c}_k$ durch die Paare zueinander konjugierter nicht-reeller Nullstellen von p.

Ist also eine nicht-reelle Nullstelle eines reellen Polynoms bekannt, so kann der zugehörige reelle quadratische Faktor durch Polynomdivision abgespalten werden. Ähnlich wie im Beispiel 5.14 lässt sich so der Grad des zu untersuchenden Polynoms mit jeder bekannten Nullstelle verkleinern, was die Suche nach den weiteren Nullstellen zunehmend vereinfacht (siehe A**??**):

Beispiel 5.17

Das reelle Polynom $p(z) = 2z^3 - 8z^2 + 18z - 20$ vom Grad 3 hat die nicht-reelle Nullstelle $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$. Nach Satz 5.15 ist damit auch $z_2 = \bar{z}_1 = 1 - 2\mathrm{i}$ eine Nullstelle von p, so dass der reelle quadratische Faktor

$$(z - z_1) \cdot (z - \bar{z}_1) \;=\; z^2 - 2\mathrm{Re}\,(z_1) z + |z_1|^2 \;=\; z^2 - 2z + 5$$

von p durch Polynomdivision ohne Rest abgespalten werden kann:

$$\begin{array}{l} \left(2z^3 - 8z^2 + 18z - 20\right) \;:\; \left(z^2 - 2z + 5\right) \;=\; 2z - 4 \\ \underline{2z^3 - 4z^2 + 10z} \\ \qquad -4z^2 + 8z - 20 \\ \qquad \underline{-4z^2 + 8z - 20} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Als dritte Nullstelle von p erhält man so $z_3 = 2$, die Nullstelle des Quotientenpolynoms.

Die Bedeutung der beiden letzten Sätze geht weit über die komplexen Zahlen hinaus. Sie reicht von der Bestimmung von Eigenwerten in der linearen Algebra bis hin zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Aufgaben

Aufgabe 5.1. Lösen Sie mit Hilfe der quadratischen Lösungsformel:

a) $z^2 - 2\,\mathrm{i}\,z - 10 = 0$

b) $z^2 + 5\,\mathrm{i}\,z + 6 = 0$

c) $(1 + \mathrm{i})\,z^2 + 2z + 4 = 0$

d) $\mathrm{i}z^2 + (1 + 3\,\mathrm{i})\,z = 11 - 2\,\mathrm{i}$

e) $z^6 + (1 - 8\,\mathrm{i})z^3 - 8\,\mathrm{i} = 0$

f) $\mathrm{i}\,z^2 - (9 + 16\,\mathrm{i}) = -\dfrac{144}{z^2}$

Aufgabe 5.2. Berechnen Sie Quotientenpolynom und möglichen Rest durch Polynomdivision:

a) $(x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 17x + 5) : (x^3 + 3x - 1)$

b) $(2x^4 + 10x^3 + 8x^2 + 10x + 6) : (x^2 + 5x + 3)$

c) $\big((5 - 2\,\mathrm{i})z^2 + (14 - 5\,\mathrm{i})z - 3 + 3\,\mathrm{i}\big) : (\mathrm{i}z + 3\,\mathrm{i})$

d) $(2\,\mathrm{i}z^2 - 6z - 3\,\mathrm{i}) : (z + \mathrm{i})$

Aufgabe 5.3. Zerlegen Sie in komplexe Linearfaktoren:

a) $p(z) = z^3 - (3 - \mathrm{i})z^2 + (7 + 2\,\mathrm{i})z - 1 - 5\,\mathrm{i}$ mit Nullstelle $z_1 = \mathrm{i}$

b) $q(z) = z^3 - 7\,\mathrm{i}z^2 - (25 + 28\,\mathrm{i})z - 48 - 21\,\mathrm{i}$ mit Nullstelle $z_1 = -3$

c) $r(z) = z^4 + 2z^3 - 34z^2 + 2z - 35$ mit Nullstellen $z_1 = \mathrm{i},\ z_2 = 5$

d) $s(z) = z^4 + z^3 + (3 - 8\,\mathrm{i})z^2 - (1 - 10\,\mathrm{i})z - 24 - 42\,\mathrm{i}$ mit Nullstellen $z_1 = -2\,\mathrm{i},\ z_2 = 3\,\mathrm{i}$

Aufgabe 5.4. Zerlegen Sie in reelle Faktoren möglichst kleinen Grades:

a) $p(z) = z^5 - 4z^4 + 10z^3 - 30z^2 + 9z + 54$ mit Nullstelle $z_1 = 3\,\mathrm{i}$

b) $q(z) = z^4 + z^3 + 47z^2 + 49z - 98$ mit Nullstelle $z_1 = -7\,\mathrm{i}$

c) $r(z) = z^5 - z^4 - 12z^3 + 60z^2 - 125z + 125$ mit Nullstellen $z_1 = 2 + \mathrm{i},\ z_2 = 1 + 2\,\mathrm{i}$

Aufgabe 5.5. Das reelle Polynom $z^4 + 4z^2 + a_1\,z + a_0$ hat die Nullstelle $z_1 = 2 - \mathrm{i}$. Bestimmen Sie die unbekannten Koeffizienten a_0 und a_1.

Aufgabe 5.6. Beweisen oder widerlegen Sie: Ein reelles Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Aufgabe 5.7*. Betrachten Sie die komplexe Polynomabbildung $p(z) = z^2 + z - 2\mathrm{i}$.

a) Betrachten Sie einen Ursprungskreis k_r^z vom Radius r in der z-Ebene. Bestimmen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung einen Radius r so, dass das Bild $f(k_r^z)$ in der w-Ebene vollständig innerhalb des Kreises k vom Radius 1 um den Mittelpunkt $-2\mathrm{i}$ liegt.

b) Betrachten Sie einen Ursprungskreis k_R^z vom Radius R in der z-Ebene. Bestimmen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung den Radius R so, dass das Bild $f(k_R^z)$ in der w-Ebene vollständig ausserhalb des Ursprungskreises k_3^w liegt.

c) Geben Sie an, wie oft sich ein in der w-Ebene von 0 zum Bildpunkt $f(z)$ weisender Vektor $\vec{v}(z)$ um sich selbst dreht, wenn der Urbildpunkt z den Kreis k_R^z genau einmal durchläuft. Auf wie viele solche Drehungen kommen Sie, wenn der Urbildpunkt z stattdessen den Kreis k_r^z genau einmal durchläuft?

Aufgabe 5.8*. Betrachten Sie die Polynomabbildung $p(z) = 5\mathrm{i}z^{13} - (3+4\mathrm{i})z^{12} + 10z^3 - 2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie analog zu A5.7* Radien r und R für Ursprungskreise k_r^z und k_R^z in der z-Ebene.

6* Anwendungsbeispiel: Rechnen mit Wechselstrom

Die Auslenkung eines Pendels, die Schwingungen einer Schallwelle oder der Spannungsverlauf beim Wechselstrom – zahlreiche physikalische Phänomene lassen sich durch harmonisch oszillierende Grössen beschreiben; das heisst durch Grössen, deren zeitlicher Verlauf einer Sinus- oder Cosinus-Funktion folgt. Auch bei der Polarform komplexer Zahlen spielen diese beiden trigonometrischen Funktionen eine Rolle. Komplexe Zahlen lassen sich deshalb oft zur Berechnung harmonisch oszillierender Phänomene eingesetzen. In der Elektrotechnik ist es beispielsweise üblich, Wechselstromkreise mit Hilfe der komplexen Zahlen zu berechnen. Wie dies genau geschieht und welche konzeptionelle Rolle dabei die aus Kapitel 3 bekannte Polarform spielt, wollen wir im Verlauf dieses Kapitels anhand eines Beispiels ausarbeiten.

Zeiger und Zeigerdiagramme

Eine allgemeine, in der Zeit t mit der der **Amplitude** $\hat{A}$ harmonisch oszillierenden Grösse $A(t)$ kann auf drei äquivalente Arten dargestellt werden:

$$A(t) \;=\; \hat{A} \cdot \cos\left(2\pi f\, t + \varphi\right) \;=\; \hat{A} \cdot \cos\left(\tfrac{2\pi}{T}\, t + \varphi\right) \;=\; \hat{A} \cdot \cos\left(\omega\, t + \varphi\right)$$

Alternativ kann man bei dieser Darstellung die **Frequenz** f, die **Periodendauer** $T = \frac{1}{f}$ oder die **Kreisfrequenz** beziehungsweise **Winkelgeschwindigkeit** $\omega = 2\pi f$ einsetzen. Mit Hilfe eines geeigneten **Nullphasenwinkels** φ lässt sich der zeitliche Verlauf jeder harmonisch oszillierenden Grösse allein durch die Cosinus-Funktion darstellen. Dies illustriert Abbildung 6.1:

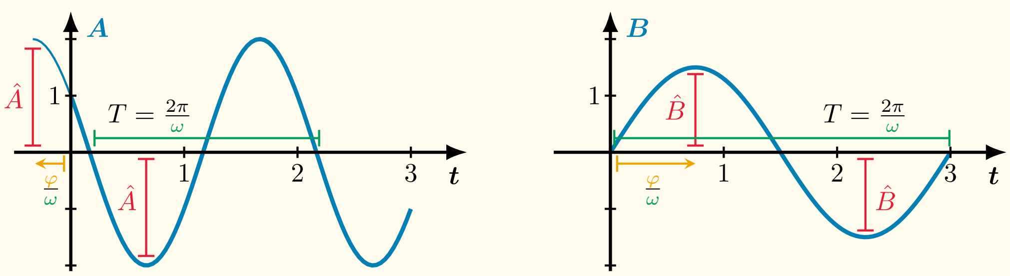


Abbildung 6.1: $A(t) = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ und $B(t) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Gemäss der Polardarstellung aus Kapitel 3 lässt sich die reellwertige Grösse $A(t)$ nun als Realteil der folgenden komplexwertigen Grösse $\vec{A}(t)$ ansehen:

$$\vec{A}(t) \;:=\; \hat{A} \cdot \operatorname{cis}\left(\omega t + \varphi\right) \;=\; \hat{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t+\varphi)} \;=\; \hat{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

In dieser rechten Darstellung von $\vec{A}(t)$ hängt allein der Faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ von der Zeit ab. Das Produkt $\hat{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ der beiden anderen Faktoren ist eine komplexwertige Konstante, die in der Physik unter einem eigenen Namen eingesetzt wird:

Definition 6.1 ▶ Zeiger

Der **Zeiger** $\vec{A}$ einer harmonisch oszillierenden reellen Grösse $A(t) = \hat{A}\,\cos(\omega\, t + \varphi)$ ist:

$$\vec{A} \;:=\; \hat{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$$

Hinter dieser Definition steht eine geometrische Motivation, die an die Polarform aus Kapitel 3 anknüpft. Aufgefasst als komplexe Zahl liegt $\vec{A}$ als Punkt in der Zahlenebene auf dem Ursprungskreis mit dem Radius $\left|\vec{A}\right| = \hat{A}$ in einem Winkel von $\arg(\vec{A}) = \varphi$ zur reellen Achse. Seinem Namen entsprechend wird der Zeiger $\vec{A}$ jedoch gleichzeitig auch vektoriell interpretiert, nämlich als Vektor der Norm $\left|\vec{A}\right| = \hat{A}$, welcher ausgehend vom Ursprung in einem Winkel von $\arg(\vec{A}) = \varphi$ zur reellen Achse in der Zahlenebene liegt (siehe Abbildung 6.2).

Die vektorielle Interpretation von $\vec{A}$ lässt sich geometrisch sinnvoll weiterführen: Eine Multiplikation mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ bewirkt in der Zahlenebene eine Drehung um den Winkel ωt um den Ursprung. Dementsprechend kann man $\vec{A}(t) = \vec{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ als den Zeiger $\vec{A}$ auffassen, der bis zum Zeitpunkt t mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung der Zahlebene gedreht wurde.

Abbildung 6.2 illustriert, wie man aus $\vec{A}(t)$, das heisst aus dem gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden komplexen Zeiger $\vec{A}$, den zeitlichen Verlauf der reellen harmonisch oszillierenden Grösse $A(t)$ erhält:

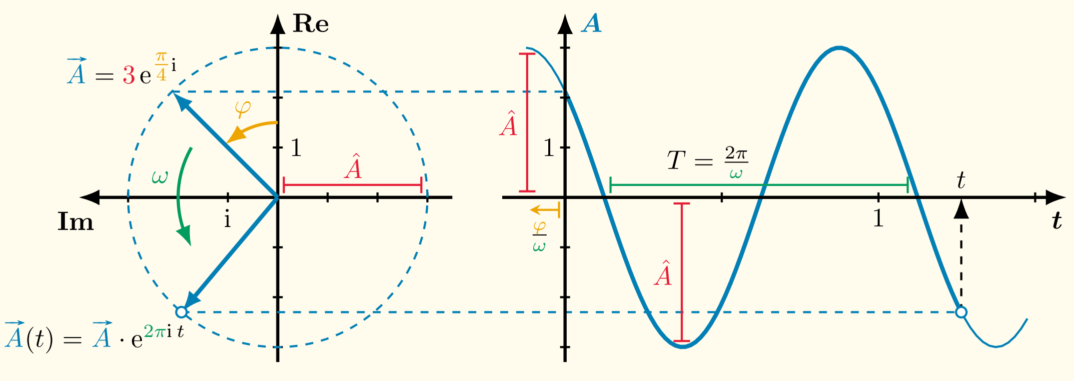


Abbildung 6.2: Zeigerdiagramm und zeitlicher Verlauf von $A(t) = 3\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Der Einsatz von Zeigern eignet sich besonders dann, wenn zwei harmonisch oszillierende Grössen derselben Frequenz addiert werden sollen. Denn die Berechnung der Summe $(A+B)(t)$

zweier solcher Grössen $A(t)$ und $B(t)$ ist im Reellen in der Regel aufwändig. Im Komplexen dagegen lassen sich die Zeiger $\vec{A}$ und $\vec{B}$ einfach vektoriell zum Zeiger $\overrightarrow{(A+B)}$ addieren:

$$\overrightarrow{(A+B)}\,(t) \;=\; \vec{A}(t)+\vec{B}(t) \;=\; \vec{A}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}+\vec{B}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t} \;=\; \big(\vec{A}+\vec{B}\,\big)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}$$

Die Summe $(A+B)(t)$ ist nun einfach durch den Realteil von $\overrightarrow{(A+B)}\,(t)$ gegeben:

$$(A+B)\,(t) \;=\; \mathrm{Re}\left(\overrightarrow{A+B}\,(t)\right) \;=\; \big|\vec{A}+\vec{B}\big|\cdot\cos\!\Big(\omega\,t+\arg\big(\vec{A}+\vec{B}\,\big)\Big)$$

Vollziehen wir diese Addition gleichfrequenter oszillierender Grössen mit Hilfe von Zeigern an einem Beispiel nach. Die anschliessende Abbildung 6.3 stellt dieses Beispiel graphisch dar.

Beispiel 6.2

Betrachten wir die beiden Grössen $A(t)$ und $B(t)$, die beide in der Zeit t harmonisch mit der Kreisfrequenz $\omega = 4\pi$ oszillieren:

$$A(t) \;=\; \frac{3}{2}\,\cos\!\Big(4\pi\,t-\frac{\pi}{6}\Big), \qquad\qquad B(t) \;=\; \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\cos\!\Big(4\pi\,t+\frac{\pi}{3}\Big)$$

Die Amplituden und Nullphasenwinkel von $A(t)$ und $B(t)$ liefern die Zeiger $\vec{A}$ und $\vec{B}$:

$$\vec{A} \;=\; \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\,\mathrm{i}} \;=\; \frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\,\mathrm{i}, \qquad\qquad \vec{B} \;=\; \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \;=\; \frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{9}{4}\,\mathrm{i}$$

Als Summe dieser beiden Zeiger erhält man den Zeiger $\overrightarrow{A+B}$:

$$\overrightarrow{A+B} \;=\; \vec{A}+\vec{B} \;=\; \Big(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\mathrm{i}\Big)+\Big(\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{9}{4}\mathrm{i}\Big) \;=\; \frac{6\sqrt{3}}{4}+\frac{6}{4}\,\mathrm{i} \;=\; 3\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$$

Mit der Amplitude und dem Nullphasenwinkel von $\overrightarrow{A+B}$ lässt sich $(A+B)\,(t)$ angeben:

$$(A+B)\,(t) \;=\; \big|\vec{A}+\vec{B}\big|\cdot\cos\!\Big(\omega\,t+\arg\big(\vec{A}+\vec{B}\,\big)\Big) \;=\; 3\,\cos\!\Big(4\pi\,t+\frac{\pi}{6}\Big)$$

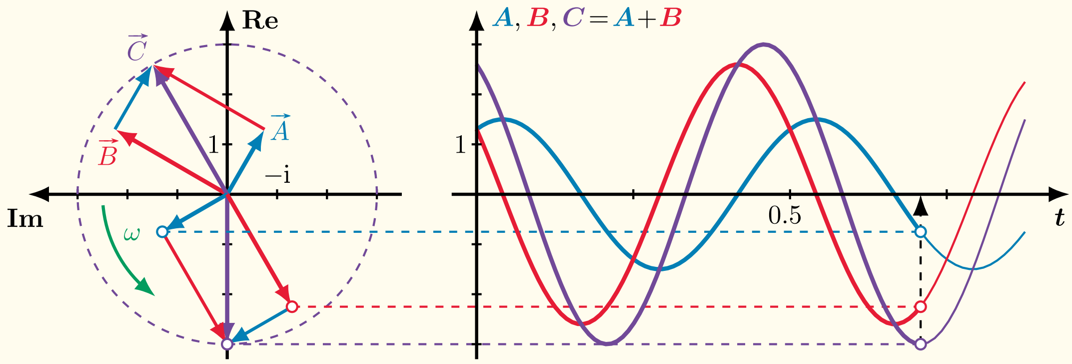


Abbildung 6.3: Die Summe $C(t)$ von $A(t) = \frac{3}{2}\cos\big(4\pi t-\frac{\pi}{6}\big)$ und $B(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\big(4\pi t+\frac{\pi}{3}\big)$.

Wechselstromkreise

In der Elektrotechnik ist es üblich, Wechselstromkreise mit Hilfe der komplexen Zahlen zu berechnen. Wie diese Rechnungen durchgeführt werden, wollen wir im Folgenden an einem einfachen Anwendungsbeispiel nachvollziehen – wobei der Fokus auf dem Einsatz der komplexen Zahlen liegen soll, nicht auf den physikalischen Hintergründen.

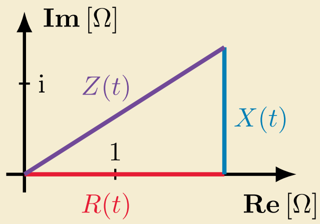
Wir werden dabei stets annehmen, dass die am Wechselstromkreis anliegende Spannung $U(t)$ beziehungsweise der ihn durchfliessende Strom $I(t)$ harmonisch oszilliert. Der Notation des vorangehenden Abschnitts entsprechend bezeichnen wir die komplexwertigen Pendants dieser Grössen mit $\vec{U}(t)$ und $\vec{I}(t)$. Je nach Situation werden wir $\vec{U}(t)$ und $\vec{I}(t)$ ein Mal als komplexwertige Skalare, ein anderes Mal als rotierende Zeiger interpretieren.

Fasst man $\vec{U}(t)$ und $\vec{I}(t)$ als komplexwertige Skalare auf, dann kann man durch sie eine für die Wechselstromrechnung fundamentale Grösse eingeführen:

Impedanz, Wirkwiderstand, Blindwiderstand

Die **Impedanz** $Z(t)$ eines Stromkreisabschnitts ist das Verhältnis der komplexen Momentanwerte von anliegender Spannung $\vec{U}(t)$ zu fliessendem Strom $\vec{I}(t)$:

$$Z(t) \;:=\; R(t) + \mathrm{i}\cdot X(t) \;:=\; \frac{\vec{U}(t)}{\vec{I}(t)}$$



Den Realteil $R(t) := \mathrm{Re}\big(Z(t)\big)$ der Impedanz nennt man **Wirkwiderstand**, den Imaginärteil $X(t) := \mathrm{Im}\big(Z(t)\big)$ **Blindwiderstand**.

Alle diese komplexen Widerstände werden in der nach Georg Simon Ohm (1789-1854) benannten Einheit Ohm angegeben: $1\,\Omega \;=\; 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$

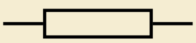
Es gibt die verschiedensten Arten von Wechselstromwiderständen. Bei den sogenannten linearen Wechselstromwiderständen ist die Impedanz eine komplexwertige Konstante – was allfällige Berechnungen stark vereinfacht. Es gibt jedoch auch Widerstände, wie etwa Dioden, deren Impedanz nicht konstant ist. Wir wollen uns auf die folgenden linearen Wechselstromwiderstände beschränken:

Lineare Wechselstromwiderstände

- Ein **Ohm'scher Widerstand** R wirkt als reelle, von der Frequenz des Wechselstroms unabhängige Impedanz Z_R:

  $$Z_R \;=\; \frac{\vec{U}_R(t)}{\vec{I}_R(t)} \;=\; R$$

  Schaltzeichen:

  $R = 1\,\Omega$

  Der Ohm'sche Widerstand wird – wie bekannt – in der Einheit Ohm angegeben.

- Eine Spule der Induktivität L bewirkt einen imaginären, frequenzabhängigen **induktiven Widerstand** Z_L:

Schaltzeichen:

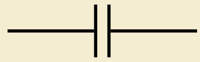
$L = 1\,\mathrm{H}$

$$Z_L \;=\; \frac{\vec{U}_L(t)}{\vec{I}_L(t)} \;=\; \mathrm{i}\cdot\omega\, L$$

Die Induktivität einer Spule wird in der nach Joseph Henry (1797-1878) benannten Einheit Henry angegeben: $1\,\mathrm{H} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} \;=\; 1\,\Omega\,\mathrm{s}$

- Ein Kondensator der Kapazität C bewirkt einen imaginären, frequenzabhängigen **kapazitiven Widerstand** Z_C:

Schaltzeichen:



$C = 1\,\mathrm{F}$

$$Z_C \;=\; \frac{\vec{U}_C(t)}{\vec{I}_C(t)} \;=\; \frac{1}{\mathrm{i}\cdot\omega\, C}$$

Die Kapazität eines Kondensators wird in der nach Michael Faraday (1791-1867) benannten Einheit Farad angegeben: $1\,\mathrm{F} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{V}} \;=\; 1\,\frac{\mathrm{s}}{\Omega}$

Wechselstromkreise aus linearen Wechselstromwiderständen lassen sich besonders einfach berechnen, wenn an ihnen eine harmonisch oszillierende Spannung anliegt oder wenn sie von einem harmonisch oszillierenden Strom durchflossen werden. Denn sobald die Effekte des Einschaltens abgeklungen sind gilt für sie das nach Georg Simon Ohm benannte Gesetz:

Ohm'sches Gesetz für Wechselstromkreise

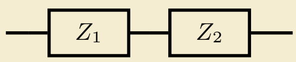
Jeder Teilabschnitt hat eine konstante Impedanz, welche dem Quotienten der Zeiger von Spannung und Stromstärke entspricht:

$$Z \;=\; \frac{\vec{U}(t)}{\vec{I}(t)} \;=\; \frac{\vec{U}}{\vec{I}}$$

Widerstände können in einem Wechselstromkreis auf unterschiedliche Arten geschaltet sein. Mit Hilfe der beiden nach Robert Gustav Kirchhoff (1824-1887) benannten Kirchhoff'schen Gesetze, der Knotenregel für die Stromstärke und der Maschenregel für die Spannung, und dem Ohm'schen Gesetz lassen sich die folgenden Schaltkombinationen einfach berechnen:

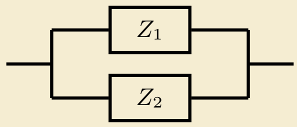
Serielle Schaltung, parallele Schaltung

- Sind zwei Impedanzen Z_1 und Z_2 **seriell geschaltet**, so fliesst durch beide derselbe Strom. Die beiden Teilspannungen addieren sich zur gesamten Spannung. Z_1 und Z_2 addieren sich zur gesamten Impedanz Z:



$$\vec{I}_1 \;=\; \vec{I}_2 \;=\; \vec{I}, \qquad \vec{U}_1+\vec{U}_2 \;=\; \vec{U}, \qquad Z_1+Z_2 \;=\; Z$$

- Sind zwei Impedanzen Z_1 und Z_2 **parallel geschaltet**, so liegt an beiden dieselbe Spannung an. Die beiden Teilströme addieren sich zum gesamten Strom. Die Kehrwerte von Z_1 und Z_2 addieren sich zum Kehrwert der gesamten Impedanz Z:

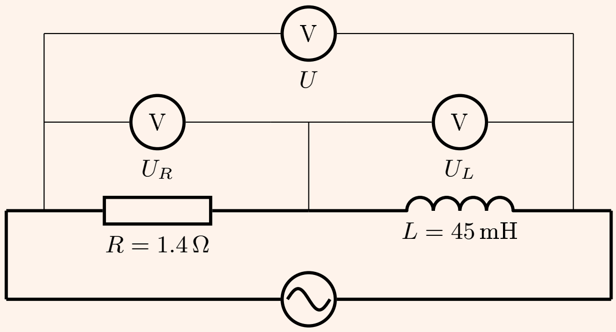


$$\vec{U}_1 = \vec{U}_2 = \vec{U}, \qquad \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}, \qquad \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z}$$

Probieren Sie nun an einem einfachen Beispiel selbst aus, wie man komplexe Zahlen als Zeiger anwenden kann:

Ihre Aufgabe: Berechnen Sie einen einfachen Wechselstromkreis

In einem Stromkreis sind ein Ohm'scher Widerstand $R = 1.4\,\Omega$ und eine Spule der Induktivität $L = 45\,\text{mH}$ seriell geschaltet. Der Stromkreis wird von harmonisch oszillierendem Wechselstrom mit der maximalen Stromstärke $\hat{I} = 1.5\,\text{A}$ und der Frequenz $f = 5\,\text{Hz}$ durchflossen.



a) Berechnen Sie mit Hilfe des Zeigers $\vec{I}$ der Stromstärke im gesamten Stromkreis die Zeiger $\vec{U}_R$ und $\vec{U}_L$ der entsprechenden Teilspannungen.

   Tipp: Sie können den Nulldurchgangswinkel der Stromstärke I auf Null setzen.

b) Stellen Sie $\vec{U}_R$ und $\vec{U}_L$ in einem Zeigerdiagramm dar. Bestimmen Sie den Zeiger $\vec{U}$ der insgesamt anliegenden Spannung. Welche Impedanz Z hat der Stromkreis? Wie gross ist sein Blindwiderstand?

c) Stellen Sie in einem Diagramm den zeitlichen Verlauf der Stromstärke $I(t)$ und der Spannung $U(t)$ über die Dauer von zwei Perioden dar.

d) Der Stromkreis wird seriell um einen Kondensator der Kapazität C erweitert. Wie gross ist C zu wählen, damit der Blindwiderstand des gesamten Stromkreises verschwindet?

Los geht's ...

a) Die Stromstärke I oszilliert mit der Amplitude $\hat{I} = 1.5\,\mathrm{A}$. Setzt man ihren Nulldurchgangswinkel φ auf Null, dann ergibt sich für sie der folgende Zeiger $\vec{I}$:

$$\vec{I} \;=\; \hat{I}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \;=\; 1.5\cdot \mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}}\ \mathrm{A} \;=\; 1.5\ \mathrm{A}$$

Aus dem komplexen Widerstand $Z_R = R = 1.4\,\Omega$ berechnet man hiermit gemäss dem Ohm'schen Gesetz den Zeiger der Teilspannung U_R:

$$\vec{U}_R \;=\; Z_R\cdot\vec{I} \;=\; 1.4\ \Omega\cdot 1.5\ \mathrm{A} \;=\; 2.1\ \mathrm{V}$$

Aus der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f \approx 31.4\,\mathrm{Hz}$ des Wechselstroms und der Induktivität $L = 45\,\mathrm{mH}$ der Spule erhält man deren komplexen Widerstand Z_L:

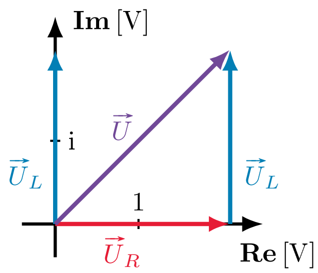
$$Z_L \;=\; \mathrm{i}\cdot\omega\,L \;=\; \mathrm{i}\cdot 31.4\ \mathrm{Hz}\cdot 0.045\ \mathrm{H} \;\approx\; 1.4\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\ \Omega$$

Für den Zeiger der Teilspannung U_L folgt hieraus mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$\vec{U}_L \;=\; Z_L\cdot\vec{I} \;\approx\; \Big(1.4\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\ \Omega\Big)\cdot\Big(1.5\cdot \mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}}\ \mathrm{A}\Big) \;=\; 2.1\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\ \mathrm{V}$$

b) Bei seriell geschalteten komplexen Widerständen addieren sich die Zeiger der Teilspannungen vektoriell zum Zeiger der gesamten Spannung. Also gilt (siehe Diagramm rechts):

$$\begin{aligned}\vec{U} \;&=\; \vec{U}_R + \vec{U}_L \;\approx\; 2.1\ \mathrm{V} + 2.1\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\ \mathrm{V}\\ &=\; 2.1\ \mathrm{V} + 2.1\,\mathrm{i}\ \mathrm{V} \;\approx\; 3.0\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \mathrm{V}\end{aligned}$$



Aus dem Ohm'schen Gesetz ergibt sich damit für den gesamten Stromkreis die Impedanz Z als Quotient der komplexwertig-skalar aufgefassten Zeiger $\vec{U}$ und $\vec{I}$:

$$Z \;=\; \frac{\vec{U}}{\vec{I}} \;=\; \frac{3.0\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \mathrm{V}}{1.5\ \mathrm{A}} \;\approx\; 2.0\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \Omega \;\approx\; 1.4\ \Omega \;+\; 1.4\,\mathrm{i}\ \Omega$$

Der Blindwiderstand X des Stromkreises ist der Imaginärteil dieser Impedanz Z:

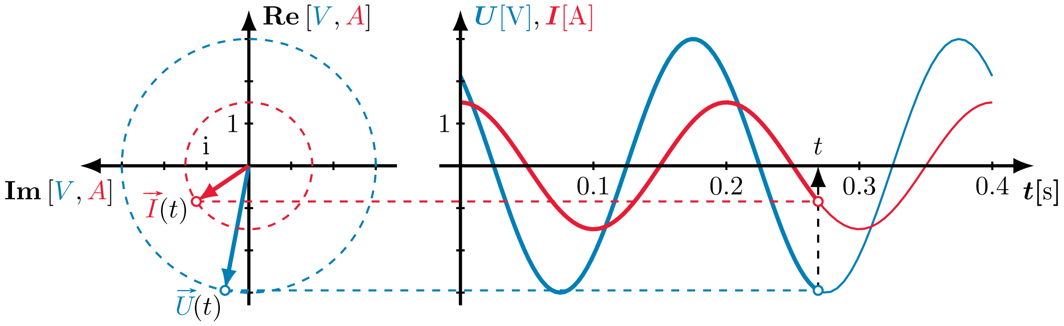
$$X \;=\; \mathrm{Im}\,(Z) \;\approx\; 1.4\ \Omega$$

c) Die Realteile der mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ rotierenden Zeiger $\vec{U}(t)$ und $\vec{I}(t)$ liefern die Spannung $U(t)$ und die Stromstärke $I(t)$.

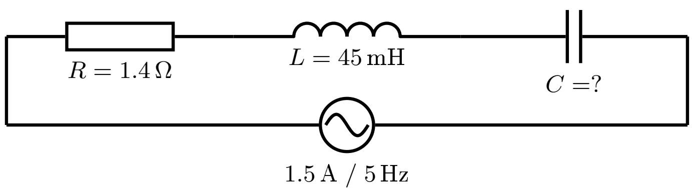
$$U(t) \;=\; \mathrm{Re}\,\big(\vec{U}(t)\big) \;=\; \mathrm{Re}\,\big(\vec{U}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big) \;\approx\; \mathrm{Re}\Big(\big(3.0\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \mathrm{V}\big)\cdot \mathrm{e}^{10\pi\mathrm{i}\,t}\Big) \;=\; 3.0\,\cos\Big(10\pi\,t + \frac{\pi}{4}\Big)\ \mathrm{V}$$

$$I(t) \;=\; \mathrm{Re}\,\big(\vec{I}(t)\big) \;=\; \mathrm{Re}\,\big(\vec{I}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\big) \;\approx\; \mathrm{Re}\Big(\big(1.5\ \mathrm{A}\big)\cdot \mathrm{e}^{10\pi\mathrm{i}\,t}\Big) \;=\; 1.5\,\cos\Big(10\pi\,t\Big)\ \mathrm{A}$$

Damit läuft die Spannung $U(t)$ dem Strom $I(t)$ konstant um $\frac{\pi}{4}$ voraus. Gemäss dem Ohm'schen Gesetz entspricht diese Phasenverschiebung vom Strom zur Spannung gerade dem Argument der Impedanz $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$. Dieser phasenverschobene Verlauf von Spannung und Strom ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Zwei Perioden entsprechen bei der Frequenz $f = 5\,\text{Hz}$ einer Zeitdauer von $2T = \frac{2}{f} = \frac{2}{5}\,\text{s} = 0.4\,\text{s}$, die auf der Zeitachse abzutragen ist:



d) Um den Blindwiderstand auf Null zu setzen, soll der obige Stromkreis seriell um einen Kondensator der Kapazität C erweitert werden:



Die drei seriell geschalteten komplexen Widerstände von Kondensator, Spule und Ohm'schem Widerstand addieren sich zur gesamten Impedanz:

$$Z \;=\; Z_R + Z_L + Z_C \;=\; R + \mathrm{i}\cdot\omega\,L + \frac{1}{\mathrm{i}\cdot\omega\,C} \;=\; R + \mathrm{i}\cdot\omega\,L - \mathrm{i}\cdot\frac{1}{\omega\,C}$$

Damit der Blindwiderstand $X = \mathrm{Im}\,(Z)$ verschwindet, muss gelten:

$$X \;=\; \mathrm{Im}\,(Z) \;=\; \omega\,L - \frac{1}{\omega\,C} \overset{!}{=} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad C \;=\; \frac{1}{\omega^2\,L} \;=\; \frac{1}{31.4^2\cdot 0.045\ \mathrm{Hz}^2\,\mathrm{H}} \;\approx\; 23\,\mathrm{mF}$$

Aufgaben

Aufgabe 6.1. Addieren Sie die gleichfrequenten Grössen mit Hilfe ihrer Zeiger:

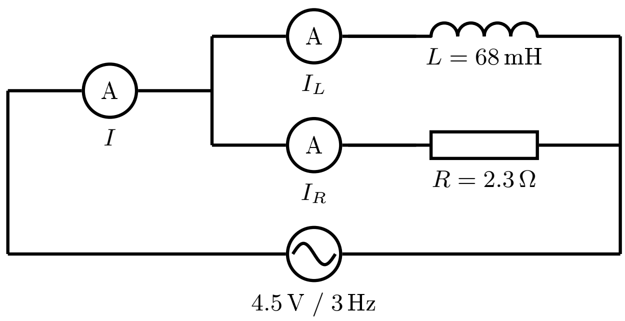
a) $A(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$, $B(t) = \sqrt{12}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ b) $A(t) = 4\cos(4\pi t)$, $B(t) = 3\sin(4\pi t)$

c) $A_1(t) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$, $A_2(t) = 2\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ d) $I_1(t) = 2\sin(2t)$, $I_2(t) = \cos(2t - 1)$

e) $U_1(t) = 2\cos\left(2\pi t\right)$, $U_2(t) = 2\cos\left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, $U_3(t) = 2\cos\left(2\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$

Geben Sie dabei Ihre Ergebnisse nötigenfalls auf zwei Dezimalen gerundet an.

Aufgabe 6.2. In einem Stromkreis sind ein Ohm'scher Widerstand $R = 2.3\,\Omega$ und eine Spule der Induktivität $L = 68\,\text{mH}$ parallel geschaltet. Am Stromkreis liegt harmonisch oszillierender Wechselstrom mit der maximalen Spannung $\hat{U} = 4.5\,\text{V}$ und der Frequenz $f = 3\,\text{Hz}$ an.



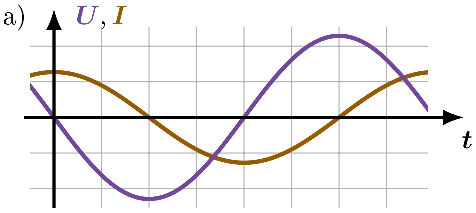
a) Berechnen Sie mit Hilfe des Zeigers $\vec{U}$ der Spannung die Zeiger $\vec{I}_R$ und $\vec{I}_L$ der beiden Teilstromstärken.

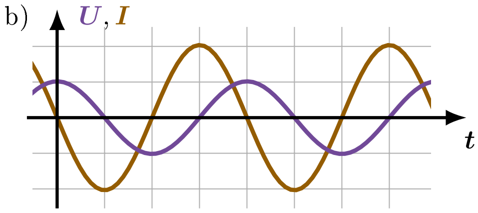
b) Bestimmen Sie den Zeiger $\vec{I}$ der gesamten Stromstärke. Welche Impedanz Z hat der Stromkreis? Wie gross ist sein Blindwiderstand? Geben Sie die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom an.

c) Stellen Sie in einem Diagramm den zeitlichen Verlauf der Spannung $U(t)$ und der Stromstärke $I(t)$ über eine Periodendauer dar.

d) Der Parallelschaltung wird seriell ein Kondensator der Kapazität C vorgeschaltet, um den Blindwiderstand des gesamten Stromkreises zu kompensieren. Wie gross ist C zu wählen?

Aufgabe 6.3*. Die Diagramme zeigen die Spannung und die Stromstärke an einem Wechselstromkreis aus zwei seriell geschalteten linearen Widerständen. Überlegen Sie anhand der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, um welche Arten von linearen Widerständen es sich dabei handelt.





Wie lauten die entsprechenden Antworten, wenn die zwei linearen Widerstände im Wechselstromkreis parallel geschaltet sind?

7* Ausblick

Lösungen

Lösungen zu Kapitel 1

Aufgabe 1.1: Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungen jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

a) $(z^2-2)(z-3)(3z+2)=0 \;:\quad \mathbb{L}_{\mathbb{N}} = L_{\mathbb{Z}} = \{3\} \subseteq \mathbb{L}_{\mathbb{Q}} = \left\{3, -\frac{2}{3}\right\} \subseteq \mathbb{L}_{\mathbb{R}} = \mathbb{L}_{\mathbb{C}} = \left\{3, -\frac{2}{3}, \pm\sqrt{2}\right\}$

b) $(z^2-4)(z^2+1)=0 \;:\quad \mathbb{L}_{\mathbb{N}} = \{2\} \subseteq \mathbb{L}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{L}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{L}_{\mathbb{R}} = \{\pm 2\} \subseteq \mathbb{L}_{\mathbb{C}} = \{\pm 2, \pm \mathrm{i}\}$

Aufgabe 1.2: Geben Sie die Real- und Imaginärteile der komplexen Zahlen an. Welche Zahlen sind reell, welche imaginär?

a) $z_1 = 2 - \mathrm{i} \;:\; \mathrm{Re}\,(z_1) = 2,\ \mathrm{Im}\,(z_1) = -1$

b) $z_2 = -1 + 2\mathrm{i} \;:\; \mathrm{Re}\,(z_2) = -1,\ \mathrm{Im}\,(z_2) = 2$

c) $z_3 = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i} \;:\; \mathrm{Re}\,(z_3) = 0,\ \mathrm{Im}\,(z_1) = \dfrac{3}{2}$

d) $z_4 = -2 \;:\; \mathrm{Re}\,(z_4) = -2,\ \mathrm{Im}\,(z_4) = 0$

Wegen $\mathrm{Im}\,(z_4) = 0$ ist $z_4 = 2$ reell. Wegen $\mathrm{Re}\,(z_3) = 0$ ist $z_3 = \frac{3}{2}\,\mathrm{i}$ imaginär.

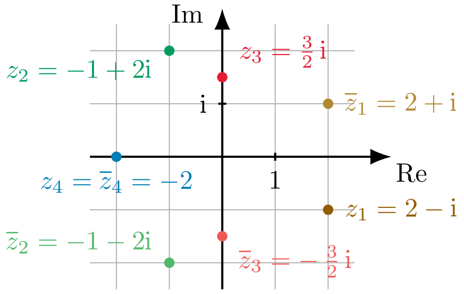
Aufgabe 1.3: Stellen Sie die komplexen Zahlen aus A1.2 samt ihrer komplex Konjugierten in der Zahlenebene dar. Wie lässt sich die komplexe Konjugation geometrisch beschreiben?

a) $z_1 = 2 - \mathrm{i} \quad\Longrightarrow\quad \overline{z}_1 = 2 + \mathrm{i}$

b) $z_2 = -1 + 2\mathrm{i} \quad\Longrightarrow\quad \overline{z}_2 = -1 - 2\mathrm{i}$

c) $z_3 = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{i} \quad\Longrightarrow\quad \overline{z}_3 = -\dfrac{3}{2}\,\mathrm{i}$

d) $z_4 = -2 \quad\Longrightarrow\quad \overline{z}_4 = -2$



Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse der Zahlenebene.

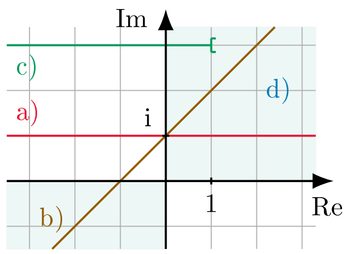
Aufgabe 1.4: Stellen Sie die Zahlenmengen in der Zahlenebene graphisch dar.

a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,(z) = 1\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z) + 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(z) < 1 \wedge \mathrm{Im}\,(z) = 3\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\,(z) \cdot \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$



Aufgabe 1.5: Beschreiben Sie die Teilmengen der Zahlenebene mit Hilfe von Gleichungen oder Ungleichungen für die Real- oder die Imaginärteile:

a) Imaginäre Achse:
$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

b) Parallele zur imaginären Achse durch $-1+\mathrm{i}$:
$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = -1\}$

c) Zweiter Quadrant ohne Rand:
$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0\}$

d) Strecke zwischen $-1-\mathrm{i}$ und $1+\mathrm{i}$:
$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \wedge -1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$

Aufgabe 1.6*: Erweitern Sie Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wie in Beispiel 1.9 zur Menge $\mathbb{R}^*$, indem sie zu $\mathbb{R}$ die Variable ∞ als formale Lösung der Gleichung $0 \cdot \infty = 1$ hinzufügen. Zeigen Sie analog zu Beispiel 1.9: In $\mathbb{R}^*$ lässt sich nicht widerspruchsfrei rechnen, sobald das Distributivgesetz gilt.

Gilt in $\mathbb{R}^*$ das Distributivgesetz, kann man zum Beispiel den folgenden Widerspruch erhalten:

$$1 \overset{(1)}{=} 0 \odot \infty \overset{(2)}{=} (0 \oplus 0) \odot \infty \overset{(3)}{=} (0 \odot \infty) \oplus (0 \odot \infty) \overset{(4)}{=} 1 \oplus 1 \overset{(5)}{=} 2$$

Die Gleichheiten (1) und (4) entsprechen dabei der definierenden Gleichung für ∞. Die Gleichheiten (2) und (5) folgen daraus, dass Addition und Multiplikation reeller Zahlen weiterhin gelten soll. Die Gleichheit (3) folgt aus dem Distributivgesetz.

Aufgabe 1.7*: Bezeichnen Sie durch $\sqrt{2}$ eine formale Lösung x der rational nicht lösbaren Gleichung $x^2 = 2$. Definieren Sie damit die folgende Erweiterung $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen:
Jede Zahl q aus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ist durch zwei rationale Zahlen a und b definiert, die mit Hilfe der Variablen $\sqrt{2}$ wie folgt notiert werden:

$$q := a + \sqrt{2}\, b$$

Dabei ist $\mathbb{Q}$ durch die Gleichsetzung $a \equiv a + 0 \cdot \sqrt{2}$ als Teilmenge in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ enthalten. Erklären Sie auf der Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$: Definieren Sie dazu die Summe $q_1 \oplus q_2$ und das Produkt $q_1 \odot q_2$ zweier Zahlen $q_1 = a_1 + \sqrt{2}b_1$ und $q_2 = a_2 + \sqrt{2}b_2$ mit Hilfe von a_1, b_1, a_2, b_2. Überprüfen Sie, ob Ihre Definitionen von $\oplus$ und $\odot$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && \big(a_1 + 0 \cdot \sqrt{2}\big) \oplus \big(a_2 + 0 \cdot \sqrt{2}\big) = (a_1 + a_2) + 0 \cdot \sqrt{2} \\ &\text{(ii)} && \big(a_1 + 0 \cdot \sqrt{2}\big) \odot \big(a_2 + 0 \cdot \sqrt{2}\big) = (a_1 \cdot a_2) + 0 \cdot \sqrt{2} \\ &\text{(iii)} && \big(0 + 1 \cdot \sqrt{2}\big) \odot \big(0 + 1 \cdot \sqrt{2}\big) = 2 + 0 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Welche Bedeutung haben diese Eigenschaften?

Man kann auf $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ eine Addition und eine Multiplikation definieren, indem man mit den rationalen Variablen a_1, b_1, a_2, b_2 und der formalen Zahl $\sqrt{2}$ so rechnet, wie man in $\mathbb{R}$ rechnen würde:

$$\begin{aligned} (a_1 + \sqrt{2}b_1) \oplus (a_2 + \sqrt{2}b_2) &:= \big((a_1 + a_2) + \sqrt{2}(b_1 + b_2)\big) \\ (a_1 + \sqrt{2}b_1) \odot (a_2 + \sqrt{2}b_2) &:= \big((a_1a_2 + 2b_1b_2) + \sqrt{2}(a_1b_2 + a_2b_1)\big) \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen gelten offensichtlich die Eigenschaften (i) bis (iii). Dabei bedeutet Eigenschaft (i), dass die Addition in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ die bekannte Addition auf der Teilmenge $\mathbb{Q}$ fortsetzt. Eigenschaft (ii) bedeutet Entsprechendes für die Multiplikation. Eigenschaft (iii) bedeutet, dass für $\sqrt{2} \equiv 0 + 1 \cdot \sqrt{2}$ die definierende Gleichung gilt.

Lösungen zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1: Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\mathrm{i}^2 = -1$ b) $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ c) $-\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}$ d) $\mathrm{i}^4 = 1$ e) $-\mathrm{i}^4 = -1$ f) $\mathrm{i}^{100} - \mathrm{i}^{98} = (\mathrm{i}^4)^{25} - (\mathrm{i}^2)^{49} = 2$

Aufgabe 2.2: Bringen Sie ohne Taschenrechner auf Normalform:

a) $(7+2\mathrm{i}) + (8+3\mathrm{i}) = 15+5\mathrm{i}$ b) $(1+5\mathrm{i}) - (5-7\mathrm{i}) = -4+12\mathrm{i}$ c) $27\mathrm{i} - (-6+\mathrm{i}) = 6+26\mathrm{i}$

d) $(3+\mathrm{i}) - (-2-\mathrm{i}) = 5+2\mathrm{i}$ e) $(-8+2\mathrm{i})(7-3\mathrm{i}) = -50+38\mathrm{i}$ f) $(3+7\mathrm{i})(3-7\mathrm{i}) = 58$

g) $5\,(6-7\mathrm{i}) = 30-35\mathrm{i}$ h) $(3+2\mathrm{i})^2 = 5+12\mathrm{i}$ i) $(6+4\mathrm{i}) : 2 = 3+2\mathrm{i}$

j) $-16 : 4\mathrm{i} = 4\mathrm{i}$ k) $9\mathrm{i} : (-12\mathrm{i}) = -\frac{3}{4}$ l) $(-12+18\mathrm{i}) : (-6\mathrm{i}) = -3-2\mathrm{i}$

Aufgabe 2.3: Bringen Sie ohne Taschenrechner auf Normalform:

a) $\dfrac{4+2\mathrm{i}}{2+4\mathrm{i}} = \dfrac{(4+2\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})}{(2+4\mathrm{i})(2-4\mathrm{i})} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ b) $\dfrac{41+13\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} = \dfrac{(41+13\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})} = 5+7\mathrm{i}$

c) $\dfrac{83+64\mathrm{i}}{12-5\mathrm{i}} = \dfrac{(83+64\mathrm{i})(12+5\mathrm{i})}{(12-5\mathrm{i})(12+5\mathrm{i})} = 4+7\mathrm{i}$ d) $\dfrac{5-13\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(5-13\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = 9-4\mathrm{i}$

e) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\mathrm{i}}{\frac{1}{2} - \frac{7}{3}\mathrm{i}} = \dfrac{(4-5\mathrm{i})(3+14\mathrm{i})}{(3-14\mathrm{i})(3+14\mathrm{i})} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$ f) $\dfrac{\frac{7}{6} + \frac{5}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{i}} = \dfrac{(7+15\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})}{(2-4\mathrm{i})(2+4\mathrm{i})} = -\dfrac{23}{10} + \dfrac{29}{10}\mathrm{i}$

g) $\dfrac{7\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}\mathrm{i}} = \dfrac{7\mathrm{i}\,(\sqrt{2}-\sqrt{5}\mathrm{i})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}\mathrm{i})(\sqrt{2}-\sqrt{5}\mathrm{i})} = \sqrt{5}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ h) $\dfrac{9+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-9\mathrm{i}} = \dfrac{(9+\sqrt{3}\mathrm{i})(\sqrt{3}+9\mathrm{i})}{(\sqrt{3}-9\mathrm{i})(\sqrt{3}+9\mathrm{i})} = \mathrm{i}$

Aufgabe 2.4: Berechnen Sie ohne Taschenrechner für $z_1 = 2+\mathrm{i}$ und $z_2 = -5+2\mathrm{i}$:

a) $\mathrm{Re}\,(z_1 + 4z_2) = \mathrm{Re}\,(-18+9i) = -18$ b) $\mathrm{Im}\,(z_1^2 z_2) = \mathrm{Im}\,(-23-14i) = -14$

c) $\mathrm{Re}\,(z_1 z_2^2) = \mathrm{Re}\,(62-19i) = 62$ d) $\mathrm{Im}\,(2z_1 - 3z_2) = \mathrm{Im}\,(19-4i) = -4$

Aufgabe 2.5: Stellen Sie $\mathrm{Re}\,(z)$ und $\mathrm{Im}\,(z)$ jeweils durch einen Term aus z und $\overline{z}$ dar.
Tipp: Interpretieren Sie z und $\overline{z}$ als Vektoren in der Zahlenebene.

Addiert man $z = x + \mathrm{i}y$ und $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ als Vektoren in der Zahlenebene, so erhält man einen Vektor in Richtung der reellen Achse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{Re}\,(z) \\ 0 \end{pmatrix} \iff z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z) \iff \mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$$

Subtrahiert man $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ von $z = x + \mathrm{i}y$ als Vektoren in der Zahlenebene, so erhält man einen Vektor in Richtung der imaginären Achse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\mathrm{Im}\,(z) \end{pmatrix} \iff z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z) \iff \mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}(z-\overline{z})$$

Aufgabe 2.6: Berechnen Sie ohne Taschenrechner jeweils $-z$, $|z|$ und z^{-1}:

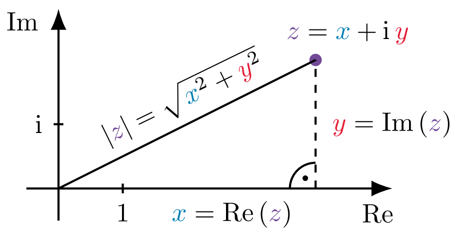
$$
\begin{array}{lllll}
\text{a)} & z = 2-\mathrm{i}\ : & -z = -2+\mathrm{i}, & |z| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}, & z^{-1} = \dfrac{2+\mathrm{i}}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\,\mathrm{i} \\
\text{b)} & z = -4+3\mathrm{i}\ : & -z = 4-3\mathrm{i}, & |z| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5, & z^{-1} = \dfrac{-4-3\mathrm{i}}{25} = -\dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25}\,\mathrm{i} \\
\text{c)} & z = -6-8\mathrm{i}\ : & -z = 6+8\mathrm{i}, & |z| = \sqrt{(-6)^2+(-8)^2} = 10, & z^{-1} = \dfrac{-6+8\mathrm{i}}{100} = -\dfrac{3}{50} + \dfrac{2}{25}\,\mathrm{i} \\
\text{d)} & z = 1+2\mathrm{i}\ : & -z = -1-2\mathrm{i}, & |z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}, & z^{-1} = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}\,\mathrm{i}
\end{array}
$$

Aufgabe 2.7: a) Geben Sie mit Hilfe einer Skizze eine geometrische Interpretation des Betrags $|z|$ in der Zahlenebene.

Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist nach Definition 2.7 gegeben durch:

$$|z| \;=\; \sqrt{x^2+y^2}$$

Gemäss dem Satz von Pythagoras entspricht $|z|$ damit dem euklidischen Abstand von 0 nach z in der Zahlenebene.

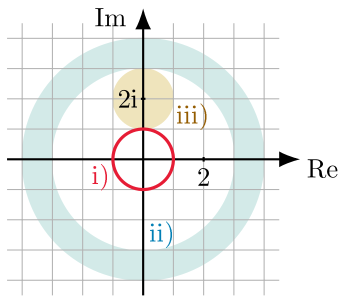


b) Stellen Sie die Zahlenmengen in der Zahlenebene graphisch dar:

i) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$

ii) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 3 < |z| < 4\}$

iii) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 2\mathrm{i}| < 1\}$



c) Begründen Sie: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt die Dreiecksungleichung: $\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \overset{(2)}{\leq} |z_1 + z_2| \overset{(1)}{\leq} |z_1| + |z_2|$

Interpretiert man z_1 und z_2 als Vektoren in der Zahlenebene, dann folgt die Ungleichung (1) direkt aus der namensgebenden Tatsache, dass in einem ebenen Dreieck die Summe der beiden Seitenlängen $|\vec{z}_1|$ und $|\vec{z}_2|$ stets gösser oder gleich der dritten Seitenlänge $|\overrightarrow{z_1 + z_2}|$ ist.

Die Ungleichung (2) folgt durch einen Trick. Erstens gilt für $w_1 := z_1 + z_2$ und $w_2 := -z_2$ gemäss (1):

$$
\begin{aligned}
|w_1 + w_2| \leq |w_1| + |w_2| \quad &\Leftrightarrow \quad |w_1 + w_2| - |w_2| \leq |w_1| \\
&\Leftrightarrow \quad \big|(z_1 + z_2) + (-z_2)\big| - \big|-z_2\big| \leq |z_1 + z_2| \quad \Leftrightarrow \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|
\end{aligned}
$$

Zweitens gilt für $w_1 := -z_1 - z_2$ und $w_2 := z_1$ gemäss (1):

$$
\begin{aligned}
|w_1 + w_2| \leq |w_1| + |w_2| \quad &\Leftrightarrow \quad |w_1 + w_2| - |w_2| \leq |w_1| \\
&\Leftrightarrow \quad \big|(-z_1 - z_2) + z_1\big| - |z_1| \leq |-z_1 - z_2| \quad \Leftrightarrow \quad |z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|
\end{aligned}
$$

Damit gilt sowohl $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$ als auch $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$, was Ungleichung (2) beweist.

Aufgabe 2.8: Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation mit den vier Grundrechenarten in $\mathbb{C}$ verträglich ist. Weisen Sie dazu für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die vier Identitäten nach:

Für beliebige komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + y_1$ und $z_2 = x_2 + y_2$ (mit $z_2 \neq 0$ im Fall der Division) gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} \;=\; \overline{(x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)} \;=\; (x_1 + x_2) - \mathrm{i}(y_1 + y_2) = \;(x_1 - \mathrm{i}y_1) + (x_2 - \mathrm{i}y_2) \;=\; \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 - z_2} &= \overline{(x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)} \;=\; (x_1 - x_2) - \mathrm{i}(y_1 - y_2) = (x_1 - \mathrm{i}y_1) - (x_2 - \mathrm{i}y_2) \;=\; \overline{z_1} - \overline{z_2}, \\
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)} \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) - \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - \mathrm{i}y_1) \cdot (x_2 - \mathrm{i}y_2) \;=\; \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

Aus der Verträglichkeit von komplexer Konjugation mit der Multiplikation erhält man schliesslich auch:

$$\overline{z_1 : z_2} \;=\; \overline{\left(\frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}\right)} \;=\; \overline{z_1 \cdot \left(\frac{1}{|z_2|^2}\right) \cdot \overline{z}_2} \;=\; \overline{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{1}{|z_2|^2}\right)} \cdot \overline{\overline{z}}_2 \;=\; \overline{z}_1 \cdot \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_2 \;=\; \overline{z}_1 \cdot \frac{z_2}{\overline{z}_2 \cdot z_2} \;=\; \overline{z_1} : \overline{z_2}$$

Aufgabe 2.9: Die Zahlen a, b sind reell. Bringen Sie auf Normalform:

$$\text{a)}\;\; \mathrm{i}\,\overline{(a + \mathrm{i}b)} + \frac{1}{\mathrm{i}}\,(a + \mathrm{i}b) \;=\; \mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}b) - \mathrm{i}(a + \mathrm{i}b) \;=\; 2b$$

$$\text{b)}\;\; \overline{(a - \mathrm{i}b)}\,(a + \mathrm{i}b)^{-1} \;=\; (a + \mathrm{i}b)\,(a + \mathrm{i}b)^{-1} \;=\; 1$$

$$\text{c)}\;\; \overline{\mathrm{i}b} + \overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{b}\right)} + \overline{\left(\frac{b}{\mathrm{i}}\right)} + \overline{\overline{\left(\frac{\mathrm{i}}{b}\right)}} \;=\; \overline{\mathrm{i}b + \frac{\mathrm{i}}{b} - \mathrm{i}b - \frac{\mathrm{i}}{b}} \;=\; \overline{0} \;=\; 0$$

Aufgabe 2.10*: a) Zeigen Sie die Assoziativität der Addition in $\mathbb{C}$. Weisen Sie dazu für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ algebraisch nach: $(z_1 + z_2) + z_3 \;=\; z_1 + (z_2 + z_3)$

Die Assoziativität der komplexen Addition folgt aus derjenigen der reellen Addition:

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= \big((x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2)\big) + z_3 \;=\; \big((x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)\big) + (x_3 + \mathrm{i}y_3) \\
&= \big((x_1 + x_2) + x_3\big) + \mathrm{i}\big((y_1 + y_2) + y_3\big) \;=\; \big(x_1 + (x_2 + x_3)\big) + \mathrm{i}\big(y_1 + (y_2 + y_3)\big) \\
&= (x_1 + \mathrm{i}y_1) + \big((x_2 + x_3) + \mathrm{i}(y_2 + y_3)\big) \;=\; z_1 + \big((x_2 + \mathrm{i}y_2) + (x_3 + \mathrm{i}y_3)\big) \\
&= z_1 + (z_2 + z_3)
\end{aligned}$$

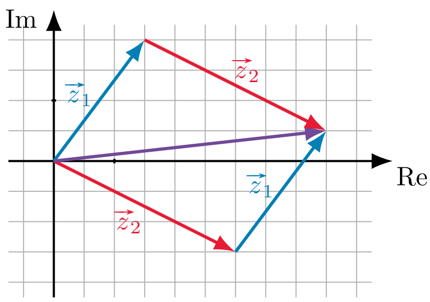
b) Zeigen Sie die Kommutativität der Addition in $\mathbb{C}$. Weisen Sie dazu für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ algebraisch nach:

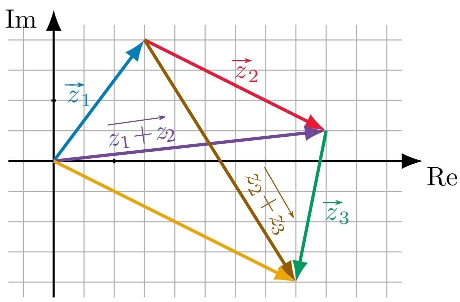
$$z_1 + z_2 \;=\; z_2 + z_1$$

Die Kommutativität der komplexen Addition ergibt sich aus derjenigen der reellen Addition:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) \;=\; (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \\
&= (x_2 + x_1) + \mathrm{i}(y_2 + y_1) \;=\; (x_2 + \mathrm{i}y_2) + (x_1 + \mathrm{i}y_1) \;=\; z_2 + z_1
\end{aligned}$$

c) Begründen Sie die Aussagen in a) und b) geometrisch.
Geometrisch lassen sich die beiden Summanden in a) und die drei Summanden in b) als Vektoren in der Zahlenebene interpretieren. Die Kommutativität und die Assoziativität der komplexen Addition ergeben sich dann aus den beiden entsprechenden Eigenschaften der Vektoraddition:





Aufgabe 2.11*: Zeigen Sie die Distributivität von Multiplikation und Addition in $\mathbb{C}$. Weisen Sie für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ algebraisch nach: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 \;=\; z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

Die Distributivität im Komplexen kann man mit Hilfe der reellen Distributivität zeigen:

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)\cdot z_3 &= \big((x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)\big)\cdot(x_3+\mathrm{i}y_3)\\ &= \big((x_1+x_2)x_3-(y_1+y_2)y_3\big)+\mathrm{i}\big((x_1+x_2)y_3+x_3(y_1+y_2)\big)\\ &= \big(x_1x_3+x_2x_3-y_1y_3-y_2y_3\big)+\mathrm{i}\big(x_1y_3+x_2y_3+x_3y_1+x_3y_2\big)\\ &= (x_1x_3-y_1y_3)+\mathrm{i}(x_1y_3+x_3y_1)+(x_2x_3-y_2y_3)+\mathrm{i}(x_2y_3+x_3y_2)\\ &= z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3\end{aligned}$$

Aufgabe 2.12*: Betrachten Sie ein Element $q=a+\sqrt{2}b$ mit $q\neq 0+0\cdot\sqrt{2}$ aus der in A1.7* definierten Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Geben Sie das multiplikative Inverselement q^{-1} in der Form $c+\sqrt{2}d$ mit $c,d\in\mathbb{Q}$ an.

Um q^{-1} in der velangten Form zu erhalten, kann man q^{-1} als Bruch notieren und mit $a-\sqrt{2}b$ gemäss dem Rechnen in $\mathbb{R}$ erweitern:

$$(a+\sqrt{2}b)^{-1} \;=\; \frac{1}{a+\sqrt{2}b} \;=\; \frac{a-\sqrt{2}b}{(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)} \;=\; \frac{a}{a^2-2b^2}-\sqrt{2}\frac{b}{a^2-2b^2}$$

Dieses Inverse ist stets wohldefiniert. Denn wie beim Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ lässt sich zeigen, dass die Gleichung $a^2-2b^2=0$ keine rationalen Lösungen a und b hat – ausser $a=0, b=0$.

Lösungen zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1: Beschreiben Sie die Teilmengen der Zahlenebene durch (Un-)Gleichungen für die Beträge beziehungsweise Argumente:

a) Ursprungskreis mit Radius 5 : $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=5\}$

b) Ursprungskreissegment zwischen $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ und $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$:
$\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=2\ \wedge\ 30^\circ\le\arg(z)\le 60^\circ\}$ oder $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=2\ \wedge\ 60^\circ\le\arg(z)\le 390^\circ\}$

c) Gerade durch $-1-\mathrm{i}$ und $1+\mathrm{i}$: $\{z\in\mathbb{C}\mid \arg(z)=45^\circ\}$ oder $\{z\in\mathbb{C}\mid \arg(z)=225^\circ\}$

d) Strecke zwischen $-\sqrt{3}+3\mathrm{i}$ und $-3\sqrt{3}+9\mathrm{i}$: $\{z\in\mathbb{C}\mid \arg(z)=120^\circ\ \wedge\ 2\sqrt{3}\le|z|\le 6\sqrt{3}\}$

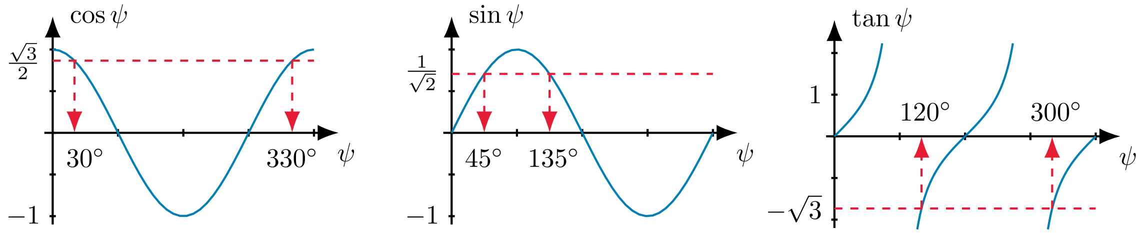
Aufgabe 3.2: Bestimmen Sie alle Lösungen $\varphi\in[0^\circ,360^\circ[$ der trigonometrischen Gleichungen:

a) $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow\ \varphi\in\{30^\circ,330^\circ\}$

b) $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow\ \varphi\in\{45^\circ,135^\circ\}$

c) $\varphi=\arctan(-\sqrt{3})$
$\Rightarrow\ \varphi\in\{120^\circ,300^\circ\}$

Wichtig: Ein einfacher Taschenrechner liefert in der Regel nur eine Lösung für jede Gleichung. Aus der Symmetrie beziehungsweise der Periodizität der Graphen der trigonometrischen Funktionen lassen sich damit die weiteren Lösungen gewinnen.



Aufgabe 3.3: Bringen Sie ohne Taschenrechner auf Normalform:

a) $3\,\mathrm{cis}\,90° = 3\mathrm{i}$ b) $3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,135° = -3+3\mathrm{i}$

c) $4\,\mathrm{cis}\,(-30°) = 2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ d) $\sqrt{3}\,\mathrm{cis}\,(-240°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\,\mathrm{i}$

Aufgabe 3.4: Geben Sie ohne Taschenrechner die trigonometrischen Polarformen von $z_1 = 1+\mathrm{i}$ und $z_2 = 1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ an: $z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45°$, $z_2 = 2\,\mathrm{cis}\,60°$
Berechnen Sie:

a) $\arg(z_1 - z_2) = \arg\big((1-\sqrt{3})\mathrm{i}\big) = 270°$ b) $|z_1 - z_2| = \big|(1-\sqrt{3})\mathrm{i}\big| = 1-\sqrt{3}$

c) $\arg\Big(\dfrac{z_1}{z_2}\Big) = \arg\big(1+\mathrm{i}\big) - \arg\big(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\big) = 45° - 60° = 345°$ d) $\Big|\dfrac{z_1}{z_2}\Big| = \dfrac{|1+\mathrm{i}|}{|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Aufgabe 3.5: Drücken Sie mit Hilfe des Satzes von de Moivre durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ aus:

a) $\cos(2\varphi) = \mathrm{Re}\,\big(\mathrm{cis}\,(2\varphi)\big) = \mathrm{Re}\,\big((\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2\big) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

b) $\sin(2\varphi) = \mathrm{Im}\,\big(\mathrm{cis}\,(2\varphi)\big) = \mathrm{Im}\,\big((\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2\big) = 2\,\cos\varphi\,\sin\varphi$

c) $\cos(4\varphi) = \mathrm{Re}\,\big(\mathrm{cis}\,(4\varphi)\big) = \mathrm{Re}\,\big((\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^4\big) = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$

d) $\sin(4\varphi) = \mathrm{Im}\,\big(\mathrm{cis}\,(4\varphi)\big) = \mathrm{Im}\,\big((\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^4\big) = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$

Die Binome höherer Potenz lassen sich durch die binomischen Formeln mit den entsprechenden Binomialkoeffizienten berechnen.

Aufgabe 3.6: Bringen Sie ohne Taschenrechner auf Normalform:

a) $4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = 4\mathrm{i}$ b) $2\mathrm{e}^0 = 2$ c) $3\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -3$ d) $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}} = -\frac{2}{3}\,\mathrm{i}$

e) $2\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{i}} = -\sqrt{3}-\mathrm{i}$ f) $6\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = 3-3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ g) $6\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}} = -3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ h) $8\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}} = -8$

Aufgabe 3.7: Geben Sie ohne Taschenrechner in Exponentialform an:

a) $2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ b) $-2+2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$ c) $-2-2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}}$ d) $2-2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{i}}$

e) $2+2\sqrt{3}\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ f) $-2+2\sqrt{3}\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ g) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ h) $1-\sqrt{3}\mathrm{i}2\mathrm{e}^{\frac{10\pi}{6}\mathrm{i}}$

Aufgabe 3.8: Geben Sie jeweils $-z$, $\bar{z}$ und z^{-1} ohne Taschenrechner in Exponentialform an:

a) $z = 4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \quad\Rightarrow\quad -z = 4\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}, \quad \bar{z} = 4\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = 4\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}, \quad z^{-1} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}$

b) $z = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}} \quad\Rightarrow\quad -z = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}, \quad \bar{z} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}, \quad z^{-1} = 3\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$

c) $z = 8\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{9}\mathrm{i}} \quad\Rightarrow\quad -z = 8\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{9}\mathrm{i}}, \quad \bar{z} = 8\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{9}\mathrm{i}}, \quad z^{-1} = \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$

Aufgabe 3.9: Bestimmen Sie das Ergebnis in Exponentialform ohne Taschenrechner:

a) $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{9}\mathrm{i}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{18}\mathrm{i}}$ b) $\Big(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}} : \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\Big) : \mathrm{e}^{\frac{10\pi}{9}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{23\pi}{18}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{13\pi}{18}\mathrm{i}}$

c) $\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} : \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{i}}$ d) $\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} : \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{13\pi}{12}\mathrm{i}}$

Aufgabe 3.10: Berechnen Sie ohne Taschenrechner für $z_1 = \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{9}\mathrm{i}}$, $z_2 = 3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ und $z_3 = 2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}$ in Exponentialform:

a) $z_1^5 = \mathrm{e}^{5\cdot\frac{4\pi}{9}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{20\pi}{9}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{9}\mathrm{i}}$ b) $z_1z_2z_3 = 3\cdot 2\cdot\mathrm{e}^{\left(\frac{4\pi}{9}-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\right)\mathrm{i}} = 6\,\mathrm{e}^{\frac{16\pi}{9}\mathrm{i}}$

c) $z_1^2z_2 : z_3 = 3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{\left(2\cdot\frac{4\pi}{9}-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)\mathrm{i}} = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{10\pi}{9}\mathrm{i}} = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{8\pi}{9}\mathrm{i}}$ d) $z_3^{-3} = 2^{-3}\,\mathrm{e}^{-3\cdot\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}} = \dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}} = \dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -\dfrac{1}{8}$

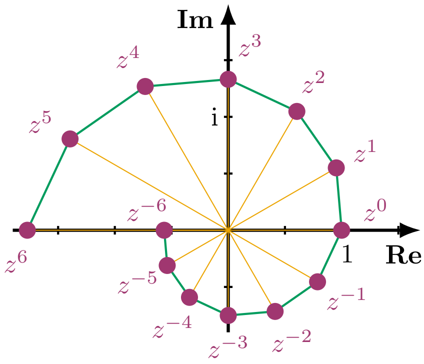
Aufgabe 3.11: Zeichnen Sie für $z = \frac{11}{10}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ die Potenzen $z^{-6}, z^{-5}, \ldots, z^{6}$ in der Zahlenebene. Begründen Sie, warum alle diese Potenzen auf einer logarithmischen Spirale liegen.

Die angegebenen Potenzen z^n winden sich von $z^{-6} \approx -0.56$ bis $z^6 \approx -1.77$ in der Zahlenebene einmal um 0. Für Betrag und Argument der n-ten Potenz gilt dabei:

$$r_n := |z^n| = |z|^n = \left(\frac{11}{10}\right)^n, \quad \varphi_n := \arg\left(z^n\right) = n\arg(z) = \frac{\pi}{6}n$$

Also hängt der Winkel φ_n wie folgt vom Radius r_n ab:

$$\varphi_n(r_n) = \frac{\pi}{6}\,\frac{\ln r_n}{\ln\frac{11}{10}} = \frac{\pi}{6\ln\frac{11}{10}}\,\ln r_n$$



Damit liegen alle z^n auf einer logarithmischen Spirale.

Aufgabe 3.12: a) Beschreiben Sie die Abbildung der Zahlenebene geometrisch:

i) $z \mapsto w = f(z) = -\mathrm{i}\cdot z$:
Drehstreckung mit Streckfaktor $|-\mathrm{i}| = 1$ und Drehwinkel $\arg(-\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{2}$ um Zentrum 0.

ii) $z \mapsto w = f(z) = (3+4\mathrm{i})\cdot z$
Drehstreckung mit Streckfaktor $|3+4\mathrm{i}| = 5$ und Drehwinkel $\arg(3+4\mathrm{i}) \approx 0.30\pi$ um Zentrum 0.

b) Geben Sie eine Funktionsgleichung für die Abbildung der Zahlenebene an:

i) Drehstreckung um 30° gegen UZS mit dem Streckfaktor 2 um das Zentrum 0:
$z \mapsto w = f(z) = (1+\sqrt{3}\mathrm{i})\cdot z = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}\cdot z$

ii) Punktspiegelung am Punkt 0: $z \mapsto w = f(z) = -z = 2\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}\cdot z$

iii) Drehstreckung um 45° mit UZS mit dem Streckfaktor $\sqrt{2}$ um das Zentrum $2+3\mathrm{i}$:
$z \mapsto w = f(z) = (1-\mathrm{i})\cdot\big(z-(2+3\mathrm{i})\big) + (2+3\mathrm{i}) = (1-\mathrm{i})\cdot z - 3 + 2\mathrm{i}$

Hinweis: Bei b.iii) wird die zu betrachtende Drehstreckung aufgefasst als Komposition einer Verschiebung des gewünschten Zentrums $2+3\mathrm{i}$ zu 0, gefolgt von einer Drehstreckung um 0 mit den geforderten Parametern, gefolgt von einer Rückverschiebung von 0 nach $2+3\mathrm{i}$.

Aufgabe 3.13: Ein positiv orientiertes, reguläres Sechseck $ABCDEF$ hat den Mittelpunkt 0 und die Ecke $A = \sqrt{3}+i$. Berechnen Sie seine übrigen Ecken.

Alle weiteren Ecken des Sechsecks entstehen aus A durch sukzessive Drehungen um 60° um den Mittelpunkt 0, d.h. durch sukzessive Multiplikation mit $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$B = 2i \qquad C = -\sqrt{3}+i \qquad D = -\sqrt{3}-i \qquad E = -2i \qquad F = \sqrt{3}-i$$

Aufgabe 3.14*: Bestimmen Sie ohne Taschenrechner exakt mit Hilfe bekannter, exakter Sinus- und Cosinus-Werte:

a) $\sin 15^\circ = \operatorname{Im}(\operatorname{cis}15^\circ) = \operatorname{Im}\big(\operatorname{cis}(45^\circ-30^\circ)\big) = \operatorname{Im}\left(\frac{\operatorname{cis}45^\circ}{\operatorname{cis}30^\circ}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\sin 105^\circ = \operatorname{Im}(\operatorname{cis}105^\circ) = \operatorname{Im}(\operatorname{cis}45^\circ\cdot\operatorname{cis}60^\circ) = \operatorname{Im}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\cos 105^\circ = \operatorname{Re}(\operatorname{cis}105^\circ) = \operatorname{Re}(\operatorname{cis}45^\circ\cdot\operatorname{cis}60^\circ) = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\cos 165^\circ = \operatorname{Re}(\operatorname{cis}165^\circ) = \operatorname{Re}(\operatorname{cis}45^\circ\cdot\operatorname{cis}120^\circ) = \operatorname{Re}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Aufgabe 3.15*: a) Zeigen Sie die Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$. Weisen Sie dazu für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ nach: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Die Assoziativität der komplexen Multiplikation folgt aus derjenigen der reellen Multiplikation und Addition:

$$\begin{aligned}(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= \left(r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2}\right) \cdot z_3 = \left((r_1 \cdot r_2)\, e^{(\varphi_1+\varphi_2)}\right) \cdot r_3 e^{i\varphi_3} \\ &= \left((r_1 \cdot r_2) \cdot r_3\right) e^{((\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3)} = \left(r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)\right) e^{(\varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3))} \\ &= r_1 e^{i\varphi_1} \cdot \left((r_2 \cdot r_3)\, e^{(\varphi_2+\varphi_3)}\right) = z_1 \cdot \left(r_2 e^{\varphi_2} \cdot r_3 e^{\varphi_3}\right) = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie die Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{C}$, indem Sie $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ nachweisen.

Die Kommutativität der komplexen Multiplikation folgt aus derjenigen der reellen Multiplikation und Addition:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = (r_1 \cdot r_2)\, e^{(\varphi_1+\varphi_2)} = (r_2 \cdot r_1)\, e^{(\varphi_2+\varphi_1)} = r_2 e^{i\varphi_2} \cdot r_1 e^{i\varphi_1} = z_2 \cdot z_1$$

Aufgabe 3.16*: Geben Sie eine geometrische Interpretation des Distributivgesetzes, gemäss dem für alle $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

to do

Aufgabe 3.17*: Zeigen Sie für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(1 + i\,\frac{\varphi}{n}\right)^n$ existiert.

to do

Aufgabe 3.18*: Zeigen Sie die Identität $\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + i\,\frac{\varphi}{n}\right)^n$.

to do

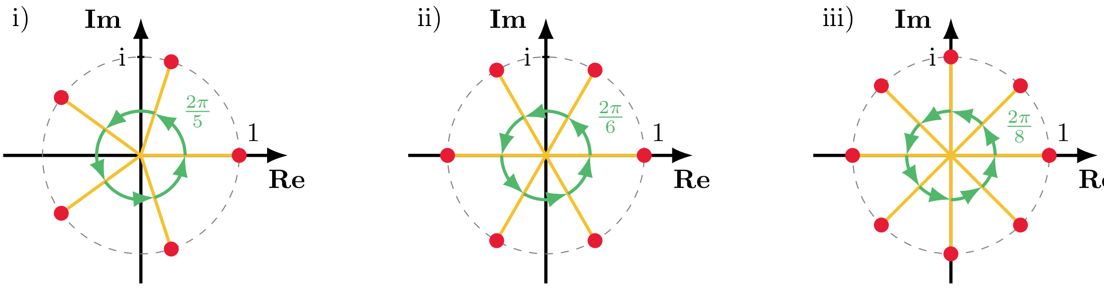
Lösungen zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1: a) Bestimmen Sie die Einheitswurzeln. Stellen Sie sie in der Zahlenebene dar:

i) $\zeta^5 = 1$: $\quad \zeta_0 = e^{\frac{0\cdot 2\pi}{5}i} = 1,\ \zeta_1 = e^{\frac{2\pi}{5}i},\ \zeta_2 = e^{\frac{4\pi}{5}i},\ \zeta_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i},\ \zeta_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i}$

ii) $z^6 = 1$: $\quad \zeta_0 = e^{\frac{0\cdot 2\pi}{6}i} = 1,\ \zeta_1 = e^{\frac{\pi}{3}i},\ \zeta_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i},\ \zeta_3 = e^{\pi i},\ \zeta_4 = e^{\frac{4\pi}{3}i},\ \zeta_5 = e^{\frac{5\pi}{3}i}$

iii) $z^8 = 1$: $\quad \zeta_0 = e^{\frac{0\cdot 2\pi}{8}i} = 1,\ \zeta_1 = e^{\frac{\pi}{4}i},\ \zeta_2 = e^{\frac{\pi}{2}i},\ \zeta_3 = e^{\frac{3\pi}{4}i},\ \zeta_4 = e^{\pi i},\ \zeta_5 = e^{\frac{5\pi}{4}i},$
$\zeta_6 = e^{\frac{3\pi}{2}i},\ \zeta_7 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$

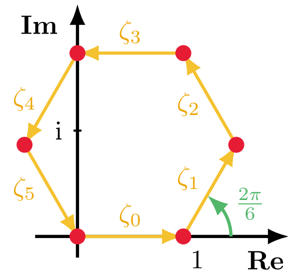


b) Betrachten Sie die n-ten Einheitswurzeln $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$:

i) Wie gross ist die Summe $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k$? Für jedes $n \in \mathbb{N}$ verschwindet die Summe aller n-ten Einheitswurzeln. Algebraisch folgt dies aus der Formel für endliche geometrische Reihen:

$$\zeta_0 + \zeta_1 + \ldots + \zeta_{n+1} \;=\; \zeta_1^0 + \zeta_1^1 + \ldots + \zeta_1^{n-1} \;=\; \frac{1-\zeta_1^n}{1-\zeta_1} \;=\; \frac{1-1}{1-\zeta_1} \;=\; 0$$

Geometrisch kann man dasselbe Ergebnis mit der vektoriellen Addition aller n-ten Einheitswurzeln einsehen, welche sich entlang eines regulären n-Ecks zum Nullvektor addieren (siehe Beispiel für $n = 6$ rechts).



ii) Wie gross ist das Produkt $\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k$? Das Produkt aller fünften Einheitswurzeln ist zum Beispiel:

$$\zeta_0 \cdot \zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_4 \;=\; 1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1\cdot 2\pi}{5}\mathrm{i}} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{\frac{4\cdot 2\pi}{5}\mathrm{i}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{(1+\ldots+4)\cdot 2\pi}{5}\mathrm{i}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{20\pi}{5}\mathrm{i}} \;=\; 1$$

Mit Hilfe der Summenformel $\Sigma_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ lässt sich dies auch für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ berechnen:

$$\zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_{n-1} = \mathrm{e}^{\frac{1\cdot 2\pi}{n}\mathrm{i}} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{(1+\ldots+(n-1))\cdot 2\pi}{n}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{2(n-1)n\pi}{2n}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{(n-1)\pi\mathrm{i}} = \begin{cases} -1, & \text{für gerades } n, \\ 1, & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

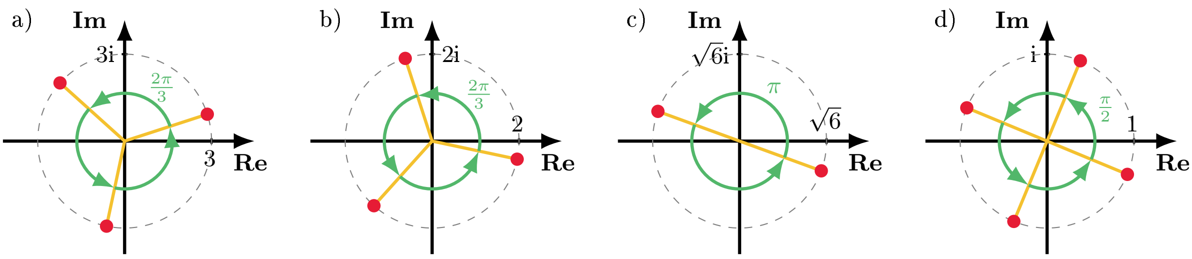
Aufgabe 4.2: Bestimmen Sie die Lösungen, und stellen Sie sie in der Zahlenebene dar:

a) $z^3 = 27\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{10}\mathrm{i}}$:
$z_1 = 3\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}} \approx 2.85 + 0.93\,\mathrm{i}$,
$z_2 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} = 3\,\mathrm{e}^{\frac{23\pi}{30}\mathrm{i}} \approx -2.23 + 2.01\,\mathrm{i}$,
$z_3 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}} = 3\,\mathrm{e}^{\frac{43\pi}{30}\mathrm{i}} \approx -0.62 - 2.93\,\mathrm{i}$

b) $z^3 = 8\,\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{5}\mathrm{i}}$:
$z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{5}\mathrm{i}} \approx -0.62 + 1.90\,\mathrm{i}$,
$z_2 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{19\pi}{15}\mathrm{i}} \approx -1.34 - 1.49\,\mathrm{i}$,
$z_3 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{29\pi}{15}\mathrm{i}} \approx 1.96 - 0.42\,\mathrm{i}$

c) $z^2 = 6\,\mathrm{e}^{\frac{16\pi}{9}\mathrm{i}}$:
$z_1 = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\frac{8\pi}{9}\mathrm{i}} \approx -2.30 + 0.84\,\mathrm{i}$,
$z_2 = -z_1 = \sqrt{6}\,\mathrm{e}^{\frac{17\pi}{9}\mathrm{i}} \approx 2.30 - 0.84\,\mathrm{i}$

d) $z^4 = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$:
$z_1 = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}} \approx 0.92 - 0.38\,\mathrm{i}$,
$z_2 = z_1 \cdot \mathrm{i} \approx 0.38 + 0.92\,\mathrm{i}$,
$z_3 = z_1 \cdot (-1) \approx -0.92 + 0.38\,\mathrm{i}$,
$z_4 = z_1 \cdot (-\mathrm{i}) \approx -0.38 - 0.92\,\mathrm{i}$



Aufgabe 4.3: Berechnen Sie die Lösungen. Runden Sie in Normalform auf drei Dezimalen:

a) $z^4 = 4 + 3\,\mathrm{i}$

$\Rightarrow\ z_1 = \sqrt[4]{|4{+}3\mathrm{i}|}\,\mathrm{e}^{\frac{\arg(4+3\mathrm{i})}{4}\mathrm{i}} \approx 1.476 + 0.240\,\mathrm{i}$

$z_2 = z_1 \cdot \mathrm{i} \approx -0.240 + 1.476\,\mathrm{i}$

$z_3 = z_2 \cdot \mathrm{i} \approx -1.476 - 0.240\,\mathrm{i}$

$z_4 = z_3 \cdot \mathrm{i} \approx 0.240 - 1.476\,\mathrm{i}$

b) $z^4 + 64 = 0 \iff z^4 = -64 = 64\,\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}}$

$\Rightarrow\ z_1 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = 2 + 2\,\mathrm{i}$

$z_2 = z_1 \cdot \mathrm{i} = -2 + 2\,\mathrm{i}$

$z_3 = z_2 \cdot \mathrm{i} = -2 - 2\,\mathrm{i}$

$z_4 = z_3 \cdot \mathrm{i} = 2 - 2\,\mathrm{i}$

c) $z^5 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$

$\Rightarrow\ z_1 = \sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{20}\mathrm{i}} \approx 1.059 + 0.168\,\mathrm{i}$

$z_2 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}\mathrm{i}} \approx 0.168 + 1.059\,\mathrm{i}$

$z_3 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}} \approx -0.955 - 0.487\,\mathrm{i}$

$z_4 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{6\pi}{5}\mathrm{i}} \approx -0.758 - 0.758\,\mathrm{i}$

$z_5 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{8\pi}{5}\mathrm{i}} \approx 0.487 - 0.955\,\mathrm{i}$

d) $z^6 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 1 \iff z^6 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$

$\Rightarrow\ z_1 = \sqrt[6]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{18}\mathrm{i}} \approx 1.105 + 0.195\,\mathrm{i}$

$z_2 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \approx 0.384 + 1.055\,\mathrm{i}$

$z_3 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \approx -0.722 + 0.860\,\mathrm{i}$

$z_4 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} \approx -1.105 - 0.195\,\mathrm{i}$

$z_5 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}} \approx -0.384 - 1.055\,\mathrm{i}$

$z_6 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}} \approx 0.722 - 0.860\,\mathrm{i}$

Aufgabe 4.4: Geben Sie die Lösungen in Exponentialform an:

a) $z^3 = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}}\right)^2 = 4\,\mathrm{e}^{\frac{8\pi}{5}\mathrm{i}} \implies z_1 = \sqrt[3]{4}\,\mathrm{e}^{\frac{8\pi}{15}\mathrm{i}},\quad z_2 = \sqrt[3]{4}\,\mathrm{e}^{\frac{6\pi}{5}\mathrm{i}},\quad z_3 = \sqrt[3]{4}\,\mathrm{e}^{\frac{28\pi}{15}\mathrm{i}}$

b) $z^6 = \left(\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^4 = e^{\pi\mathrm{i}} \implies z_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}},\quad z_2 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\quad z_3 = \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}},$
$z_4 = \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{i}},\quad z_5 = \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}},\quad z_6 = \mathrm{e}^{\frac{11\pi}{6}\mathrm{i}}$

c) $z^3 = \left(2\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^3 = 8\,\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}} \implies z_1 = 2\,\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}},\quad z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}},\quad z_3 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}$

d) $z^2 = \left(4\,\mathrm{e}^{-\frac{8\pi}{9}\mathrm{i}}\right)^3 = 64\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}} \implies z_1 = 8\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}},\quad z_2 = 8\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}$

Aufgabe 4.5: a) Die Gleichung $z^5 = a$ hat $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}}$ als Lösung. Geben Sie alle weiteren Lösungen in Exponentialform an.

Auch ohne den Radikanden a zu kennen, kann man die vier weiteren Lösungen $z_2, \ldots, z_5$ der gegebenen Potenzgleichung aus z_1 durch Multiplikation mit den vier nicht-trivialen fünften Einheitswurzeln $\zeta_1, \ldots, \zeta_4$ gewinnen:

$$z_2 = z_1 \cdot \zeta_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \qquad z_3 = z_1 \cdot \zeta_2 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{10}\mathrm{i}}$$

$$z_4 = z_1 \cdot \zeta_3 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{6\pi}{5}\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{13\pi}{10}\mathrm{i}} \qquad z_5 = z_1 \cdot \zeta_4 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{10}\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{8\pi}{5}\mathrm{i}} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{17\pi}{10}\mathrm{i}}$$

b) Die Gleichung $z^4 = b$ hat die Lösung $z_1 = 1 + \mathrm{i}$. Geben Sie alle weiteren Lösungen in Normalform an.

Wie bereits in a) kann man die drei weiteren Lösungen $z_2, \ldots, z_4$ der gegebenen Potenzgleichung aus z_1 gewinnen, ohne den Radikanden b zu kennen. Statt z_1 wie bei a) mit den drei nicht-trivialen vierten Einheitswurzeln $\zeta_1 = \mathrm{i}, \zeta_2 = -1, \zeta_3 = -\mathrm{i}$ zu multiplizieren, kann man auch z_1 wiederholt mit der Einheitswurzel $\zeta_1 = \mathrm{i}$ multiplizieren:

$$z_2 = z_1 \cdot \mathrm{i} = -1 + \mathrm{i} \qquad z_3 = z_2 \cdot \mathrm{i} = -1 - \mathrm{i} \qquad z_4 = z_3 \cdot \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$$

Aufgabe 4.6: Lösen Sie mit Hilfe einer Substitution:

a) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ b) $z^8 + 12z^4 - 64 = 0$

a) Substituiert man $s = z^3$, so reduziert sich die Gleichung zu $s^2 + 7s - 8 = 0$, wofür die quadratischen Lösungsformel zwei reelle Lösungen liefert:

$$s_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad s_2 = -8$$

Durch Auflösen der beiden Resubstitutionsgleichungen $z^3 = s_1$ und $z^3 = s_2$ erhält man mit Hilfe der dritten Einheitswurzeln $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ die insgesamt sechs Lösungen der gegebenen Gleichung in z:

$$\begin{array}{llll} z^3 = s_1 = 1 & \Longrightarrow & z_1 = \zeta_0 = 1, \quad z_2 = \zeta_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}, & z_3 = \zeta_2 = \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}} \\ z^3 = s_2 = -8 & \Longrightarrow & z_4 = -2, \quad z_5 = z_4 \cdot \zeta_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}}, & z_6 = z_4 \cdot \zeta_2 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{3}\mathrm{i}} \end{array}$$

b) Substituiert man $s = z^4$, so reduziert sich die Gleichung zu $s^2 + 12s - 64 = 0$, wofür die quadratischen Lösungsformel zwei reelle Lösungen liefert:

$$s_1 = 4 \qquad \text{und} \qquad s_2 = -16$$

Durch Auflösen der beiden Resubstitutionsgleichungen $z^4 = s_1$ und $z^4 = s_2$ erhält man mit Hilfe der vierten Einheitswurzel $\zeta_1 = \mathrm{i}$ die insgesamt acht Lösungen der gegebenen Gleichung in z:

$$\begin{array}{llll} z^4 = s_1 = 4 & \Longrightarrow & z_1 = \sqrt{2}, & z_2 = z_1 \cdot \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{i}, \\ & & z_3 = z_2 \cdot \mathrm{i} = -\sqrt{2}, & z_4 = z_3 \cdot \mathrm{i} = -\sqrt{2}\,\mathrm{i} \\ z^4 = s_2 = -16 & \Longrightarrow & z_5 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}, & z_6 = z_5 \cdot \mathrm{i} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}, \\ & & z_7 = z_6 \cdot \mathrm{i} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i} & z_8 = z_7 \cdot \mathrm{i} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i} \end{array}$$

Lösungen zu Kapitel 5

Aufgabe 5.1: Lösen Sie mit Hilfe der quadratischen Lösungsformel:

a) $z^2 - 2\mathrm{i}z - 10 = 0$ hat $w_{1/2} = \pm 6$ als Quadratwurzeln der Diskriminante $D = 36$, woraus folgt:

$$z_1 = \frac{1}{2}(2\mathrm{i} + 6) = 3 + \mathrm{i}, \qquad z_2 = \frac{1}{2}(2\mathrm{i} - 6) = -3 + \mathrm{i}$$

c) $(1+\mathrm{i})z^2 + 2z + 4 = 0$ hat $w_{1/2} = \pm(2 - 4\mathrm{i})$ als Quadratwurzeln von $D = -12 - 16\mathrm{i}$, woraus folgt:

$$z_1 = \frac{1}{2(1+\mathrm{i})}\big(-2 + (2 - 4\mathrm{i})\big) = -1 - \mathrm{i}, \qquad z_2 = \frac{1}{2(1+\mathrm{i})}\big(-2 - (2 - 4\mathrm{i})\big) = 2\,\mathrm{i}$$

b)+d) Analog zu a) und b) erhält man mit der quadratischen Lösungsformel:

b) $z^2 + 5\mathrm{i}z + 6 = 0$: $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -6\mathrm{i}$ d) $\mathrm{i}z^2 + (1 + 3\mathrm{i})\,z = 11 - 2\mathrm{i}$: $z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$, $z_2 = -4 + 3\mathrm{i}$

e) Um $z^6 + (1 - 8\,\mathrm{i})z^3 - 8\,\mathrm{i} = 0$ zu lösen, substituiert man zunächst $s := z^3$. Die resultierende quadratische Gleichung für s hat $w_{1/2} = \pm(1 + 8\mathrm{i})$ als Quadratwurzeln der Diskriminante $D = -63 + 16\mathrm{i}$. Damit folgt:

$$s_1 = \frac{1}{2}\big(-(1 - 8\mathrm{i}) + (1 + 8\mathrm{i})\big) = 8\,\mathrm{i}, \qquad s_2 = \frac{1}{2}\big(-(1 - 8\mathrm{i}) - (1 + 8\mathrm{i})\big) = -1$$

Aus der Resubstitutionsgleichung $z^3 = s_1 = 8\mathrm{i} = 8\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ erhält man die ersten drei Lösungen für z:

$$z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad z_3 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{9\pi}{6}\mathrm{i}} = -2\,\mathrm{i}$$

Aus der Resubstitutionsgleichung $z^3 = s_2 = -1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$ erhält man die drei übrigen Lösungen für z:

$$z_4 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}, \qquad z_5 = \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{3}\mathrm{i}} = -1, \qquad z_6 = \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\mathrm{i}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$$

f) $\mathrm{i}z^2 - (9+16\mathrm{i}) = -\frac{144}{z^2}$ lässt sich auf die biquadratische Form $\mathrm{i}z^4 - (9+16\mathrm{i})z^2 + 144 = 0$ bringen und analog zu e) mit Hilfe einer Substitution lösen:

$$z_1 = 4, \qquad z_2 = -4, \qquad z_3 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}, \qquad z_4 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}$$

Aufgabe 5.2: Berechnen Sie Quotientenpolynom und möglichen Rest durch Polynomdivision:

a) $(x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 17x + 5) : (x^3 + 3x - 1) \;=\; x^2 + 2x - 5$ mit Rest $-x^2$, denn:

$$
\begin{array}{l}
\big(x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 17x + 5\big) : \big(x^3 + 3x - 1\big) = x^2 + 2x - 5 + \dfrac{-x^2}{x^3 + 3x - 1} \\
\underline{-x^5 \qquad\quad - 3x^3 + x^2} \\
\qquad\quad 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 17x \\
\qquad\quad \underline{-2x^4 \qquad\quad - 6x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad\qquad - 5x^3 - x^2 - 15x + 5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{5x^3 \qquad\quad + 15x - 5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - x^2
\end{array}
$$

b) $(2x^4 + 10x^3 + 8x^2 + 10x + 6) : (x^2 + 5x + 3) \;=\; 2x^2 + 2$ ohne Rest, denn:

$$
\begin{array}{l}
\big(2x^4 + 10x^3 + 8x^2 + 10x + 6\big) : \big(x^2 + 5x + 3\big) = 2x^2 + 2 \\
\underline{-2x^4 - 10x^3 - 6x^2} \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2 + 10x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-2x^2 - 10x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

c) $\big((5-2\,\mathrm{i})z^2 + (14-5\,\mathrm{i})z - 3 + 3\,\mathrm{i}\big) : (\mathrm{i}z + 3\,\mathrm{i}) \;=\; -(2+5\,\mathrm{i})z + 1 + \mathrm{i}$ ohne Rest.

d) $(2\,\mathrm{i}z^2 - 6z - 3\,\mathrm{i}) : (z + \mathrm{i}) \;=\; 2\,\mathrm{i}z - 4$ mit Rest i.

Aufgabe 5.3: Zerlegen Sie in komplexe Linearfaktoren:

a) $p(z) = z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 + (7+2\,\mathrm{i})z - 1 - 5\,\mathrm{i}$ mit Nullstelle $z_1 = \mathrm{i}$:

Der zur gegebenen Nullstelle i gehörende Linearfaktor lässt sich durch Polynomdivision abspalten:

$$\big(z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 + (7+2\,\mathrm{i})z - 1 - 5\,\mathrm{i}\big) \;:\; (z - \mathrm{i}) \;=\; z^2 - (3-2\,\mathrm{i})z + (5-\mathrm{i})$$

Die weiteren Nullstellen von p erhält man durch die Nullstellen des Quotientenpolynoms $z^2-(3-2\mathrm{i})z+(5-\mathrm{i})$. Letztere ergeben sich mit Hilfe der Quadratwurzeln $w_{1/2} = \pm(1-4\mathrm{i})$ der Diskriminante $D = -15-8\mathrm{i}$ des Quotientenpolynoms aus der quadratischen Lösungsformel:

$$z_2 = \frac{1}{2}\Big((3-2\,\mathrm{i}) + (1-4\,\mathrm{i})\Big) = 2 - 3\,\mathrm{i} \qquad\qquad z_3 = \frac{1}{2}\Big((3-2\,\mathrm{i}) - (1-4\,\mathrm{i})\Big) = 1 + \mathrm{i}$$

Damit lässt sich p wie folgt in komplexe Linearfaktoren zerlegen:

$$p(z) \;=\; z^3 - (3-\mathrm{i})z^2 + (7+2\,\mathrm{i})z - 1 - 5\,\mathrm{i} \;=\; \Big(z - \mathrm{i}\Big)\Big(z - (1+\mathrm{i})\Big)\Big(z - (2-3\,\mathrm{i})\Big)$$

b) $q(z) = z^3 - 7\,\mathrm{i}z^2 - (25+28\,\mathrm{i})z - 48 - 21\,\mathrm{i}$ mit Nullstelle $z_1 = -3$:

Analog zu a) erhält man die folgende Faktorisierung von q:

$$q(z) \;=\; z^3 - 7\,\mathrm{i}z^2 - (25 + 28\,\mathrm{i})z - 48 - 21\,\mathrm{i} \;=\; \Big(z + 3\Big)\Big(z - (-2 + \mathrm{i})\Big)\Big(z - (5 + 6\,\mathrm{i})\Big)$$

c) $r(z) = z^4 + 2z^3 - 34z^2 + 2z - 35$ mit Nullstellen $z_1 = \mathrm{i},\; z_2 = 5:$
Das Polynom r ist reell und hat deshalb neben $z_1 = \mathrm{i}$ auch das konjugierte $z_3 = -\mathrm{i}$ als Nullstelle. Für die verbleibende Nullstelle z_4 von r gilt:

$$z^4 + 2z^3 - 34z^2 + 2z - 35 \;=\; (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})(z - 5)(z - z_4) \;=\; (z^3 - 5z^2 + z - 5)(z - z_4)$$

Einfacher als die ebenfalls mögliche Polynomdivision ist hier der direkte Vergleich der konstanten, von z unabhängigen Terme auf beiden Seite. Aus $-35 = (-5) \cdot (-z_4)$ folgt $z_4 = -7$, weshalb sich r wie folgt faktorisieren lässt:

$$r(z) \;=\; z^4 + 2z^3 - 34z^2 + 2z - 35 \;=\; \Big(z - \mathrm{i}\Big)\Big(z + \mathrm{i}\Big)\Big(z - 5\Big)\Big(z + 7\Big)$$

d) $s(z) = z^4 + z^3 + (3 - 8\mathrm{i})z^2 - (1 - 10\mathrm{i})z - 24 - 42\mathrm{i}$ mit Nullstellen $z_1 = -2\mathrm{i},\; z_2 = 3\mathrm{i}:$
Die durch die Nullstellen gegebenen Linearfaktoren lassen sich als Produkt $(z + 2\mathrm{i})(z - 3\mathrm{i}) = z^2 - \mathrm{i}z + 6$ simultan abspalten:

$$\Big(z^4 + z^3 + (3 - 8\,\mathrm{i})z^2 - (1 - 10\,\mathrm{i})z - 24 - 42\,\mathrm{i}\Big) \;:\; (z^2 - \,\mathrm{i}z + 6) \;=\; z^2 + (1 + \mathrm{i})z - (4 + 7\,\mathrm{i})$$

Analog zu a) erhält man die weiteren Linearfaktoren von s aus den beiden Nullstellen $z_3 = -(3 + 2\mathrm{i})$ und $z_4 = 2 + \mathrm{i}$ des Quotientenpolynoms. Damit lässt sich s wie folgt in komplexe Linearfaktoren zerlegen:

$$s(z) \;=\; z^4 + z^3 + (3 - 8\,\mathrm{i})z^2 - (1 - 10\,\mathrm{i})z - 24 - 42\,\mathrm{i} \;=\; \Big(z + 2\,\mathrm{i}\Big)\Big(z - 3\,\mathrm{i}\Big)\Big(z + (3 + 2\,\mathrm{i})\Big)\Big(z - (2 + \mathrm{i})\Big)$$

Aufgabe 5.4: Zerlegen Sie in reelle Faktoren möglichst kleinen Grades:

a) $p(z) = z^5 - 4z^4 + 10z^3 - 30z^2 + 9z + 54$ mit Nullstelle $z_1 = 3\mathrm{i}:$
Da p reell ist, hat es neben $z_1 = 3\mathrm{i}$ auch das konjugierte $z_2 = -3\mathrm{i}$ als Nullstelle. Damit lässt sich der reelle quadratische Faktor $(z - 3\mathrm{i})(z + 3\mathrm{i}) = z^2 + 9$ abspalten:

$$(z^5 - 4z^4 + 10z^3 - 30z^2 + 9z + 54) \;:\; (z^2 + 9) \;=\; z^3 - 4z^2 + z + 6$$

Die Nullstellen dieses reellen kubischen Quotientenpolynoms, das heisst als verbleibende Nullstellen von p, können nun mit dem Taschenrechner berechnet werden. Man erhält so $z_3 = -1$, $z_4 = 2$ und $z_5 = 3$, weshalb p reell wie folgt faktorisiert werden kann:

$$p(z) \;=\; z^5 - 4z^4 + 10z^3 - 30z^2 + 9z + 54 \;=\; (z^2 + 9)(z + 1)(z - 2)(z - 3)$$

b) $q(z) = z^4 + z^3 + 47z^2 + 49z - 98$ mit Nullstelle $z_1 = -7\mathrm{i}:$
Mit $z_1 = -7\mathrm{i}$ ist auch das konjugierte $z_2 = 7\mathrm{i}$ eine Nullstelle, weshalb sich der reelle quadratische Faktor $(z + 7\mathrm{i})(z - 7\mathrm{i}) = z^2 + 49$ von q abspalten lässt:

$$(z^4 + z^3 + 47z^2 + 49z - 98) \;:\; (z^2 + 49) \;=\; z^2 + z - 2$$

Die übrigen Nullstellen sind deshalb $z_3 = -2$ und $z_4 = 1$. Als reelle Faktorisierung von q ergibt sich so:

$$q(z) \;=\; z^4 + z^3 + 47z^2 + 49z - 98 \;=\; (z^2 + 49)(z + 2)(z - 1)$$

c) $r(z) = z^5 - z^4 - 12z^3 + 60z^2 - 125z + 125$ mit Nullstellen $z_1 = 2 + \mathrm{i},\; z_2 = 1 + 2\mathrm{i}:$
Mit $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ und $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ sind auch die jeweils konjugierten $z_3 = 2 - \mathrm{i}$ und $z_4 = 1 - 2\mathrm{i}$ Nullstellen, weshalb sich der Faktor $(z^2 - 4z + 5)(z^2 - 2z + 5) = z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25$ von r abspalten lässt. Aus einem Vergleich der konstanten Terme auf beiden Seiten der Gleichung

$$(z^5 - z^4 - 12z^3 + 60z^2 - 125z + 125) \;=\; (z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25) \cdot (z - z_5)$$

folgt $125 = 25 \cdot (-z_5)$ und damit $z_5 = -5$. Die reelle Faktorisierung von r lautet daher:

$$r(z) \;=\; z^4 + z^3 + 47z^2 + 49z - 98 \;=\; (z^2 - 4z + 5)(z^2 - 2z + 5)(z + 5)$$

Aufgabe 5.5: Das reelle Polynom $z^4 + 4z^2 + a_1\, z + a_0$ hat die Nullstelle $z_1 = 2 - \mathrm{i}$. Bestimmen Sie die unbekannten Koeffizienten a_0 und a_1.

Das Polynom ist reell. Mit der gegebenen Nullstelle $z_1 = 2 - \mathrm{i}$ ist deshalb auch das konjugierte $\overline{z}_1 = 2 + \mathrm{i}$ eine Nullstelle, so dass man den Faktor $\big(z - (2 - \mathrm{i})\big)\big(z - (2 + \mathrm{i})\big) = z^2 - 4z + 5$ ohne Rest abspalten können muss. Polynomdivision ergibt:

$$(z^4 + 4z^2 + a_1 z + a_0) \;:\; (z^2 - 4z + 5) \;=\; z^2 + 4z + 15 \quad \text{mit dem Rest} \quad (a_1 + 40)z + (a_0 - 75)$$

Das Restpolynom verschwindet genau für $a_1 = -40$ und $a_0 = 75$.

Aufgabe 5.6: Beweisen oder widerlegen Sie: Ein reelles Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Beweis: Ein Polynom von ungeradem Grad lässt sich gemäss Satz 5.9 in eine ungerade Anzahl komplexer Linearfaktoren zerlegen. Ist das Polynom reell, dann treten dabei gemäss Satz 5.15 die Linearfaktoren nicht-reeller Nullstellen stets paarweise auf. Damit bleibt mindestens ein Linearfaktor übrig, der zu einer reellen Nullstelle gehören muss.

Aufgabe 5.7*: Betrachten Sie die komplexe Polynomabbildung $p(z) = z^2 + z - 2\mathrm{i}$.

a) Betrachten Sie einen Ursprungskreis k_r^z vom Radius r in der z-Ebene. Bestimmen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung einen Radius r so, dass das Bild $f(k_r^z)$ in der w-Ebene vollständig innerhalb des Kreises k vom Radius 1 um den Mittelpunkt $-2\mathrm{i}$ liegt.

Sobald $r = |z|$ hinreichend klein ist, dominiert die Konstante in p die Summe der übrigen Monome. Für $|z| < \frac{1}{2}$ folgt zum Beispiel aus der Dreicksungleichung bei $(*)$ für den Abstand zwischen $p(z)$ und $-2\mathrm{i}$:

$$\big|\, p(z) - (-2\mathrm{i}) \,\big| \;=\; |z^2 + z| \;\overset{(*)}{\leq}\; |z^2| + |z| \;=\; |z|^2 + |z| \;<\; \tfrac{3}{4} \;<\; 1$$

b) Betrachten Sie einen Ursprungskreis k_R^z vom Radius R in der z-Ebene. Bestimmen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung den Radius R so, dass das Bild $f(k_R^z)$ in der w-Ebene vollständig ausserhalb des Ursprungskreises k_3^w liegt.

Sobald $R = |z|$ hinreichend gross ist, dominiert die höchste Potenz in p die Summe der übrigen Monome. Für $|z| > 3$ folgt zum Beispiel aus der bei $(*)$ eingesetzen Dreiecksungleichung:

$$|z^2| \;=\; |z|^2 \;>\; 3 \cdot |z| \;>\; |z| + 2 + 3 \;=\; |z| + |-2\mathrm{i}| + 3 \;\overset{(*)}{\geq}\; |z - 2\mathrm{i}| + 3$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung bei $(*)$ erhält man damit die folgende untere Abschätzung für $|p(z)|$:

$$|p(z)| \;=\; |z^2 + z - 2\mathrm{i}| \;\overset{(*)}{\geq}\; \Big|\, |z^2| - |z - 2\mathrm{i}| \,\Big| \;\geq\; |z^2| - |z - 2\mathrm{i}| \;\geq\; 3$$

Für jeden Radius $R = |z| > 3$ liegt das Bild $f(k_R^z)$ damit ausserhalb von k_3^w.

c) Geben Sie an, wie oft sich ein in der w-Ebene von 0 zum Bildpunkt $f(z)$ weisender Vektor $\vec{v}(z)$ um sich selbst dreht, wenn der Urbildpunkt z den Kreis k_R^z genau einmal durchläuft. Auf wie viele solche Drehungen kommen Sie, wenn der Urbildpunkt z stattdessen den Kreis k_r^z genau einmal durchläuft?

Das Bild des Ursprungskreises k_R^z windet sich in der w-Ebene zweimal um den Ursprung – entsprechend der höchsten Potenz 2 von p. Damit dreht sich der Vektor $\vec{v}(z)$ zweimal um sich selbst, wenn z den grossen Kreis k_R^z einmal durchläuft. Wenn z dagegen den kleinen Kreis k_r^z einmal durchläuft, dann dreht sich $\vec{v}(z)$ keinmal um sich selbst. Denn die Spitze $f(z)$ von $\vec{v}(z)$ befindet durchwegs in einer kleinen Umgebung von $-2\mathrm{i}$ – ohne den Ursprung der w-Ebene überhaupt einmal zu umlaufen.

Aufgabe 5.8*: Betrachten Sie die Polynomabbildung $p(z) = 5\mathrm{i}z^{13} - (3 + 4\mathrm{i})z^{12} + 10z^3 - 2\mathrm{i}$. Bestimmen Sie analog zu A5.7* Radien R und r für Ursprungskreise k_R^z und k_r^z in der z-Ebene.

Sobald $r = |z|$ hinreichend klein ist, dominiert die Konstante in p die Summe der übrigen Monome. Für $|z| < \frac{1}{4}$ folgt zum Beispiel aus der Dreicksungleichung bei $(*)$ für den Abstand zwischen $p(z)$ und $-2\mathrm{i}$:

$$\begin{aligned}\big|\, p(z)-(-2\mathrm{i})\,\big| \;&=\; \big|5\mathrm{i}z^{13}-(3+4\mathrm{i})z^{12}+10z^3\big| \;\overset{(*)}{\leq}\; \big|5\mathrm{i}z^{13}\big|+\big|-(3+4\mathrm{i})z^{12}\big|+\big|10z^3\big|\\ &=\; |5\mathrm{i}|\,|z|^{13}+|-(3+4\mathrm{i})|\,|z|^{12}+10|z|^3 \;=\; 5|z|^{13}+5|z|^{12}+10|z|^3 \;<\; \tfrac{5}{4^{13}}+\tfrac{5}{4^{12}}+\tfrac{10}{4^3} \;<\; 1\end{aligned}$$

Sobald $R=|z|$ hinreichend gross ist, dominiert die höchste Potenz in p die Summe der übrigen Monome. Für $|z|>4$ folgt zum Beispiel aus der bei $(*)$ eingesetzen Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\big|5\mathrm{i}z^{13}\big| \;&=\; 5|z|^{13} \;>\; 20|z|^{12} \;>\; 5|z|^{12}+10|z|^3+5 \;>\; \big|-(3+4\mathrm{i})z^{12}\big|+\big|10z^3\big|+\big|-2\mathrm{i}\big|+3\\ &\overset{(*)}{\geq}\; \big|-(3+4\mathrm{i})z^{12}+10z^3-2\mathrm{i}\big|+3\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung bei $(*)$ erhält man damit die folgende untere Abschätzung für $|p(z)|$:

$$|p(z)| \;=\; \big|5\mathrm{i}z^{13}-(3+4\mathrm{i})z^{12}+10z^3-2\mathrm{i}\big| \;\overset{(*)}{\geq}\; \Big|\big|5\mathrm{i}z^{13}\big|-\big|-(3+4\mathrm{i})z^{12}+10z^3-2\mathrm{i}\big|\Big| \;>\; 3$$

Für jeden Radius $R=|z|>3$ liegt das Bild $f(k_R^z)$ damit ausserhalb von k_3^w.

Lösungen zu Kapitel 6*

Aufgabe 6.1: Addieren Sie die gleichfrequenten Grössen mit Hilfe ihrer Zeiger. Geben Sie dabei Ihre Ergebnisse nötigenfalls auf zwei Dezimalen gerundet an.

a) $A(t)=2\cos\big(\pi t-\frac{\pi}{6}\big)$, $B(t)=\sqrt{12}\cos\big(\pi t+\frac{\pi}{3}\big)$:
$\vec{A}=2\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$, $\vec{B}=\sqrt{12}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ $\implies$ $\overrightarrow{A+B}=4\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}$ $\implies$ $(A+B)(t)=4\cos\big(\pi t+\frac{\pi}{6}\big)$

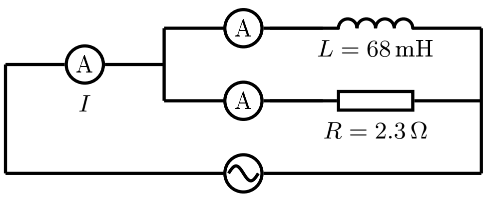
b) $A(t)=4\cos(4\pi t)$, $B(t)=3\sin(4\pi t)$:
$\vec{A}=4\,\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}}$, $\vec{B}=3\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ $\implies$ $\overrightarrow{A+B}\approx 5\,\mathrm{e}^{-0.64\mathrm{i}}$ $\implies$ $(A+B)(t)\approx 5\cos\big(4\pi t-0.64\big)$

c) $A_1(t)=2\cos\big(t-\frac{\pi}{4}\big)$, $A_2(t)=2\cos\big(t+\frac{\pi}{4}\big)$:
$\vec{A}_1=2\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$, $\vec{A}_2=2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ $\implies$ $\overrightarrow{A_1+A_2}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}}$ $\implies$ $(A_1+A_2)(t)=2\sqrt{2}\cos(t)$

d) $I_1(t)=2\sin(2t)$, $I_2(t)=\cos(2t-1)$:
$\vec{I}_1=2\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$, $\vec{I}_2=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}$ $\implies$ $\overrightarrow{I_1+I_2}\approx 2.89\,\mathrm{e}^{-1.38\mathrm{i}}$ $\implies$ $(I_1+I_2)(t)\approx 2.89\cos(2t-1.38)$

e) $U_1(t)=2\cos\big(2\pi t\big)$, $U_2(t)=2\cos\big(2\pi t+\frac{2\pi}{3}\big)$, $U_3(t)=2\cos\big(2\pi t+\frac{4\pi}{3}\big)$:
$\vec{U}_1=2\,\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}}$, $\vec{U}_2=2\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$, $\vec{U}_3=2\,\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}$ $\implies$ $\overrightarrow{U_1+U_2+U_3}=0$ $\implies$ $(U_1+U_2+U_3)(t)=0$

Aufgabe 6.2: In einem Stromkreis sind ein Ohm'scher Widerstand $R=2.3\,\Omega$ und eine Spule der Induktivität $L=68\,\mathrm{mH}$ parallel geschaltet. Am Stromkreis liegt Wechselstrom mit der maximalen Spannung $\hat{U}=4.5\,\mathrm{V}$ und der Frequenz $f=3\,\mathrm{Hz}$ an.



a) Berechnen Sie mit Hilfe des Zeigers $\vec{U}$ der Spannung die Zeiger $\vec{I}_R$ und $\vec{I}_L$ der Teilstromstärken.
Die Spannung oszilliert mit der Amplitude $\hat{U}=4.5\,\mathrm{V}$. Ausgehend von einem verschwindenden Nulldurchgangswinkel erhält man also $\vec{U}=4.5\,\mathrm{V}$ als Zeiger der Spannung. Mit dem Ohm'schen Gesetz lassen sich damit die Zeiger der Teilstromstärken berechnen:

$$\vec{I}_R \;=\; \frac{\vec{U}}{Z_R} \;=\; \frac{4.5\,\mathrm{V}}{2.3\,\Omega} \;\approx\; 2.0\,\mathrm{A}, \qquad \vec{I}_L \;=\; \frac{\vec{U}}{Z_L} \;=\; \frac{4.5\,\mathrm{V}}{\mathrm{i}\cdot 6\pi\,\mathrm{Hz}\cdot 68\,\mathrm{mH}} \;\approx\; \frac{4.5\,\mathrm{V}}{1.3\,\mathrm{i}\,\Omega} \;\approx\; -3.5\,\mathrm{i}\,\mathrm{A}$$

b) Bestimmen Sie den Zeiger $\vec{I}$ der gesamten Stromstärke. Welche Impedanz Z hat der Stromkreis? Wie gross ist sein Blindwiderstand? Geben Sie die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom an.

Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Zeiger der Teilstromstärken aus a) zum Zeiger $\vec{I}$ der gesamten Stromstärke:

$$\vec{I} \;=\; \vec{I}_R + \vec{I}_L \;=\; 2.0\,\mathrm{A} - 3.5\,\mathrm{i}\,\mathrm{A} \;\approx 4.0\,\mathrm{e}^{-1.1\,\mathrm{i}}\,\mathrm{A}$$

Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Reziprokwerte der Teilimpedanzen zum Reziprokwert der Impedanz Z des gesamten Stromkreises:

$$Z \;=\; \frac{1}{\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}} \;=\; \frac{1}{\frac{1}{2.3\,\Omega} + \frac{1}{\mathrm{i}\cdot 6\pi\,\mathrm{Hz}\cdot 68\,\mathrm{mH}}} \;\approx\; \frac{1}{\frac{1}{2.3\,\Omega} + \frac{1}{1.3\,\mathrm{i}\,\Omega}} \;\approx\; 0.56\,\Omega + 0.99\,\mathrm{i}\,\Omega \approx 1.13\,\mathrm{e}^{1.1\,\mathrm{i}}$$

Alternativ kann man die Impedanz Z gemäss dem Ohm'schen Gesetz aus den Zeigern $\vec{U}$ und $\vec{I}$ berechnen:

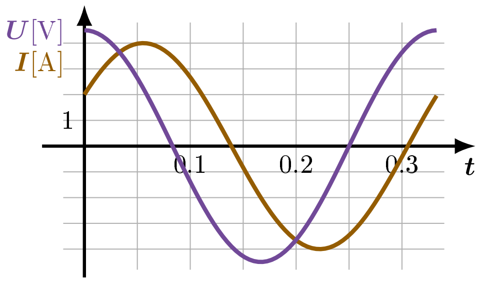
$$Z \;=\; \frac{\vec{U}}{\vec{I}} \;\approx\; \frac{4.5\,\mathrm{V}}{4.0\,\mathrm{e}^{-1.1\,\mathrm{i}}\,\mathrm{A}} \;\approx\; 1.13\,\mathrm{e}^{1.1\,\mathrm{i}}\,\Omega \;\approx\; 0.56\,\Omega + 0.99\,\mathrm{i}\,\Omega$$

Als Imaginärteil dieser Impedanz Z erhält man hieraus den Blindwiderstand $X = 0.99\,\Omega$. Ein Vergleich der Argumente $\arg(\vec{U}) = 0$ und $\arg(\vec{I}) \approx -\frac{\pi}{3}$ zeigt, dass die Spannung dem Strom um etwa $\frac{\pi}{3}$ vorausläuft. Diese Phasenverschiebung entspricht gemäss dem Ohm'schen Gesetz gerade dem Argument der Impedanz Z (vgl. A6.3*).

c) Stellen Sie in einem Diagramm den zeitlichen Verlauf der Spannung $U(t)$ und der Stromstärke $I(t)$ über eine Periodendauer dar.

Aus der Frequenz $f = 3\,\mathrm{Hz}$ ergibt sich die Periodendauer $T = \frac{1}{f} \approx 0.33\,\mathrm{s}$. Aus den Zeigern $\vec{U}$ und $\vec{I}$ erhält man in Kombination mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 6\pi\,\mathrm{Hz}$:

$$U(t) = 4.5\,\cos(6\pi t), \qquad I(t) \approx 4.0\,\cos\!\left(6\pi t - \tfrac{\pi}{3}\right)$$

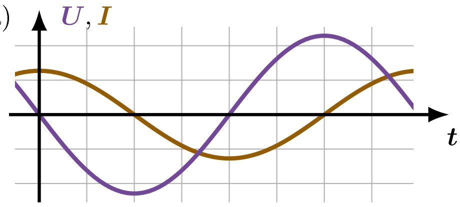


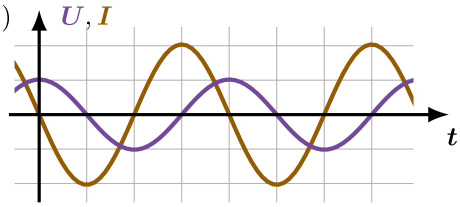
d) Der Parallelschaltung wird seriell ein Kondensator der Kapazität C vorgeschaltet, um den Blindwiderstand des gesamten Stromkreises zu kompensieren. Wie gross ist C zu wählen?

Damit der seriell vorgeschaltete Kondensator den in b) berechneten Blindwiderstand X kompensiert, muss für seinen rein imaginären kapazitiven Widerstand gelten:

$$Z_C + \mathrm{i}\,X \overset{!}{=} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega\,C} \overset{!}{\approx} -0.99\,\mathrm{i}\,\Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad C \approx \frac{1}{0.99\,\Omega\cdot 3\,\mathrm{Hz}} \approx 340\,\mathrm{mF}$$

Aufgabe 6.3*: Die Diagramme zeigen die Spannung und die Stromstärke an einem Wechselstromkreis aus zwei seriell geschalteten linearen Widerständen. Überlegen Sie anhand der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, um welche Arten von linearen Widerständen es sich dabei handelt.

a)


b)


Wie lauten die entsprechenden Antworten, wenn die zwei linearen Widerstände im Wechselstromkreis parallel geschaltet sind?

a) Das Diagramm zeigt, dass die Spannung dem Strom um $\frac{1}{4}$ der Periodendauer T vorausläuft. Dies entspricht einer Phasenverschiebung von $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ vom Strom zur Spannung. Aus dem Ohm'schen Gesetz folgt damit für die Impedanz Z des gesamten Stromkreises:

$$\arg(Z) = \arg(\vec{U}) - \arg(\vec{I}) = \frac{\pi}{2}$$

Also ist Z imaginär mit $\mathrm{Im}\,(Z) > 0$. Besteht der Stromkreis a) aus zwei seriell geschalteten linearen Widerständen Z_1 und Z_2, so folgt damit:

- Wegen $\mathrm{Re}\,(Z) = \mathrm{Re}\,(Z_1) + \mathrm{Re}\,(Z_2) = 0$ kann weder Z_1 noch Z_2 ein Ohm'scher Widerstand sein. Denn wäre zum Beispiel Z_1 ein Ohm'scher Widerstand, dann liesse sich $\mathrm{Re}\,(Z_1) > 0$ nicht durch $\mathrm{Re}\,(Z_2) \geq 0$ annullieren.
- Wegen $\mathrm{Im}\,(Z) = \mathrm{Im}\,(Z_1) + \mathrm{Im}\,(Z_2) > 0$ ist wenigstens Z_1 oder Z_2 ein induktiver Widerstand. Denn für zwei seriell geschaltete kapazitiven Widerstände gilt:

$$\mathrm{Im}\,(Z) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C_1} + \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C_2}\right) = -\frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2} \;<\; 0$$

- Falls dieser induktive Widerstand seriell mit einem kapazitiven geschaltet ist, muss gelten:

$$\mathrm{Im}\,(Z) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\,\omega L + \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C}\right) = \omega L - \frac{1}{\omega C} \;>\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad L \cdot C \;>\; \frac{1}{\omega^2}$$

Bei parallel geschalteten Widerständen ist mit den Kehrwerten der Impedanzen zu rechnen. So ist zum Beispiel $\mathrm{Re}\,(Z) = 0$ und $\mathrm{Im}\,(Z) > 0$ äquivalent zu $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = 0$ und $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z}\right) < 0$. Besteht der Stromkreis a) aus zwei parallel geschalteten linearen Widerständen Z_1 und Z_2, so folgt damit:

- Wegen $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_1}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_2}\right) = 0$ kann weder Z_1 noch Z_2 ein Ohm'scher Widerstand sein. Denn wäre zum Beispiel Z_1 ein Ohm'scher Widerstand, dann liesse sich $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_1}\right) > 0$ nicht durch $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_2}\right) \geq 0$ annullieren.
- Wegen $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z_1}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z_2}\right) < 0$ ist wenigstens Z_1 oder Z_2 ein induktiver Widerstand. Denn für zwei parallel geschaltete kapazitive Widerstände gilt:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1/(\mathrm{i}\,\omega C_1)} + \frac{1}{1/(\mathrm{i}\,\omega C_2)}\right) = \omega C_1 + \omega C_2 \;>\; 0$$

- Falls dieser induktive Widerstand parallel mit einem kapazitiven geschaltet ist, muss gelten:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega L} + \frac{1}{1/(\mathrm{i}\,\omega C)}\right) = -\frac{1}{\omega L} + \omega C \;<\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad L \cdot C \;<\; \frac{1}{\omega^2}$$

b) Das Diagramm zeigt, dass die Spannung dem Strom um $\frac{1}{4}$ der Periodendauer T nachläuft. Dies entspricht einer Phasenverschiebung von $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ von der Spannung zum Strom. Aus dem Ohm'schen Gesetz folgt damit für die Impedanz Z des gesamten Stromkreises:

$$\arg(Z) = \arg(\vec{U}) - \arg(\vec{I}) = -\frac{\pi}{2}$$

Also ist Z imaginär mit $\mathrm{Im}\,(Z) < 0$. Besteht der Stromkreis b) aus zwei seriell geschalteten linearen Widerständen Z_1 und Z_2, so folgt damit analog zu den Überlegungen in a):

- Weder Z_1 noch Z_2 kann ein Ohm'scher Widerstand sein.
- Wenigstens Z_1 oder Z_2 ist ein kapazitiver Widerstand.

- Falls dieser kapazitive Widerstand seriell mit einem induktiven geschaltet ist, muss gelten:

$$\mathrm{Im}\,(Z) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega C} + \mathrm{i}\,\omega L +\right) = -\frac{1}{\omega C} + \omega L \ < \ 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad L \cdot C \ < \ \frac{1}{\omega^2}$$

Besteht der Stromkreis b) aus zwei parallel geschalteten linearen Widerständen Z_1 und Z_2, so folgt damit analog zu a):

- Weder Z_1 noch Z_2 kann ein Ohm'scher Widerstand sein.
- Wenigstens Z_1 oder Z_2 ist ein kapazitiver Widerstand.
- Falls dieser kapazitive Widerstand parallel mit einem induktiven geschaltet ist, muss gelten:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{Z}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1/(\mathrm{i}\,\omega C)} + \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega L}\right) = \omega C - \frac{1}{\omega L} \ > \ 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad L \cdot C \ > \ \frac{1}{\omega^2}$$

Index