ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mentorierte Arbeit in Fachwissenschaftlicher Vertiefung mit pädagogischem Fokus in Mathematik

Lohse-Quadrate und Lohse-Gruppen

Dr. Roland Lötscher

Inhalt
Ziel dieser Arbeit ist das Studium von Lohse-Quadraten und Lohse-Gruppen, sowie die Herleitung der Klassifikation letzterer. Das Thema liegt im Bereich der Theorie endlicher Gruppen. Lohse-Quadrate sind spezielle lateinische Quadrate. Sie sind nach dem Künstler Richard P. Lohse benannt, der sie in einigen Gemälden bildlich umgesetzt hat. Lohse-Gruppen sind endliche Gruppen, deren Cayley-Tafeln Lohse-Quadrate sind. Sie bilden eine reiche Quelle für die Erzeugung von Lohse-Quadraten. Das Thema weist Bezüge zur Graphentheorie auf, insbesondere zu Hamiltonschen Wegen. Nebst dem theoretischen Studium werden Lohse-Gruppen in dieser Arbeit auch bildlich umgesetzt.

Zielpublikum
Lehrpersonen

Voraussetzungen
Grundkenntnisse in Algebra. Insbesondere sollte der Gruppenbegriff vertraut sein.

Form
Lesetext mit vorgelösten Aufgaben

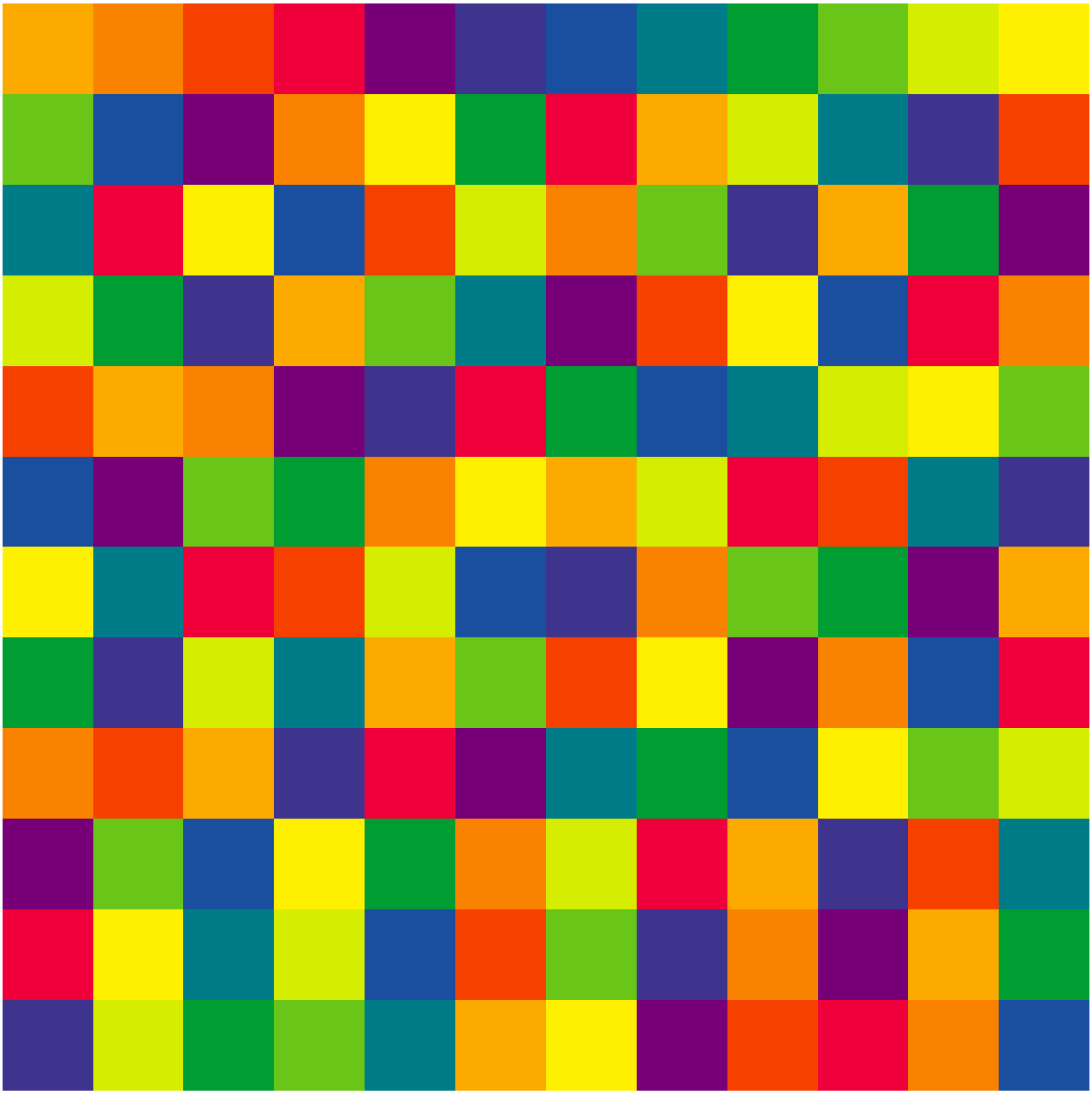
Betreuung
Prof. Martin Huber

Datum
4. September 2016

Lohse-Quadrate und Lohse-Gruppen

Dr. Roland Lötscher

4. September 2016



Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Besuch im Kunsthaus **2**

3 Lohse-Quadrate von Gruppen **5**

4 Umformulierung des Problems **7**

5 Hamiltonsche Wege **11**

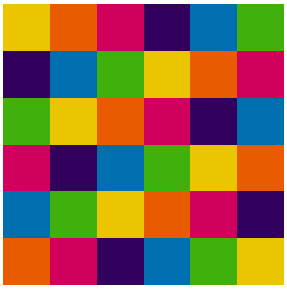
6 Reduktion der Anzahl benötigter Aufzählungen **15**

7 Ausblick auf die Klassifikation **19**

8 Reflexion über den Bezug zum gymnasialen Unterricht **21**

9 Musterlösungen **22**

1 Einleitung

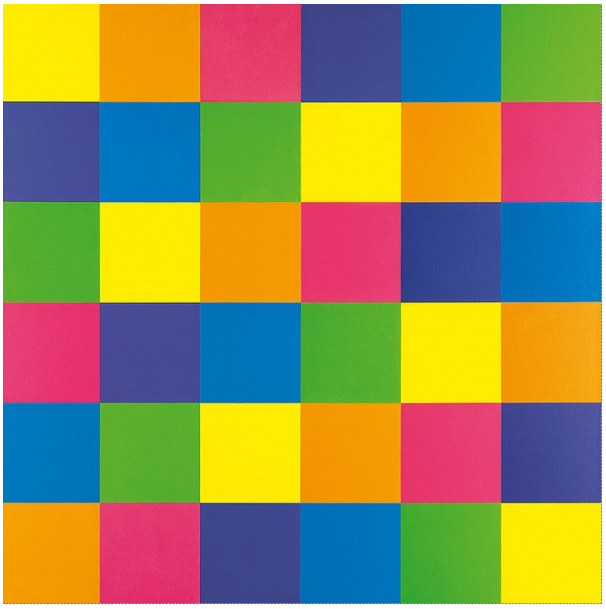


In dieser Arbeit werden lateinische Quadrate mit der sogenannten Lohse-Eigenschaft untersucht und bildlich umgesetzt. Ein Beispiel dafür finden Sie im Farbquadrat gegenüber. Dass es sich um ein lateinisches Quadrat handelt, liegt daran, dass in jeder Zeile und Spalte jede Farbe genau einmal vorkommt. Worin die Lohse-Eigenschaft begründet liegt, werden Sie gleich selber herausfinden.

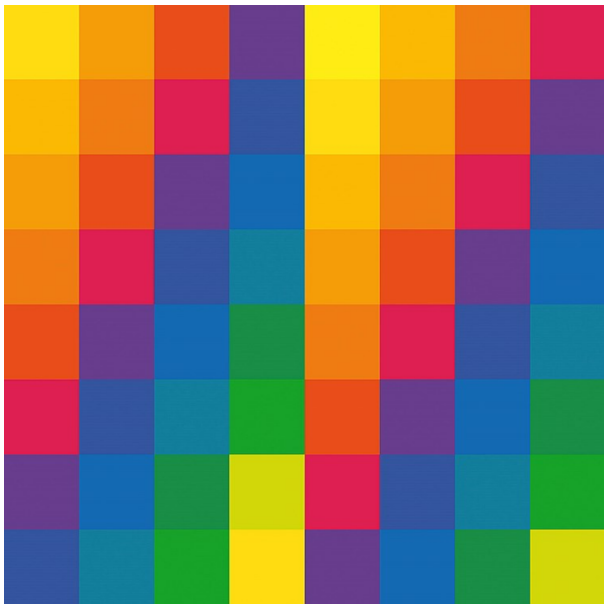
Das Thema steht im Bezug zur Gruppentheorie. Nämlich ist die Gruppentafel einer endlichen Gruppe ein lateinisches Quadrat. Wir können danach fragen, wann sie die Lohse-Eigenschaft hat. Der Text eignet sich daher auch zur Repetition und Vertiefung einiger gruppentheoretischen Konzepte. Ausserdem spielen Graphen eine wichtige Rolle. Um Ihnen, werter Leser, die Lektüre spannend zu gestalten, wird der Text in eine fikitive Umgebung versetzt, in welcher Dialoge mit Herrn Richard P. Lohse, dem Künstler und Erfinder der Lohse-Eigenschaft, sowie die Wünsche seiner Kunden eine tragende Rolle spielen. Sie sind als Lohses Assistent dabei und kümmern sich um mathematische Belange. Dadurch erhalten Sie einige mathematische Aufträge, die Ihnen bei der Erarbeitung des Themas behilflich sein sollen. Die mathematischen Resultate in dieser Arbeit beruhen hauptsächlich auf der Arbeit [Me06]. In der Beweisführung verwenden wir einige Abkürzungen. Diese werden durch neuere graphentheoretische Resultate in [PR09] und [KMMMS12] ermöglicht. Damit ist alles Wesentliche zur Form dieses Textes gesagt. Vorhang auf!

2 Besuch im Kunsthaus

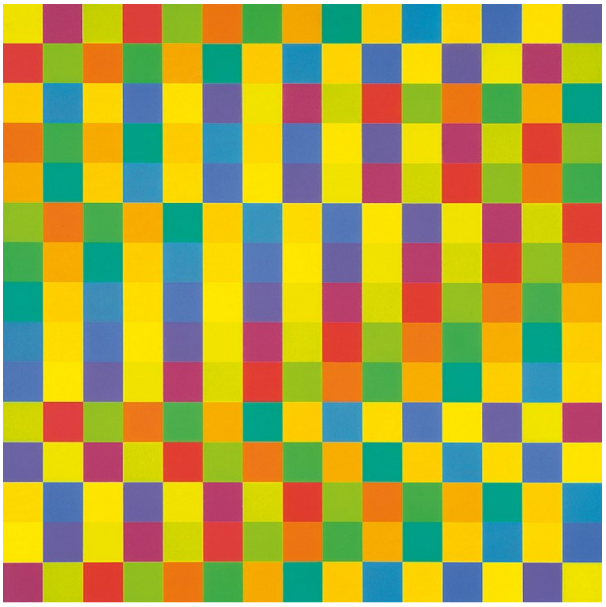
Sie, werter mathematisch-bewanderter Leser, haben sich heute ins Kunsthaus Zürich begeben. Dabei treffen Sie auf eine Reihe von Gemälden, die Ihr Interesse speziell weckt. Sie sind hier wiedergegeben (siehe auch [Lo76, Lo69a, Lo69b, Lo70]):



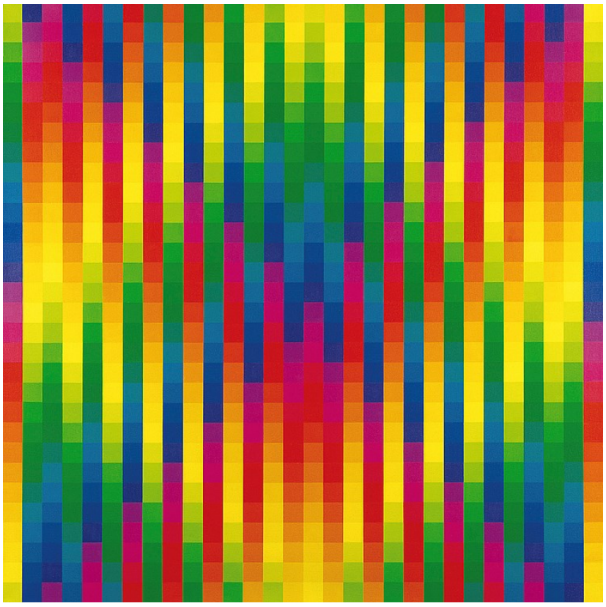
Komplementäre Gruppen durch sechs horizontale systematische Farbreihen 1950/1976/2



Acht vertikale systematische Farbreihen 1955/1969



15 ineinandergehende systematische Farbreihen in drei horizontalen Gruppen 1943/1969/1



Dreissig vertikale systematische Farbreihen in gelber Rautenform 1943/1970

Sie fühlen sich sofort an lateinische Quadrate erinnert. Diese haben Sie bestimmt in Ihrem Mathematik-Studium, z.B. in der Gruppentheorie kennengelernt.

Definition 2.1. Ein *lateinisches Quadrat* über einer endlichen Menge F mit n Elementen ist eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit Einträgen a_{ij} in F, so dass in jeder Zeile und Spalte von A jedes Element von F genau einmal vorkommt. Die Zahl n heisst dabei die *Ordnung* von A.

Das erste Gemälde ("Komplementäre Gruppen durch sechs horizontale systematische Farbreihen 1950/1976/2") ist offensichtlich ein lateinisches Quadrat über der Menge

$$F = \{\text{gelb}, \text{orange}, \text{rot}, \text{violett}, \text{blau}, \text{grün}\}.$$

Es ist von Ordnung 6. Die sechs Farben treten in allen Zeilen in der gleichen Reihenfolge, nur zyklisch verschoben, auf. Bei den Spalten ist dies nicht der Fall, da z.B. violett in den ersten drei Reihen direkt nach gelb auftritt, in den letzten drei Reihen hingegen nicht. Das ist wohl der Grund, warum in der Beschriftung des Gemäldes von sechs *horizontalen* (und nicht *vertikalen*) Farbreihen die Rede ist.

Aufgabe 2.1. (a) Schauen Sie sich auch die andern drei Gemälde genau an. Handelt es bei allen um lateinische Quadrate? Was ist die Ordnung der latinischen Quadrate?

(b) Haben Sie eine Vermutung, wie die Gemälde konstruiert worden sind? Wenn ja, formulieren Sie sie!

(c) Betrachten Sie in allen vier Gemälden jeweils diagonal angrenzende Farbfelder. Fällt Ihnen was auf?

Motiviert durch die Betrachtung der obigen Gemälde definieren wir die Lohse-Eigenschaft:

Definition 2.2. Ein lateinisches Quadrat $A = (a_{ij})$ der Ordnung n hat die *Lohse-Eigenschaft*, falls jeweils diagonal angrenzende Felder verschiedene Farben haben, d.h.

$$a_{ij} \neq a_{i+1,j+1} \text{ und } a_{i+1,j} \neq a_{i,j+1}, \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n-1.$$

Wir haben in den obigen Farbquadraten Lohse-Quadrate der Ordnung 6, 15 und 30. Es stellt sich sogleich die Frage, welche Ordnung Lohse-Quadrate überhaupt haben können? Gibt es z.B. auch Lohse-Quadrate der Ordnung 2, 3, 4 oder 5?

Es ist leicht einzusehen, dass es kein Lohse-Quadrat A der Ordnung 2 oder 3 gibt. Betrachten wir beispielsweise die Untermatrix $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, so müssen a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} paarweise verschieden sein. Da wir keine vier Farben haben, ist dies unmöglich.

Aufgabe 2.2. Zeigen Sie, dass es auch kein Lohse-Quadrate A der Ordnung 4 gibt.

Hinweis: Mit obiger Überlegung wissen wir bereits, dass a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} paarweise verschieden sind. Was können Sie nun über a_{23} und a_{32} aussagen?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Ein älterer Herr spricht Sie an und reisst Sie damit aus Ihren Gedanken.

ÄLTERER HERR: "Sie interessieren sich für meine Bilder, wie ich sehe. Gestattet, Richard Lohse ist mein Name. "

SIE: "Freut mich! Ja, Ihre Bilder gefallen mir ausserordentlich. Ich versuche ihre innere Harmonie zu verstehen. Ist es eigentlich Absicht, dass diagonal benachbarte Quadrate immer verschiedene Farben tragen?"

LOHSE (=ÄLTERER HERR): "Richtig, das war mir wichtig für die Bildharmonie. Ausserdem habe ich darauf geachtet, dass in keiner Horizontalen oder Vertikalen eine Farbe mehrfach auftritt."

SIE: "Stimmt, das ist mir auch aufgefallen. Zusätzlich scheint es bei den Gemälden mit 6, 15 und 30 kleinen Quadraten pro Horizontale und Vertikale so zu sein, dass jede Farbe in jeder Horizontalen und Vertikalen genau einmal auftritt. Dass es also nur so viele Farben gibt, wie es für eine einzige Horizontale oder Vertikale braucht.

LOHSE: "Da haben Sie richtig beobachtet. Das war gar nicht so einfach, das so zu konstruieren. Da musste ich eine Weile tüfteln."

SIE: "In der Mathematik nennen wir so etwas ein Lateinisches Quadrat. Was Sie mit diesen drei Gemälden umgesetzt haben, sind also drei spezielle lateinische Quadrate. Solche, bei welchen diagonal angrenzende Felder verschiedene Farben tragen."

LOHSE: "Oh, Sie kennen sich also mit den mathematischen Hintergründen aus? Das kommt mir äusserst gelegen. Wissen Sie, manchmal treten Leute an mich heran, die gerne auch so ein Gemälde haben möchten. Sie haben aber meist zusätzliche Forderungen. Das ist mir dann oft zu kompliziert. Aber wenn Sie mich da beraten könnten, wäre es zu schaffen."

SIE: "Ich wäre Ihnen da gerne behilflich. Haben Sie ein konkretes Problem?"

LOHSE: "Ein Bekannter möchte seine Badzimmerwände mit neuen Fliesen gestalten. Er hat sechs verschiedene Fliesenarten und möchte sie kombinieren. Alle Fliesen sind gleich gross und quadratisch. Der Bekannte möchte die Fliesen ähnlich wie im Gemälde mit 6 horizontalen systematischen Farbreihen anordnen, einfach mit den 6 Farben ersetzt durch seine 6 Fliesenarten. Dazu würde er das 6×6 Quadrat in alle Richtungen wiederholen und damit seine ganzen Badzimmer-Wände füllen. Das Problem ist, dass durch die Wiederholung dieses Musters die ganze Harmonie verloren geht. Schauen Sie, die Felder links oben und rechts unten sind beide gelb. An der Badzimmerwand gäbe das

zwei diagonal benachbarte Felder mit der gleichen Fliesenart. Was meinen Sie, wäre es möglich, das Gemälde so zu modifizieren, dass nach der Parkettierung immer noch diagonal angrenzende Felder verschiedene Farben tragen?

SIE: "Ein interessantes Problem. Ich werde es mir gerne überlegen. Kann ich Sie telefonisch oder per Email kontaktieren, wenn ich eine Lösung gefunden habe?"

LOHSE: "Sicher! Hier haben Sie meine Visitenkarte."

Nach diesem Gespräch verabschieden Sie sich. Sie gehen mit dem von Herrn Lohse formulierten Problem nach Hause und wollen es lösen:

Aufgabe 2.3. Modifizieren Sie das Lohse-Quadrat der Ordnung 6 aus dem Kunsthaus durch Permutation der Zeilen derart, dass eine Parkettierung mit diesem Lohse-Quadrat die Eigenschaft behält, dass diagonal angrenzende Felder verschiedene Farben tragen!
Hinweis: Es genügt schon das Vertauschen zweier Zeilen.

3 Lohse-Quadrate von Gruppen

Zu Hause in Ihrem Studierzimmer überlegen Sie sich die Sache mit den Lohse-Quadraten nochmals gründlich. Sie erinnern sich aus dem Studium daran, dass jede endliche Gruppe[1] ein lateinisches Quadrat liefert, die sogenannte Gruppentafel oder Cayley-Tafel. Zur Erinnerung:

Definition 3.1. (a) Eine *Aufzählung* einer endlichen Menge X mit n Elementen ist ein n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ mit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

(b) Die *Cayley-Tafel* einer endlichen Gruppe G der Ordnung n bzgl. zweier Aufzählungen $v = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ und $h = (g'_1, g'_2, \ldots, g'_n)$ von G ist die $n \times n$-Matrix $A = \big(g_i g'_j\big)_{1 \le i,j \le n}$.

Wenn wir die Elemente einer Gruppe durch Farben ersetzen, erhalten wir aus der Cayley-Tafel dieser Gruppe bzgl. einer vertikalen Aufzählung v und horizontalen Aufzählung h ein Farbquadrat. Erhalten wir durch geschickte Wahl von v und h ein Lohse-Quadrat? Schauen wir uns das mal im Beispiel des Lohse-Quadrats der Ordnung 6 aus dem Kunsthaus an. Bis auf Isomorphie[2] gibt es genau zwei Gruppen der Ordnung 6, die

$$\text{zyklische Gruppe} \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\},$$

in welcher die Gruppenverknüpfung der Addition mit Rest entspricht, und die

$$\text{symmetrische Gruppe} \quad S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\},$$

bestehend aus den Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$, in welcher wir die Elemente (Permutationen) in Zykel-Schreibweise notieren. Das Element (12) ist also beispielsweise die Permutation, welche 1 und 2 vertauscht. Die Permutation (123) bildet 1 auf 2 ab, 2 auf 3 und 3 wieder auf 1. Die Permutation (1) ist die Identität, das Neutralelement der Gruppe.

Frage: Gibt es für eine der beiden Gruppen $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und S_3 zwei Aufzählungen v und h bzgl. welcher die Cayley-Tafel genau dem Lohse-Quadrat der Ordnung 6 aus dem Kunsthaus entspricht?

Zuerst einmal ein paar Beispiele.

[1] Im Text wird davon ausgegangen, dass Ihnen der Gruppenbegriff noch geläufig ist. Zur Kurzrepetition: Eine (endliche) Gruppe ist eine (endliche) Menge G zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, so dass ein neutrales Element $e \in G$ und zu jedem Element $g \in G$ ein Inverses $g^{-1} \in G$ existiert.

[2] Ein Isomorphismus von Gruppen G, H ist eine bijektive Abbildung $f\colon G \to H$, welche die Gruppenverknüpfung respektiert, d.h. so dass $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt.

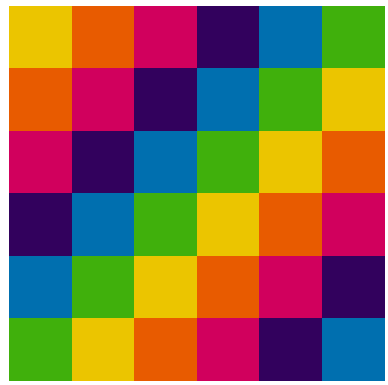
Beispiel 3.1. Sei $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $h = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})$ mit Farb-Zuordnung wie in der obersten Zeile des Lohse-Quadrats aus dem Kunsthaus.

Für $v = h$ ist:

die Cayley-Tafel:

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix}$$

das entsprechende Farbquadrat:



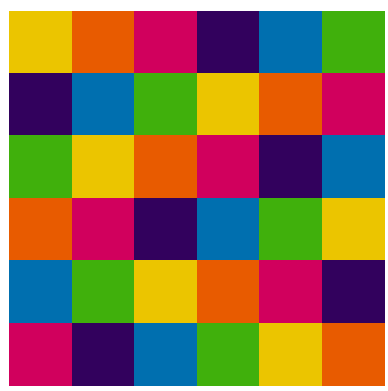
Dies ist zwar ein lateinisches Quadrat, aber offensichtlich kein Lohse-Quadrat.

Für $v = (\bar{0}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{2})$ ist:

die Cayley-Tafel:

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

das entsprechende Farbquadrat:



Dies ist ein Lohse-Quadrat. Kommt es Ihnen bekannt vor?

Aufgabe 3.1. (a) Finden Sie für $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $h = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})$ eine Aufzählung v, so dass gerade das Lohse-Quadrat der Ordnung 6 aus dem Kunsthaus als zugehöriges Farbquadrat rauskommt.

(b) Begründen Sie, dass auch das Lohse-Quadrat der Ordnung 30 aus dem Kunsthaus als Cayley-Tafel einer zyklischen Gruppe $G = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ konstruiert werden kann.

(c) Wie sieht es mit dem Lohse-Quadrat der Ordnung 15 aus? Kommt es auch von einer zyklischen Gruppe her?

Jetzt sind Sie gespannt: Was kommt raus, wenn wir statt der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ die symmetrische Gruppe S_3 nehmen. Erhalten wir mit dieser Gruppe ein neues Lohse-Quadrat? Eines, worauf Herr Lohse eventuell selbst nicht gekommen wäre?

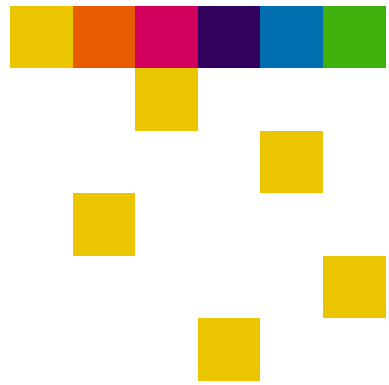
Aufgabe 3.2. Suchen Sie Aufzählungen h und v von $G = S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$, so dass die Cayley-Tafel bzgl. h und v ein Lohse-Quadrat liefert.

Hilfe: Wir wählen $h = ((1), (12), (13), (23), (123), (132))$ und geben die Positionen der gelben Quadrate vor. Diese entsprechen in der Cayley-Tabelle der Identität. Bestimmen Sie v passend und füllen Sie die Cayley-Tabelle und das entsprechende Farbquadrat auf.

die Cayley-Tafel:

$$\begin{pmatrix} (1) & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ & & (1) & & & \\ & & & & (1) & \\ & (1) & & & & \\ & & & & & (1) \\ & & & (1) & & \end{pmatrix}$$

das entsprechende Farbquadrat:



Betrachten Sie das Ergebnis. Sind auch hier die Zeilen voneinander zyklisch verschobene Kopien?

Das Ergebnis lässt sich sehen. Sie teilen es gleich Herrn Lohse mit, welcher gleich ein entsprechendes Gemälde künstlerisch umsetzt und in seiner Galerie ausstellt. Der stolze Titel lautet: "Sechs horizontale azyklische Farbreihen mit mathematischem Tiefgang".

4 Umformulierung des Problems

Wir haben im letzten Abschnitt gelernt, wie endliche Gruppen G zur Konstruktion von Lohse-Quadraten herangezogen werden können: Man wählt geeignete Aufzählungen $v = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ und $h = (g'_1, g'_2, \ldots, g'_n)$ von G und bildet die Cayley-Tafel $\left(g_i g'_j\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Um es bildlich umzusetzen ersetzen wir jeweils gleiche Gruppenelemente in der Cayley-Tafel mit Quadraten der gleichen Farbe. Es bleiben zwei Fragen:

1. Wie muss man die Aufzählungen v und h wählen, damit man tatsächlich ein Lohse-Quadrat erhält?

2. Mit welchen Gruppen funktioniert die Konstruktion überhaupt?

Die zweite Frage wird uns bis zum Ende des Textes begleiten. Was wir bisher sagen können: Es funktioniert mit einigen Gruppen (z.B. mit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ und S_3), aber nicht mit allen. Nämlich gibt es keine Lohse-Quadrate der Ordnung 2, 3 oder 4. Somit fallen die Gruppen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und das direkte Produkt[3] $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ weg.

Wir nehmen uns jetzt dem ersten Problem an, der Wahl von v und h. Gegeben eine Aufzählung $e = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ einer Gruppe G, können wir die *inverse Aufzählung* $e^{-1} := (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_n^{-1})$ bilden.

Aufgabe 4.1. Überlegen Sie sich, warum wir für eine Aufzählung h einer (nicht-trivialen) Gruppe G durch die Wahl $v = h^{-1}$ oder $v = h$ mittels der Cayley-Tafel niemals ein Lohse-Quadrat erhalten.

[3] Zur Erinnerung: Sind G_1 und G_2 Gruppen, so ist $G_1 \times G_2$ als Menge das kartesische Produkt von G_1 und G_2 mit Verknüpfung $(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2)$

Betrachten wir das Problem mal systematisch: Was bedeutet es konkret, dass zwei diagonal benachbarte Felder in der Cayley-Tafel übereinstimmen? Seien also $v = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ und $h = (g'_1, g'_2, \ldots, g'_n)$ Aufzählungen von G und $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = g_i g'_j$ wie gewohnt. Dann haben wir folgende Äquivalenzen:

1. $a_{ij} = a_{i+1,j+1} \Leftrightarrow g_i g'_j = g_{i+1} g'_{j+1} \Leftrightarrow g_{i+1}^{-1} g_i = g'_{j+1}(g'_j)^{-1}$
2. $a_{i+1,j} = a_{i,j+1} \Leftrightarrow g_{i+1} g'_j = g_i g'_{j+1} \Leftrightarrow g_i^{-1} g_{i+1} = g'_{j+1}(g'_j)^{-1} \Leftrightarrow g_{i+1}^{-1} g_i = (g'_{j+1}(g'_j)^{-1})^{-1}$

Wir sehen damit, dass sich die Lohse-Bedingung $a_{ij} \neq a_{i+1,j+1}$, $a_{i+1,j} \neq a_{i,j+1}$ für $1 \leq i, j \leq n-1$ mittels der Gruppenelemente $g_{i+1}^{-1} g_i$ sowie $g'_{j+1}(g'_j)^{-1}$ und ihren Inversen ausdrücken lässt. Das Element $g'_{j+1}(g'_j)^{-1}$ lässt sich auch schreiben als $((g'_{j+1})^{-1})^{-1}(g'_j)^{-1} = (g''_{j+1})^{-1} g''_j$, wobei

$$h^{-1} = (g''_1, g''_2, \ldots, g''_n)$$

die inverse Aufzählung zu h ist. Daher definieren wir:

Definition 4.1. Sei $e = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ eine Aufzählung von G. Dann heisst die Teilmenge

$$Q(e) := \{g_2^{-1} g_1, g_3^{-1} g_2, \ldots, g_n^{-1} g_{n-1}\} \cup \{g_1^{-1} g_2, g_2^{-1} g_3, \ldots, g_{n-1}^{-1} g_n\}$$

von G die *Menge der aufeinanderfolgenden Quotienten von e.*

Damit erhalten wir sofort folgende Umformulierung der Lohse-Bedingung für eine Cayley-Tafel:

Theorem 4.1. *Seien v und h Aufzählungen einer endlichen Gruppe G. Dann ist die zugehörige Cayley-Tafel genau dann ein Lohse-Quadrat, falls die Mengen der aufeinanderfolgenden Quotienten von v und h^{-1} disjunkt sind, d.h.*

$$Q(v) \cap Q(h^{-1}) = \emptyset.$$

Beispiel 4.1. Für die Gruppe $G = S_3$ in Aufgabe 3.2 haben wir die Aufzählungen

$$v = ((1), (13), (132), (12), (123), (23)) \quad \text{und} \quad h = ((1), (12), (13), (23), (123), (132))$$

verwendet. Hier ist $h^{-1} = ((1), (12), (13), (23), (132), (123))$ und

$$\begin{aligned} Q(v) &= \{(13), (23), (13), (23), (13)\} \cup \{(13), (23), (13), (23), (13)\} = \{(13), (23)\} \\ Q(h^{-1}) &= \{(12), (123), (123), (12), (123)\} \cup \{(12), (132), (132), (12), (132)\} = \{(12), (123), (132)\} \end{aligned}$$

Also ist in diesem Beispiel tatsächlich $Q(v) \cap Q(h^{-1}) = \emptyset$.

Aufgabe 4.2. Wiederholen Sie Beispiel 4.1 mit der S_3 ersetzt durch $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und den Aufzählungen aus Aufgabe 3.1.

Aufgabe 4.3. Formulieren Sie Eigenschaften der Menge der aufeinanderfolgenden Quotienten $Q(e)$ einer Aufzählung e einer Gruppe G! Betrachten Sie dazu die Beispiele zu den Gruppen S_3 und $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Wir sind mit Theorem 4.1 auch weiter auf dem Weg vorangeschritten um rauszufinden, welche Gruppen eigentlich zur Konstruktion von Lohse-Quadraten herangegzogen werden können. Für diese Gruppen verleihen wir eine Bezeichnung.

Definition 4.2. Eine endliche Gruppe G heisst *Lohse-Gruppe*, falls Aufzählungen v und h von G existieren, bzgl. welcher die Cayley-Tafel von G ein Lohse-Quadrat ist.

Korollar 4.2. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann eine Lohse-Gruppe, falls Aufzählungen e, e' von G existieren mit $Q(e) \cap Q(e') = \emptyset$.*

Beweis. Dies folgt aus Theorem 4.1 mit $h = e$ und $v = (e')^{-1}$. □

Wir notieren folgende allgemeine Beobachtungen zur Menge $Q(e)$ bzgl. einer Aufzählung e einer Gruppe G:

Lemma 4.3.

1. *Die Menge $Q(e)$ enthält das Neutralelement nicht. Insbesondere gilt für die Anzahl der Elemente $|Q(e)| \leq |G| - 1$.*
2. *Die Menge $Q(e)$ ist* symmetrisch*, d.h. mit jedem Element von $Q(e)$ ist auch sein Inverses in $Q(e)$.*
3. *Die Menge $Q(e)$ ist ein Erzeugendensystem[4] von G.*

Beweis.

1. Da e eine Aufzählung ist, gilt $g_i \neq g_{i+1}$ für alle i, und dies impliziert dass die Elemente $g_{i+1}^{-1} g_i$ und $g_i^{-1} g_{i+1}$ von $Q(e)$ vom Neutralelement verschieden sind.
2. Dies folgt direkt aus der Definition.
3. Sei $e = (g_1, \dots, g_n)$ und $m \in \{1, \dots, n\}$, so dass g_m das Neutralelement ist. Das Erzeugnis[5] von $Q(e)$ enthält $g_m^{-1} g_{m-1} = g_{m-1}$, $g_m^{-1} g_{m-1} g_{m-1}^{-1} g_{m-2} = g_{m-2}$ und so weiter bis und mit $g_m^{-1} g_{m-1}^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1 = g_1$. Ebenso enthält es die Elemente $g_m^{-1} g_{m+1} = g_{m+1}$, $g_m^{-1} g_{m+1} g_{m+1}^{-1} g_{m+2} = g_{m+2}$ bis und mit g_n. Also enthält das Erzeugnis alle Elemente g_i mit $i \neq m$. Da g_m als Neutralelement auch im Erzeugnis von $Q(e)$ liegt, folgt die Aussage.

□

Ein Anruf von Herrn Lohse unterbricht Ihre Untersuchungen:

LOHSE: Guten Abend!

SIE: Guten Abend, Herr Lohse! Na, wie gehts?

LOHSE: Prima! Stellen Sie sich vor, ich habe einige neue Interessenten in meiner Galerie. Das Gemälde zu den "Sechs horizontalen azyklischen Farbreihen mit mathematischem Tiefgang" spricht sie besonders an. Eine Interessentin, die als Physikerin arbeitet, hat mich zu diesem Gemälde ausgefragt. Ich konnte ihr nur erklären, was Sie mir gesagt haben. Nämlich dass hinter den Gemälden "Gruppentheorie" steckt und dass in dem betreffenden Bild die symmetrische Gruppe realisiert ist.

SIE: Ja, genau, die symmetrische Gruppe S_3 steckt da drin. Schön, dass sich die Leute interessieren. Ich habe mir auch schon weitere Gedanken zu den mathematischen Hintergründen gemacht und denke, es sollte jetzt einiges mehr gehen. Das heisst, wir könnten weitere Gruppen realisieren. Ich nenne diese Gruppen übrigens Lohse-Gruppen.

[4] Ein Erzeugendensystem einer Gruppe G ist eine Teilmenge $S \subseteq G$, so dass jedes Element $g \in G$ als Wort $g = s_1 s_2 \cdots s_m$ in den Elementen von S und den zugehörigen Inversen geschrieben werden kann. Wenn S ein Erzeugendensystem von G ist, sagen wir auch, G sei von S erzeugt. Zum Beispiel ist die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vom Element $\bar{1}$, d.h. von der Teilmenge $\{\bar{1}\}$, erzeugt.

[5] Das Erzeugnis einer Teilmenge T einer Gruppe G ist die eindeutige Untergruppe von G, welche von T erzeugt ist. Zum Beispiel ist das Erzeugnis der Teilmenge $\{4, 6\}$ der Gruppe $\mathbb{Z}$ die Untergruppe $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$

LOHSE: Lohse-Gruppen? Das ist aber nett! Und gibt es viele davon?

SIE: Genau kann ich es noch nicht sagen. Vielleicht sind es sogar unendlich viele.

LOHSE: Oh, so viele kann ich nicht malen! Bei mehr als 30 Farben wirds auch unübersichtlich. Was ich Ihnen noch sagen wollte: Diese Physikerin kannte scheinbar etwas Gruppentheorie. Sie hat mich dann gefragt, ob ich für Sie vielleicht die Quaternionen-Gruppe malen könne. Sie würde das Gemälde gerne in ihrem Labor aufstellen.

SIE: Aha, nach der Quternionen-Gruppe hat sie gefragt.

LOHSE: Ja genau. Kennen Sie denn die Quaternionen-Gruppe? Mir sagt das nichts, aber ich bin ja auch kein Mathematiker.

SIE: Ja, doch, diese Gruppe kenne ich. Es ist eine der interessantesten kleinen Gruppen, die es gibt. Wenn Sie sich realisieren lässt, werden 8 Farben benötigt, denn die Quaternionen-Gruppe hat 8 Elemente.

LOHSE: Acht Farben? Na, das wäre kein Problem. Können Sie mal schauen, ob es mit dieser Gruppe überhaupt klappt?

SIE: Sicher! Sie hören von mir!

LOHSE: Na, dann, bis bald!

Sie notieren sich anschliessend ans Gespräch nochmals die Quaternionengruppe:

$$Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

erzeugt von $-1, i, j, k$ mit $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Ist dies eine Lohse-Gruppe?

Um Korollar 4.2 anzuwenden müssen wir die Mengen $Q(e)$ für Aufzählungen e von Q_8 studieren. Laut Lemma 4.3 sind diese Mengen symmetrische Erzeugendensysteme, welche das Neutralelement nicht enthalten. Es helfen uns also folgende Kette von Überlegungen:

1. Die Inversen von i, j und k sind $-i$, $-j$ bzw. $-k$. Das Inverse von -1 ist -1.

2. Die Teilmengen $\{1, -1, i, -i\}$, $\{1, -1, j, -j\}$ und $\{1, -1, k, -k\}$ sind echte Untergruppen von Q_8.

3. Jedes symmetrische Erzeugendensystem von Q_8 enthält mindestens zwei der Elemente i, j, k.

4. Folglich enthält $Q(e) \cap Q(e')$ mindestens eines der Elemente i, j, k. Der Durchschnitt kann also nicht leer sein.

Daraus folgt:

Proposition 4.4. *Die Quaternionen-Gruppe Q_8 ist* keine *Lohse-Gruppe.*

Schade! Herr Lohse und die Physikerin werden enttäuscht sein. Aus mathematischer Sicht wird es nun aber spannend. Die Frage danach, welche Gruppen Lohse-Gruppen sind, verspricht eine interessante Lösung.

5 Hamiltonsche Wege

Um aus einer endlichen Gruppe G ein Lohse-Quadrat zu erhalten, brauchen wir laut Korollar 4.2 zwei Aufzählungen e und e' von G mit $Q(e)$ und $Q(e')$ disjunkt. Wir wissen auch, dass $Q(e)$ und $Q(e')$ symmetrische Erzeugendensysteme von G sind, welche das Neutralelement nicht enthalten. Wie aber erhalten wir e und e'? Können wir uns vielleicht zwei disjunkte symmetrische Erzeugendensysteme S und S' von G vorgeben, welche das Neutralelement nicht enthalten, und irgendwie die Aufzählungen e und e' konstruieren, mit $Q(e) = S$ und $Q(e') = S'$? Es würde schon genügen, dass $Q(e) \subseteq S$ und $Q(e') \subseteq S'$ ist. In diesem Falle impliziert nämlich die Disjunktheit von S und S' auch diejenige von $Q(e)$ und $Q(e')$. Daher stellt sich folgende Frage:

Frage: Gegeben ein symmetrisches Erzeugendensystem S einer endlichen Gruppe G. Können wir dazu eine Aufzählung e von G konstruieren mit $Q(e) \subseteq S$?

Beispiel 5.1. Sei $G = Q_8$ und $S = \{i, -i, j, -j\}$. Letzteres ist tatsächlich ein symmetrisches Erzeugendensystem. Wir suchen eine Aufzählung $e = (g_1, g_2, \ldots, g_8)$ von Q_8 mit $Q(e) \subseteq S$.

1. Wir beginnen mit $g_1 = 1$, dem Neutralelement.
2. Welche Elemente kommen nun für g_2 in Frage? Da $g_1^{-1}g_2 = g_2$ (und sein Inverses $g_2^{-1}g_1 = g_2^{-1}$) in $Q(e)$ liegen, muss $g_2 \in S$ sein. Wir probieren es mal mit $g_2 = i$.
3. Welche Elemente kommen nun für g_3 in Frage? Wir brauchen $g_2^{-1}g_3 \in Q(e) \subseteq S$, also $g_3 \in g_2 \cdot S = i \cdot S = \{i \cdot i, i \cdot (-i), i \cdot j, i \cdot (-j)\} = \{-1, 1, k, -k\}$. Das Element 1 ist nicht mehr verfügbar, da schon $g_1 = 1$ ist. Wir probieren also mal $g_3 = -1$.
4. Welche Elemente kommen nun für g_4 in Frage? Wir brauchen $g_4 \in g_3 \cdot S = \{-i, i, -j, j\}$ und wählen $g_4 = -i$, welches verschieden von g_1, g_2 und g_3 ist.
5. Für $g_5 \in g_4 \cdot S = \{1, -1, -k, k\}$ wählen wir $g_5 = -k$.
6. Für $g_6 \in g_5 \cdot S = \{-j, j, i, -i\}$ wählen wir $g_6 = -j$.
7. Für $g_7 \in g_6 \cdot S = \{k, -k, 1, -1\}$ wählen wir $g_7 = k$.
8. Für $g_8 \in g_7 \cdot S = \{j, -j, -i, i\}$ wählen wir $g_8 = j$.
9. Damit haben wir die Aufzählung $e = (1, i, -1, -i, -k, -j, k, j)$ von Q_8 mit $Q(e) \subseteq S$, sogar $Q(e) = S$.

Wir können das Problem, eine Aufzählung e mit $Q(e) \subseteq S$ zu konstruieren, auch graphentheoretisch beschreiben.

Definition 5.1. Ein (endlicher) Graph ist ein Paar (V, E) bestehend aus einer (endlichen) Menge von "Knoten" V und einer Menge von "Kanten" E bestehend aus 2-elementigen Teilmengen von V.

Ist G eine Gruppe und S ein symmetrisches Erzeugendensystem von G, welches das Neutralelement nicht enthält, so ist der sogenannte *Cayley-Graph* von G bzgl. S wie folgt definiert:

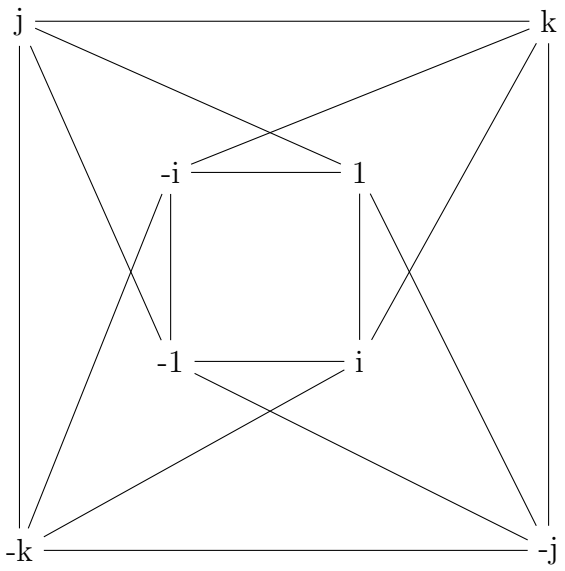
1. Die Knotenmenge ist $V = G$.

2. Die Kantenmenge ist

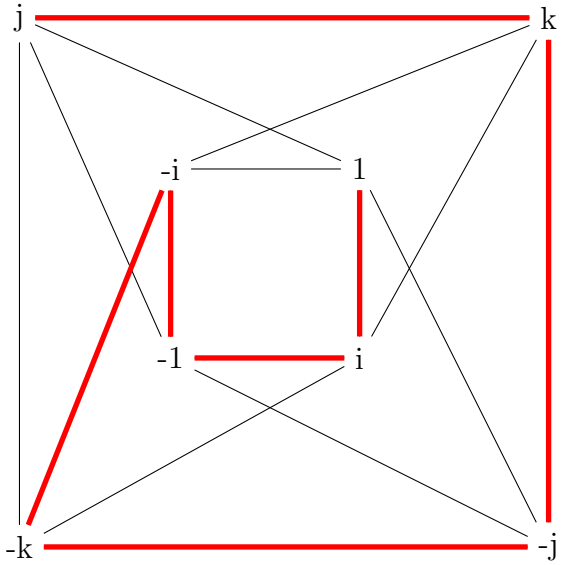
$$E = \left\{ \{g_1, g_2\} \mid g_1, g_2 \in G, g_1^{-1} g_2 \in S \right\}.$$

Aufgabe 5.1. Sei (V, E) der Cayley-Graph einer endlichen Gruppe G bzgl. eines symmetrischen Erzeugendensystem S, welches das Neutralelement nicht enthält. Bestimmen Sie die Anzahl $|E|$ der Kanten des Graphen abhängig von der Ordnung von G und der Kardinalität von S.
Hinweis: Was können Sie über die Anzahl Kanten aussagen, die von einem beliebigen Knoten ausgehen?

Ein Graph kann gezeichnet werden, indem die Knoten als Punkte in der Ebene und Kanten als Verbindungslinien zwischen den Knoten gezeichnet werden. Für die Gruppe Q_8 mit $S = \{i, -i, j, -j\}$ ist der Cayley-Graph gegenüber gezeichnet. Die Kanten im inneren und äusseren Quadrat entsprechen dabei Paare von Elementen $\{g_1, g_2\}$ mit $g_1^{-1} g_2 = \pm i$. Die Kanten, die Knoten des äusseren Quadrats mit Knoten des inneren Quadrats verbinden, entsprechen hingegen Paare von Elementen mit $g_1^{-1} g_2 = \pm j$.



Ein *Weg* (der Länge k) in einem Graphen ist eine Folge von Knoten $(v_1, \ldots, v_k)$, so dass $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $i = 1, \ldots, k-1$. Sind alle Knoten v_i verschieden, so spricht man auch von einem *Pfad*. Ist ein Weg eines Graphen gleichzeitig eine Aufzählung der Knotenmenge (d.h. wird jeder Knoten des Graphen genau einmal besucht), so spricht man von einem *Hamiltonschen Weg*. Unsere Aufzählung $e = (1, i, -1, -i, -k, -j, k, j)$ entspricht einem Hamilton-Weg im Cayley-Graphen, welcher Anfangsknoten 1 und Endknoten j hat. Gegenüber ist er rot eingezeichnet.

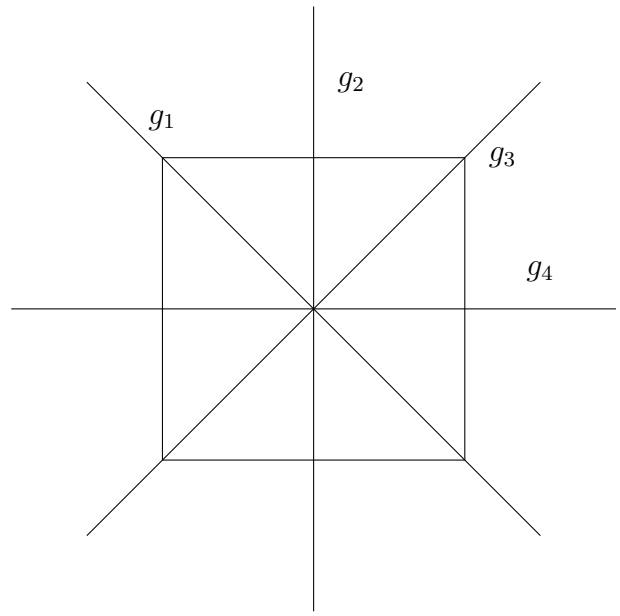


Fazit: Sei G eine Gruppe und S ein symmetrisches Erzeugendensystem von G, welches das Neutralelement nicht enthält. Dann entspricht die Suche nach einer Aufzählung e von G mit $Q(e) \subseteq S$ der Suche nach einem Hamilton-Weg im Cayley-Graphen von G bzgl. S.

Wir haben zuvor die Quaternionen-Gruppe Q_8 studiert. Es gibt noch eine zweite nicht-kommutative Gruppe der Ordnung 8, nämlich die *Diedergruppe* D_8. Dies ist die Symmetriegruppe des Quadrats:

$$D_8 = \{id, r_{90}, r_{180}, r_{270}, s_1, s_2, s_3, s_4\}.$$

Dabei bezeichnen r_{90}, r_{180}, r_{270} die Drehungen um die angegebene Gradzahl um den Mittelpunkt des Quadrats und s_1, s_2, s_3, s_4 die Spiegelung an den Geraden g_1, g_2, g_3 bzw. g_4. Die Gruppenverknüpfung ist hier die Komposition von Abbildungen. Es gilt: $r_{180} = r_{90}^2$, $r_{270} = r_{90}^3$, sowie $s_2 = s_1 \circ r_{90}$, $s_3 = s_1 \circ r_{180}$ und $s_4 = s_1 \circ r_{270}$. Wir nummerieren die Geraden g_1 bis g_4 hier im Uhrzeigersinn, damit diese Relationen gelten.

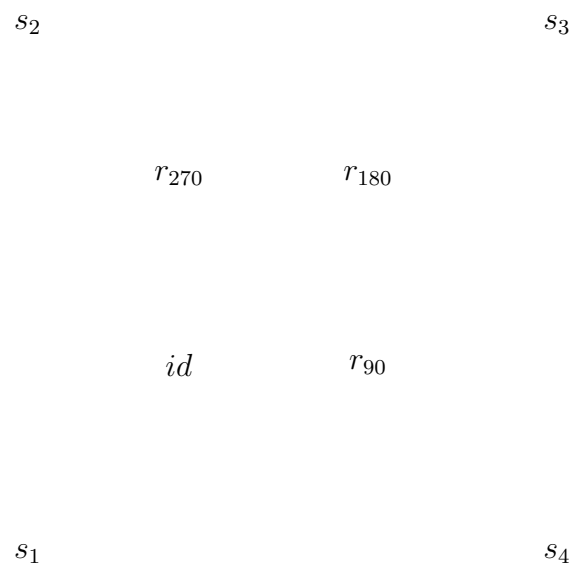


Aufgabe 5.2.

Die Gruppe D_8 ist von r_{90} und s_1 erzeugt. Die Inverse von r_{90} ist r_{270}, von s_1 ist s_1 selbst.

(a) Zeichnen Sie die Kanten im Cayley-Graphen von D_8 bzgl. $S = \{r_{90}, r_{270}, s_1\}$ gegenüber ein. Die Knoten sind bereits gezeichnet.

(b) Markieren Sie mit roter Farbe einen Hamilton-Weg in diesem Graphen.

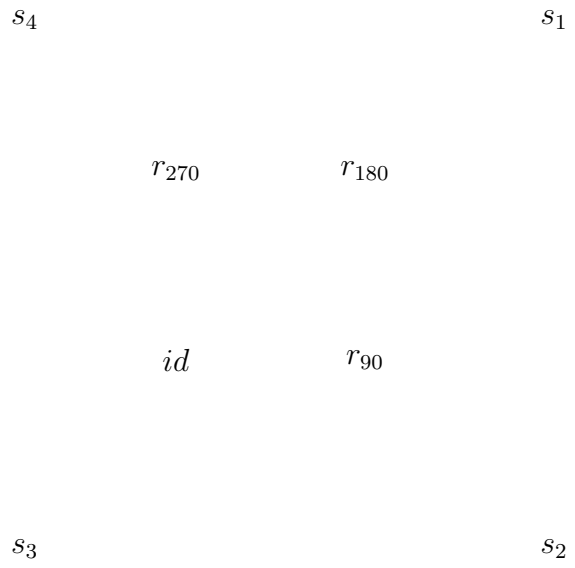


Aufgabe 5.3.

(a) Zeigen Sie, dass D_8 auch durch $S' = \{s_2, s_3\}$ erzeugt ist.

(b) Zeichnen Sie die Kanten im Cayley-Graphen von D_8 bzgl. $S' = \{s_2, s_3\}$ gegenüber ein. Die Knoten sind bereits gezeichnet (mit zur Übersichtlichkeit leicht abweichender Anordnung gegenüber vorher).

(c) Markieren Sie mit grüner Farbe einen Hamilton-Weg in diesem Graphen.



In der vorigen Aufgabe haben wir zwei Aufzählungen e und e' von D_8 konstruiert mit $Q(e) = \{r_{90}, r_{270}, s_1\}$ und $Q(e') = \{s_2, s_3\}$, insbesondere $Q(e) \cap Q(e') = \emptyset$. Laut Korollar 4.2 erhalten wir dadurch ein Lohse-Quadrat. Wir müssen dazu nur die Cayley-Tafel von D_8 bilden, wobei $v = e$ und $h = (e')^{-1}$ gewählt wird. Wir werden dies für

$$e = (id, r_{90}, r_{180}, r_{270}, s_2, s_3, s_4, s_1) \quad \text{und} \quad e' = (id, s_3, r_{270}, s_4, r_{180}, s_1, r_{90}, s_2)$$

tun. Die von Ihnen konstruierten Lösungen für e und e' weichen eventuell davon ab.

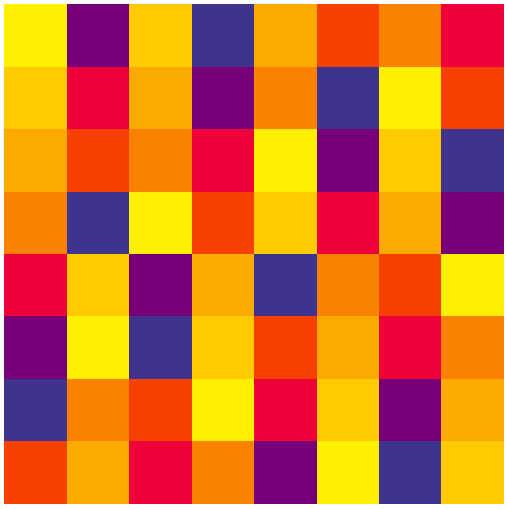
Wir ordnen Farben wie in der ersten Spalte im Bild "Acht vertikale systematische Farbreihen 1955/1969" (siehe weiter oben) zu:

$$D_8 = \{id, r_{90}, r_{180}, r_{270}, s_1, s_2, s_3, s_4\}.$$

die Cayley-Tafel:

$$\begin{pmatrix}
id & s_3 & r_{90} & s_4 & r_{180} & s_1 & r_{270} & s_2 \\
r_{90} & s_2 & r_{180} & s_3 & r_{270} & s_4 & id & s_1 \\
r_{180} & s_1 & r_{270} & s_2 & id & s_3 & r_{90} & s_4 \\
r_{270} & s_4 & id & s_1 & r_{90} & s_2 & r_{180} & s_3 \\
s_2 & r_{90} & s_3 & r_{180} & s_4 & r_{270} & s_1 & id \\
s_3 & id & s_2 & s_4 & s_1 & r_{180} & s_2 & r_{270} \\
s_4 & r_{270} & s_1 & id & s_2 & r_{90} & s_3 & r_{180} \\
s_1 & r_{180} & s_2 & r_{270} & s_3 & id & s_4 & r_{90}
\end{pmatrix}$$

das entsprechende Farbquadrat:



Sie haben nun aus der Diedergruppe ein Lohsequadrat erhalten. Die Physikerin in Herrn Lohses Galerie hat sich zwar die Quaternionen-Gruppe gewünscht. Aber vielleicht ist sie auch mit der Diedergruppe einverstanden?! Sie kontaktieren gleich Herrn Lohse:

SIE: Guten Abend, Herr Lohse. Ich habe Neuigkeiten für Sie!

LOHSE: Ach ja? Beschäftigen Sie sich immer noch mit den Quaterionen für die Physikerin, die neulich bei mir in der Galerie war?

SIE: Wie gesagt, mit der Quaternionen-Gruppe funktioniert es nicht. Aber dafür hat es mit der Dieder-Gruppe geklappt. Diese beschreibt die Symmetrien eines Quadrats. Sie hat auch Bedeutung in der Chemie und Physik, zum Beispiel bei der Untersuchung von Kristallen.

LOHSE: Interessant. Das muss ich dieser Physikerin erzählen. Vielleicht findet sie das ja auch spannend.

Und tatsächlich. Am nächsten Nachmittag erfahren Sie, dass Herr Lohse nun die Dieder-Gruppe D_8 für die Physikerin bildlich umsetzen soll. Sie schicken Herrn Lohse gleich die nötigen Informationen und er macht sich ans Werk. Die Wahl der Farben will er aber noch im Sinne der Ästhetik ändern. Sie überlassen das ganz dem Künstler und machen sich weiter mathematische Überlegungen.

6 Reduktion der Anzahl benötigter Aufzählungen

Unsere Strategie, aus einer endlichen Gruppe G ein Lohse-Quadrat zu konstruieren, erfordert bisher die Wahl von zwei disjunkten Erzeugendensystemen S und S' von G, welche symmetrisch sind und das Neutralelement nicht enthalten. Wäre es nicht einfacher, nur ein Erzeugendensystem S wählen zu müssen? Wir könnten dann $S' = G \setminus (S \cup \{n\})$ nehmen, wobei n das Neutralelement bezeichnet. Diese Teilmenge von G ist wie S symmetrisch und enthält das Neutralelement nicht. Ausserdem ist sie disjunkt von S. Die Frage ist, wann erzeugt sie G?

Lemma 6.1. *Sei S ein symmetrisches Erzeugendensystem von G, welches das Neutralelement n von G nicht enthält. Ist $|S| < |G|/2$, so ist auch $S' := G \setminus (S \cup \{n\})$ ein Erzeugendensystem (welches symmetrisch ist und das Neutralelement nicht enthält).*

Beweis. Wegen $|S| < |G|/2$ gilt $|S' \cup \{n\}| > |G|/2$. Sei G' die Untergruppe erzeugt von S' (oder äquivalent von $S' \cup \{n\}$). Dann ist auch $|G'| > |G|/2$ und wegen dem Satz von Lagrange[6] folgt $G' = G$. □

Für das nächste Resultat brauchen wir einen Satz aus der Graphentheorie, welcher auf Gabriel Andrew Dirac (Stiefsohn des berühmten theoretischen Physikers Paul Dirac) zurückgeht. Für einen Knoten v eines Graphen (V, E) bezeichnen wir mit $\delta(v)$ die Anzahl der Knoten $w \in V$ mit $\{v, w\} \in E$ und nennen es den *Grad* von v.

Theorem 6.2 (Satz von Dirac [Di52])**.** *Ein Graph (V, E) mit n Knoten, in welchem jeder Knoten v Grad $\delta(v) \geq \frac{n}{2}$ hat, enthält einen Hamiltonschen Weg.*

Beweis. Der hier wiedergegebene Beweis ist eine modifizierte Version von [PWi].

Sei $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ ein Pfad in (V, E) von maximaler Länge k. Wegen der Maximalität von P ist der Knoten v_1 (und ebenso der Knoten v_k) nur mit Knoten in P benachbart[7]. Wegen $\delta(v_1) \geq \frac{n}{2}$ folgt $k \geq \frac{n}{2} + 1$. Damit folgt auch, dass jeder Knoten in $V \setminus \{v_1, \ldots, v_k\}$ mit mindestens einem Knoten von P benachbart ist. Sonst könnten sie nämlich nicht Grad $\geq \frac{n}{2}$ haben.

[6] Der Satz von Lagrange besagt, dass für eine endliche Gruppe G die Ordnung jeder Untergruppe von G ein Teiler der Ordnung von G ist.

[7] Zwei Knoten v, w heissen benachbart, falls $\{v, w\}$ eine Kante des Graphen ist

Wir betrachten zuerst den Fall, dass v_1 und v_k benachbart sind, so dass P zu einem Kreis[8] geschlossen werden kann. In diesem Fall liefert jeder Knoten $v \in V \setminus \{v_1, \ldots, v_k\}$ einen Pfad länger als P, nämlich den Pfad von v nach einem in P benachbarten Knoten und um den obigen Kreis rum durch alle Knoten von P. Also wegen der Maximalität $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$ und die Behauptung folgt in diesem Fall.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall und die Menge $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Mindestens $\frac{n}{2}$ dieser Knoten sind mit v_k benachbart und mindestens $\frac{n}{2}$ dieser Knoten v_j sind so, dass v_{j+1} mit v_1 benachbart ist. Wegen $k - 1 < \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$ existiert also $j \leq k - 1$ mit v_j benachbart zu v_k und v_{j+1} benachbart zu v_1. Wir erhalten dadurch einen Pfad $\tilde{P} = (v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_k, v_j, v_{j-1}, \ldots, v_2, v_1)$ der Länge k mit v_{j+1} benachbart zu v_1. Damit sind wir im obigen Fall angelangt, so dass die Behauptung allgemein beweisen ist. □

Theorem 6.3. *Sei G eine endliche Gruppe, welche eine Aufzählung e mit $|Q(e)| \leq |G|/2 - 1$ hat. Dann ist G eine Lohse-Gruppe.*

Beweis. Sei $S := Q(e)$. Dann ist $|S| \leq |G|/2 - 1 < |G|/2$. Die Teilmenge $S' := G \setminus (S \cup \{n\})$ ist also laut Lemma 6.1 ein symmetrisches Erzeugendensystem und enthält das Neutralelement nicht. Im Cayley-Graph von G bzgl. S' hat jeder Knoten Grad $\geq |S'| \geq |G|/2$. Wegen dem Satz von Dirac (Theorem 6.2) enthält dieser Graph einen Hamilton-Weg. Damit folgt die Existenz einer Aufzählung e' von G mit $Q(e') \subseteq S'$. Also folgt die Aussage mit Korollar 4.2. □

Bemerkung. Es ist ein offenes Problem, ob jeder Cayley-Graph einer endlichen Gruppe bzgl. eines symmetrischen Erzeugendensystems einen Hamilton-Weg enthält. Diese Aussage ist Teil der sogenannten *Lovász Vermutung*, welche eine allgemeinere Klasse von Graphen betrifft. Für Gruppen von Ordnung < 72 ist die Lovász Vermutung für Cayley-Graphen allerdings bewiesen, siehe [KMMMS12]. Für die Lohse-Quadrat, die wir in dieser Arbeit konstruieren, ist die Ordnung immer relativ klein (maximal 12), so dass wir immer Hamiltonsche Wege finden.

Wegen der obigen Bemerkung erhalten wir folgende Verstärkung von Theorem 6.3 für Gruppen der Ordnung < 72.

Theorem 6.4. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung < 72. Hat G ein symmetrisches Erzeugendensystem S mit $|S| < |G|/2$, so ist G eine Lohse-Gruppe.*

Beweis. Da der Cayley-Graph von G bzgl. S einen Hamilton-Weg enthält, existiert eine Aufzählung e mit $Q(e) \subseteq S$. Wegen Lemma 6.1 ist $S' := G \setminus (S \cup \{n\})$ ein symmetrisches Erzeugenden-System. Die Existenz eines Hamilton-Wegs im Cayley Graphen von G bzgl. S' zeigt die Existenz einer Aufzählung e' mit $Q(e') \subseteq S'$. Es ist $Q(e) \cap Q(e') \subseteq S \cap S' = \emptyset$ und daher folgt die Aussage mit Korollar 4.2. □

Wir wenden nun die obigen zwei Theoreme zu Lohse-Gruppen auf zyklische Gruppen und Dieder-Gruppen an.

Beispiel 6.1. Jede zyklische Gruppe $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Ordnung $n \geq 5$ ist eine Lohse-Gruppe. Nämlich hat für die Aufzählung $e = (\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{n} - 1)$ die Menge $Q(e) = \{\bar{1}, \bar{n} - 1\}$ nur zwei Elemente.

1. Falls $n \geq 6$ ist $|Q(e)| \leq |G|/2 - 1$ und die Aussage folgt aus Theorem 6.3.

[8] Ein Kreis ist ein Weg $(w_1, \ldots, w_m)$ dessen Anfangsknoten w_1 gleich dem Endknoten w_m ist und sonst alle Knoten w_i verschieden sind.

2. Im Fall $n = 5 < 72$ ist $|Q(e)| = 2 < |G|/2$ und die Aussage folgt aus Theorem 6.4.

Beispiel 6.2. Die Dieder-Gruppe D_{2n} der Ordnung $2n$ (Symmetriegruppe des regelmässigen n-Ecks) mit $n \geq 3$ ist eine Lohse-Gruppe. Sei nämlich $s \in D_{2n}$ eine Spiegelung, $r \in D_{2n}$ die Rotation um $\frac{360}{n}$ Grad. Dann ist auch $sr = r^{n-1}s$ eine Spiegelung und $S := \{s, sr\}$ ist ein symmetrisches Erzeugendensystem der Kardinalität 2, erfüllt also $|S| \leq |D_{2n}|/2 - 1$. Die Aufzählung $e = (id, s, r, rs, r^2, r^2s, \ldots, r^{n-1}, r^{n-1}s)$ hat $Q(e) = S$. Also folgt die Aussage mit Theorem 6.3.

Aufgabe 6.1. Weisen Sie mittels Theorem 6.4 nach, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ eine Lohse-Gruppe ist. Warum geht es mit Theorem 6.3 nicht?

Als letzte Anwendung wollen wir zeigen, dass die alternierende[9] Gruppe A_4 eine Lohse-Gruppe ist. Ausserdem setzen wir ein entsprechendes Lohse-Quadrat bildlich um.

Die Gruppe A_4 ist die Gruppe der Rotations-Symmetrien eines Tetraeders. Jedes Element von A_4 permutiert die Ecken des Tetraeders und ist durch die Wirkung auf den Tetraeder-Ecken vollständig bestimmt. Wir nummerieren die Ecken mit den Zahlen 1 bis 4.

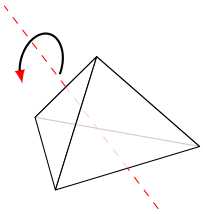
Aufgabe 6.2. In dieser Aufgabe wollen wir alle symmetrischen Erzeugendensysteme der Gruppe A_4 von minimaler Kardinalität finden. Dazu gehen wir schrittweise vor:

(a) Die Gruppe A_4 besteht aus folgenden Elementen:

1) der Identität

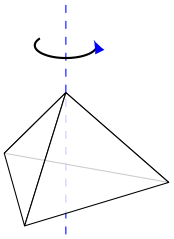
2)

Rotationen um Achsen, welche durch zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte gehen.



3)

Rotationen um die Verbindungsgerade zwischen einem Eckpunkt und dem gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt.



Notieren Sie sich zu jeder der drei Arten von Elementen der A_4 die Anzahl solcher Elemente, sowie ihre Ordnung[10] Schreiben Sie sich zudem die Elemente in Zykel-Schreibweise (als Permutation der Eckpunkte) auf.

(b) Zeigen Sie, dass die Elemente von Typ 1) und 2) zusammen eine Untergruppe[11] der A_4 bilden. Dies ist die sogenannte Kleinsche Vierergruppe.

[9] Allgemein ist die alternierende Gruppe A_n die Untergruppe der S_n, welche aus allen Elementen besteht, die als Produkt von Transpositionen (ij) geschrieben werden können. Z.B. ist in S_4 das Element (123) in A_4, da es als $(123) = (12)(23)$ geschrieben werden kann.

[10] Die Ordnung eines Element g einer endlichen Gruppe ist das kleinste $m \geq 1$, so dass g^m das Neutralelement ist.

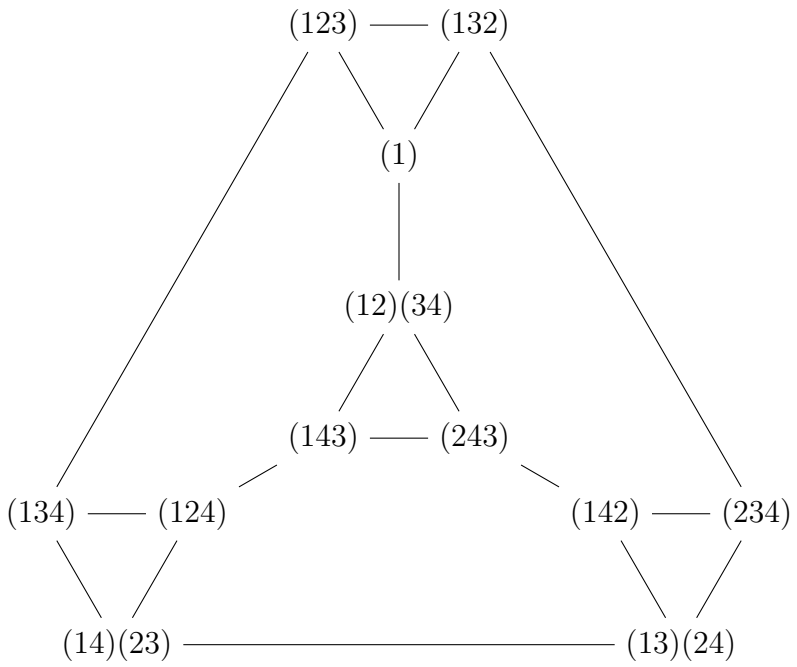
[11] Eine Untergruppe einer Gruppe G ist eine Teilmenge, welche das Neutralelement enthält und unter Inversenbildung und der Gruppenverknüpfung abgeschlossen ist.

(c) Überlegen Sie sich, dass jedes Erzeugendensystem der A_4 mindestens ein Element von Typ 3) enthält, und dass jedes solche Element verschieden von seinem Inversen ist.

(d) Begründen Sie nun, dass jedes symmetrische Erzeugendensystem der A_4 mindestens 3 Elemente enthält.

(e) Beschreiben Sie schliesslich alle symmetrischen Erzeugendensysteme der Gruppe A_4 von Kardinalität 3 und zählen sie deren Anzahl.

Wir arbeiten im Folgenden mit dem Erzeugendensystem $S = \{(123), (132), (12)(34)\}$. Der Cayley-Graph der Gruppe A_4 bzgl. S sieht wie folgt aus:



Aufgabe 6.3. Zeichnen Sie einen Hamilton-Weg im obigen Cayley-Graphen ein.

Der in der Musterlösung aufgezeigte Hamilton-Weg liefert uns die Aufzählung

$$e = ((1), (132), (123), (134), (124), (14)(23), (13)(24), (234), (142), (243), (143), (12)(34))$$

mit $Q(e) = S = \{(123), (132), (12)(34)\}$. Eine andere Wahl für S wäre das Erzeugendensystem $S' = \{(142), (124), (13)(24)\}$. Dieses ergibt sich aus S durch Konjugation[12] von S mit dem Element (143). Um nun eine Aufzählung e' mit $Q(e') = S'$ zu erhalten, konjugieren wir e ebenfalls mit dem Element (143). Wir erhalten die Aufzählung:

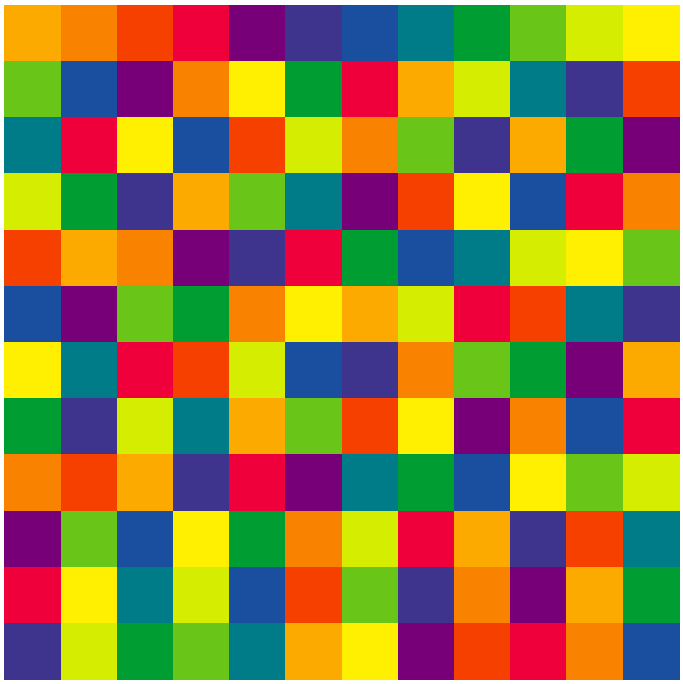
$$e' = ((1), (124), (142), (134), (234), (12)(34), (14)(23), (132), (243), (123), (143), (13)(24))$$

[12]Konjugation mit einem Gruppenelement $g \in G$ ist der Automorphismus $G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$.

Nun setzen wir wieder $v = e$, $h = (e')^{-1}$ und stellen die Cayley-Tafel auf:

$$\begin{pmatrix}
(1) & (142) & (124) & (143) & (243) & (12)(34) & (14)(23) & (123) & (234) & (132) & (134) & (13)(24) \\
(132) & (14)(23) & (243) & (142) & (13)(24) & (234) & (143) & (1) & (134) & (123) & (12)(34) & (124) \\
(123) & (143) & (13)(24) & (14)(23) & (124) & (134) & (142) & (132) & (12)(34) & (1) & (234) & (243) \\
(134) & (234) & (12)(34) & (1) & (132) & (123) & (243) & (124) & (13)(24) & (14)(23) & (143) & (142) \\
(124) & (1) & (142) & (243) & (12)(34) & (143) & (234) & (14)(23) & (123) & (134) & (13)(24) & (132) \\
(14)(23) & (243) & (123) & (234) & (142) & (13)(24) & (1) & (134) & (143) & (124) & (123) & (12)(34) \\
(13)(24) & (123) & (143) & (124) & (134) & (14)(23) & (12)(34) & (142) & (132) & (234) & (243) & (1) \\
(234) & (12)(34) & (134) & (123) & (1) & (132) & (124) & (13)(24) & (243) & (142) & (14)(23) & (143) \\
(142) & (124) & (1) & (12)(34) & (143) & (243) & (123) & (234) & (14)(23) & (13)(24) & (132) & (134) \\
(243) & (132) & (14)(23) & (13)(24) & (234) & (142) & (134) & (143) & (1) & (12)(34) & (124) & (123) \\
(143) & (13)(24) & (123) & (134) & (14)(23) & (124) & (132) & (12)(34) & (142) & (243) & (1) & (234) \\
(12)(34) & (134) & (234) & (132) & (123) & (1) & (13)(24) & (243) & (124) & (143) & (142) & (14)(23)
\end{pmatrix}$$

Das entsprechende Farbquadrat:



7 Ausblick auf die Klassifikation

Lohse-Gruppen wurden durch D. Meier in [Me06] vollständig klassifiziert. Wir beweisen seine Klassifikation auf wesentlich kürzerem Wege, in dem wir mehr Resultate zur Existenz von Hamilton-Wegen aus der Literatur heranziehen. Diese sind zum Teil erst nach Meiers Arbeit [Me06] erschienen.

Theorem 7.1 ([Me06, Theorem 6])**.** *Alle endlichen Gruppen mit Ausnahme der Gruppen der Ordnung* $2, 3$ *und* 4 *sowie der Quaternionen-Gruppe* Q_8 *sind Lohse-Gruppen.*

Bemerkung. Genau gesagt werden in [Me06] nur Lohse-Gruppen betrachtet, bei welchen die Lohse-Eigenschaft auch über die Ränder hinaus erhalten bleibt. Das bedeutet, dass die Bedingung

$$a_{ij} \neq a_{i+1,j+1} \text{ und } a_{i+1,j} \neq a_{i,j+1}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt, wobei die Indizes modulo n gerechnet werden. Wir haben diese Zusatzforderung für die Ränder bei der Parkettierung der Badezimmer-Wände mit Fliesen im Abschnitt 2

angetroffen. Die Klassifikation der Gruppen, welche auch der Zusatzforderung genügen, ist letztlich jedoch dieselbe wie diejenige der Lohse-Gruppen in unserem Sinne. Die einzige Ausnahme ist die triviale Gruppe, welche eine Lohse-Gruppe ist, aber die obige stärkere Bedingung nicht erfüllt. Der Beweis dieser Klassifikation kann auf dieselbe Art erbracht werden, wie es in der Folge getan wird. Man muss dazu im Wesentlichen nur die Definition von $Q(e)$ entsprechend anpassen (durch Hinzunahme der Elemente $g_1^{-1}g_n$ und $g_n^{-1}g_1$) und Hamilton-Wege durch Hamilton-Kreise ersetzen.

Wir verwenden zum Beweis von Theorem 7.1 folgendes relativ schwieriges Resultat aus der Literatur [PR09]:

Theorem 7.2. *Jede endliche Gruppe G der Ordnung $|G| \geq 3$ hat ein Erzeugendensystem T der Kardinalität $|T| \leq \lfloor \log_2(|G|) \rfloor$, so dass der Cayley-Graph von G bzgl. $S := T \cup T^{-1}$ einen Hamilton-Weg enthält.*

Beweis. Siehe [PR09, Theorem 1]. □

Beweis von Theorem 7.1. Unsere Beweisstrategie ist wie folgt: Für Gruppen von genügend grosser Ordnung (speziell Ordnung ≥ 18) wenden wir Theorem 7.2 an, um sie als Lohse-Gruppen zu identifizieren. Die verbleibenden Fälle von Gruppen kleinerer Ordnung behandeln wir einzeln. Diese Gruppen sind gut bekannt. Ihre Klassifikation findet sich z.B. auf der Wikipedia-Liste von Gruppen kleiner Ordnung [Wi] oder implementiert im Computer-Algebra System GAP (Groups, Algorithms and Programming) [GAP]. Einige dieser Gruppen kleiner Ordnung haben wir schon weiter oben betrachtet, so dass wir für diese nur unsere bisherigen Erkenntnisse in Erinnerung rufen müssen.

Betrachten wir also zuerst den Fall von Gruppen genügend grosser Ordnung: Sei $n := |G|$ und $n \geq 18$ oder $n \in \{14, 15\}$. Sei $S = T \cup T^{-1}$ ein symmetrisches Erzeugendensystem wie in Theorem 7.2. Wegen $|T| \leq \lfloor \log_2(n) \rfloor$ ist $|S| \leq 2|T| \leq 2\lfloor \log_2(n) \rfloor \leq n/2 - 1$. Die letzte Ungleichung gilt gerade für die betrachteten Werte von n. Ausserdem existiert wegen der Existenz eines Hamilton-Wegs im Cayley-Graphen von G bzgl. S eine Aufzählung e mit $Q(e) \subseteq S$. Die Aussage folgt also aus Theorem 6.3.

Nun betrachten wir die verbliebenen Fälle mit $n = |G| \in \{1, 2, \ldots, 13\} \cup \{16, 17\}$.

(a) $n \leq 4$: Die triviale Gruppe der Ordnung 1 ist eine Lohse-Gruppe. Im Abschnitt 2 haben wir gesehen, dass es kein Lohse-Quadrat der Ordnung 2, 3 und 4 gibt. Also gibt es auch keine Lohse-Gruppe entsprechender Ordnung.

(b) Ist $n = 5, 7, 11, 13$ oder 17, so ist G zyklisch. Diesen Fall haben wir schon im Beispiel 6.1 betrachtet.

(c) $n = 6$: Die Gruppen der Ordnung 6 sind isomorph zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ oder S_3. Diese sind Lohse-Gruppen, wie wir in Abschnitt 3 gesehen haben.

(d) $n = 8$: Die Gruppen der Ordnung 8 sind isomorph zu Q_8, D_8, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ oder $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die ersten drei Gruppen haben wir schon in Proposition 4.4, Aufgabe 5.3 bzw. Beispiel 6.1 betrachtet. Die letzten beiden Gruppen haben symmetrische Erzeugendensysteme der Ordnung $3 < n/2$, so dass wir Theorem 6.4 anwenden können.

(e) $n = 9$: Die Gruppen der Ordnung 9 sind isomorph zu $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Diese haben wir schon in Aufgabe 6.1 und Beispiel 6.1 betrachtet.

(f) $n = 10$: Die Gruppen der Ordnung 10 sind isomorph zu $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ oder D_{10}. Diese wurden schon in den Beispielen 6.1 und 6.2 abgehandelt.

(g) $n = 12$: Die Gruppen der Ordnung 12 sind isomorph zu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, D_{12}, A_4, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder der dizyklischen Gruppe, welche von zwei Elementen x, y erzeugt ist mit $x^6 = n, y^4 = x^2$ und $yxy^{-1} = x^{-1}$. Die ersten drei Gruppen haben wir schon in den Beispielen 6.1, 6.2 bzw. im Abschnitt nach Aufgabe 6.3 angeschaut. Die Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und die dizyklische Gruppe haben symmetrische Erzeugendensysteme der Ordnung 3 bzw. $4 < n/2$, so dass wir Theorem 6.4 anwenden können.

(h) $n = 16$: Sei T ein minimales Erzeugendensystem von G und $S = T \cup T^{-1}$. Falls G nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ist, gilt $|T| \leq 3$ und damit $|S| \leq 6$. Im Falle der Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ist $S = T$ und somit $|S| = 4$. Also hat G in jedem Fall ein symmetrisches Erzeugendensystem mit höchstens 6 Elementen. Da $6 < n/2$ ist, können wir wieder Theorem 6.4 anwenden.

□

8 Reflexion über den Bezug zum gymnasialen Unterricht

Weder Lateinische Quadrate noch Gruppen sind Standard-Stoff in Schweizer Gymnasien. Jedoch bieten sie eine Erweiterung des Standard-Stoffs, der zum Teil durchaus auch interessierten Gymnasiasten zugänglich ist. Die Bilder von Lohse-Quadraten, vielleicht im Klassenzimmer aufgehängt, könnten die Neugier der Schülerinnen und Schüler wecken. Dass hinter ihrer Ästhetik Mathematik steckt, dürfte den meisten Betrachtern irgendwie einleuchten. Nur welche Art von Mathematik dahinter steckt, das ist dem Laien verborgen.

Lohse-Gruppen können durchaus in einer Maturaarbeit studiert werden. Das Thema eignet sich einerseits für Schülerinnen und Schüler, welche sich mit einem tiefgreifenden Konzept der Mathematik wie dem Gruppenkonzept auseinandersetzen möchten. Durch die Verbindung mit konkreten Bildern von Lohse-Quadraten dürfte es den Einstieg in diese recht abstrakte Materie vereinfachen. Andererseits eignet sich das Thema auch für Schüler und Schülerinnen, welche einen starken Bezug zur Kunst herstellen und mit verschiedenen farblichen Umsetzungen experimentieren wollen. In dieser Hinsicht ist die Behandlung des Thema auf weniger vertieftem Niveau auch im Rahmen einer Projektarbeit in Zusammenarbeit mit dem Bildnerischen Gestalten denkbar.

9 Musterlösungen

Zu Aufgabe 2.1. (a) Beim dritten und vierten Gemälde handelt es sich um lateinische Quadrate der Ordnung 15 bzw. 30. Das zweite Gemälde ist kein lateinisches Quadrat, da nicht in jeder Spalte die gleichen Farben auftreten. Zum Beispiel tritt gelb in der ersten Spalte auf, jedoch nicht in der zweiten Spalte.

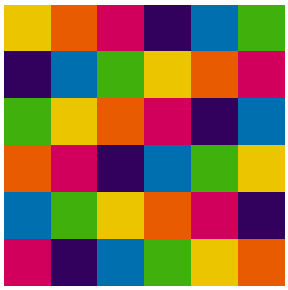
(b) Eine mögliche Vermutung ist die folgende: Zur Konstruktion der Bilder wurde eine Reihe verschiedener Farben gewählt und in eine Zeile oder eine Spalte eingetragen. Dann wurde diese Zeile (resp. Spalte) jeweils zyklisch permutiert in die folgenden Zeilen (resp. Spalten) eingetragen. Dabei wurde darauf geachtet, dass jede Zeile (resp. Spalte) jeweils mit einer anderen Farbe beginnt. Ausserdem wurde durch Ausprobieren erreicht, dass diagonal angrenzende Felder verschiedene Farben zugewiesen erhalten.

(c) Es fällt auf, dass diagonal angrenzende Felder immer verschiedene Farben tragen.

Zu Aufgabe 2.2. Das Element a_{23} ist verschieden von a_{21}, a_{22} und a_{12}. Da a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} paarweise verschieden sind und es nur vier Farben gibt, muss also $a_{23} = a_{11}$ sein. Analog zeigt man $a_{32} = a_{11}$. Es folgt $a_{32} = a_{23}$. Dies widerspricht der Lohse-Eigenschaft.

Zu Aufgabe 2.3.

Durch Vertauschen der vierten und sechsten Zeile erhält man das Lohse-Quadrat gegenüber, welches die gewünschte Eigenschaft hat.



Zu Aufgabe 3.1. (a) Die Aufzählung $v = (\bar{0}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{1})$ tut das Gewünschte.

(b) Es ist einfach ersichtlich, dass der vertikale links äussere Farbstreifen nach rechts zyklisch permutiert in jeder Spalte auftritt. Wählt man $h = (\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{29})$ und $v = (\bar{0}, \overline{13}, \overline{15} \ldots)$ mit Reihenfolge gegeben durch die Farben in der ersten Zeile, so erhält man das gegebene Lohse-Quadrat.

(c) Tatsächlich ist auch dieses Farbquadrat ein Lohse-Quadrat einer zyklischen Gruppe, $G = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass sich die erste Zeile zyklisch permutiert wiederholt.

Zu Aufgabe 3.2. Wie im Hinweis setzen wir $h = ((1), (12), (13), (23), (123), (132))$ und $v = ((1), g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$ mit $g_2, \ldots, g_6 \in S_3$ noch zu bestimmen. Gemäss dem Hinweis können wir die Elemente $g_2, \ldots, g_6$ so wählen, dass $g_2 \cdot (13) = (1)$, $g_3 \cdot (123) = (1)$, $g_4 \cdot (12) = (1)$, $g_5 \cdot (132) = (1)$ und $g_6 \cdot (23) = (1)$. Damit kommen wir auf

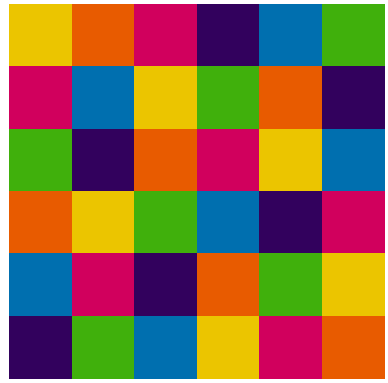
$$v = ((1), (13), (132), (12), (123), (23))$$

und

die Cayley-Tafel:

$$\begin{pmatrix} (1) & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \\ (13) & (123) & (1) & (132) & (12) & (23) \\ (132) & (23) & (12) & (13) & (1) & (123) \\ (12) & (1) & (132) & (123) & (23) & (13) \\ (123) & (13) & (23) & (12) & (132) & (1) \\ (23) & (132) & (123) & (1) & (13) & (12) \end{pmatrix}$$

das entsprechende Farbquadrat:



Zu Aufgabe 4.1. Im Fall $v = h^{-1}$ sind alle Diagonalelemente gleich dem Neutralelement. Für eine nicht-triviale Gruppe widerspricht dies der Lohse-Eigenschaft. Im Fall $v = h$ betrachten wir ein nicht-triviales Gruppenelement, welches in v direkt vor oder nach dem Neutralelement n kommt. Wegen $ng = g = gn$ haben wir dann zwei diagonal angrenzende Felder mit gleichen Farben.

Zu Aufgabe 4.2. Aus Aufgabe 3.1 haben wir $h = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})$ und $v = (\bar{0}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{1})$. Es ist gilt

$$h^{-1} = (\bar{0}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}).$$

Wir haben

$$\begin{aligned} Q(v) &= \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{3}\} \cup \{\bar{3}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{3}\} = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \\ Q(h^{-1}) &= \{\bar{1}\} \cup \{\bar{5}\} = \{\bar{1}, \bar{5}\}. \end{aligned}$$

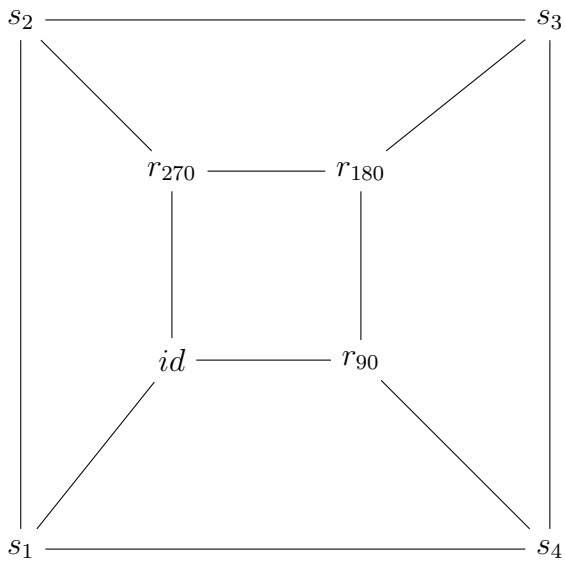
Damit gilt tatsächlich $Q(v) \cap Q(h^{-1}) = \emptyset$.

zu Aufgabe 4.3. Im Falle der Gruppe S_3 haben wir Mengen $Q(e)$ der Form $Q(v) = \{(13), (23)\}$ und $Q(h^{-1}) = \{(12), (123), (132)\}$ betrachtet. Im Falle der Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ waren es Mengen $Q(e)$ der Form $Q(v) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ und $\{\bar{1}, \bar{5}\}$. Wie man in diesen Beispielen sieht, enthält keine dieser Mengen das Neutralelement. Jede dieser Mengen ist symmetrisch unter Inversenbildung und erzeugt die Gruppe. Letzteres wird in Lemma 4.3 noch bewiesen.

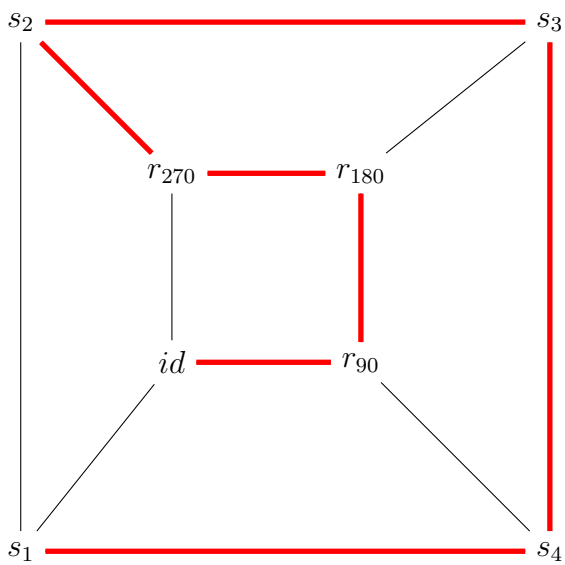
Zu Aufgabe 5.1.
Wir betrachten zuerst einen beliebigen Knoten $g \in G$ des Cayley-Graphen (gegeben durch ein Gruppenelement). Kanten gibt es zwischen g und allen Elementen der Form gs mit $s \in S$. Also gibt es genau so viele Kanten von g aus wie Elemente von S. Da jede Kante genau zwei Knoten verbindet, hat der Cayley-Graph also genau $\frac{|S| \cdot n}{2}$ Kanten.

Zu Aufgabe 5.2.

(a)



(b)

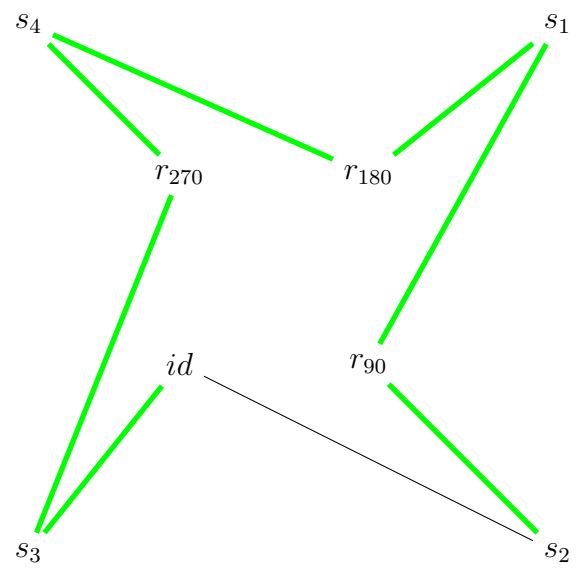


Zu Aufgabe 5.3.

(a) Wegen $s_2 = s_1 \circ r_{90}$ und $s_3 = s_1 \circ r_{180}$ liegt $s_2^{-1}s_3 = r_{90}^{-1}s_2^{-1}s_1r_{180} = r_{90}$ im Erzeugnis von s_2 und s_3. Damit ist auch $s_1 = s_2r_{90}^{-1}$ im Erzeugnis. Da r_{90} und s_1 die Gruppe erzeugen, folgt die Aussage.

(b), (c)

Gegenüber ist der Cayley Graph von D_8 bzgl. $S' = \{s_2, s_3\}$ zusammen mit einem Hamilton-Weg (in grün) dargestellt. Nur die Kante zwischen der Identität und s_2 gehört nicht zu diesem Weg.



Zu Aufgabe 6.1. Die Teilmenge $S = \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\}$ ist ein symmetrisches Erzeugenden-System von $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ mit $|S| = 4 < 4.5 = |G|/2$. Wegen $|G| = 9 < 72$ können wir also Theorem 6.4 anwenden.

Um Theorem 6.3 anwenden zu können, würden wir ein symmetrisches Erzeugendensystem $S' = Q(e)$ mit ≤ 3.5 (also maximal 3) Elementen benötigen. Ein solches Erzeugendensystem besitzt G jedoch nicht. Da in G kein Element gleich seinem Inversen ist (insbesondere $S' = \{x, x^{-1}\}$ mit höchstens 2 Elementen), wäre G sonst nämlich zyklisch, was nicht der Fall ist.

Zu Aufgabe 6.2. (a) 1) Identität: 1 Element mit Ordnung 1. Zykelschreibweise: (1)

2) Rotationen von Typ 2): 3 Elemente mit Ordnung 2.
Zykelschreibweise: $(12)(34), (13)(24)$ und $(14)(23)$.

3) Rotationen von Typ 3): 8 Elemente mit Ordnung 3.
Zykelschreibweise: $(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234)$ und (243)

(b) Die Teilmenge $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ der A_4, gebildet aus den Elementen von Typ 1) und 2) enthält das Neutralelement (1), ist geschlossen unter Inversen (da jedes Element invers zu sich selbst ist) und geschlossen unter der Gruppenverknüpfung. Nämlich ergibt die Verknüpfung von zwei Rotationen von Typ 2) die jeweils dritte dieses Typs. Also ist V eine Untergruppe.

(c) Enthält eine Teilmenge von der A_4 kein Element von Typ 3), so ist die davon erzeugte Untergruppe in V enthalten. Es handelt sich dann also um kein Erzeugendensystem. Jedes Element von Typ 3) ist eine Rotation um 120°. Das Inverse Element ist die Rotation um 120° um die selbe Achse in die entgegengesetzte Richtung und verschieden davon.

(d) Laut (c) muss jedes symmetrische Erzeugendensystem S' von A_4 mindestens ein Element von Typ 3) und das Inverse dazu enthalten. Da A_4 nicht zyklisch ist, muss S' noch mindestens ein weiteres Element enthalten. Daher hat es mindestens 3 Elemente.

(e) Sei S' ein minimales symmetrisches Erzeugendensystem der A_4 und $u \in S'$ ein Element aus $A_4 \setminus V$. Damit ist auch $u^{-1} \in S'$. Enthielte S' noch ein weiteres Element von Typ 3), so hätte

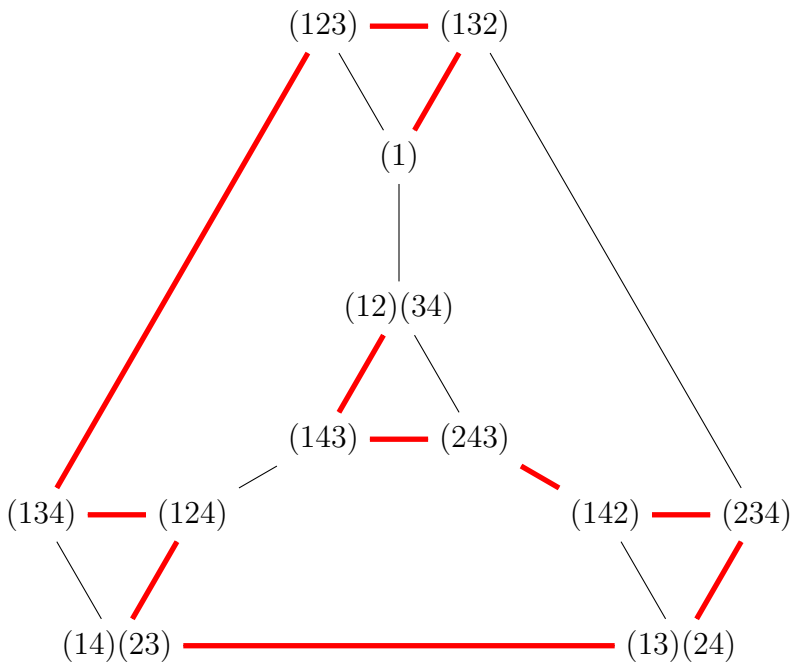
S' schon mindestens 4 Elemente. Also ist S' von der Form

$$S' = \{u, u^{-1}, v\}$$

mit u von Typ 3) und v von Typ 2). Jede solche Menge erzeugt in der Tat A_4. Nämlich ist uvu^{-1} ebenfalls von Typ 2) und verschieden von v. Daher enthält das Erzeugnis von S' sowohl ganz V (erzeugt durch v und uvu^{-1}) wie auch das Element $u \in A_4 \setminus V$. Da V eine maximale Untergruppe der A_4 ist, folgt wie behauptet, dass S' ein Erzeugendensystem ist.

Für v gibt es 3 Elemente zur Auswahl. Für u gibt es bis auf Inverse 4 Möglichkeiten. Die Anzahl der minimalen symmetrischen Erzeugendensysteme der A_4 ist daher gleich $4 \cdot 3 = 12$.

Zu Aufgabe 6.3.



Literatur

[Di52] G.A. Dirac: *Some theorems on abstract graphs*, Proc. Lond. Math. Soc. **2** (1952), 69–81.

[GAP] GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra. Online im Internet: `http://www.gap-system.org` (Zugriff 11. 8. 2016)

[KMMMS12] K. Kutnar, D. Marusic, D.W. Morris, J. Morris, P.Sparl: *Hamiltonian cycles in Cayley graphs whose order has few prime factors*, Ars Mathematica Contemporenea A **5** (2012) 27–7.

[Lo69a] R.P. Lohse: *Acht vertikale systematische Farbreihen 1955/1969* Datierung: 1969, Kunsthaus Zürich. Online im Internet: `http://www.sikart.ch/Werke.aspx?id=11721782` (Zugriff 1. 4. 2016)

[Lo69b] R.P. Lohse: *15 ineinandergehende systematische Farbreihen in drei horizontalen Gruppen 1943/1969/1* Datierung: 1969, Kunsthaus Zürich. Online im Internet: `http://www.sikart.ch/Werke.aspx?id=13748688` (Zugriff 1. 4. 2016)

[Lo70] R.P. Lohse: *Dreissig vertikale systematische Farbreihen in gelber Rautenform 1943/1970* Datierung: 1970, Kunsthaus Zürich. Online im Internet: `http://www.sikart.ch/werke.aspx?id=11721798` (Zugriff 1. 4. 2016)

[Lo76] R.P. Lohse: *Komplementäre Gruppen durch sechs horizontale systematische Farbreihen 1950/1976/2* Datierung: 1976, Kunsthaus Zürich. Online im Internet: `http://www.sikart.ch/Werke.aspx?id=13748688` (Zugriff 1. 4. 2016)

[Me06] D. Meier: *On groups with the Lohse property*, European Journal of Combinatorics **27** (2006), 1042–1053.

[PR09] I. Pak, R. Radoicic: *Hamiltonian paths in Cayley graphs*, Discrete Mathematics **309**(17) (2009), 5501–5508.

[PWi] Seite "Dirac's Theorem". In: proofwiki, Online Enzyklopädie von mathematischen Beweisen. Bearbeitungsstand: 29. 6. 2013, 15:57 UTC. Online im Internet: `https://proofwiki.org/wiki/Dirac's_Theorem` (Zugriff 14.8.2016)

[Wi] Seite "Liste kleiner Gruppen". In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 5. 8. 2016, 07:53 UTC. Online im Internet: `https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_kleiner_Gruppen` (Zugriff 11.8.2016)