

Linsengleichung und Akkommodation

Schülerversion

Erasmus Bieri und Christian Helm

Juni 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Linsengleichung und Akkommodation	1
1.1	Repetition: Die Linsengleichung	1
1.2	Auf welche Arten lässt sich die Linsengleichung erfüllen?	3
1.2.1	Akkommodation	3
1.2.2	Realisierungen der Akkommodation in Technik und Natur . .	5
1.3	Das menschliche Auge	6
1.3.1	Akkommodation beim Menschen	6
1.3.2	Fehlsichtigkeit: Kurz- und Weitsichtigkeit	9
2	Zusatzaufgabe	11
3	Begleitmaterial	13
3.1	Herleitung der Linsengleichung	13
3.2	Akkommodation beim Knochenfisch	14
3.3	Akkommodation beim Tintenfisch	15
3.4	Akkommodation beim Vieraugenfisch	16
3.5	Akkommodation beim Kormoran	16
4	Lösungen	17

1 Linsengleichung und Akkommodation

Das Ziel dieser Unterrichtseinheit ist zuerst die *praktische Anwendung* der Linsengleichung. Dann werden wir uns fragen, was es braucht, dass ein Auge einen Gegenstand deutlich abbildet, auch *Akkommodation* genannt. Zuletzt untersuchen wir noch die Gründe und Korrekturmöglichkeiten (Brille) für *Kurz- und Weitsichtigkeit*.

1.1 Repetition: Die Linsengleichung

Im folgenden Abschnitt repetieren wir nochmals kurz das bereits behandelte Wissen über Abbildungen mit *dünnen* Sammellinsen.

Durch eine dünne Sammellinse kann einfallendes Licht durch Brechung derart abgelenkt werden, dass auf einer dahinter liegenden *Bildebene* ein deutliches, auf dem Kopf stehendes, Bild entsteht (vgl. auch Abb. 1). Parallel zur *Linsenachse* eintreffende Strahlen, werden durch den *Brennpunkt* oder Fokus *F* abgelenkt, Strahlen genau durch die Mitte der Linse hingegen werden praktisch nicht abgelenkt. Somit trifft sich Licht, dass von einem punktförmigen Gegenstand ausgesendet wird, genau in einem Punkt hinter der Linse wieder. Liegt dieser Punkt genau auf der Bildebene, so entsteht dort ein deutliches Bild. Wenn nicht, wird das Bild unscharf und “verwaschen”. Bezogen auf unser Auge entspricht die Bildebene der lichtempfindlichen *Netzhaut* (siehe auch Abb. 2 auf S. 7).

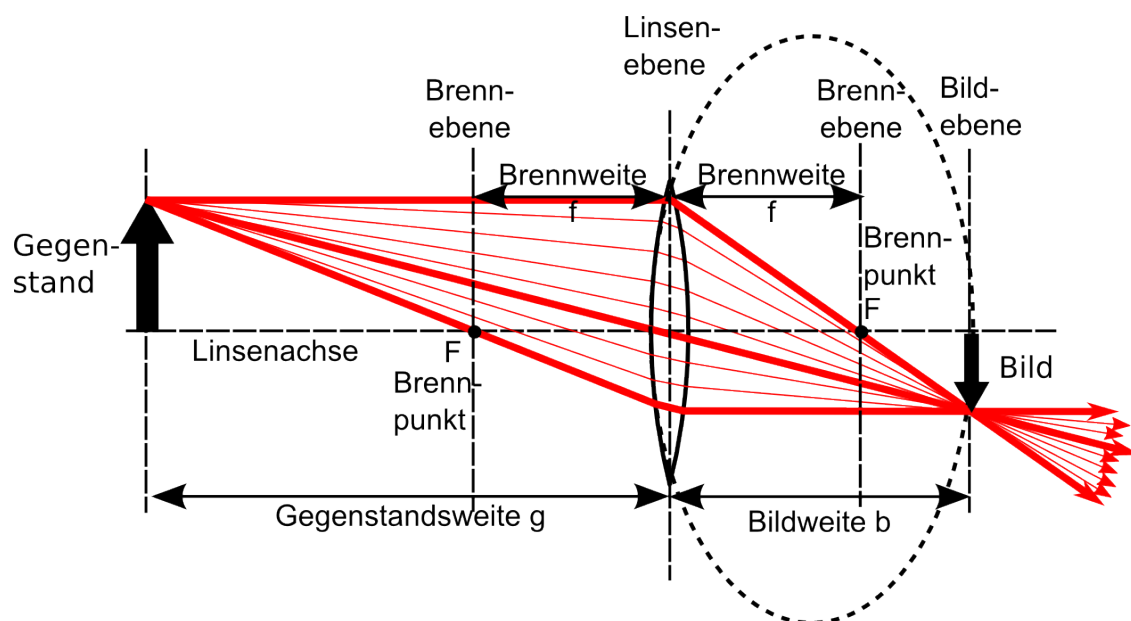


Abbildung 1: Strahlengang bei der Abbildung eines *Gegenstandes* durch eine dünne Sammellinse, welche charakterisiert ist durch ihre *Brennweite* f . Die gestrichelte Linie deutet das menschliche Auge an (nur schematisch, das Auge hat eine Kugelform!).

Den Abstand zwischen Linse und Brennpunkt F nennt man *Brennweite* f . Je stärker eine Linse gekrümmt ist, desto stärker wird das Licht zur Linsenachse hin abgelenkt und desto kleiner ist die Brennweite. Das optische Verhalten einer dünnen Linse kann durch die Kenntnis ihrer Brennweite beschrieben werden. Einer Sammellinse (wie in Abb. 1) ordnet man eine *positive* Brennweite zu, einer Zerstreuungslinse hingegen eine *negative* Brennweite.

Den Abstand zwischen Gegenstand und Linse nennt man *Gegenstandsweite* g und der Abstand zwischen Linse und Bild heisst *Bildweite* b . Bezogen auf unser menschliches Auge entspricht die Bildweite etwa dem Durchmesser des Auges.

Eine *deutliche* Abbildung ergibt sich, sofern die *Linsengleichung*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (1)$$

erfüllt ist. Falls Sie sich die Herleitung der Linsengleichung in Erinnerung rufen möchten, so schauen Sie sich nochmals die Folien *HerleitungLinsengleichung.pdf* im Ordner *Begleitmaterial* an. Das Resultat dieser Herleitung finden Sie auch in Abschnitt 3.1 auf S. 13.

Um diese Linsengleichung besser zu verstehen, untersuchen wir in den folgenden Experimenten eine Sammellinse mit positiver Brennweite. Notieren Sie sich alle Ergebnisse in ein Heft oder auf separate Blätter.

Bitte achten Sie darauf, dass Gegenstands- und Bildebene immer *mindestens das Vierfache der Brennweite der verwendeten Sammellinse* auseinander liegen, da Sie ansonsten kein deutliches Bild zustande bringen.

Aufgabe 1

Teilaufgabe 1.1 Abbildung durch Sammellinse

Fixieren Sie die Position von Gegenstand (Kerze, Lampe) und Bildebene (Mattscheibe) und fahren Sie dazwischen *nur* mit der Sammellinse hin und her.

- Bei wie vielen Positionen der Linse erhalten Sie ein deutliches Bild? Wann ist das Bild grösser als der Gegenstand? Wann kleiner? Verwenden Sie bei Ihrer Beschreibung die Ausdrücke Bildweite und Gegenstandsweite.
- Gibt es einen Zusammenhang zwischen den beiden Positionen, d. h. können Sie bei Kenntnis der einen Position die andere ohne eine weitere Messung vorhersagen?
- Wie schon in Abb. 1 angedeutet, entstehen die Bilder in unserem Auge analog zu dem Aufbau, welchen Sie vor sich haben. Die Bildweite ist dabei etwa durch die Länge des Auges vorgegeben. Der hintere, lichtempfindliche Teil unseres Auges, die sogenannte *Netzhaut*, bildet die Bildebene. Wenn Sie einen Baum betrachten, so wird der ganze Baum auf diese Netzhaut abgebildet.

Welcher der beobachteten Fälle, Vergrößerung oder Verkleinerung, könnte also auf unser Auge zutreffen? Geben Sie eine Begründung und gehen Sie dabei auf den Zusammenhang mit den Begriffen Gegenstands- und Bildweite ein.

- d) Machen Sie eine Skizze für den Fall des vergrößerten Bildes. Kennen Sie Alltagsanwendungen?

Teilaufgabe 1.2 Linsengleichung

Überprüfen Sie die Linsengleichung. Stimmt die Aussage, dass ein deutliches Bild entsteht, wenn die Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ erfüllt ist?

Stellen Sie dazu für drei beliebige, aber *unterschiedliche* Positionen (von Gegenstand, Linse und Bild) die Gegenstands- und Bildweite so ein, dass eine deutliche Abbildung zu sehen ist. Messen Sie für jede der drei Positionen die Gegenstands- und Bildweite und berechnen Sie mit Hilfe der Linsengleichung die Brennweite f der Linse. Verwenden Sie dazu unten stehende Tabelle. Bestimmen Sie den Mittelwert dieser drei Ergebnisse. Stimmt dieser Mittelwert mit der Angabe auf der Linse überein?

	Gemessene Gegenstandsweite g	Gemessene Bildweite b	Berechnete Brennweite f
Messung 1			
Messung 2			
Messung 3			
		Mittelwert Brennweite (gemessen)	
		Aufschrift Linse	

1.2 Auf welche Arten lässt sich die Linsengleichung erfüllen?

1.2.1 Akkommodation

Halten Sie Ihren Finger ca. 20 Zentimeter vor Ihr Auge, sodass Sie ihn deutlich sehen können. Eine Wand im Hintergrund sollte dann undeutlich erscheinen. Ohne Auge und Finger zu bewegen, fokussieren Sie nun die Wand. Versuchen Sie Wand und Finger gleichzeitig deutlich zu sehen. Es geht nicht! Wechseln Sie mehrmals mit dem Fokus zwischen Wand und Finger hin und her. Vielleicht werden Sie feststellen, dass Ihr Auge aktiv mit Hilfe von Muskeln „arbeitet“. Diesen Vorgang des „Deutlichstellens“ nennt man *Akkommodation*.

Wie macht unser Auge das?

Bevor wir uns auf das menschliche Auge konzentrieren, wollen wir uns überlegen, wie wir von einem undeutlichen zu einem deutlichen Bild kommen. Offensichtlich ist bei einem undeutlichen Bild die Linsengleichung nicht erfüllt.

Aufgabe 2

Teilaufgabe 2.1 Deutliches und undeutliches Bild

Stellen Sie mit Hilfe einer Sammellinse einen Gegenstand *deutlich* dar. Verschieben Sie nun die Linse, sodass das Bild wieder *undeutlich* erscheint.

Was kann man nun ändern, damit das Bild wieder deutlich wird? Es gibt *mehrere* Möglichkeiten! Gehen Sie bei Ihrer Untersuchung systematisch vor, indem Sie nie mehr als eine Grösse in der Linsengleichung auf einmal ändern. Machen Sie zuerst eine Skizze der Situation und bezeichnen Sie die Grössen, welche Sie überhaupt verändern können.

Teilaufgabe 2.2 Hellraumprojektor

Untersuchen wir nun einen Hellraumprojektor. Was macht man genau, wenn man bei einem Hellraumprojektor das Bild deutlich einstellt? Machen Sie dazu eine Zeichnung auf die Folie des Hellraumprojektors, welche ein definiertes Oben und Unten hat, z. B. ein Haus.

- a) Damit keine Missverständnisse entstehen: Entspricht die eben gemachte Zeichnung auf der Folie des Hellraumprojektors dem “Gegenstand” oder dem “Bild”? Weshalb?
- b) Wo befindet sich die Linse beim Hellraumprojektor? Machen Sie zuerst eine Skizze, welche den Lichtweg ohne den Spiegel beschreibt.
- c) Nun fügen Sie in die gleiche Skizze den Spiegel ein und wenden das Reflexionsgesetz an. Erhalten Sie das beobachtete Ergebnis (unten auf der Folie entspricht unten auf der Leinwand)?
- d) Es gibt zwei unterschiedliche Möglichkeiten, um die Deutlichkeit des Bildes einzustellen, welche? Gehen Sie dabei systematisch vor, indem Sie nie mehr als eine Grösse in der Linsengleichung auf einmal ändern. Beschreiben Sie die beiden Methoden.

Teilaufgabe 2.3 Brennweite

Schätzen Sie die Brennweite der Linse des Hellraumprojektors ab.

1.2.2 Realisierungen der Akkommodation in Technik und Natur

Aufgabe 3

Wir haben also gesehen, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, ein Bild deutlich zu stellen. Wir untersuchen nun verschiedene Beispiele. Überlegen Sie sich bei den folgenden Beispielen, welche optische Grösse angepasst wird, um ein deutliches Bild zu erhalten.

Teilaufgabe 3.1 Hellraumprojektor

Betrachten wir nochmals als Repetition den Hellraumprojektor: Welche Grössen können angepasst werden, um ein deutliches Bild zu erhalten? Sofern dies möglich ist, ändern Sie am besten immer nur eine Grösse auf einmal.

Teilaufgabe 3.2 Diaprojektor

- a) Bei einem Diaprojektor wird z. B. ein 24×36 mm breites Dia (Gegenstand) auf eine ca. 5 m entfernte Leinwand projiziert. Das Bild hat z. B. eine Breite von 3 m. Skizzieren Sie die Situation (nur qualitativ, massstabsgetreu ist nicht möglich!). Beschränken Sie sich im Folgenden auf die Breite des Bildes und bestimmen Sie Bild- und Gegenstandsgrösse, Bild- und Gegenstandsweite, sowie den Abbildungsmassstab des Diaprojektors. Einige Grössen finden Sie in der Aufgabenstellung, andere müssen Sie berechnen. Wie gross muss die Brennweite der verwendeten Linse sein?
- b) Um ein deutliches Bild einzustellen, wird beim Diaprojektor die Linse weniger als ein Millimeter verschoben, während die Position von Dia und Leinwand nicht verändert wird. Welche optischen Grössen werden dabei verändert? Um wieviele Prozent ändern sich diese Grössen, wenn die Linse um 0.1 mm verschoben wird?

Teilaufgabe 3.3 Knochen- und Tintenfisch

- a) Beschreiben Sie die Akkommodation beim **Knochenfisch**. Schauen Sie sich dazu die Folien **Knochenfisch.pdf** im Ordner **Begleitmaterial** an. Sie finden Sie auch im Abschnitt 3.2 auf S. 14.
Auf den Folien sehen Sie einen kleinen Fisch, welcher durch das Auge eines Knochenfisches deutlich abgebildet wird (Folie 1). Danach entfernt sich der kleine Fisch vom Auge, wodurch das Bild unscharf wird (Folie 2). Nun akkommodiert der Knochenfisch, d. h. das Auge stellt wieder ein scharfes Bild ein (Folie 3).
Welche Grössen (Gegenstandsweite, Bildweite, Brennweite) werden dabei angepasst und welche nicht? Auf welche Weise wird diese Anpassung erreicht?
- b) Beschreiben Sie die Akkommodation beim **Tintenfisch**. Schauen Sie sich dazu die Folien **Tintenfisch.pdf** im Ordner **Begleitmaterial** an. Sie finden Sie auch im Abschnitt 3.3 auf S. 15.
Auf den Folien sehen Sie einen kleinen Fisch, welcher durch das Auge eines Tintenfisches deutlich abgebildet wird (Folie 1). Dann nähert sich der kleine Fisch dem Auge, wodurch das Bild unscharf wird (Folie 2). Nun akkommodiert

der Tintenfisch (Folie 3).

Welche Grössen (Gegenstandsweite, Bildweite, Brennweite) werden dabei angepasst und welche nicht? Auf welche Weise wird diese Anpassung erreicht?

- c) Vergleichen Sie die Akkommodation von Knochen- und Tintenfisch. Was ist gleich, was ist unterschiedlich?

Teilaufgabe 3.4 Vieraugenfisch und Kormoran

Der Vieraugenfisch und der Kormoran können beide sowohl unter wie über Wasser gut sehen¹. Wie machen sie das?

- a) Wie akkommodiert der **Vieraugenfisch** unter und über Wasser? Schauen Sie sich dazu die Folien **Vieraugenfisch.pdf** im Ordner **Begleitmaterial** an. Sie finden Sie auch im Abschnitt 3.4 auf S. 16.
- b) Wie akkommodiert der **Kormoran** unter und über Wasser? Schauen Sie sich dazu die Folien **Kormoran.pdf** im Ordner **Begleitmaterial** an. Sie finden Sie auch im Abschnitt 3.5 auf S. 16.

1.3 Das menschliche Auge

1.3.1 Akkommodation beim Menschen

Und wie funktioniert die Akkommodation beim menschlichen Auge, wenn sich ein Gegenstand unserem Auge nähert, bzw. wir von der Ferne in die Nähe schauen? Werden unsere Augen länger, bekommen wir gar *Stielaugen*? Nein, die Bildweite b bei unserem Auge ist unveränderlich, vorgegeben durch die Länge des Augapfels. Bei genauerer Betrachtung wird das Licht im Auge *mehrfach* gebrochen, zuerst an der Grenzfläche Luft-Hornhaut, dann beim Übergang zwischen vorderer Augenkammer und der Augenlinse und schliesslich nochmals zwischen Augenlinse und Glaskörper. Dieser komplexe Aufbau kann gut mit einer Linse einer bestimmten Brennweite angenähert werden. Man nennt diese Idealisierung auch *reduziertes Auge*, welche uns auch im weiteren als Modell dienen soll [5].

Wenn sich also die Position des abzubildenden Gegenstandes ändert, so ändert sich die Gegenstandsweite g . Da die Länge unseres Augapfels fest ist, muss somit bei der Sehschärfeanpassung (Akkommodation) die Brennweite f der Augenlinse verändert werden. Die Brennweite einer Linse hängt von deren Krümmung ab. Bei einer grossen Krümmung werden die Lichtstrahlen stärker abgelenkt und der Brennpunkt liegt näher bei der Linse, die Brennweite wird also kleiner. Je weniger hingegen die Linse gekrümmt ist, je flacher sie also ist, desto grösser wird ihre Brennweite. Beim Menschen wird die Krümmung der sich im Augapfel befindlichen Linse durch den sie umgebenden Ziliarmuskel gesteuert.

¹Im Gegensatz z. B. zu uns Menschen: Unter Wasser sehen wir immer verschwommen.

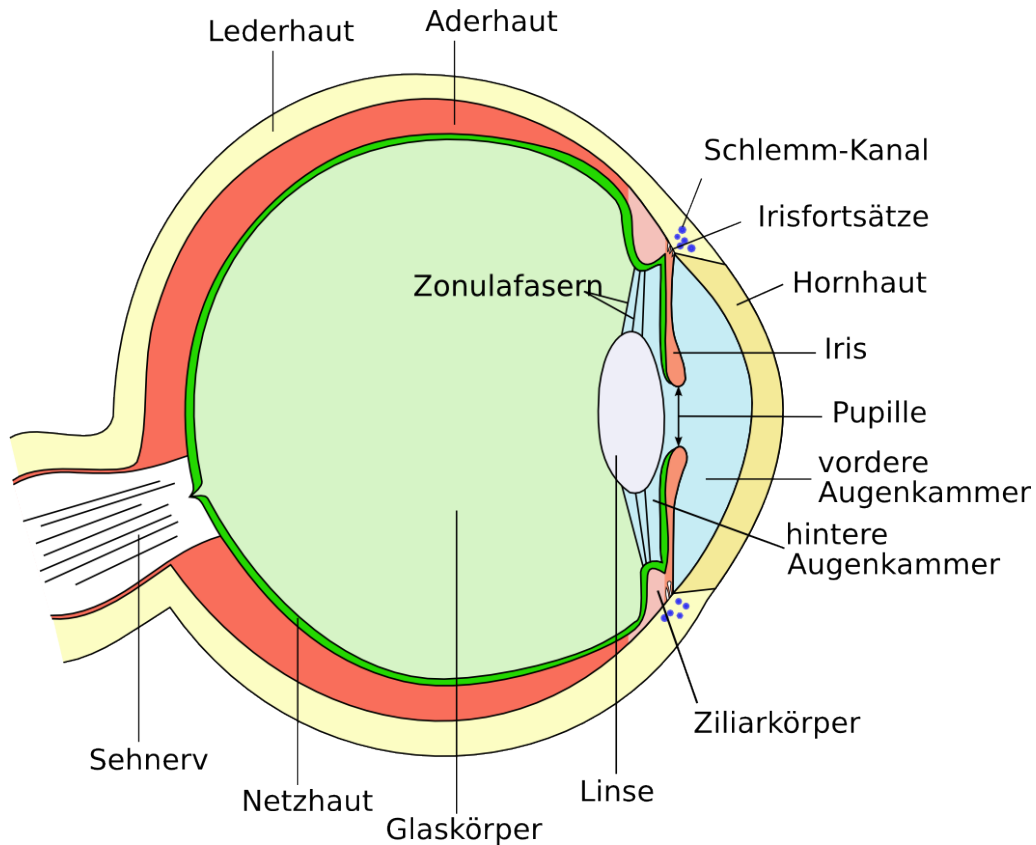


Abbildung 2: Eine schematische Darstellung des menschlichen Auges ([6] bzw. [7]).

Entspannter Ziliarmuskel: Fernakkommodation

Im entspannten Zustand des Ziliarmuskels wird die Linse lang gezogen (Abb. 3). Dadurch nimmt ihre Krümmung ab und ihre Brennweite zu, d. h. sie wird „schwächer“. Dies ist der Fall, wenn wir in die Ferne schauen.

Aufgabe 4

Die Brennweite eines durchschnittlichen menschlichen Auges im entspannten Zustand beträgt etwa 17 mm ([5]). Dies ist der Fall, wenn wir in die Ferne schauen. Ein Baum sei 100 m von uns entfernt. Berechnen Sie die Bildweite und vergleichen Sie sie mit der Brennweite. Stimmt Ihr Ergebnis mit den im oberen Teil von Abb. 3 skizzierten Größenverhältnissen von Brennweite f und Bildweite b überein?

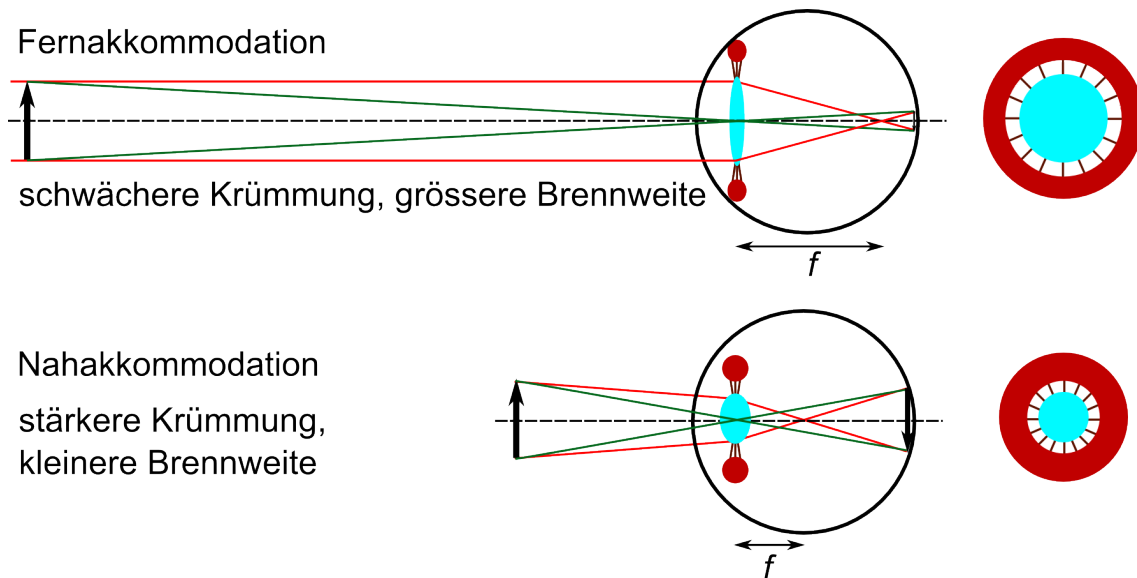


Abbildung 3: Schematische Darstellung von Ziliarmuskel (braun) und Augenlinse (blau) für Fern- und Nahakkommodation. Die Darstellung ist nicht verhältnismäßig.

Gespannter Ziliarmuskel: Nahakkommodation

Wird der Ziliarmuskel angespannt, so besteht weniger Zug auf den Zonulafasern, welche die Linse mit dem Ziliarmuskel verbinden und die Linse zieht sich aufgrund ihrer Elastizität von selbst zusammen (Abb. 3). Dadurch nimmt ihre Krümmung zu und die Brennweite wird kleiner.

Aufgabe 5

Der Abstand Linse-Netzhaut ist beim Menschen fest und somit auch die Bildweite b , welche bei einem durchschnittlichen Auge etwa 17 mm beträgt (vgl. auch Aufgabe 4). Wie gross ist die Brennweite des Auges, wenn ein Gegenstand betrachtet wird, welcher sich 10 cm vor dem Auge befindet? Ist Ihr Ergebnis auch im unteren Teil von Abb. 3 erkennbar?

Aufgabe 6

(schwierig) Vergleichen Sie die Akkommodation beim Kormoran (über/unter Wasser) und Mensch (nah/fern). Was ist gleich, was ist unterschiedlich?

Bemerkung zum Optik-Set

Wir können in unserem Optik-Set die Krümmung der Glaslinsen *nicht ändern*. Wir können jedoch eine Linse *ersetzen* durch eine andere Linse bzw. Linsenkombination mit grösserer/kleinerer Krümmung.

1.3.2 Fehlsichtigkeit: Kurz- und Weitsichtigkeit

Sieht man entweder ferne oder nahe Gegenstände nicht deutlich, so spricht man von *Fehlsichtigkeit*:

- Bei *Kurzsichtigkeit* sieht man ferne Gegenstände schlecht und nahe (kurze Distanzen!) gut.
- Bei *Weitsichtigkeit* sieht man nahe Gegenstände schlecht und ferne (weite Distanzen!) gut.

Was ist der Grund für Kurz- und Weitsichtigkeit und wie kann man sie korrigieren? Dazu machen wir einige Experimente:

Aufgabe 7

Experimente zur Fehlsichtigkeit

Teilaufgabe 7.1 Einstellen des „Modellauges“

Stellen Sie die optische Apparatur so ein, dass ein deutliches Bild entsteht. Nehmen Sie die Sammellinse mit der Brennweite $f = +77\text{ mm}$ und wählen Sie für die Gegenstandsweite $g = 0.5\text{ m}$. Bestimmen Sie experimentell die Bildweite für ein deutliches Bild. Diese Bildweite entspricht der Länge unseres „Modellauges“ (vgl. auch Abb. 1). Erstellen Sie eine massstabsgetreue Skizze der Situation. Wählen Sie einen Massstab 1:5.

Teilaufgabe 7.2 Kurzsichtigkeit

- Setzen Sie nun direkt vor die $+77\text{ mm}$ -Linse eine Zerstreuungslinse (Brennweite -143 mm), ohne die Gegenstandsweite zu ändern. Bestimmen Sie wiederum die Bildweite für ein *deutliches* Bild. Ergänzen Sie die massstabsgetreue Skizze von obiger Teilaufgabe.
- Was Sie vor sich haben, entspricht einem *kurzsichtigen Auge mit Sehkorrektur*. Der Länge des Augapfels entspricht der Abstand zwischen $+77\text{ mm}$ -Sammellinse und dem Bild, die $+77\text{ mm}$ -Sammellinse entspricht der Augenlinse und die -143 mm -Zerstreuungslinse der Brille bzw. Kontaktlinse vor dem Auge.
Entfernen Sie nun die -143 mm -Zerstreuungslinse („Brille“) und beobachten Sie gleichzeitig das Bild. Sie sehen nun, was eine kurzsichtige Person sieht, wenn sie die Brille abnimmt: Das Bild wird *unscharf*. Fahren Sie nun mit dem Gegenstand in Richtung Auge. Können Sie erkennen, wie das Bild immer deutlicher wird? Je *kürzer* der Abstand zwischen Gegenstand und Auge, desto deutlicher ist das Bild: Deshalb die Bezeichnung *kurzsichtig*!
- Was bedeutet Kurzsichtigkeit für die Anatomie des Auges? Fahren Sie mit dem Gegenstand zurück in die Ausgangsposition von Aufg. 7.1 und beobachten Sie das Bild, während Sie wieder die -143 mm -Zerstreuungslinse vor die Sammellinse ($+77\text{ mm}$) halten. Sie setzen einem kurzsichtigen Auge gerade eine Brille auf.

Vergleichen Sie Ihre Skizzen zu den Aufg. 7.1 und 7.2 a): Ist das Auge bei Kurzsichtigen im Vergleich zur Brechkraft der Augenlinse „zu kurz“ oder „zu lang“?

- d) Man kann die Kombination der beiden Linsen als eine neue Linse mit einer neuen Brennweite auffassen. Ist diese neue Brennweite grösser oder kleiner? Wenn Sie unsicher sind, können Sie sie auch aus g und b berechnen. Können Sie Ihr Ergebnis auch ohne Rechnung begründen?

Teilaufgabe 7.3 Weitsichtigkeit

- a) Entfernen Sie die -143 mm -Zerstreuungslinse und setzen Sie direkt vor die $+77\text{ mm}$ -Linse eine weitere Sammellinse (Brennweite $+200\text{ mm}$), ohne die Gegenstandsweite zu ändern. Bestimmen Sie wiederum die Bildweite für ein *deutliches* Bild. Erstellen Sie eine massstabsgetreue Skizze im Massstab 1:5.
- b) Was Sie vor sich haben, entspricht einem *weitsichtigen Auge mit Sehkorrektur*. Die $+77\text{ mm}$ -Sammellinse entspricht der Augenlinse und die $+200\text{ mm}$ -Sammellinse der Brille bzw. Kontaktlinse. Entfernen Sie nun die $+200\text{ mm}$ -Sammellinse („Brille“) und beobachten Sie gleichzeitig das Bild: Das Bild wird *unscharf*. Entfernen Sie nun den Gegenstand vom Auge. Können Sie erkennen, wie das Bild immer deutlicher wird? Je *weiter* der Gegenstand vom Auge entfernt ist, desto deutlicher ist das Bild: Deshalb die Bezeichnung *weitsichtig*!
- c) Was bedeutet Weitsichtigkeit für die Anatomie des Auges? Fahren Sie mit dem Gegenstand zurück in die Ausgangsposition von Aufg. 7.1 und beobachten Sie das Bild, während Sie wieder die $+200\text{ mm}$ -Sammellinse vor die Sammellinse ($+77\text{ mm}$) halten. Sie setzen einem weitsichtigen Auge gerade eine Brille auf. Vergleichen Sie Ihre Skizzen zu den Aufg. 7.1 und 7.3 a): Ist das Auge bei Kurzsichtigen im Vergleich zur Brechkraft der Augenlinse „zu kurz“ oder „zu lang“?
- d) Man kann die Kombination der beiden Linsen als eine neue Linse mit einer neuen Brennweite auffassen. Ist diese neue Brennweite grösser oder kleiner? Wenn Sie unsicher sind, können Sie sie ja auch aus g und b berechnen. Können Sie ihr Ergebnis auch ohne Rechnung begründen?

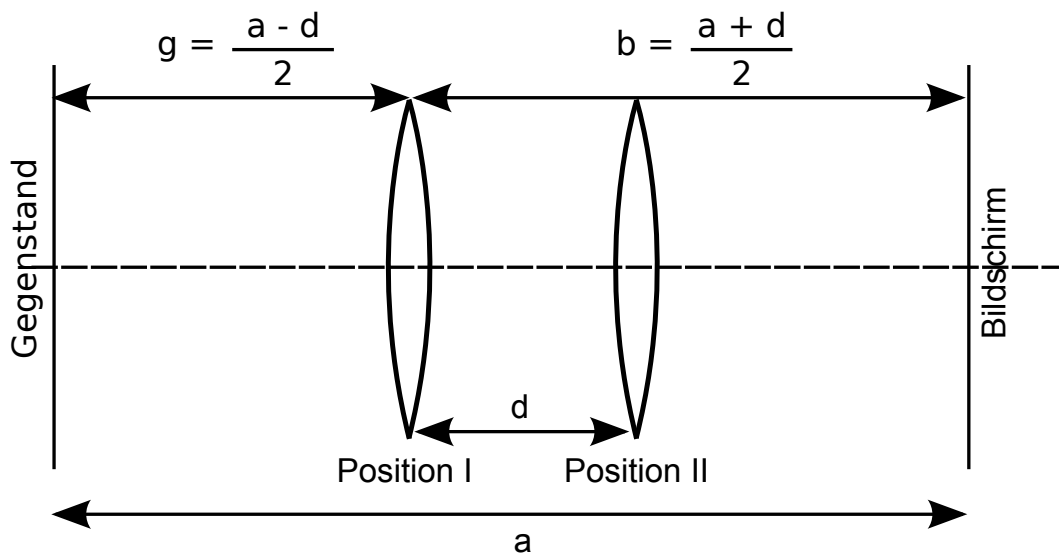
2 Zusatzaufgabe

Oft ist die genaue Position (und somit auch b und g) einer Linse schwierig oder unmöglich zu bestimmen. Mit folgender Methode lässt sich trotzdem auf einfache Weise die Brennweite bestimmen:

1. Bestimmung der Brennweite mit der *Methode von Bessel*:

Lichtquelle und Schirm werden in einen geeigneten Abstand a gebracht². Dieser Abstand wird während der weiteren Messung nicht mehr verändert! Die Linse wird so verschoben, dass ein scharfes Abbild entsteht, und ihre Lage markiert (Position I).

Die Linse wird nun soweit verschoben (Position II), bis wieder ein scharfes Abbild entsteht. Aus der Distanz d zwischen den beiden Einstellungen und dem Abstand a zwischen Gegenstand und Bild lässt sich die Brennweite bestimmen.



- a) Leiten Sie die Beziehungen für Gegenstandsweite $g = (a-d)/2$ und Bildweite $b = (a+d)/2$ her. Beachten Sie, dass die beiden Positionen I und II symmetrisch sind bzgl. der Mitte zwischen Gegenstand und Bild. Wie gross ist die Summe der Abstände Gegenstand-Position I plus Position II-Bild? Lässt sich damit g bestimmen? Lässt sich b aus g und a bestimmen?
- b) Zeigen Sie, dass die Ausdrücke für g und b in die Linsengleichung ($\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$) eingesetzt folgende Beziehung ergeben:

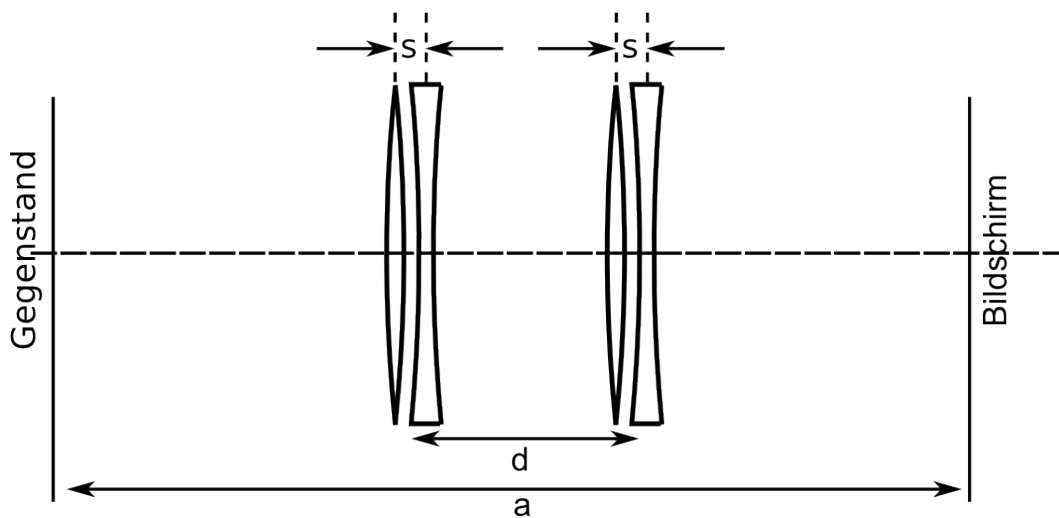
$$f = \frac{a^2 - d^2}{4a}.$$

²Geeignet = Die Entfernung wird so gross gewählt, dass überhaupt scharfe Bilder mit der zu untersuchenden Linse erzeugt werden können.

- c) Bestimmen Sie mit dieser Methode die Brennweite einer bekannten Linse (z. B. der +77 mm-Sammellinse).
- d) Worin liegt der Vorteil dieser Methode?
2. Die totale Brennweite von zwei direkt hintereinander gestellten (dünnen) Linsen lässt sich folgendermassen berechnen:

$$\frac{1}{f_{\text{total}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{s}{f_1 \cdot f_2}$$

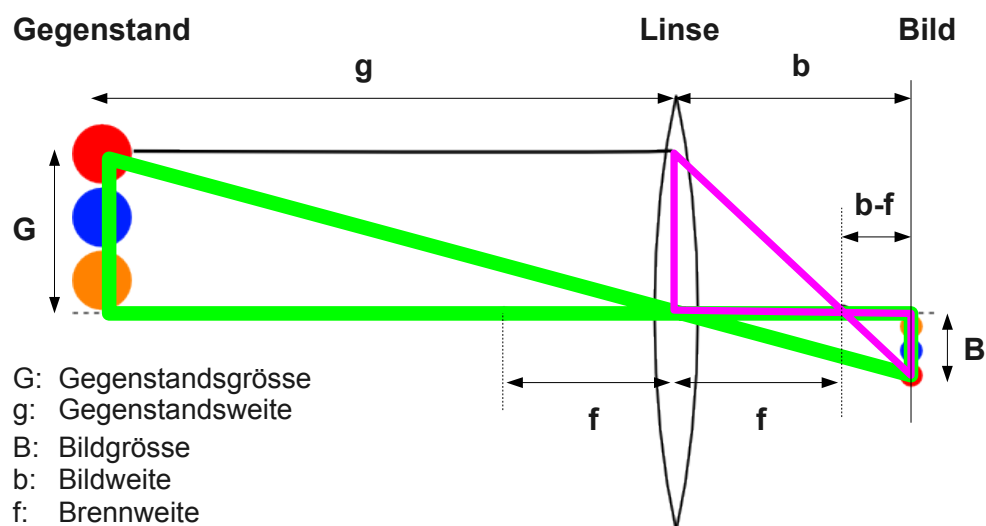
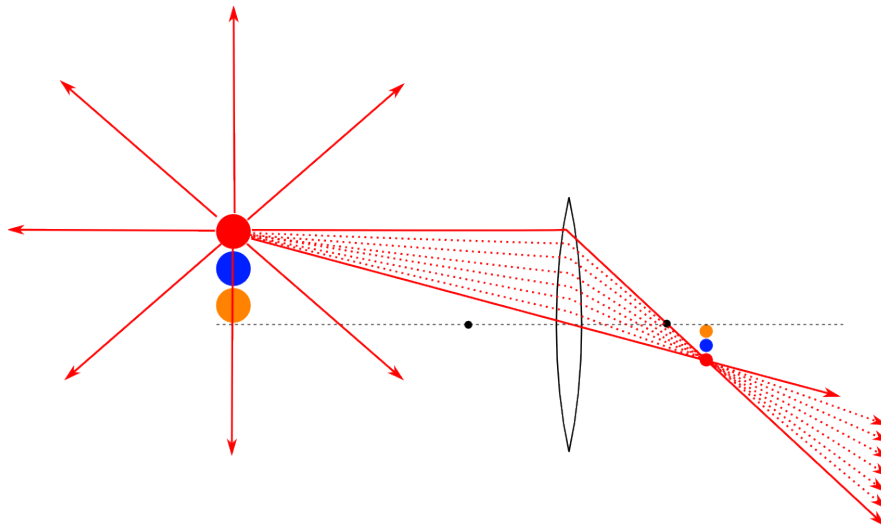
wobei der dritte Term vernachlässigt werden kann, wenn der Abstand s zwischen den Linsen viel kleiner als f_1 und f_2 ist.



Nutzen Sie diese Tatsache zur Bestimmung der Brennweite einer unbekannten Zerstreuungslinse. Kombinieren Sie dazu die unbekannte Zerstreuungslinse mit (negativer !) Brennweite f_2 mit einer bekannten Sammellinse mit Brennweite f_1 zu einem Linsensystem mit neuer Brennweite f_{total} , welche Sie mit der in Zusatzaufgabe 1c) verwendeten Methode von Bessel bestimmen. Beachten Sie, dass bei der ganzen Messung der Abstand s zwischen Sammel- und Zerstreuungslinse immer gleich bleibt. Kennen Sie f_{total} , f_1 und s , so können Sie daraus f_2 bestimmen. Stimmt ihre Messung mit der auf der Linse angegebenen Brennweite überein?

3 Begleitmaterial

3.1 Herleitung der Linsengleichung



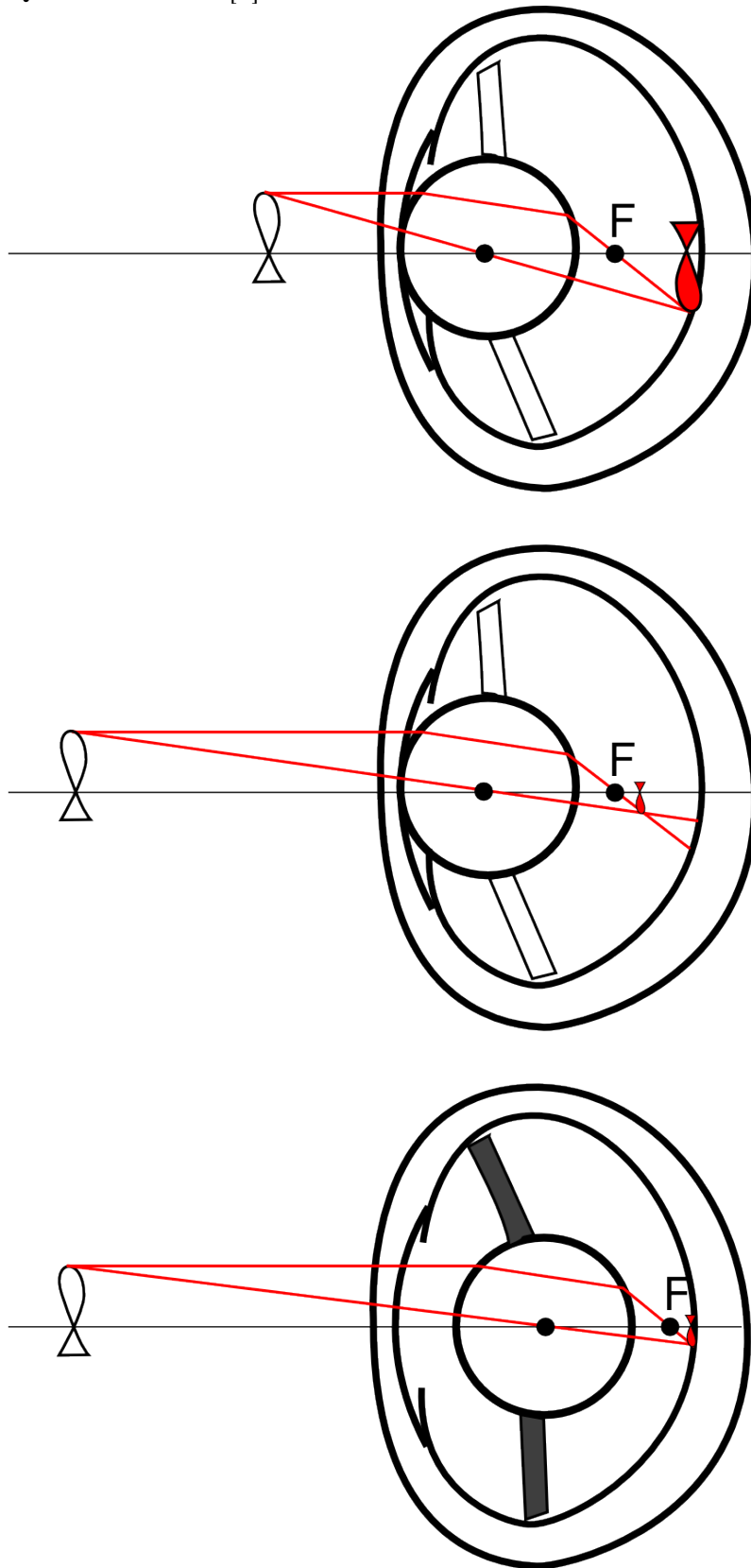
$$\begin{aligned}
 \text{Green triangle} &: \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \\
 \text{Pink triangle} &: \frac{B}{G} = \frac{b-f}{f}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Green triangle} &: \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \\ \text{Pink triangle} &: \frac{B}{G} = \frac{b-f}{f} \end{aligned}} \right\}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Linsengleichung

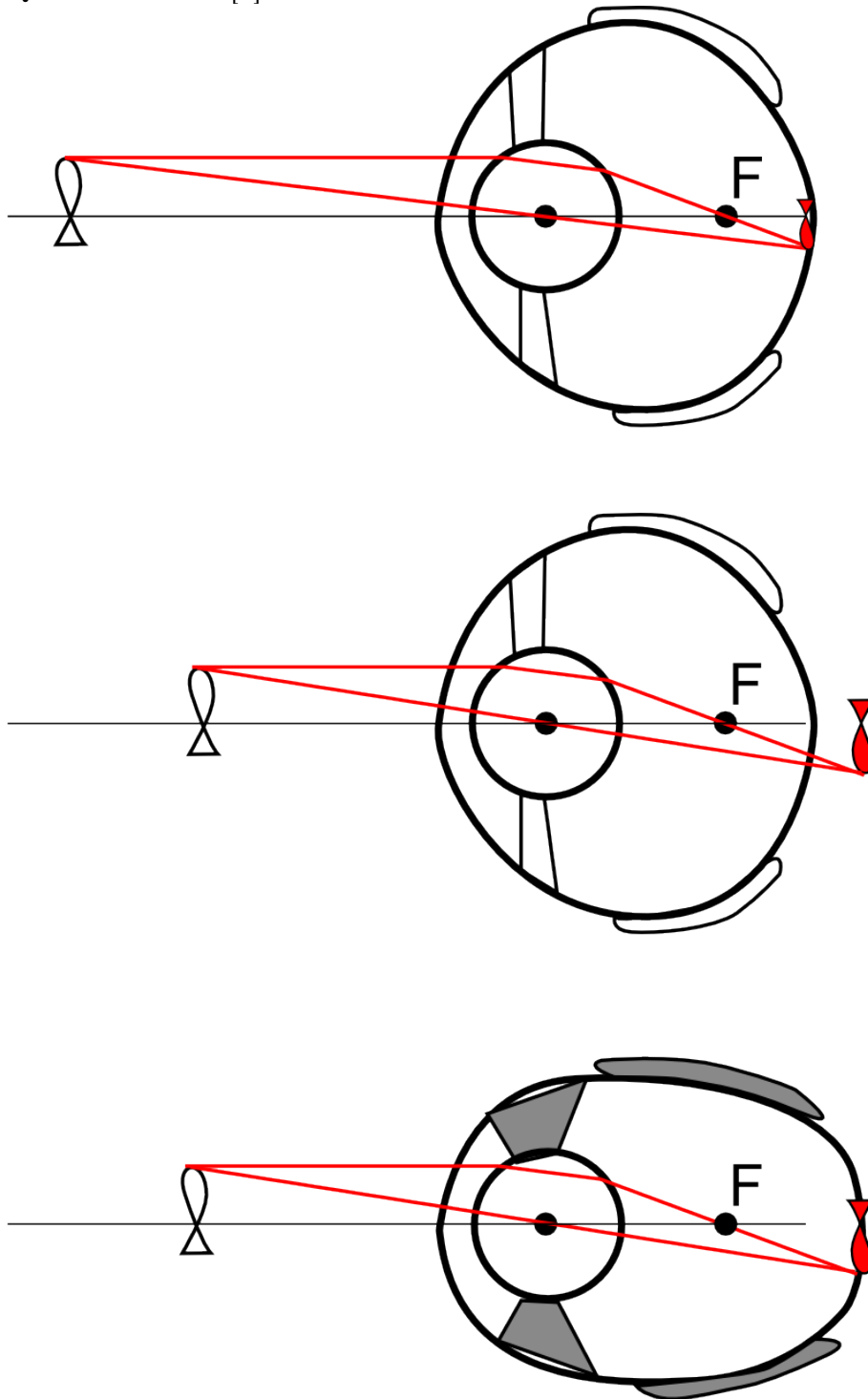
3.2 Akkommodation beim Knochenfisch

Quelle: E. Horn: [2]



3.3 Akkommodation beim Tintenfisch

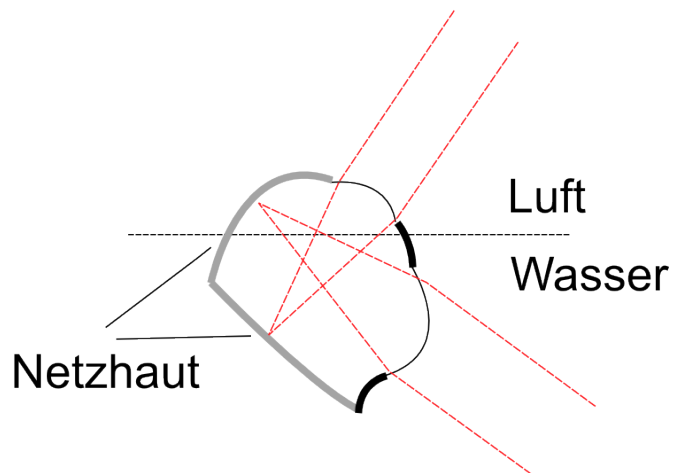
Quelle: E. Horn: [2]



3.4 Akkommodation beim Vieraugenfisch

Quelle: H. Penzlin: [4]

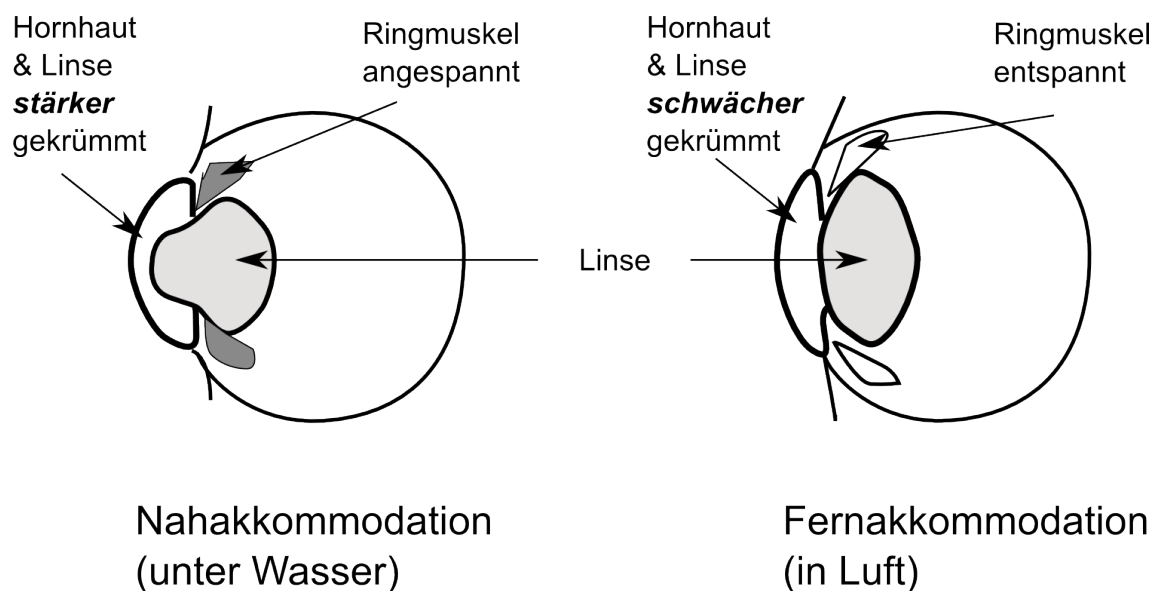
Seitenansicht Auge



Die obere Hälfte der Linse ist schwach, die untere stark gekrümmt, um jeweils für die richtige Brechung des Lichts zu sorgen.

3.5 Akkommodation beim Kormoran

Quelle: W. A. Müller: [3]



4 Lösungen

Aufgabe 1

Teilaufgabe 1.1

- a) Bei *zwei* Positionen der Sammellinse entsteht eine *deutliche* Abbildung. Ist die Bildweite b *grösser* als die Gegenstandsweite g , so ist die Grösse des Bildes B ebenfalls *grösser* als diejenige des Gegenstandes G und umgekehrt. Dies folgt auch aus dem *Abbildungsgesetz* $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$.
- b) Die Gegenstandsweite g der ersten Position entspricht der Bildweite b der zweiten Position und umgekehrt. Aus der Kenntnis der einen Position für ein deutliches Bild lässt sich also die andere vorhersagen.
- c) Die *Verkleinerung*. Die Länge unseres Auges (die Bildweite b) ist kleiner als der Abstand zwischen Augenvorderseite und Baum (die Gegenstandsweite g). Somit das Bild B des Baumes auf der Netzhaut kleiner als der Baum selbst (der Gegenstand G).
- d) Bei einer Abbildung, bei welcher das Bild B grösser ist als der abgebildete Gegenstand G , muss auch die Bildweite b grösser sein als die Gegenstandsweite g (beim Auge in der vorangegangenen Teilaufgabe hatten wir gerade den umgekehrten Fall). Dies heisst nichts anderes, als dass die Sammellinse sich näher beim Gegenstand als beim Bild befindet. Wir finden eine solche Anordnung in Hellraumprojektoren (vgl. später), Diaprojektoren und Beamern. In allen Fällen wird ein Gegenstand (Dia, Folie) vergrössert auf eine Leinwand abgebildet.

Bemerkung: Diese Vergrösserung darf jedoch nicht mit dem hier NICHT behandelten Fall der Lupe verwechselt werden: Ist der Abstand zwischen Gegenstand und Sammellinse kleiner als deren Brennweite, so lässt sich kein deutliche Abbildung mehr finden. Es gibt kein *reelles* Bild. Blickt man jedoch bei unveränderter Gegenstandsweite in die Linse, so ist ein aufrecht stehendes Bild hinter der Linse zu sehen. Dieses sogenannte *virtuelle* Bild entsteht durch die Kombination Linse-Auge und ist in dieser Form nicht Thema dieser Unterrichtseinheit.

Aufgabe 2

Teilaufgabe 2.1

Mit der vorliegenden Versuchsanordnung gibt es drei Möglichkeiten, um wieder ein deutliches Bild zu erhalten:

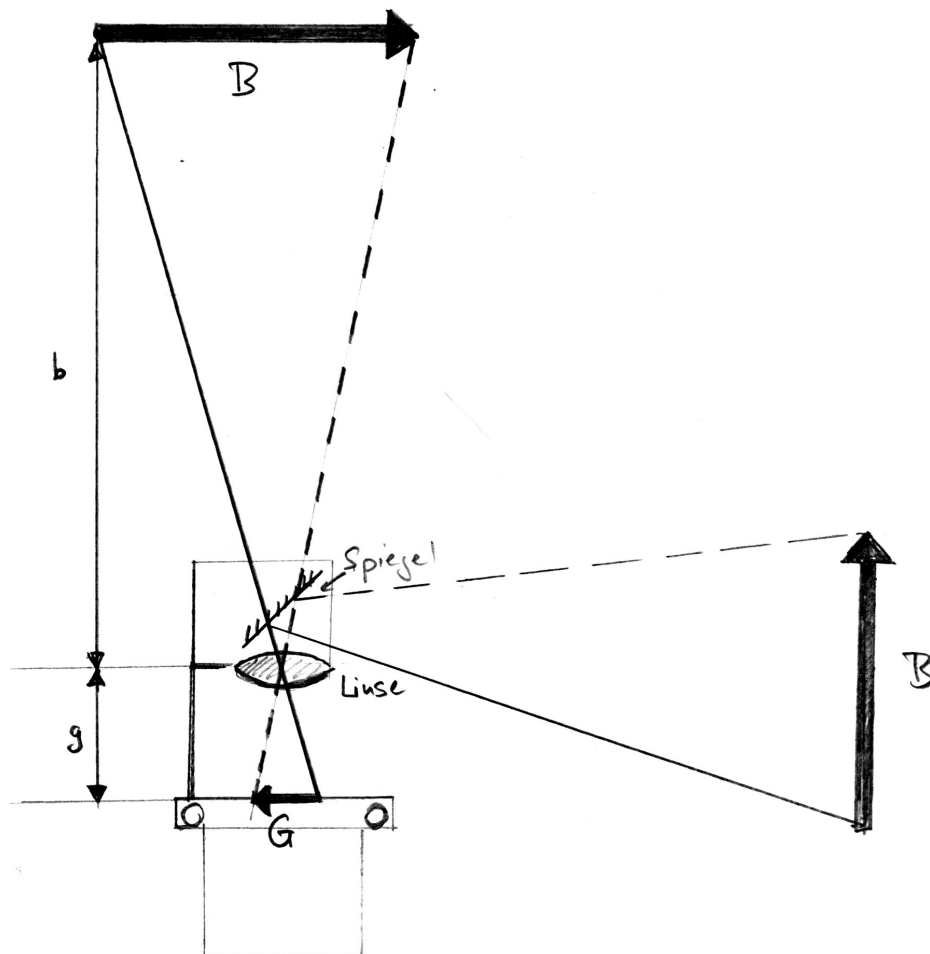
1. Änderung der Gegenstandsweite g , d.h. Änderung des Abstandes zwischen Gegenstand und Linse.
2. Änderung der Bildweite b , d.h. Änderung des Abstandes zwischen Bild(schirm) und Linse.
3. Verschieben der Linse: *Gleichzeitige Änderung* von Bild- und Gegenstandsweite.

Eine weitere Möglichkeit, welche wir weiter unten genauer anschauen, ist die Änderung der *Krümmung* der Linse, d.h. die Änderung ihrer Brennweite entweder durch eine flexible Linse oder durch Ersetzen der Linse durch eine andere.

Teilaufgabe 2.2

- a) Die Zeichnung auf der Folie des Hellraumprojektors entspricht dem Gegenstand. Mit Gegenstand bezeichnen wir bei einer optischen Abbildung immer das „Original“, welches das Licht aussendet.

b/c)



d) Die Brennweite f ist fest, da die Krümmung der Linse nicht geändert werden darf. Es bieten sich deshalb zwei Möglichkeiten an:

- Die Gegenstandsweite wird nicht verändert, dafür jedoch die Bildweite b durch Verschieben des Hellraumprojektors zur Leinwand hin oder von ihr weg.
- Die Bildweite b bleibt ebenfalls fest, solange man den Hellraumprojektor nicht verschiebt. Die Gegenstandsweite g wird am Drehrad solange angepasst bis die Linsengleichung wieder erfüllt ist. Genau genommen ändert sich dadurch auch die Bildweite b etwas, aber die Änderung von wenigen Zentimetern spielt im Vergleich zu der Bildweite von mehreren Metern praktisch keine Rolle.

In beiden Fällen wird jedoch der Abbildungsmassstab verändert. Dies erkennt man daran, dass die Grösse des Gegenstandes auf der Folie nicht verändert wird, die Grösse des Bildes hingegen schon!

Teilaufgabe 2.3

- Stellen Sie ein deutliches Bild ein und messen Sie Gegenstandsweite g und Bildweite b aus.
- Setzen Sie die erhaltenen Werte in die Linsengleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ ein. Dann lösen Sie die Linsengleichung nach der Brennweite f auf.
- Sollten Sie Probleme mit dem Auflösen haben, dann verwenden Sie folgende Formel: $f = \frac{b \cdot g}{b + g}$.

Aufgabe 3

Teilaufgabe 3.1

- Anpassen der Gegenstandsweite g bei konstant gehaltener Bildweite b : Dies wird beim Hellraumprojektor über einen Drehmechanismus erreicht, welcher den Abstand Linse-Folie verändert. Durch die praktisch rechtwinklige Ablenkung des Lichtes durch einen Spiegel kurz nach der Linse wird dabei die Bildweite b praktisch nicht verändert.
- Anpassen der Bildweite b bei konstant gehaltener Gegenstandsweite g : Durch Verschieben des ganzen Hellraumprojektor lässt sich die Bildweite b einstellen.

Teilaufgabe 3.2

- a) Aus der Aufgabenstellung ergeben sich:
Bildgrösse $B = 3$ m.

Gegenstandsgrösse $G = 0.036 \text{ m}$
Bildweite $b = 5 \text{ m}$.

Abbildungsmassstab A , Gegenstandsweite g und Brennweite f lassen sich berechnen: Der Abbildungsmassstab ist $A = \frac{B}{G} = \frac{3 \text{ m}}{0.036 \text{ m}} = 83.3$, d. h. die Längenabmessungen auf dem Dia werden um den Faktor 83.3 vergrössert.

Die Gegenstandsweite ist $g = \frac{G}{B} \cdot b = \frac{0.036 \text{ m}}{3 \text{ m}} \cdot 5 \text{ m} = 0.06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$.

Die Brennweite der Linse ist $f = \frac{b \cdot g}{b + g} = \frac{5 \text{ m} \cdot 0.06 \text{ m}}{5 \text{ m} + 0.06 \text{ m}} = 0.059 \text{ m} = 5.9 \text{ cm}$. Die Brennweite entspricht also bei einem grossen Abbildungsmassstab fast der Gegenstandsweite (Umgekehrt entspricht die Brennweite bei einem sehr kleinen Abbildungsmassstab etwa der Bildweite).

- b) Es werden die Bild- und die Gegenstandsweite *gleichzeitig* verändert.

Die prozentuale Änderung der Gegenstandsweite g beträgt $\frac{0.1 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} = 0.0017 = 0.17 \%$.

Die prozentuale Änderung der Bildweite b beträgt $\frac{0.1 \text{ mm}}{5000 \text{ mm}} = 0.00002 = 0.002 \%$. (Zur Erinnerung: Das Prozentzeichen $\% = \frac{1}{100} = 0.01$ ist einfach ein Abkürzung für ein Hundertstel und wird einfach multipliziert.)

Somit wird beim Verschieben der Linse praktisch nur die Gegenstandsweite wesentlich verändert!

Teilaufgabe 3.3

- a) Akkommodation beim Knochenfisch: Die Linse wird durch Muskeln im Augeninnern entlang der Linsenachse bewegt. Dabei wird die Krümmung der Linse und somit die Brennweite f *nicht* verändert, jedoch die Bildweite b und (prozentual weniger) die Gegenstandsweite g . Entfernt sich beispielsweise ein Objekt (kleiner Fisch) vom Auge des Knochenfisches (Vergrösserung der Gegenstandsweite g), so wird die Bildweite b durch das Anspannen der Muskeln und *Zurückziehen der Linse* entsprechend verkleinert.
- b) Akkommodation beim Tintenfisch: Position und Krümmung der Linse werden beim Tintenfisch *nicht* verändert. Bei einer Änderung der Gegenstandsweite wird die Bildweite angepasst indem die Länge Augapfels mit Hilfe von Muskeln verlängert bzw. verkürzt wird.
- c) **Gleich:** Krümmung der Linse und somit die Brennweite bleibt unverändert. Die Bildweite wird angepasst.

Unterschiedlich: Beim Knochenfisch wird die Bildweite durch eine Verschiebung der Linse verändert, beim Tintenfisch durch eine Veränderung der Länge des Augapfels. Ein Anspannen der Muskeln führt beim Knochenfisch zu einer Verkleinerung und beim Tintenfisch zu einer Vergrösserung der Bildweite.

Teilaufgabe 3.4

- a) Der Vieraugenfisch besitzt zwei Augen, welche je zwei unterschiedlich gekrümmten Augenoberflächen (Hornhaut) besitzen. Die schwächer gekrümmte

Hornhaut befindet sich über dem Wasserspiegel, der stärker gekrümmte Teil darunter. Somit hat jedes Auge zwei Öffnungen (Pupillen) und zwei Netzhäute. Deshalb auch der Name *Vieraugenfisch*.

- b) Der Kormoran fliegt in der Luft und fängt unter Wasser Fische und muss sowohl über, wie unter Wasser gut sehen können. Er kann die Augenoberfläche (Hornhaut) und Linse unterschiedlich stark krümmen und damit deren Brennweite f anpassen (für Luft und Wasser).

Aufgabe 4

$$g = 100 \text{ m}, f = 0.017 \text{ m}, b = 1/(1/f - 1/g) = 0.017003 \text{ m} \approx 0.017 \text{ m}$$

Die Bildweite b nähert sich also bei der Fernakkommodation immer mehr der Brennweite f , je weiter vom Auge entfernt der Gegenstand sich befindet. Die ist auch in Abb. 3, oben, erkennbar: Bildweite (Länge des Auges) und Brennweite f sind von vergleichbarer Grösse.

Aufgabe 5

$$g = 0.1 \text{ m}, b = 0.017 \text{ m}, f = 1/(1/b + 1/g) = 0.0145 \text{ m}$$

Die Brennweite muss also tatsächlich kleiner werden, um ein deutliches Bild zu erhalten. Man sieht jedoch, dass dieser Sachverhalt (der Klarheit wegen!) in Abb. 3 übertrieben dargestellt ist.

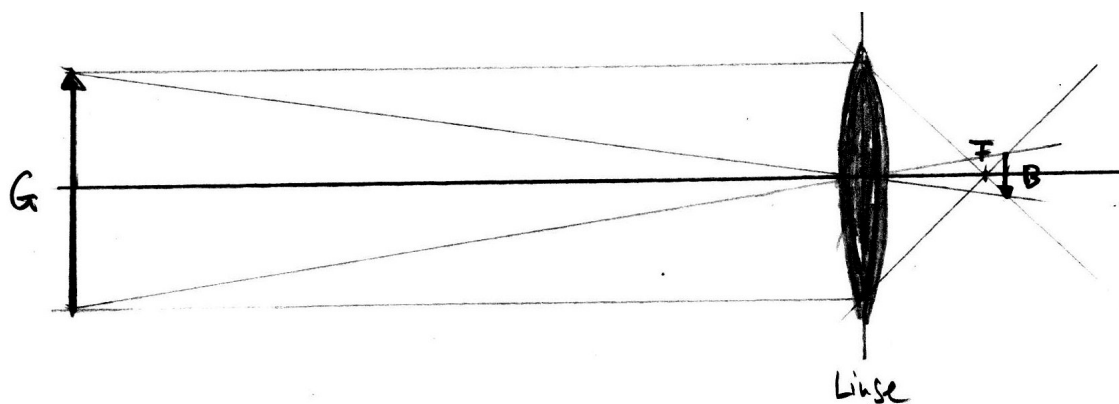
Aufgabe 6

Gleich: Sowohl Mensch als auch Kormoran akkommodieren durch eine Änderung der Brennweite des Sehapparates. Und nicht durch eine Änderung der Bildweite wie beim Knochen- oder Tintenfisch.

Unterschiedlich: Um auch unter Wasser deutlich zu sehen, muss der Kormoran die Brennweite stark verändern. Dies gelingt nur, wenn er zusätzlich die Hornhaut, also die äussere Begrenzung des Auges stärker krümmt. Um das Auge zwischen nahen und fernen Gegenständen anzupassen, verändert das menschliche Auge nicht die Hornhaut, sondern eine Linse im Innern des Auges. Die Änderung der Brennweite ist so um einiges kleiner.

Aufgabe 7

Teilaufgabe 7.1 Für die Bildweite ergibt sich $b = 1/(1/f - 1/g) = 0.091 \text{ m}$.

**Teilaufgabe 7.2**

- a) Fazit: Die Bildweite wird grösser!
- c) Im Vergleich zur Brechkraft der Augenlinse (hier: +77 mm-Linse) ist das Auge ein wenig "zu lang".
- d) Die neue Brennweite ist grösser. Dadurch wird auch die Bildweite grösser, d. h. die Position für ein deutliches Bild wird ein wenig nach hinten versetzt.
Eine vorangestellte Zerstreuungslinse (Brille) schwächt die Wirkung einer Sammellinse (Auge) ab. Dies zeigt sich in einer grösseren Brennweite = geringere Brechkraft.

Teilaufgabe 7.3

- a) Fazit: Die Bildweite wird kleiner!
- c) Im Vergleich zur Brechkraft der Augenlinse (hier: +77 mm-Linse) ist das Auge ein wenig "zu kurz".
- d) Die neue Brennweite ist kleiner. Dadurch wird auch die Bildweite kleiner, d. h. die Position für ein deutliches Bild wird ein wenig nach vorne versetzt.
Eine vorangestellte Sammellinse (Brille) vergrössert die Wirkung einer Sammellinse (Auge). Dies zeigt sich in einer kleineren Brennweite = grössere Brechkraft.

Zusatzaufgabe

1. a) Strecke Gegenstand-Position I plus Position II-Bild = $a - d$. Wegen der Symmetrie (d. h. Strecke Gegenstand-Position I = Position II-Bild) folgt $g = (a - d)/2$. Und b ergibt sich aus $b = a - g = a - (a - d)/2 = (a + d)/2$. Beachten Sie, dass sich die Bezeichnungen g und b auf Position I beziehen! Wegen der Symmetrie sind die Werte für Position II austauschbar!

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f} &= \frac{1}{\frac{a+d}{2}} + \frac{1}{\frac{a-d}{2}} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{2}{a+d} + \frac{2}{a-d} \\
 &\Rightarrow \frac{(a+d)(a-d)f}{f} = \frac{2(a+d)(a-d)f}{a+d} + \frac{2(a+d)(a-d)f}{a-d} \\
 &\Rightarrow a^2 - d^2 = 2af - 2df + 2af + 2df = 4af \\
 &\Rightarrow f = \frac{a^2 - d^2}{4a}
 \end{aligned}$$

c) —

- d) Bei vielen Linsen bzw. Linsensystem, welche als eine einzige Linse mit einer definierten Brennweite aufgefasst werden können, wie z. B. Objek-

tive von Fotokameras, ist es schwierig bis unmöglich, die genaue Position der Linse relativ zum Bild zu bestimmen. Diese ist aber nötig, wenn man Bild- und Gegenstandsweite bestimmen möchte, z. B. um die Brennweite eines Objektivs zu bestimmen!

Hier ist die Methode von Bessel sehr elegant, da man nur den *Abstand* a zwischen Gegenstand und Bild und die *Verschiebung* d zwischen den beiden Positionen I und II braucht. Von welchem Punkt des Objektivs man die Verschiebung misst, *ist völlig egal!*

Sofern in der Physiksammlung solche Objektive zu Verfügung stehen, lassen sie sich hier einsetzen, indem man deren Brennweite bestimmt und mit der aufgedruckten Angabe vergleicht!

2.
 - Bestimmen von Abstand s zwischen bekannter Sammellinse mit Brennweite f_1 und unbekannter Zerstreuungslinse mit Brennweite f_2 (Diese Grösse interessiert uns!)
 - Bestimmung von f_{total} mit der Methode von Bessel mit Hilfe von a und dem Abstand d zwischen den beiden Positionen mit deutlichem Bild.
 - Die Brennweite f_1 ist bekannt, wie auch f_{total} und s .
 - Zahlenwerte in

$$\frac{1}{f_{\text{total}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{s}{f_1 \cdot f_2}$$

einsetzen und nach f_2 auflösen.

Literatur

- [1] BLOOM, B. S., Ed. *Taxonomy of Educational Objectives, Handbook 1: Cognitive Domain*. David McKay Company, Inc., New York, 1956.
- [2] HORN, E. *Vergleichende Sinnesphysiologie*. Fischer, Stuttgart; New York, 1982.
- [3] MÜLLER, W. A. *Tier und Humanphysiologie*. Springer, Berlin, 1998.
- [4] PENZLIN, H. *Lehrbuch der Tierphysiologie*. Gustav Fischer Verlag, Stuttgart, 1996.
- [5] WIKIPEDIA. Auge — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Reduziertes_Auge&oldid=66275614, 2010. [Online; Stand 17. Oktober 2010].
- [6] WIKIPEDIA. Auge — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Auge&oldid=77446677>, 2010. [Online; Stand 5. August 2010].
- [7] WIKIPEDIA. Talos, colorized by Jakov; deutsch: Anatomie des Auges. http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Eye_scheme.svg&filetimestamp=20090821082302, 2010. copied from German Wikipedia, [Online; Stand 4. August 2010].

Danksagung

Wir danken Patrick Faller für die Idee, die Optik der Fischaugen im Physikunterricht zu untersuchen, und für die kritische Durchsicht einer früheren Version des Manuskriptes.