

Spezielle Relativitätstheorie

eine Einführung

Absicht: Das Ziel der folgenden ca. 4 Unterrichtswochen ist es, erste wesentliche Einblicke in einen Grundpfeiler der gesamten modernen Physik zu gewinnen, d.h. in die im Jahre 1905 von Albert Einstein (1879 - 1955) erfundene sog. Spezielle Relativitätstheorie (SRT).

- Ablauf:
1. Um uns besser orientieren zu können, wollen wir in Kap. 1, als Einstieg und teilweise Repetition, eine grobe physik-geschichtliche Verortung vornehmen. D.h., wir möchten kurz einige ausgewählte, wesentliche Etappen der historischen Entwicklung der Physik uns (wieder) vor Augen führen, um auf diese Weise die später neu kennenzulernende SRT wenigstens grob in den historischen Kontext einordnen zu können.
 2. In einer zweiten Phase (Kap. 2 und 3) wollen wir den Blick auf die Physik vor Erfindung der SRT werfen. Und zwar werden wir auf einige tiefgreifende Probleme der Physik hinweisen, welche vor Erfindung der SRT die Welt der Physik beeinträchtigten und welche schliesslich ganz wesentlich zur Erfindung der SRT beitrugen.
 3. Anschliessend (Kap. 4) werden wir Einsteins Postulate darlegen, die seiner SRT zugrunde liegen und mit deren Hilfe - wie wir später (aus zeitlichen Gründen nur) in Ausschnitten sehen werden - die oben unter „2.“ vorgestellten Probleme einer Lösung zugeführt werden können.
 4. Danach (Kap. 4 und 5) wollen wir erste wesentliche Schlüsse aus den Einstein'schen Postulaten ziehen, und zwar in Bezug auf die Struktur von Raum und Zeit an sich. Wir werden unschwer erkennen, dass die Einstein'schen Postulate eine (verglichen mit unseren Alltagsgewohnheiten) z.T. drastisch geänderte und dabei durchaus paradox anmutende Wahrnehmung von Raum und Zeit bedingen.
 5. Schliesslich (ab Kap. 6) werden wir weitere tiefgreifende Konsequenzen der Einstein'schen Postulate ausloten. Und zwar wird es darum gehen, uns vor Augen zu führen, wie sich irgendwelche Gegenstände (z.B. Elektronen, ..., Autos, ..., Raumschiffe, ...), welche irgendwelchen Kräften unterliegen, durch die z.T. merkwürdig veränderte Raum-Zeit bewegen. D.h. es wird darum gehen zu sehen,
 - wie die Kinematik und - als konkretes Beispiel die Elektrodynamik betrachtend - die Newton'sche Dynamik z.T. neu formuliert werden müssen, um den Einstein'schen Postulaten zu genügen;
 - welche z.T. fundamentalen Folgerungen daraus gezogen werden können (so z.B. die wohl berühmteste Formel der Physik, d.h. $E = m c^2$).

Quellenangabe: Die im folgenden Text verwendeten Abbildungen stammen z.T. aus Wikipedia. Auch einige Textpassagen sind in wesentlichen Teilen aus Wikipedia entnommen.

0. Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	02
1.1. Auszüge aus der Geschichte der Physik. Ein grober Überblick über einige wesentliche Etappen der Physik ab ca. 1600 bis ca. 1915	02
1.2. Genaueres zur Situation der Physik um 1850 - 1900 (Blütezeit der „Klassischen Physik“)	03
1.3. Krise der Klassischen Physik um 1900	04
1.4. Haupt-Theorien der modernen Physik (im Telegrammstil)	06
2. Klassische Physik: Überlegungen zur Struktur	08
3. Klassische Physik: Probleme / Widersprüche	14
4. SRT: Einstein'sche Postulate, Lorentz-Transformation	16
5. SRT: Spezielle / paradoxe Raum-Zeit-Effekte	24
5.1. Zeitdilatation	24
5.2. Längenkontraktion	29
5.3. Überlagerung / Addition von Geschwindigkeiten	30
6. Zwischenhalt: Rückschau, Ausblick	35
6.1. Rückschau auf Einsteins Postulate	35
6.2. Ausblick auf die Analyse des 3. Postulates von Einstein	36
6.3. Klassische Physik: Kinematik, Dynamik	36
7. SRT: Relativistische Mechanik	40
7.1. SRT-Umrechnung $S \leftrightarrow S'$: Kinematik, Dynamik	40
7.2. Interpretation von $p_{rel}^{(1)}$ und $p_{rel}^{(0)}$	45
7.3. Relativistisches Skalarprodukt	47
7.4. Energie- und Impulserhaltung	49
7.5. Plausibilitätsüberlegung / Gedankenexperiment zur Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse	52
7.6. Plausibilitätsüberlegung / Gedankenexperiment zu $E = m c^2$	56
Anhang: Lösungen der Aufgaben	60

1. Einleitung

1.1. Auszüge aus der Geschichte der Physik: Ein grober Überblick über einige wesentliche Etappen der Physik ab ca. 1600 und bis ca. 1915

Bemerkung: Wie erwähnt, ist es das Ziel der nachfolgenden Ausführungen, uns einige ausgewählte, wesentliche Etappen der historischen Entwicklung der Physik (wieder) vor Augen führen, um auf diese Weise die später neu kennenzulernende SRT wenigstens grob in den historischen Kontext einordnen zu können. Zu diesem historischen Kontext werden wir aber nicht nur diejenigen Aspekte der Physik zählen, welche engst-möglich mit der SRT verknüpft sind. Denn der Schöpfer der SRT, Albert Einstein, hat nebst der SRT einige weitere bahnbrechende Beiträge zur Physik geliefert.¹ Daher ist es erstens physik-geschichtlich lohnenswert und zweitens ein kleiner Schritt in Richtung einer etwas umfassenderen Würdigung der grossartigen physikalischen Leistungen von Einstein, einen (eigentlich viel zu) kurzen Blick über den „SRT-Tellerrand“ hinauszuwerfen und auch solche physikalischen Themen zu streifen, in denen Einsteins weitere bahnbrechenden Beiträge angesiedelt sind. Diese Themen sind die Gravitationstheorie und die Quantenphysik.

Jahr (ca.)	Theorien, Experimente, Ansichten, ...	bedeutende Personen	
ab 1600	Systematische experimentelle Untersuchungen zu Mechanik, Elektrizität, Magnetismus.	Galilei, ... (Mechanik); Gilbert, ... (Elektrizität, Magnetismus)	klassische Physik
1700	- Mechanik: Newton'sche Axiome. - Gravitationstheorie: Newton'sches Gravitationsgesetz.	Newton, ...	
1800 - 1850	- Quantitative Gesetze des Elektromagnetismus / der Elektrodynamik (ED). - Licht = elektromagnetische Welle.	Coulomb, Ampère, Faraday, Maxwell, ..., Hertz, ...	
1900	- Frage: Existieren Atome nicht nur als nützliches theoretisches Konstrukt, um z.B. das chemisch-physikalische Verhalten von Gasen mathematisch beschreiben zu können, sondern existieren sie auch tatsächlich? - Unter Physikern vorherrschende Ansicht: Die physikalische Beschreibung der Natur ist, bis auf Details, vollendet. Insbesondere: Die Grundtheorien der Physik sind i.W. bekannt.	...	
1900	- Zufällige exp. Entdeckung der Röntgenstrahlen. - Experimenteller Nachweis der Elektronen. - Zufällige exp. Entdeckung des radioaktiven Zerfalls. - Theoretische Erklärung des Spektrums der Hohlraumstrahlung \Rightarrow Hinweis auf die (völlig überraschende) Quantennatur der Energie.	Röntgen; Thomson; Becquerel; Planck.	moderne Physik
1905	- Spezielle Relativitätstheorie (SRT): Raum, Zeit, Mechanik, ED. - Theoretische Hinweise auf die reale Existenz der Atome (via Analyse der Brown'schen Bewegung). - Theoretische Erklärung des Photoeffektes \Rightarrow (weitere) Hinweise auf die Quantennatur des Lichtes. ¹	Einstein (im „annus mirabilis“).	
1905 - 1915	- Weitere theoretische und experimentelle Hinweise auf die reale Existenz der Atome. - Exp. Entdeckung der Atomkerne.	...	
1915	Allgemeine Relativitätstheorie (ART): Raum, Zeit, Mechanik, Gravitation, ED.	Einstein, ...	

¹ Interessanterweise hat Einstein den Nobelpreis (1922) nicht für die Erfindung der SRT erhalten, sondern für einen seiner Beiträge zur Entwicklung der Quantenphysik (Erklärung des Photoeffektes) !

1.2. Genaueres zur Situation der Physik um 1850 - 1900 (Blütezeit der „Klassischen Physik“)

Grundtheorien - Newton'sche Mechanik der Physik:

- Newton'sche Axiome:
 1. Bewegungsgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
 2. (\Rightarrow) Trägheitsprinzip
 3. Actio = Reactio
- Differentialrechnung:
 1. $\vec{v} = \dot{\vec{s}}$
 2. $\vec{a} = \ddot{\vec{v}} (= \ddot{\vec{s}})$
- Folgerung:

Wenn: - für ein Teilchen die auf es wirkende Gesamtkraft \vec{F} bekannt ist (mit der üblichen Annahme, dass $\vec{F} = f(\vec{s}, \vec{v})$ ist),
 - der Anfangszustand des Teilchens, d.h. $\vec{s}(0)$ und $\vec{v}(0)$, bekannt ist,
 dann: - kann via Lösen der Bewegungsgleichung (= Differentialgleichung 2. Ordnung für $\vec{s}(t)$) $\vec{s}(t)$ berechnet werden, $\forall t \geq 0$ (und auch $\forall t \leq 0$).
- Philosophische Interpretation:
 Das Weltgeschehen läuft ab wie ein Uhrwerk, stur, starr, ohne dass ein mindestens gelegentliches Wirken einer übernatürlichen Kraft erkennbar oder nötig wäre; d.h. ein allmächtiges Wesen („Gott“, ...), welches die Welt immer wieder einmal im Verborgenen steuert, hat in dieser Sicht der Welt keinen Platz, braucht es nicht. Ein solches allmächtiges Wesen brauchte es höchstens noch für die anfängliche Erschaffung der Welt.²

Insbesondere: Ein Wesen, welches die Positionen und Geschwindigkeiten aller Teilchen des Universums zu irgendeinem Zeitpunkt $t = t_0$ kennen würde, könnte also sowohl die Zukunft bis in alle Ewigkeit vorausberechnen, als auch die Vergangenheit in alle Ewigkeit erkunden. Ein solches Wesen wird heutzutage als „Laplace'scher Dämon“ bezeichnet; Laplace selbst nannte es „une intelligence“ und entwarf es im Vorwort zu seinem „Essai philosophique sur les probabilités“ von 1814.³



Im Rahmen der modernen Physik gibt es verschiedene Einwände gegen die Vorstellung vom Laplace'schen Dämon, die gewichtigste davon wohl aus Richtung der Quantenphysik (Stichwort: Heisenberg'sche Unschärferelation; vgl. „Quantenphysik - eine Einführung“).

² Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749 - 1827) war ein französischer Mathematiker, Physiker und Astronom. Laplace' größtes wissenschaftliches Werk liegt auf dem Gebiet der Himmelsmechanik. Von 1799 bis 1823 verfasste er sein Hauptwerk „Traité de Mécanique Céleste“. Darin gibt er einen Überblick über alle seit Newton gewonnenen Erkenntnisse zu diesem Thema sowie über seine eigenen Forschungen. Obwohl das Werk mathematisch sehr anspruchsvoll und deshalb sehr schwer zu lesen ist, wurde es in der Folgezeit Pflichtlektüre für alle angehenden Astronomen. Laplace stellte sein Buch Napoleon vor. Dieser fragte: „Warum haben Sie dieses Buch über das Weltall geschrieben, aber nicht einmal seinen Schöpfer erwähnt?“ Laplace antwortete: „Diese Hypothese habe ich nicht benötigt.“

³ Dieses Werk war für einen breiten Leserkreis geschrieben. Laplace beschrieb darin u.a. einen „Weltgeist“, der die Gegenwart mit allen Details kennt und daher die Vergangenheit und Zukunft des Weltgeschehens in allen Einzelheiten beschreiben kann. Laplace meinte jedoch auch, dass die menschliche Intelligenz dies nie erreichen könne. Dieser „Weltgeist“ wurde später als „Laplace'scher Dämon“ bekannt und sorgte für erbitterten Widerspruch unter den Philosophen, da er einen vollkommenen Determinismus verkörpert, der jeden freien Willen ausschließt.

- In der Natur auftretende Kräfte
 - Elektromagnetische Kräfte:
 - Feldgleichungen der ED (= Maxwell-Gleichungen) beschreiben die \vec{E} -/ \vec{B} -Felder, welche durch eine gegebene Ladungs-/Stromverteilung $\rho(\vec{r}) / \vec{j}(\vec{r})$ bewirkt werden.
 - Umgekehrt beschreibt das Lorentz'sche Kraftgesetz diejenige Kraft, welche gegebene \vec{E} -/ \vec{B} -Felder auf Ladungs-/Stromverteilungen $\rho(\vec{r}) / \vec{j}(\vec{r})$ bewirken.
 - „Zuständig“ für: Beschrieb der Natur im Mikroskopischen / des mikroskopischen Aufbaus der Materie („Atome“, „Moleküle“, ...) und des Lichtes.
 - Gravitation:
 - Newton'sches Gravitationsgesetz, beschreibt die universelle Massenanziehung.
 - „Zuständig“ für: Beschrieb der Natur im Makroskopischen (Fallbeschleunigung, Planetenbahnen, Galaxien, Kosmologie, ...).
- Gültigkeit dieser Theorien
 - Annahme: Diese Theorien gelten aus Sicht aller Beobachter, welche sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ durch den Raum bewegen.⁴

1.3. Krise der Klassischen Physik um 1900

Unerklärliche
experimentelle
Befunde:

- Elektrodynamik
 - Geschwindigkeit des Lichtes:
 - Während langer Zeit, d.h. noch bis ins späte 17. Jh., wurde geglaubt, dass die Lichtgeschwindigkeit unendlich gross sei. Den ersten experimentellen und wenigstens einen Teil der Physiker überzeugenden Hinweis für die Endlichkeit von c erhielt 1676 der dänische Astronom Olaf Römer mittels astronomischer Beobachtungen am Jupitermond Io. Römers Daten verwendend, berechnete 1678 der holländische Physiker Christiaan Huygens erstmals einen konkreten Wert für c , nämlich ca. 212'000 km/s. Allgemein wurde die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit aber erst nach weiteren experimentellen Bemühungen im Jahr 1729 anerkannt. Und erst 1849 wurde vom französischen Physiker Fizeau die erste nichtastronomische Bestimmung von c durchgeführt. Die Foucault'sche Drehspiegelmethode von 1850, welche eine Verbesserung der Fizeau'schen Messmethode darstellte, lieferte dann den bereits recht genauen Wert 298'000 km/s.
 - Die bis Anfang des 19. Jh. bekannten Wellen (Schallwellen, Wasserwellen, ...) breiteten sich offensichtlich innerhalb eines materiellen Trägermediums aus; so z.B. pflanzten sich Schallwellen im Trägermedium Luft oder in Festkörpern fort, und Wasserwellen im Trägermedium Wasser. Die Physiker erwarteten daher, dass es nicht nur zur Ausbreitung dieser Wellen, sondern auch beliebiger anderer Wellen ein Trägermedium brauche. Weil ab Beginn des 19. Jh. aufgrund experimenteller Befunde⁵ die Überzeugung entstand, dass auch das Licht Wellencharakter habe (und zwar, gemäss theoretischer Überlegungen⁶, denjenigen einer elektromagnetischen Welle), wurde nun erwartet, dass
 - es auch für die Ausbreitung des Lichtes ein Trägermedium (namens „Äther“) gäbe;
 - insbesondere (und ebenfalls in Analogie zu den Schall-/Wasser-/...Wellen) der vom Beobachter gemessene Wert der Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszu-

⁴ Die genannten Voraussetzungen „geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ “ sind von grosser Wichtigkeit. Denn es war klar (vgl. Kap. 2 für ergänzende Bemerkungen), dass aus Sicht eines Beobachters, welcher sich auf andere Weise, d.h. beschleunigt, durch den Raum bewegt, mindestens das 2. Newton'sche Axiom nicht mehr gültig sein konnte. (Insbesondere gilt es, strikte gesprochen, nicht aus Sicht eines Beobachters, der sich auf der Erdoberfläche aufhält (wegen der Rotation der Erde um die eigene Achse, der Bewegung der Erde um die Sonne, ...), also aus unserer eigenen Sicht ! Während genügend kurzer Zeitabschnitte bemerken wir dies aber kaum, d.h. haben auch wir den Eindruck, dass es (wenigstens) im Rahmen der Messgenauigkeit durchaus gelte. Andernfalls hätte Newton dieses Axiom wohl kaum entdeckt / erfunden !)

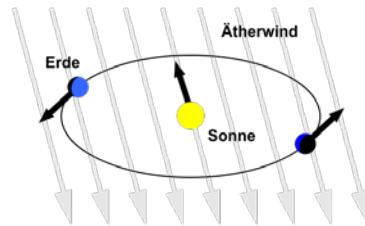
⁵ Licht wurde durch spaltartige Öffnungen gesandt; nach Durchtritt durch eine solche Öffnung zeigte das auf einen Schirm auftreffende Licht sehr spezielle Muster, welche nur dann gut verständlich waren, wenn man annahm, dass sich das Licht wellenartig ausbreite.

⁶ Maxwell-Gleichungen ...

stand des Beobachters relativ zu diesem „Äther“ und zum Lichtstrahl abhängig sei.

- Das 1881 in Potsdam begonnene und 1887 in verfeinerter Form in Cleveland, Ohio, abgeschlossene Michelson-Morley-Experiment⁷ hatte zum Ziel, diesen hypothetischen „Äther“ und die Geschwindigkeit der Erde (auf ihrer Bahn um die Sonne) relativ zum „Äther“ nachzuweisen. Entgegen aller Erwartung erbrachte das Experiment aber ein vollständiges Nullresultat, denn die gemessene Lichtgeschwindigkeit erwies sich (im Rahmen der damaligen Messgenauigkeit) als unabhängig sowohl von der Bewegungsrichtung und -geschwindigkeit des irdischen Beobachters als auch von der Ausbreitungsrichtung des Lichtes. (Auch alle modernen, weit genauerer Wiederholungen des Experiments haben Nullresultate erbracht.)
- Das gänzlich überraschende Nullresultat des Michelson-Morley-Experiments lässt sich wie folgt interpretieren:
 1. Den „Äther“ gibt es nicht. D.h. das Licht benötigt keinerlei Trägermedium zur Ausbreitung.
 2. Alle Beobachter erhalten beim Messen der Lichtgeschwindigkeit immer ein-und-dasselbe Resultat, gänzlich unabhängig davon, wie sie sich selbst bewegen. Oder kurz gesagt:

Der Wert der Lichtgeschwindigkeit c ist unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters.



Diesen 2. Teil der Interpretation haben wir eingerahmt, weil er später zu einem der wesentlichen Pfeiler der SRT wurde (vgl. Kap. 4).

- Die obige Interpretation wurde aber erst nach 1905, d.h. erst nach der Erfindung der SRT, zur allgemein akzeptierten Interpretation. Denn nach Abschluss des Michelson-Morley-Experiments, d.h. um 1890, gab es durchaus auch prominente anderslautende Stimmen. So. z.B. akzeptierten weder Michelson noch Morley, dass ihr Experiment die Theorie vom „Lichtäther“ widerlege. Und der niederländische Mathematiker und Physiker Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928)⁸ versuchte, die Idee eines „Äthers“ mit den negativen Befunden des Michelson-Morley-Experiments in Einklang zu bringen, indem er punktuell die mathematische Struktur der klassischen Physik zu ändern begann. Mangels überzeugender Resultate gab er diese Versuche letztlich aber auf. Erwähnt werden sie hier trotzdem; denn im Zuge seiner mathematischen Untersuchungen entdeckte er interessanterweise einige mathematische Beziehungen, welche wenige Jahre später zu den zentralen Formeln der SRT zählen sollten⁹. Noch ganz im Denkgebilde der klassischen Physik verhaftet, erkannte er aber den revolutionären physikalischen Rahmen nicht, innerhalb dessen diese mathematischen Beziehungen durchaus Sinn machen würden. Diesen revolutionären physikalischen Rahmen, d.h. die SRT, zu entwerfen und zu ergründen, blieb Albert Einstein vorbehalten.

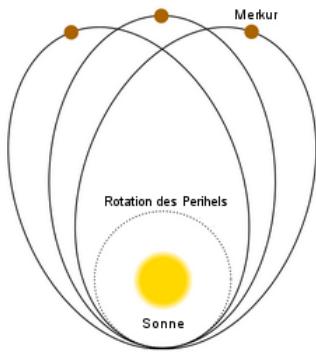
- U.a.m. (vgl. Kap. 3, und auch „Quantenphysik - eine Einführung“).

⁷ Albert Abraham Michelson (1852 - 1931), US-amerikanischer Physiker deutscher Herkunft; 1907 erhielt er als erster Amerikaner den Nobelpreis für Physik, und zwar „für seine optischen Präzisionsinstrumente und die damit ausgeführten spektroskopischen und metrologischen Untersuchungen“. Edward Williams Morley (1838 - 1923) war ein US-amerikanischer Chemiker.

⁸ Zu dessen Ehren die uns bestens bekannte „Lorentz-Kraft“ ihren Namen erhielt ...

⁹ Und daher auch Lorentz' Namen tragen, so z.B. die „Lorentz-Transformation“ (vgl. Kap. 4).

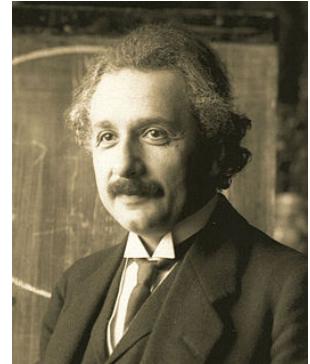
- Gravitation
 - Perihel-Drehung des Merkur:
 - Bereits die Newton'sche Mechanik sagt voraus, dass der gravitative Einfluss der anderen Planeten das Zweikörper-System bestehend aus Sonne und Merkur stört. Durch diese Störung führt die große Bahnachse der Merkurbahn eine langsame rechteckige Drehung in der Bahnebene aus. Der Merkur durchläuft also streng genommen keine Ellipsen-, sondern eine Rosettenbahn. In der zweiten Hälfte des 19. Jh. waren die Astronomen in der Lage, diese Veränderungen, insbesondere die Lage des Merkur-Perihels, mit großer Genauigkeit zu messen. Urbain Le Verrier, der damalige Direktor des Pariser Observatoriums, bemerkte 1859, dass die Drehung des Merkur-Perihels $5.74''$ (= Bogensekunden) pro Jahr beträgt (für eine komplette Periheldrehung von 360° benötigt der Merkur also rund $225'000$ Jahre). Dieser Wert konnte allerdings nicht in Gänze mit der klassischen Mechanik von Isaac Newton erklärt werden. Denn im Vergleich mit der Prognose der Newton'schen Himmelsmechanik ist der gemessene Wert um $0.43''$ pro Jahr zu groß. Darum vermutete man einen dieser Abweichungen verursachenden Asteroidengürtel oder einen weiteren Planeten zwischen Merkur und Sonne.
 - Obwohl man sogar schon einen Namen für diesen vermeintlichen Planeten gewählt hatte (Vulkan), konnte trotz intensiver Suche kein Objekt innerhalb der Merkurbahn gefunden werden. Da ein Objekt innerhalb der Merkurbahn allerdings durch den entsprechend kleinen Abstand zur Sonne leicht von dieser überstrahlt werden kann, stieß das Problem nur auf mäßiges Interesse (bis Albert Einstein 1915 mit seiner Allgemeinen Relativitätstheorie eine Erklärung für die obigen $0.43''$ erbrachte).
 - U.a.m.
 - „Quantenphysik“¹⁰
 - Vgl. „Quantenphysik - eine Einführung“.



1.4. Haupt-Theorien der modernen Physik (im Telegrammstil)

SRT:

- Veröffentlicht im Jahr 1905.
- Erfinder: Albert Einstein.
- Hauptsächliche neuen Aspekte: Radikal neue Struktur von Raum und Zeit. Insbesondere eine radikal neue Beziehung zwischen Bezugssystemen, welche sich mit $v = \text{konst.}$ (\Rightarrow „Spezielle“) relativ zueinander (\Rightarrow „Relativitäts“-...) bewegen.
- Einer der wesentlichen Ausgangspunkte: Die Feststellung, dass die (Vakuums-)Lichtgeschwindigkeit c unabhängig vom Bezugssystem ist (und dabei ca. $300'000$ km/s beträgt, was aber für die weitere Argumentation nicht wichtig ist).
 - Wie in Kap. 1.3. gesehen (vgl. aber auch Kap. 3), kann das Ergebnis des Michelson-Morley-Experiments auf diese Weise interpretiert werden.
 - Interessanterweise ist aber nicht klar, ob Albert Einstein dieses Experiment überhaupt kannte! Denn aufgrund der schriftlichen Zeugnisse scheint es, als ob Einstein auf rein gedanklichem Wege, anhand seiner Sicht plausibler physikalischer Überlegungen zu astronomischen (vgl. nächster Punkt) und anderen Beobachtungen, zum Schluss kam, dass c sicherlich unabhängig vom Bezugssystem sein müsse. Somit muss man davon ausgehen, dass das berühmte Michelson-Morley-Experiment eigentlich erst im Nachhinein als Beleg / Grundpfeiler für Einsteins Spezielle Relativitätstheorie gesehen werden kann.



¹⁰ In Anführungszeichen gesetzt, weil es um 1900 dieses physikalische Themengebiet noch gar nicht gab.

- Eine solche physikalische Überlegung zu astronomischen Beobachtungen ist die Folgende: Gemäss astronomischer Beobachtungen tritt mehr als die Hälfte aller Sterne nicht als Einzelsterne auf, sondern im Rahmen von Mehrfachstern-Systemen, wobei es vorwiegend Doppelstern-Systeme sind. In Doppelstern-Systemen umkreist ein kleiner Begleitstern den grösseren Zentralstern; so z.B. umkreist im folgenden Bild der kleine blaue Stern den grossen orange-rötlichen. Wenn man nun die Kreisbewegung beobachtet, so stellt man immer fest, dass der umkreisende Stern



- zeitlich gesehen gleichmässig umzulaufen scheint (also nicht zu- und abnehmende Umlaufgeschwindigkeiten zeigt);
- immer eine eindeutige Position hat (also nie an mehreren Orten gleichzeitig zu sein scheint).

Es ist nicht schwierig einzusehen, dass diese Beobachtungen wenig verständlich wären, wenn die Lichtgeschwindigkeit c vom Bezugssystem abhängig wäre, d.h. sie suggerieren, dass c vom Bezugssystem tatsächlich unabhängig ist.

- Umfasst: Mechanik, Elektrodynamik.

ART:

- Veröffentlicht im Jahr 1915.
- Erfinder: Albert Einstein (unter wesentlicher Mitarbeit u.a. des Schweizer Mathematikers Marcel Grossmann (1878 - 1936); Bild nebenstehend).
- Hauptsächliche neue Aspekte: Verallgemeinerung der SRT auf Bezugssysteme, welche sich nicht mehr mit $v = \text{konst.}$ relativ zueinander bewegen müssen (\Rightarrow „Allgemeine“).
- Ausgangspunkt: Ein wesentlicher Ausgangspunkt ist Einsteins Äquivalenzprinzip, welches besagt, dass die Bewegung in einem homogenen Gravitationsfeld vollständig äquivalent ist zu einer Bewegung mit konstanter Beschleunigung weit entfernt von jeglichen Massen.
- Umfasst: Mechanik, Gravitation, Elektrodynamik.



Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie:

- Veröffentlicht ab ca. 1925.
- Erfinder der QM: Werner Heisenberg (1901 - 1976; Deutscher Physiker; linkes Bild), Erwin Schrödinger (1887 - 1961; Österreichischer Physiker; rechtes Bild), ..., nach bedeutsamen Vorarbeiten u.a. von Albert Einstein.
- Erfinder der QFT: ...
- Hauptsächliche neue Aspekte: Mathematisch sprunghaft anspruchsvollere Formulierung der auf mikroskopischer Ebene (mutmasslich) gültigen Gesetze der Physik. Erklärung von Atom-aufbau, Existenz und Form der Atomspektren, ... (vgl. „Quantenphysik - eine Einführung“).
- Umfasst: Raum-Zeit-Struktur der klassischen Physik oder der SRT (je nach Komplexitätsgrad), spezielle Form von Mechanik und Elektrodynamik, Starke und Schwache Wechselwirkung. Bis heute ist es noch nicht gelungen, die Gravitation auf überzeugende Weise einzubinden.



2. Klassische Physik: Überlegungen zur Struktur

Beobachter,
Koordinaten-
systeme,
Bezugssysteme:

- Wenn wir als irdische Beobachter z.B. den Lauf der Sterne, der Planeten, des Mondes oder von Satelliten, welche die Erde umkreisen, beschreiben möchten, so ...
 - haben wir, erstens, grundsätzlich den Eindruck, als ob wir selbst uns in völliger Ruhe befinden, währenddem sich die Himmelskörper scheinbar um uns (sozusagen um das Zentrum des Universums) bewegen;
 - ist es daher, zweitens, aus unserer Sicht sinnvoll, die genauen Positionen dieser Himmelskörper mittels Koordinaten anzugeben, die sich auf ein (an sich beliebig gewähltes) räumliches Koordinatensystem (KS) beziehen, dessen Achsen aber eine aus unserer Sicht fixe / unveränderliche Lage haben. So z.B. könnte man aus Schaffhauser Sicht ein solches KS wie folgt wählen: Den Nullpunkt beim Bahnhof Schaffhausen, die x-Achse tangential zur Erdoberfläche in Richtung Süden zeigend, die y-Achse tangential zur Erdoberfläche in Richtung Osten zeigend, und die z-Achse senkrecht zur Erdoberfläche in Richtung Himmel zeigend. Nachdem wir dergestalt „unser“ KS gewählt haben, beziehen sich all unsere Positionsangaben (der Sterne, der Planeten, ...) auf dieses fest mit uns verbundene KS; daher nennt man dieses KS auch unser Bezugssystem. Basierend auf unserem Bezugssystem können wir aber nicht nur die Positionen der Himmelskörper, sondern natürlich auch aller anderer Gegenstände beschreiben, so z.B. von Häusern, Brücken, fahrenden Autos, fliegenden Flugzeugen, ...
- Verwandte von uns, die sich auf einem andern Planeten (z.B. des Sonnensystems) oder in einem Raumschiff durchs All bewegen, hätten einen analogen Eindruck und würden analog handeln: Auch sie hätten als Beobachter grundsätzlich den Eindruck, als ob sie selbst sich in Ruhe befänden, währenddem sich die Himmelskörper scheinbar um sie bewegten; und auch sie würden es sinnvoll finden, die genauen Positionen der Himmelskörper mittels ihres Bezugssystems anzugeben, d.h. mittels eines aus ihrer Sicht fixen, ruhenden Koordinatensystems.
- Aber nicht nur Verwandte von uns, die draussen im Weltall leben, würden so urteilen und handeln können, sondern im Prinzip auch Beobachter, die in einem (ruckelfreien) Bahnwagen an uns vorbeifahren ¹¹, oder in einem (ruckelfreien) Auto, auf einem (ruckelfreien) Velo, ...

Gültigkeit der
Newton'schen
Axiome:

- Gemäss der (üblicherweise eher wenig kommentierten) Formulierung der Newton'schen Axiome könnte man naiverweise denken, dass sie (wahrscheinlich) in jedem Bezugssystem gelten. Wie aber bereits in Kap. 1.2. angetönt, ist es allen Physikern klar, dass dem so nicht sein kann. Denn man kann ohne grosse Probleme Folgendes einsehen:
 - γ Wenn die Newton'schen Axiome in meinem Bezugssystem gelten, so gilt z.B. in einem Bezugssystem, welches sich relativ zu meinem dreht, mindestens das 2. Axiom nicht mehr (und zur Sicherstellung der Gültigkeit des 1. Axioms auch aus Sicht des drehenden KS müssen nun im drehenden KS nebst der „natürlichen“ Kräfte auch 2 Scheinkräfte, nämlich $\vec{F}_{\text{zentrifugal}}$ und $\vec{F}_{\text{Coriolis}}$, eingeführt werden).
 - γ Diese Aussagen über rotierende Bezugssysteme gelten in analoger Weise noch viel allgemeiner, nämlich für all jene Bezugssysteme, welche relativ zu meinem (nicht nur rotierend, sondern) in beliebiger Weise beschleunigt werden.
- Wie ebenfalls bereits in Kap 1.2. erwähnt, ist ein mit der Erde fix verbundenes KS ein beschleunigtes Bezugssystem. D.h., wenn z.B. wir aus Schaffhauser Sicht physikalische Experimente durchführen und das Geschehen beschreiben, so tun wir dies aus Sicht eines beschleunigten Bezugssystems. Trotzdem scheinen sich die Newton'schen Axiome in unserem Alltag mindestens über genügend kurze Zeitabschnitte immer wieder mit guter Genauigkeit zu bestätigen.

¹¹ Wahrscheinlich kennst du die folgende Situation: Du bist im Bahnhof in einen modernen Zug eingestiegen und beobachtest den nebenan stehenden Zug; plötzlich fährt dieser ab. Einen Moment später aber, und nur durch Vergleich mit den Bahnhofsgebäuden,stellst du fest, dass es nicht der andere Zug ist, welcher sich relativ zum Bahnhof in Bewegung gesetzt hat, sondern dein eigener ... In einem ruckelfreien Zug könntest du also durchaus den Eindruck haben, dass du selbst in Ruhe bist, währenddem der Rest der Welt an dir vorüberzieht.

igkeit zu bewähren. Auf der Erde also gelten die Newton'schen Axiome mindestens näherungsweise.

- Es stellt sich nun die Frage, ob es überhaupt Bezugssysteme gibt, in denen die Newton'schen Axiome vollumfänglich gelten. Weil es leider unmöglich ist, uns an jeden beliebigen Ort des Universums zu versetzen und im dortigen Bezugssystem Experimente zum Testen der Newton'schen Axiome durchzuführen, können wir letztlich nichts anderes tun, als die folgende (und, wie man glaubt, plausible) Hypothese zu äussern:
 1. Die Newton'schen Axiome gelten im sog. „Fixsternsystem“ ($=: \Sigma_0$) ¹².
 2. Sie gelten ebenfalls in jedem Bezugssystem, welches sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zu Σ_0 bewegt. ¹³

Inertialsysteme: - Definition: Ein KS, in welchem das 2. Newton'sche Axiom gilt, wird (wegen des dort geltenden Trägheitsprinzips ¹⁴) ein Inertialsystem (IS) ¹⁵ genannt.

- Bemerkung: Im Folgenden gehen wir jeweils stillschweigend davon aus, dass in einem IS auch die beiden anderen (und vielleicht „unproblematischer“ scheinenden) Newton'schen Axiome erfüllt sind.
- Folgerung: Gemäss Obigem nehmen wir im Rahmen der klassischen Physik also an, dass
 - das „Fixsternsystem“ Σ_0 ein solches IS ist.
 - jedes KS, welches sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zu Σ_0 bewegt, ebenfalls ein IS ist. (Daher ist auch jedes KS, welches sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zu einem dieser IS bewegt, wiederum ein IS.)

Physikalische Äquivalenz der IS (Teil 1): - Bemerkung:

- Wie oben erläutert, geht die klassische Physik von der Annahme aus, dass in jedem KS, welches sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zu einem IS bewegt, das 2. Newton'sche Axiom ebenfalls gilt (und, stillschweigend, dass auch die beiden andern Newton'schen Axiome erfüllt sind).
- Dies allein garantiert aber leider noch nicht, dass alle IS physikalisch gänzlich gleichwertig / äquivalent sind. Denn es wäre ja möglich, dass die aus Sicht des IS S wahrgenommenen Kräfte nicht immer zu denjenigen Kräften gleichwertig sind, welche aus Sicht des IS S' (welches sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zu S bewegt) auftreten. Was bedeuten würde, dass es Situationen gäbe, wo sich die betreffenden Gegenstände aus Sicht dieser beiden IS nicht auf gleichartige Weise bewegen würden, d.h. dass die beiden IS S, S' physikalisch nicht vollständig äquivalent wären.

¹² Das „Fixsternsystem“ kann man mit dem (hypothetischen) unveränderlichen, absoluten Raum identifizieren.

¹³ Der Grund für diese Hypothese ist, dass - wie auf der vorhergehenden Seite ausgeführt - sich Eigenbewegungen der Art „geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ “ physikalisch nicht wesentlich vom Ruhezustand zu unterscheiden scheinen. Daher sollten doch eigentlich, so die Überzeugung, der Fairness halber alle diese Bezugssysteme physikalisch gleichwertig sein, insbesondere sollten in ihnen die Newton'schen Axiome wirklich gelten.

¹⁴ Das 2. Newton'sche Axiom besagt ja: Wenn die gesamte auf einen Körper einwirkende Kraft gleich $\vec{0}$ ist, dann bleibt die Geschwindigkeit des Gegenstandes / sein Bewegungszustand unverändert. Der Körper ist also „träg“, weil er seinen Bewegungszustand offenbar nicht einfach „von sich aus“ / ohne äussere Krafteinwirkung ändern kann / „will“.

¹⁵ Von „iners“ (latein.) = träge / untätig.

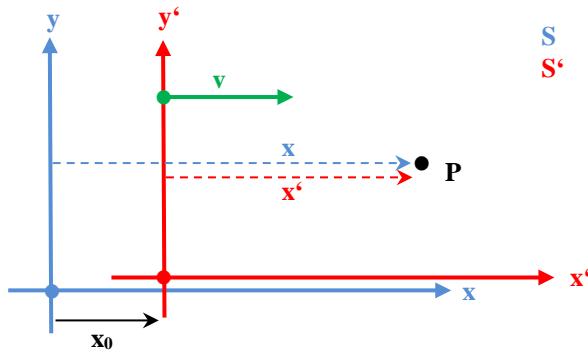
- Im Rahmen der klassischen Physik gehen wir nun aber von der folgenden Annahme aus ...
 - Annahme: Alle IS sind physikalisch äquivalent / physikalisch nicht unterscheidbar.
 - Bemerkung: Wir werden in Bälde sehen (vgl. Abschnitt „Physikalische Äquivalenz der IS (Teil 2)“, dass diese Annahme bestens erfüllt ist, sofern die dabei beteiligten Kräfte die elektrostatischen und die Gravitationskräfte sind. Später (vgl. Kap. 3 und 6.1.) werden wir aber aufzeigen, dass die physikalische Äquivalenz leider nicht mehr zutrifft, sobald die Lorentz-Kraft ins Spiel kommt !

- Struktur von Raum und Zeit:
- Grundannahme: Wenn: Beobachter in den Bezugssystemen 1 // 2 dieselben Ereignisse mit Ortsdifferenz $\vec{\Delta r} // \vec{\Delta r}'$ und zeitlichem Abstand $\Delta t // \Delta t'$ registrieren,
dann: ist $|\vec{\Delta r}| = |\vec{\Delta r}'|$ und $|\Delta t| = |\Delta t'|$.
D.h.: Räumliche und zeitliche Abstände sind „absolut“, d.h. Raum und Zeit sind „absolut“.
 - Bemerkung: Diese Grundannahme scheint sich in unserem täglichen Leben bestens bewahrheitet zu haben ...

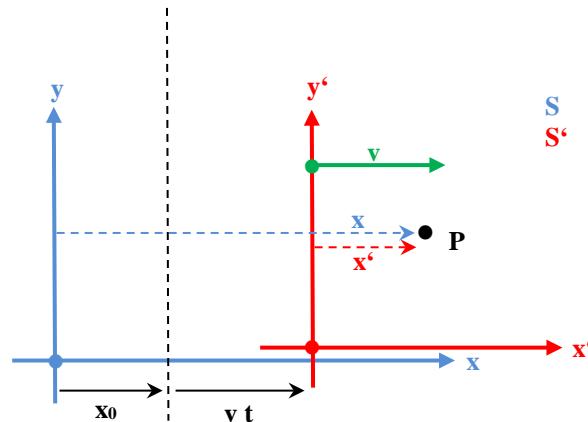
- Koordinatentransformation zwischen IS:
- Annahme:
 - Das IS S' bewegt sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zum IS S .
 - Der Einfachheit halber: Die Koordinaten-Achsen von S' sind gegen über denjenigen von S nicht gedreht, sondern verlaufen parallel zu den entsprechenden Koordinaten-Achsen von S .
 - Koordinaten:
 - IS S : Raum (der Einfachheit halber nur 2-dim.): x, y
Zeit: t
 - IS S' : Raum: x', y'
Zeit: t'
 - Der Einfachheit halber werden die x/x' -Koordinatenachsen so gelegt, dass sie mit der Bewegungsachse übereinstimmen.
 - Bemerkung: Im weiteren Verlaufe dieses Kurses zur SRT werden wir noch häufig die Situation antreffen, wo sich ein KS S' geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zu einem KS S bewegt. In all diesen Fällen werden wir (sofern nicht anders vermerkt) die S/S' -Koordinaten-Achsen genauso wie oben beschrieben wählen.

(Fortsetzung: Siehe nächste Seite)

- Position von S, S' zur Zeit $t = 0$, $t' = t'_0$:



- Position von S, S' zur Zeit $t > 0$, $t' > t'_0$:



- Koordinaten-Umrechnung:

Die Umrechnung der Raumkoordinaten (eines beliebig gewählten Punktes P, vgl. obige Zeichnungen) vom IS S ins IS S' geschieht anhand der offensichtlichen geometrischen Beziehungen zwischen den Koordinaten x, x' resp. y, y' (des Punktes P), und die Umrechnung der Zeitwerte wird gemäss dem klassisch-physikalisch gesunden Menschenverstand vorgenommen:

$$\left| \begin{array}{l} x' = x - x_0 - vt \\ t' = t'_0 + t \\ (y' = y) \end{array} \right| \quad (\text{sog. Galilei-Transformation zwischen } S, S')$$

- Annahme / Folgerung:

Der Einfachheit halber wollen wir ab jetzt annehmen, dass $x_0 = 0$ und $t'_0 = 0$ sind. Damit erhalten die Galilei-Transformationen die folgende spezielle (und speziell einfache) Form:

$$\left| \begin{array}{l} x' = x - vt \\ t' = t \end{array} \right| \quad (1)$$

Physikalische Äquivalenz der IS (Teil 2):

- Ziel:

Wie im Abschnitt „Physikalische Äquivalenz der IS (Teil 1)“ versprochen, möchten wir jetzt einsehen, dass zwei IS S, S', welche sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zueinander bewegen, physikalisch äquivalent sind, sofern die dabei beteiligten Kräfte die elektrostatischen und die Gravitationskräfte sind.

- Bemerkung:

Der rechnerischen Einfachheit halber nehmen wir hier an, dass der Raum nur noch 1-dimensional ist (und mit der x-x'-Achse übereinstimmt). Es würde zwar nicht allzu viel zusätzlichen Aufwand erfordern, um einzusehen, dass die von uns im Folgenden gezogenen Schlüsse auch dann gelten, wenn der Raum 3-dimensional ist; weil wir aber im Rahmen der ent-

sprechenden Berechnungen keine grundsätzlich neuen Einsichten in die Physik gewinnen würden, verzichten wir darauf.

- Beispiel:

Der Verständlichkeit halber wollen wir zuerst das folgende Beispiel betrachten:

- Aus Sicht von S befindet sich am Ort x_Q ein elektrisch geladenes Teilchen der Ladung Q , und am Ort x befindet sich ein ebenfalls elektrisch geladenes Teilchen der Ladung q und Masse m , welches sich unter Einfluss der von Q ausgeübten Coulomb-Kraft bewegt.

Für die Beschleunigung $a \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$ von q gilt daher gemäss Newtonscher Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q Q}{|x-x_Q|^2} \cdot \frac{x-x_Q}{|x-x_Q|}$$

- Aus Sicht von S' befindet sich Q am Ort x'_Q (wobei gemäss (1) $x_Q' = x_Q - vt$ ist), und q ist am Ort x' ($= x - vt$). Weil auch S' ein IS ist, gilt auch aus Sicht von S' die Newton'sche Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2x'}{(dt')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q Q}{|x'-x'_Q|^2} \cdot \frac{x'-x'_Q}{|x'-x'_Q|}$$

- Indem wir nun die Galilei-Transformation (1) auf diese S' -Bewegungsgleichung anwenden, werden wir eine Gleichung erhalten, die
 - in S gilt;
 - in „Konkurrenz“ zur obigen S-Bewegungsgleichung ebenfalls die Bewegung von q beschreibt;
 - grundsätzlich mit der obigen S-Bewegungsgleichung übereinstimmen kann oder auch nicht.

Sofern diese Gleichung nicht mit der obigen S-Bewegungsgleichung übereinstimmt, nehmen S resp. S' die Wirkung der Coulomb-Kraft auf echt unterschiedliche Weise wahr / bewegt sich q aus Sicht von S resp. S' echt unterschiedlich, d.h. sind S und S' in Bezug auf solche elektrostatischen Situationen physikalisch nicht äquivalent; ansonsten schon.

- Ja, schauen wir jetzt doch, was bei Anwenden der Galilei-Transformation (1) auf die S' -Bewegungsgleichung wirklich herauskommt:

$$m \frac{d^2x'}{(dt')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q Q}{|x'-x'_Q|^2} \cdot \frac{x'-x'_Q}{|x'-x'_Q|} \quad | \quad t' = t, \quad x' = x - vt, \quad x_Q' = x_Q - vt$$

$$m \frac{d^2(x-vt)}{dt^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q Q}{|(x-vt)-(x_Q-vt)|^2} \cdot \frac{(x-vt)-(x_Q-vt)}{|(x-vt)-(x_Q-vt)|} \quad | \quad \dots$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q Q}{|x-x_Q|^2} \cdot \frac{x-x_Q}{|x-x_Q|}$$

Weil die so erhaltene Gleichung genau mit der S-Bewegungsgleichung übereinstimmt, sind S und S' in Bezug auf solche elektrostatischen Situationen offenbar physikalisch äquivalent !

- Bemerkung:

Es ist von grosser Wichtigkeit, das obige Beispiel strukturell so tiefgründig wie möglich zu verstehen. D.h. zu begreifen, aufgrund welcher struktureller Gründe das Umrechnen der S' -Bewegungsgleichung so problemlos zur S-Bewegungsgleichung geführt hat. Die Frage ist damit lanciert ... - Nun, die Antwort lautet so:

- Gemäss (1) ist die Beschleunigung a' gleich der Beschleunigung a , d.h. die linke Seite der Bewegungsgleichung ist eine IS-unabhängige Grösse.

- Auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung treten ja nebst einiger IS-unabhängiger Konstanten nur Positionsdifferenzen ($x - x_Q$ resp. $x' - x'_Q$) auf; und solche Differenzen ändern sich unter (1) eben nicht, d.h. $x' - x'_Q = x - x_Q$.
- Folgerung:
- Auch wenn wir nicht nur (wie im obigen Beispiel) 2 Teilchen und die von ihnen bewirkten Coulomb-Kräfte betrachten würden, sondern beliebig viele Teilchen, welche einander aufgrund von Coulomb-Kraft und Gravitationskraft beeinflussen, so würden wir auf analoge Weise wie oben zum Schluss gelangen, dass die IS S und S' physikalisch äquivalent sind. Denn sowohl die Coulomb-Kraft

$$F_{el}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|}$$

als auch die Gravitationskraft

$$F_{grav}(x_1, x_2) = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^2} \cdot \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|}$$

hängt ja nur von IS-unabhängigen Konstanten und von der Positions-differenz der beteiligten Teilchen ab !

- Wie versprochen sehen wir also, dass zwei IS S, S', welche sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zueinander bewegen, physikalisch äquivalent sind, sofern die dabei beteiligten Kräfte die elektrostatischen und die Gravitationskräfte sind.
- Bemerkung: Die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ hat eine gänzlich andere mathematische Struktur als die obigen statischen Kräfte; als Resultat werden wir sehen (vgl. Kap. 3 und 6.1.), dass die IS S, S' via (1) physikalisch nicht mehr äquivalent sind !

3. Klassische Physik: Probleme / Widersprüche

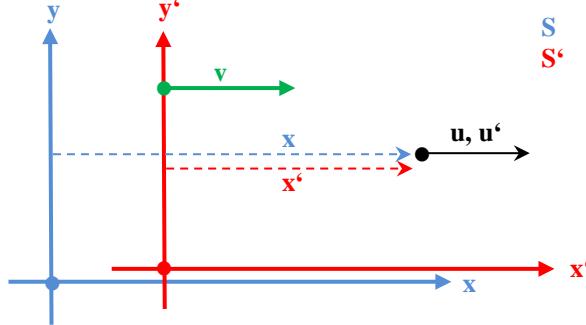
ED / Lichtgeschwindigkeit: - Annahme zu c (bis 1881): Der aus den Maxwell-Gleichungen folgende Wert für c (im Folgenden mit $c_{\text{Maxwell-Glg.}}$ bezeichnet) entspricht der Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) bezgl. dem Bezugssystem des „Äthers“.

- Situation: Wir betrachten jetzt ein IS S' , welches sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zum IS S bewegt.

Behauptung: Wenn sich ein Teilchen (in x/x' -Richtung) bezgl. dem IS S mit Geschwindigkeit u bewegt, dann bewegt es sich bezgl. dem IS S' mit Geschwindigkeit $u' = u - v$.

Bemerkung: In der unten folgenden konkreten Anwendung von $u' = u - v$ werden wir S mit dem Bezugssystem des „Äthers“ identifizieren, S' mit dem IS eines Beobachters, welcher sich relativ zum „Äther“ bewegt, und das „Teilchen“ mit der Front eines Lichtstrahls.

Beweis:



- Aus Sicht von S : $x = x_0 + u t$
- Galilei-Transformation (1): $x = x' + v t$
- \Rightarrow Aus Sicht von S' :

$$x' + v t = x_0 + u t \quad | \dots$$

$$\underline{\underline{x'} = x_0 + (u - v) t'}} \quad \blacksquare$$

Folgerung:

Aus Sicht eines Beobachters, welcher sich gegenüber dem „Äther“ geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ bewegt, hängt die von ihm gemessene Geschwindigkeit eines Lichtstrahles, welcher sich entlang seiner Bewegungsrichtung ausbreitet, von seiner Relativgeschwindigkeit v ab und kann daher nicht gleich $c_{\text{Maxwell-Glg.}}$ sein!

- Experiment:

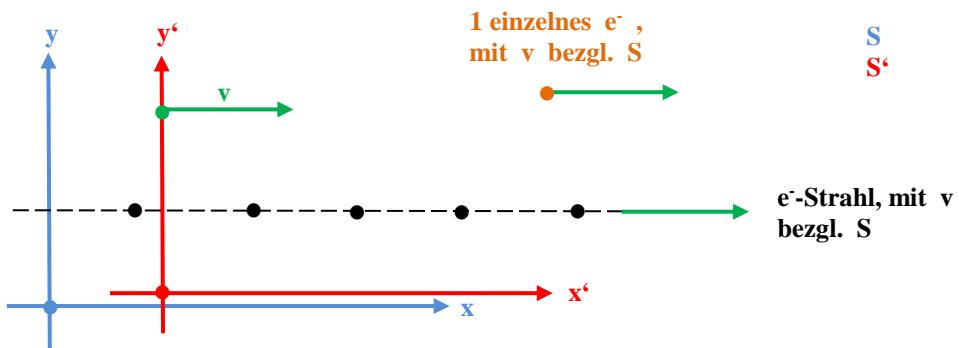
Das in Kap. 1.3. beschriebene Michelson-Morley-Experiment besagt aber, dass der Wert der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit offenbar nicht abhängig ist vom Bewegungszustand des Beobachters, also unabhängig vom IS immer gleich $c_{\text{Maxwell-Glg.}}$ ist!

Folgerung:

Die klassische Physik hat offensichtlich ein Erklärungsproblem betr. dem gemessenen Wert der Lichtgeschwindigkeit ...

ED / Lorentz-
kraft:

- Situation: Das IS S' bewegt sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zum IS S , wobei die Details aus der folgenden Zeichnung ersichtlich werden.



- Bezgl. S' : Die e^- des e^- -Strahles erzeugen ein Coulomb-Feld $\vec{E}' \Rightarrow$ repulsive Wirkung auf das einzelne e^- .

Bezgl. S :

Die e^- des e^- -Strahles ...

- ... erzeugen ein Coulomb-Feld \vec{E} mit $\vec{E} = \vec{E}' \Rightarrow$ gleiche repulsive Wirkung auf das einzelne e^- wie aus Sicht von S' ;
- ... stellen einen elektrischen Strom dar \Rightarrow erzeugen gemäss Ampère'schem Gesetz ein magnetisches Feld $\vec{B} \Rightarrow$ bewirken via \vec{F}_L eine zusätzliche, anziehende Wirkung auf das einzelne e^- .

Folgerung:

Aus Sicht der beiden IS S und S' ist die Kraftwirkung des e^- -Strahles auf das einzelne e^- echt unterschiedlich \Rightarrow die beiden IS S und S' sind physikalisch nicht gleichberechtigt!

- Experiment:

Die in den IS S und S' tatsächlich gemessenen Kraftwirkungen auf das einzelne e^- unterscheiden sich nicht!

Folgerung:

Die klassische Physik hat offensichtlich auch ein Erklärungsproblem betr. scheinbar bestens verstandener, scheinbar einfacher elektromagnetischer Phänomene ...

4. SRT: Einstein'sche Postulate, Lorentz-Transformation

Postulate
(Einstein, 1905):

1. Alle KS, welche sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zu einem IS (insbesondere zu Σ_0) bewegen, sind ebenfalls IS.
2. In allen IS misst man für die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit denselben Wert c^{16} .
3. Die Gleichungen der Physik nehmen in allen IS dieselbe Form an.

Kommentar:

- Im Gegensatz zur klassischen Physik wird in der SRT der Begriff „IS“ im ursprünglichen Sinne verwendet; d.h. in einem IS gilt grundsätzlich einfach das 2. Newton'sche Axiom, und ob die beiden anderen Axiome auch gelten, wird offen gelassen.

(Normalerweise geht man aber stillschweigend davon aus, dass in einem IS auch das 3. Newton'sche Axiom erfüllt ist. Das 1. Newton'sche Axiom hingegen wird in der SRT nicht mehr in Originalform, sondern nur noch in revidierter Weise gültig bleiben (vgl. untenfolgende Bemerkungen).)

- In den obigen 3 Postulaten wird also aus Gründen von „Einstiens gesundem Menschen- resp. Naturverstand“ resp. damit die Natur „minimal sinnvoll“ erscheint
 - verlangt, welche KS sicherlich IS sein müssen, d.h. in welchen KS sicherlich das Trägheitsprinzip gelten muss;
 - die Absolutheit (betr. IS) der Lichtgeschwindigkeit postuliert;
 - auf der physikalischen Gleichberechtigung aller IS beharrt, wiederum aus Gründen der „Fairness“ (vgl. Fussnote 13 in Kap. 2).
- Einstiens 1. Postulat entspricht durchaus dem klassisch-physikalisch gesunden Menschenverstand.
Das 2. Postulat verletzt diesen in offensichtlich eklatanter Weise und bedeutet, dass unsere alltäglichen Vorstellungen von Raum und Zeit über Bord geworfen werden müssen, sofern es erfüllt werden soll.
Das 3. Postulat wiederum entspricht dem klassisch-physikalisch gesunden Menschenverstand; weil aber im Rahmen der klassischen Physik mindestens die ED diesem Postulat gar nicht genügt (vgl. Kap. 3), ist zu erwarten, dass auch dieses Postulat Folgen haben wird, die unser intuitives physikalisches Weltverständnis ein wenig strapazieren werden. Das 3. Postulat wird insbesondere zu einer Revision des 1. Newton'schen Axiomes führen (vgl. Kap. 6 ff.).
- Im Gegensatz zu den für Einstein zentral wichtigen physikalischen Eigenschaften der KS hat er aber offenbar keine α priori Vorstellungen äußern wollen, welche ganz konkrete (und aber sicherlich nicht-klassische) Struktur der Raum und die Zeit haben. Welche (sicherlich nicht-klassische(n)) Struktur(en) von Raum und Zeit die Einstein'schen Postulate nach sich ziehen, ist eine ganz wesentliche Frage und muss jetzt, im Nachgang zu den Postulaten, erkundet werden. Genau dies werden wir als Nächstes (hier in Kap. 4) in Angriff nehmen, basierend auf den Postulaten 1 und 2.
- Die Frage, wie denn nun im Rahmen von Einstiens Postulaten z.B. die Mechanik und die ED (sicherlich nicht-klassisch, also neu) zu formulieren sind, um dem 3. Postulat zu genügen (und um für kleine Geschwindigkeiten v die unter solchen Umständen immer besser zutreffende klassische Mechanik und klassische ED zu reproduzieren) werden wir ab Kap. 6 untersuchen.

¹⁶ Wobei $c \approx 300'000 \text{ km/s}$ ist, was aber für das Folgende nicht wirklich wesentlich ist.

Ergänzung zur
Zeitmessung:

Eine bis jetzt nicht thematisierte, eigentlich aber wichtige Frage ist, wie in einem IS der Zeitpunkt eines Ereignisses bestimmt wird. Sofern das fragliche Ereignis gleich bei mir stattfindet, ist es kein Problem, diesen Zeitpunkt zu bestimmen, denn dazu lese ich die fragliche Zeit einfach von meiner Uhr ab. Wie aber steht's, wenn das Ereignis weit entfernt stattfindet? Nun, die Idee ist, dass an genügend vielen Orten meines IS Uhren (und Beobachter) platziert werden, an denen der jeweils anwesende lokale Beobachter den fraglichen Zeitpunkt ablesen kann. Damit dies Sinn macht, müssen aber all diese Uhren synchronisiert sein, d.h. auf einen gemeinsamen Nullpunkt gesetzt worden sein. Und diese Synchronisation kann sehr gut mittels Licht-Signalen vorgenommen werden.¹⁷

Math. Analyse
der zulässigen
Koord.transf.
zwischen IS:

- Ausgangslage:
 - Es gelten die Einstein'schen Postulate 1 und 2 (das 3. werden wir bis auf Weiteres, d.h. bis und mit Kap. 5, nicht beachten / ignorieren).
 - Das IS S' bewegt sich geradlinig mit $v = \text{konst.}$ relativ zum IS S .
 - Wie üblich gilt (vgl. (1)): Die Koordinatensysteme von S und S' stimmen genau dann überein (d.h. der Ort $x = 0$ stimmt mit dem Ort $x' = 0$ überein), wenn sowohl für die S -Zeit t gilt, dass $t = 0$ ist, als auch $t' = 0$ ist.
- Gesucht: Diejenige Koordinaten-Transformation zwischen S und S' , welche mit den Einstein'schen Postulaten 1 und 2 verträglich ist.
- Bemerkung:
 - Eine umfassende Analyse würde uns mathematisch überfordern.
 - Was wir daher tun werden: Auf Plausibilität beruhend argumentieren, was glücklicherweise zu denselben Resultaten führen wird.
- Überlegung:
 - Es ist zu erwarten, dass die gesuchte Koordinaten-Transformation für kleine Geschwindigkeiten v mit der Galilei-Transformation übereinstimmt, weil unsere Alltagserfahrungen / Experimente zeigen, dass unter solchen Umständen die Galilei-Transformation das reale Naturgeschehen mit sehr guter Genauigkeit beschreibt.
 - Die Galilei-Transformation (1) ist linear (in x und t).
 - Gegenstände, welche sich aus Sicht von S kräftefrei (\Rightarrow mit konstanter Geschwindigkeit) bewegen (\Rightarrow Graph von $x(t)$ = geradlinig), müssen gemäß dem 1. Einstein'schen Postulat dasselbe Verhalten in S' zeigen. Insbesondere muss die zu findende Koordinaten-Transformation lineare Strukturen im x - t -Diagramm in lineare Strukturen im x' - t' -Diagramm überführen.
 - Aus diesen Gründen ist es plausibel, eine Koordinaten-Transformation zu suchen, welche (in x und t) eine lineare Struktur aufweist.

¹⁷ Vorbemerkung: Im Gegensatz zu allen andern Möglichkeiten, Informationen / Signale zu übermitteln (z.B. Schall, d.h. bewegte Atome / Moleküle in einem materiellen Trägermedium wie Gas, Flüssigkeit, Festkörper) hat das Licht als EM-Welle, welche offenbar kein Trägermedium braucht, die folgenden, grundlegend-exklusiven Eigenschaften: Die Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum) ist gemäß dem 2. Einstein'schen Postulat in jedem IS ...

1. ... isotrop (d.h. unabhängig von der Raumrichtung, in welche sich der Lichtstrahl ausbreitet);
2. ... gleich dem universellen Wert c .

Folgerung: Mit Hilfe von Lichtsignalen lassen sich in jedem IS die dortigen Uhren auf einen gemeinsamen Zeit-Nullpunkt einstellen / synchronisieren. Und zwar wie folgt: Eine zentrale Norm-/Referenz-Uhr U_0 an einem im IS fixen Ort sendet z.B. alle Stunden und in alle Himmelsrichtungen mittels Lichtstrahlen ein Zeitsignal aus; wenn nun der sich im Abstand $|\Delta r|$ befindliche, im IS ruhende Beobachter mit der Uhr U_1 das 5-Uhr-Zeitsignal empfängt, dann weiß er, dass seine Uhr U_1 jetzt die Zeit 5-Uhr plus $\frac{|\Delta r|}{c}$ zeigen sollte, sofern sie mit U_0 synchron läuft.

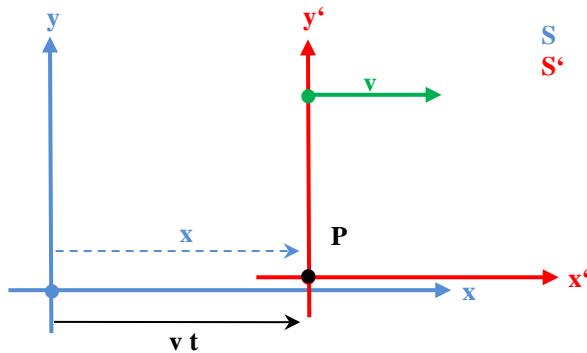
Anmerkung: Ab jetzt gehen wir stillschweigend davon aus, dass in jedem IS die dortigen Uhren auf obige Weise synchronisiert worden sind.

- $\Rightarrow \underline{\text{Ansatz}}: \underline{x'} = \gamma \cdot (x + A \cdot t) , \quad (2)$

wobei

- die Zahlenwerte γ und A bis jetzt noch unbestimmt sind;
- γ und A so bestimmt werden müssen, dass jetzt auch noch das 2. Einstein'sche Postulat erfüllt wird;
- die Bezeichnung „ γ “ international sehr konventionell ist (im Gegensatz zur „eigenmächtig“ gewählten Bezeichnung „ A “);
- die Abhängigkeit der Transformation von der Relativgeschwindigkeit v irgendwie in diesen beiden Zahlenwerten stecken muss, d.h. $\gamma = \gamma(v)$ und $A = A(v)$;
- wir der Einfachheit halber annehmen, dass γ in Tat und Wahrheit nur vom Betrag von v abhängt, d.h. $\gamma(+v) = \gamma(-v)$.

- $\underline{\text{Berechnen } A}:$ • Idee: Wir wollen keines der Einstein'schen Postulate ausnützen, sondern vorerst nur einmal den als Generalvoraussetzung dienenden Umstand, dass sich S' mit konstanter Geschwindigkeit v (entlang der x/x' -Achse) relativ zu S bewegt.



- Dazu betrachten wir den obigen Punkt P (= Koordinaten-Ursprung in S') aus Sicht von S' und S .
- Aus Sicht von S' gilt für P : $x' = 0$.
- Aus Sicht von S aber gilt für P : $x = v t$.
- Dies eingesetzt in (2) zeigt:

$$0 = \gamma \cdot (v \cdot t + A \cdot t) \mid \dots$$

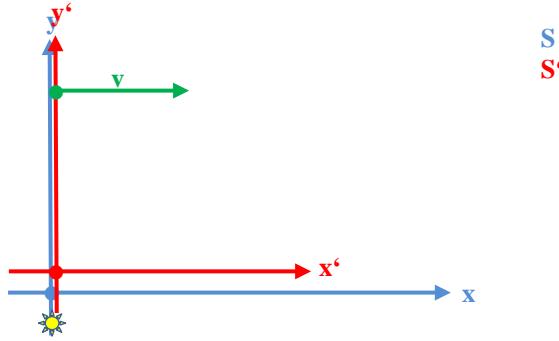
$$\underline{A = -v} \quad (3)$$

- $\underline{\text{Folgerung}}:$ Weil S und S' gleichberechtigt sind, und weil gemäss Annahme $\gamma(+v) = \gamma(-v)$ ist, muss für die umgekehrte Transformation, d.h. für die Transformation $S' \rightarrow S$ (mit Relativgeschwindigkeit $(-v)$), gemäss (2)-(3) Folgendes gelten:

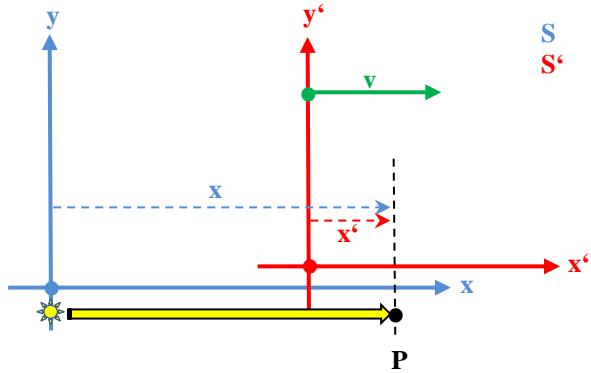
$$\underline{x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t')} \quad (4)$$

- $\underline{\text{Bestimmen } \gamma}:$ • Idee: Wir verlangen jetzt, dass auch das 2. Einstein'sche Postulat gilt und untersuchen die Konsequenzen für (2). Zu diesem Zweck beschreiben wir, aus Sicht von S' und S , die Position (der Front) eines sich entlang der x -Achse ausbreitenden Lichtstrahles, wobei jetzt eben zu verlangen ist, dass die Geschwindigkeit des Lichtstrahls sowohl aus Sicht von S' als auch von S gleich c ist.

- $t = 0$ und $t' = 0$: Zu dieser Zeit wird im Koordinaten-Ursprung von S eine Lampe angezündet.



- $t > 0$, $t' > 0$:



Für die Front P des Lichtstrahls gilt daher aus Sicht von

- S' : $x' = c t'$;
- S : $x = c t$.

Dies eingesetzt in die Transformationsformel für $S \rightarrow S'$, d.h. in (2)-(3), ergibt:

$$c t' = \gamma \cdot (c \cdot t - v \cdot t) \quad | \dots$$

$$\frac{t'}{t} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (5)$$

Andererseits eingesetzt in die Transformationsformel für $S' \rightarrow S$, d.h. in (4), erhalten wir:

$$c t = \gamma \cdot (c \cdot t' + v \cdot t') \quad | \dots$$

$$\frac{t}{t'} = \gamma \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (6)$$

Gemäss (5)-(6) ist also

$$\gamma \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \left[\gamma \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right)\right]^{-1},$$

was wir nach γ auflösen und so das wahrlich berühmte Resultat

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)$$

erhalten.

- Zw.bilanz: Unter der Annahme, dass uns der u.a. durch das 1. Einstein'sche Postulat motivierte Ansatz $x' = \gamma \cdot (x + A \cdot t)$ nicht in die Irre führt, wissen wir aufgrund des 2. Einstein'schen Postulates mittlerweile, wie im Rahmen der Koordinaten-Transformation $S \rightarrow S'$ die x' -Koordinate eines Ereignisses berechnet werden kann. Was noch offen ist, ist das Berechnen der t' -Koordinate des Ereignisses. Dieser Frage wollen wir uns als Nächstes zuwenden.

- Berechnen t' :
 - Idee: Wir betrachten die Abfolge von Koordinaten-Transformationen $S \rightarrow S' \rightarrow S$. Offensichtlich muss die dabei schliesslich resultierende x -Koordinate eines Ereignisses gleich seiner ursprünglichen x -Koordinate sein.

- Konkret ausgedrückt durch die Transformations-Formeln (2)-(4), d.h. durch

$$x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \quad \text{und} \quad x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') ,$$

heisst dies, dass

$$x = \gamma \cdot (\gamma \cdot (x - v \cdot t) + v \cdot t')$$

sein muss. Auflösen der Klammern auf der rechten Seite führt zu

$$x = \gamma^2 x - \gamma^2 v t + \gamma v t' .$$

Diese Zeile können wir als (lineare) Gleichung für t' (in Abhängigkeit von x und t , und natürlich von v) interpretieren, welche wir jetzt nach t' auflösen und das Resultat (u.a. via (7)) vereinfachen:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\gamma v} (\gamma^2 v t + (1 - \gamma^2)x) = \gamma t + \frac{1}{\gamma v} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) x \\ &= \gamma t + \frac{1}{\gamma v} \left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) x = \gamma t + \frac{1}{\gamma v} \left(\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) x \\ &= \gamma t - \frac{1}{\gamma v} \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} x = \underline{\underline{\gamma \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} x\right)}} \end{aligned}$$

- Damit ist geklärt, wie sich die Transformation $S \rightarrow S'$ für t' verhält. Womit aber auch klar, ist wie es umgekehrt für t steht:

$$\underline{\underline{t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right)}}$$

- Lorentz-Transformation: - Für $S \rightarrow S'$:
- Wenn sich das IS S' geradlinig entlang der x -/ x' -Achse mit $v = \text{konst.}$ relativ zum IS S bewegt (und wenn die y -/ y' -Richtungen resp. z -/ z' -Richtungen übereinstimmen), und wenn das 1. und das 2. Einstein'sche Postulat erfüllt sein sollen, so müssen die S -Koordinaten eines Ereignisses wie folgt in seine S' -Koordinaten umgerechnet werden:

$$x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) , \quad y' = y , \quad z' = z \quad (8)$$

$$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \quad (9)$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10)$$

- Für $S' \rightarrow S$: Es gelten „dieselben“ Formeln wie oben, jetzt aber mit Relativgeschwindigkeit ($-v$) :

$$x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') , \quad y = y' , \quad z = z' \quad (11)$$

$$t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (12)$$

Klass. Limes
der Lorentz-
Transformation:

- Weiter oben haben wir ja die Erwartung geäussert, dass die zu findende Koordinaten-Transformation, welche mit dem 1. und dem 2. Einstein'schen Postulat kompatibel ist, die Eigenschaft haben sollte, dass sie für kleine Geschwindigkeiten v (d.h. im sog. „klassischen Grenzfall“) mit der Galilei-Transformation übereinstimmt. Nachdem wir nun die Transformationsformeln gefunden haben, wäre es natürlich sinnvoll zu überprüfen, ob diese Formeln unsere Erwartung erfüllen.
- Als Vorbereitung müssen wir jetzt aber noch klären, was wir denn eigentlich mit „kleinen“ Geschwindigkeiten v meinen; d.h. „klein“ verglichen mit was ? Nun, diese „kleinen“ Geschwindigkeiten sollen ja Relativgeschwindigkeiten entsprechen, die uns aus der alltäglichen Erfahrung bestens vertraut sind, einem Alltag, in dem wir auch immer den Eindruck haben, das Licht breite sich, im Gegensatz zu den übrigen uns vertrauten Körpern, instantan, d.h. mit unendlich grosser Geschwindigkeit, aus. Mit diesen „kleinen“ Geschwindigkeiten könnte man also - und genau das tut man auch ! - Relativgeschwindigkeiten v meinen, welche sehr viel kleiner sind als die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c .
- Wenn wir nun die Lorentz-Transformation (8)-(12) in grösster (und für solche Geschwindigkeiten sehr guter) Näherung auf ihre Aussage im Falle von „kleinen“ Geschwindigkeiten v untersuchen wollen, so heisst dies, dass wir bei jedem Auftreten des Quotienten v/c diesen Quotienten einfach durch 0 ersetzen werden. Dies bedeutet, dass insbesondere $\gamma = 1$ wird, wodurch wir die folgende Transformation $S \rightarrow S'$ erhalten:

$$x' = x - v \cdot t , \quad y' = y , \quad z' = z$$

$$t' = t$$

Ja, und dies ist, wie erwartet, genau die Galilei-Transformation (1) !

Bemerkung:

Durch Vergleich von (1) und (8) sieht man (zu Recht erstaunt) auch Folgendes: Die letztlich doch irgendwie merkwürdige Lorentz-Transformation (8) stimmt bis auf den Vorfaktor γ mit der Galilei-Transformation (1) überein. Daraus schliessen wir:

- Weil für kleine v („klein“ im Vergleich zu c) der Faktor $\gamma \approx 1$ ist, stimmt das Resultat der Lorentz-Transformation sehr gut mit dem klassischen Resultat der Galilei-Transformation (1) überein.
- Wenn nun aber v grösser wird, wächst auch der Faktor γ allmählich an und führt zu immer markanteren Unterschieden zum klassisch-physikalischen Resultat von (1).
- Insbesondere wird für $v \rightarrow c$ der Faktor γ letztlich ∞ -gross, was bedeutet, dass es unmöglich ist, eine Transformation auf ein sich mit Geschwindigkeit $v = c$ bewegendes IS vorzunehmen. Und für $v > c$ würde der Faktor γ rein-imaginär, was physikalische gänzlich sinnlos wäre. Diesen Befund interpretieren wir wie folgt:

Kein Beobachter, also auch kein materieller Gegenstand, kann aus Sicht eines irgendbeliebigen andern IS die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c erreichen oder gar übertreffen. Mit andern Worten: Die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c ist eine natürliche Grenzgeschwindigkeit für alle materiellen Gegenstände. (Masselose Teilchen wie die Lichtteilchen hingegen können sich natürlich mit $v = c$ bewegen.)

Aufgaben:

1 Geg.: Ein Autofahrer überholt auf gefährliche Weise einen Lastwagen; aus deiner Sicht geschieht dies zur Zeit t und am Ort x .

Ges.: Wann und wo findet dieses Ereignis aus Sicht deines Freundes statt, welcher in einem (sehr schnellen) Polizeihelikopter mit Geschwindigkeit v vorbeifliegt, sofern gilt:

- a) $t = 5 \text{ s}$, $x = 1'000 \text{ m}$, $v = 2 \text{ km/s}$ ¹⁸
- b) $t = 5 \text{ s}$, $x = 1'000 \text{ m}$, $v = 200 \text{ km/s}$ ¹⁸
- c) $t = 5 \text{ s}$, $x = 1'000 \text{ m}$, $v = 20'000 \text{ km/s}$ ¹⁸
- d) $t = 5 \text{ s}$, $x = 1'000 \text{ m}$, $v = 200'000 \text{ km/s}$ ¹⁸
- e) $t = -30 \text{ s}$, $x = 50 \text{ m}$, $v = 20 \text{ km/s}$ ¹⁸
- f) $t = -30 \text{ s}$, $x = 50 \text{ m}$, $v = 200'000 \text{ km/s}$ ¹⁸
- g) $t = -30 \text{ s}$, $x = 50 \text{ m}$, $v = 290'000 \text{ km/s}$ ¹⁸
- h) $t = -30 \text{ s}$, $x = 50 \text{ m}$, $v = 310'000 \text{ km/s}$ ¹⁸

2 Geg.: Aus deiner Sicht werden an den Orten $-d$ resp. d gleichzeitig je eine Feuerwerksrakete gezündet.

Ges.: Dein in einem Flugzeug mit Geschwindigkeit v vorbeifliegender Freund nimmt diese Ereignisse ebenfalls wahr; aus seiner Sicht aber finden sie nicht gleichzeitig statt, sondern mit einer Zeitdifferenz $\Delta t'$. - Berechne $\Delta t'$ für

- a) $v = 2 \text{ km/s}$, $d = 100 \text{ m}$
- b) $v = 200'000 \text{ km/s}$, $d = 10^9 \text{ m}$
- c) $v = 290'000 \text{ km/s}$, $d = 10^9 \text{ m}$

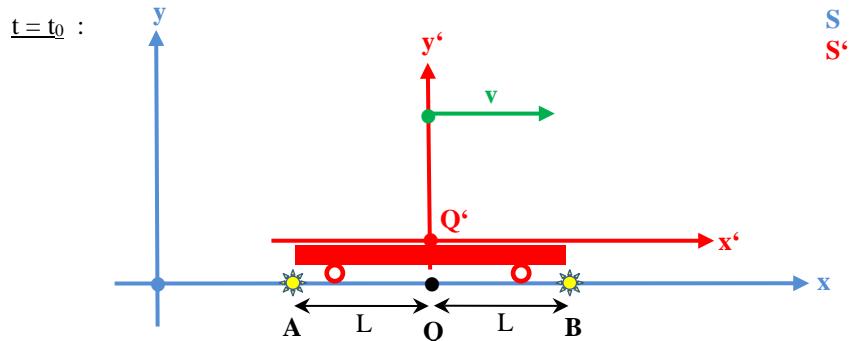
3 Geg.: Dein in einer Rakete mit Geschwindigkeit v vorbeifliegender Freund winkt dir aus seiner Sicht im Abstand von 60 s je einmal zu.

Ges.: Wie gross ist der zeitliche Abstand zwischen diesen beiden Ereignissen aus deiner Sicht für

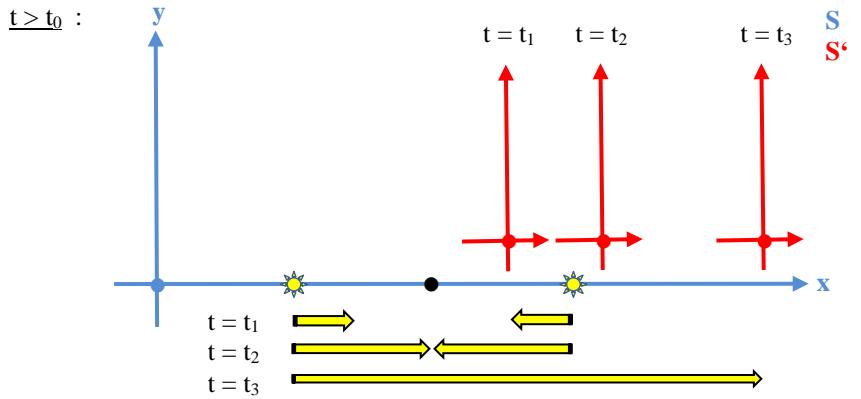
- a) $v = 2 \text{ km/s}$
- b) $v = 200'000 \text{ km/s}$
- c) $v = 290'000 \text{ km/s}$

4 Ges.: a) Wie Aufgabe **3** a), jetzt aber allgemein: D.h. für zwei Ereignisse, welche im Ruhesystem der Rakete an demselben, aber beliebigen Ort und im beliebigen zeitlichen Abstand $\Delta t'$ stattfinden, und für beliebiges v .
b) Zur Anwendung der Resultate von **4** a) resp. **2** betrachten wir die folgende Situation:

- Aus Sicht des IS S geschieht Folgendes: An den Orten A und B im Abstand $2L$ ist je eine Lampe aufgestellt; der Ort Q befindet sich in der Mitte zwischen A und B . Ein Fahrzeug der Länge $2L$ (es entspricht dem IS S') fährt nach rechts, mit konstanter Geschwindigkeit v . Die Front des Wagens ist mit einem Schalter versehen, welcher die bei B befindliche Lampe anzündet, sobald sich die Front bei B befindet. Analoges geschieht mit dem Heck des Wagens und der Lampe bei A . Genau zur Zeit $t = t_0$ befindet sich die Wagenfront bei B und das Wagenheck bei A :



¹⁸ Und: Welche deiner Resultate wirken aus Sicht der klassischen Physik gut verständlich resp. wenig verständlich? - Begründung!



- Aus Sicht von S treffen also die von A resp. B kommenden Lichtstrahlen natürlich gleichzeitig (zur Zeit t_2) bei Q ein, aber zu unterschiedlichen Zeiten t_1 resp. t_3 , also mit einer Zeitdifferenz $\Delta t = t_3 - t_1$, bei Q' ein.
- Die Frage ist nun, welchen Zeitunterschied $\Delta t'$ (der bei Q' eintreffenden Lichtstrahlen) ein Beobachter registriert, welcher in S' mitfährt.

Diese Frage sollst du zweimal beantworten, d.h. durch Verwendung zweier unterschiedlicher Methoden:

1. Methode:

Zeige zuerst durch direkte, klassisch-physikalische Rechnung, also ohne Rückgriff auf die SRT-Überlegungen / Resultate von ②, dass der aus Sicht von S auftretende Zeitunterschied $\Delta t (= t_3 - t_1)$ wie folgt lautet:

$$\Delta t = \frac{2L \frac{v}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Verwende jetzt das Resultat von ④ a), um daraus den gemäss SRT und aus Sicht von S' auftretenden Zeitunterschied $\Delta t'$ zu berechnen.

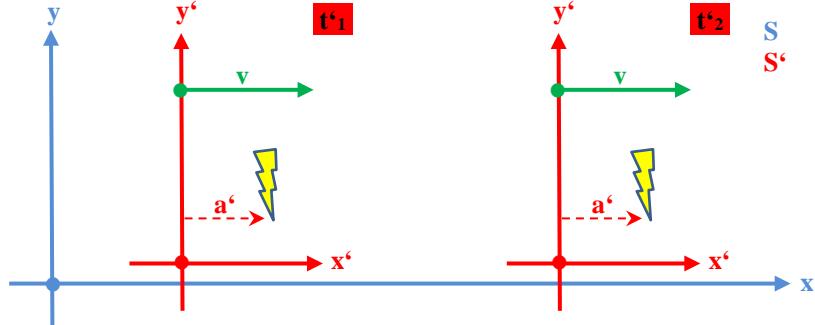
2. Methode:

Verwende die SRT-Überlegungen / Resultate von ② ... Und vergleiche schliesslich das Ergebnis mit dem der 1. Methode ...

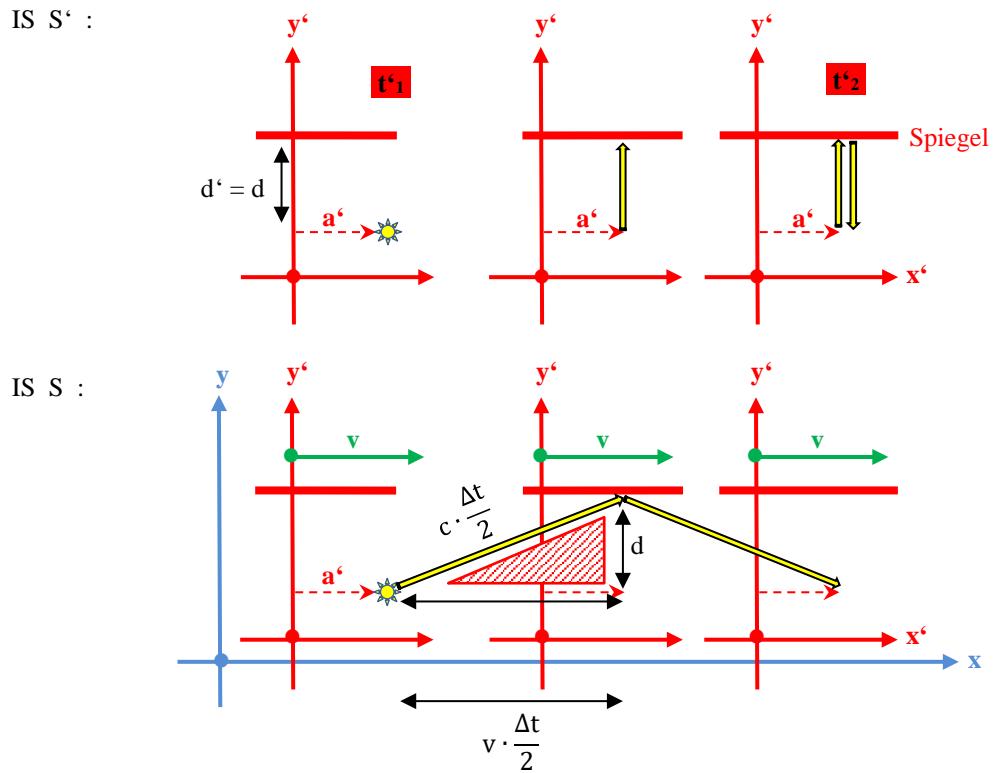
5. SRT: Spezielle / paradoxe Raum-Zeit-Effekte

5.1. Zeitdilatation

Fragestellung: In diesem Kapitel möchten wir der folgenden Frage nachgehen (vgl. unten folgende Abbildung): Angenommen ein Beobachter im IS S beobachtet zwei Ereignisse, welche sich aus Sicht des IS S' am selben Ort (mit x' -Koordinate a'), aber zur Zeit t'^1 resp. t'^2 , also mit zeitlicher Differenz $\Delta t' := t'^2 - t'^1$ abspielen. Wie gross ist dann die zeitliche Differenz Δt dieser beiden Ereignisse aus Sicht des IS S ? - Bevor wir diese Frage allgemeingültig beantworten, möchten wir die Situation anhand eines konkreten Beispiels untersuchen.



- Das Beispiel:
- Im IS S' (vgl. unten folgendes Diagramm) wird bei $x' = a'$ zur Zeit t'^1 eine Lampe angezündet. Der entsprechende Lichtstrahl wird an einem Spiegel, welcher parallel zur x/x' -Achse und im Abstand $d' = d$ zur Lampe befestigt ist, zu a' zurückreflektiert und erreicht a' zur Zeit t'^2 . Aus Sicht von S' beträgt also die „Reisedauer“ des Lichtstrahles $\Delta t' = t'^2 - t'^1$. Wie gross ist die „Reisedauer“ Δt aus Sicht des IS S ?
 - Nun, betrachten wir die Situation resp. den vom Lichtstrahl zurückgelegten Weg aus Sicht des IS S' resp. S :



Weil aus Sicht von S' die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit den Wert c hat, gilt offenbar

$$2d = c \cdot \Delta t' . \quad (13)$$

Gemäss SRT hat die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit aber auch aus Sicht von S den Wert c ; angewandt auf das rot-schraffierte rechtwinklige Dreieck heisst dies:

$$\left(c \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(v \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2 + d^2 \mid \dots$$

$$(\Delta t)^2 \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 \right] = d^2 \mid (13), (10), \dots$$

$$\underline{\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'} \quad (14)$$

- Ja gut, und was bedeutet jetzt eigentlich dieses Resultat? - Nun, da der Faktor γ genau dann gleich 1 ist, wenn die Relativgeschwindigkeit $v = 0$ ist, sehen wir gemäss (14), dass für $v \neq 0$ die Zeitdifferenz Δt nicht gleich der Zeitdifferenz $\Delta t'$ ist; d.h. diese zeitlichen Differenzen sind, im Gegensatz zur klassisch-physikalischen Erwartung, keine absoluten, sondern offenbar relative Größen! Weil insbesondere der Faktor γ grösser ist als 1, mit $\gamma \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow c$, ist die Zeitdifferenz Δt (u.U. sehr viel) grösser als die im System S' gemessene Zeitdifferenz $\Delta t'$!

Allgemein:

- So, im obigen Beispiel haben wir festgestellt, dass die dortigen Zeitdifferenzen Δt und $\Delta t'$ über die Beziehung (14) miteinander verknüpft sind. Interessanterweise gilt dies nun aber nicht nur im obigen Beispiel, sondern ganz allgemein, d.h. für die eingangs beschriebene allgemeine Fragestellung! Dies (rasch und elegant) einzusehen, ist das Ziel der nächsten Zeilen.
- Zu diesem Zweck greifen wir wie folgt auf (12) zurück:

$$\begin{aligned} t_2 &= \gamma \cdot \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} a' \right) \quad | \cdot 1 \\ t_1 &= \gamma \cdot \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} a' \right) \quad | \cdot (-1) \\ \underline{\Delta t = \gamma \cdot (\Delta t')} \end{aligned} \quad (15)$$

Bemerkung:

Im obigen Beispiel ist ja das IS S' das Bezugssystem der (aus Sicht des IS S sich vorbeibewegenden) Lampe. Man könnte dies auch so ausdrücken: Das IS S' ist dasjenige IS, in welchem die Lampe unbewegt / in Ruhe ist. Aus diesem Grunde nennt man das IS S' auch häufig das Ruhesystem der Lampe. Allgemein gilt die folgende Definition.

Definition:

Mit dem Begriff Ruhesystem eines Beobachters meinen wir einfach das IS des Beobachters.

Bemerkung:

Wir verwenden die (im Rahmen der SRT sehr übliche) Bezeichnung „Ruhesystem“, um dadurch sehr ausdrücklich zu betonen, dass sich der Beobachter in diesem IS wirklich in Ruhe befindet (was zwecks Analyse der Raum-Zeit-Verhältnisse von grosser Wichtigkeit sein kann).

Definition:

Inskünftig wird das Symbol Δt_R folgendes bedeuten: Den zeitlichen Abstand zweier Ereignisse, welche sich aus Sicht eines Beobachters am selben Ort seines Ruhesystems ereignen.

Folgerung:

Mit Hilfe der eben eingeführten Terminologie können wir die in (15) steckende Aussage wie folgt formulieren:

Wenn sich im Ruhesystem eines sich mit Geschwindigkeit v vorbeibewegenden Beobachters am selben Ort und mit zeitlichem Abstand Δt_R zwei Ereignisse ereignen, so kann aus „unserer“ Sicht, d.h. aus Sicht des festen IS, der zeitliche Abstand Δt dieser beiden Ereignisse wie folgt berechnet werden:

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_R \quad (16)$$

Weil für $v \neq 0$ der Faktor $\gamma > 1$ ist, kann die Bedeutung von (16) wie folgt weiter kommentiert werden: Aus „unserer“ Sicht vergeht mehr Zeit zwischen den beiden Ereignissen als im Ruhesystem der Ereignisse, d.h. „unserer“ Uhren scheinen rascher zu laufen als diejenigen des vorbeiziehenden Beobachters, resp. „seine“ Uhren scheinen langsamer zu laufen als „unserer“, d.h. seine Zeitintervalle scheinen „gedehnt“ / „ausgebreitet“ zu sein im Vergleich mit den unsrigen. Und dieser Effekt wird umso dramatischer, je mehr sich v der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c nähert!

Mit wieder andern Worten: Der zeitliche Abstand zweier Ereignisse ist in demjenigen IS am kleinsten, in welchem sich die beiden Ereignisse am selben Ort ereignen ($\rightarrow \Delta t_R$). Aus Sicht jedes andern relativ dazu bewegten IS ist der zeitliche Abstand Δt der beiden Ereignisse größer und kann gemäss (16) berechnet werden.

Definition:

Weil „ausbreiten“ auf Lateinisch „dilatare“ heisst, nennt man diesen paradox anmutenden, sehr berühmten Befund der SRT die Zeitdilatation.

Experimentelle Tests der Zeit-dilatation:

1. Atomuhren an Bord von Flugzeugen:

Tests mit hoch präzise laufenden Atomuhren an Bord von schnell und lange fliegenden Flugzeugen haben (16) mehrfach bestätigt.

2. Messungen an atmosphärischen Myonen:

- Myonen (μ^-) sind „elementare“ Teilchen, welche sozusagen eine schwere Variante des Elektrons sind, denn es gilt $q_\mu = q_e$ und $m_\mu \approx 200 m_e$. Im Unterschied zum Elektron ist ein Myon aber nicht stabil, sondern es zerfällt (mit $T_{1/2} \approx 2 \mu s$) wie folgt in ein Elektron und zwei Neutrinos:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

- Myonen werden in der Erdatmosphäre laufend neu erzeugt, und zwar auf einer Höhe von ca. 9 - 12 km ü.M. durch die dort stattfindenden Kollisionen der Atmosphären-Moleküle mit der eintreffenden kosmischen Strahlung. Die dabei erzeugten Myonen haben (relativ zur Erde) eine Geschwindigkeit v von typischerweise $0.998 c$ (!). Messungen zeigen, dass viele der so erzeugten Myonen bis auf Meereshöhe gelangen.

- Die eben erwähnte Tatsache, dass viele der so erzeugten Myonen bis auf Meereshöhe gelangen, ist aus Sicht der klassischen Physik gänzlich unverständlich: Weil die typische Lebensdauer eines Myons gleich $T_{1/2} \approx 2 \mu s$ ist, und weil es sich dabei mit $v \approx 0.998 c$ bewegt, misst die typische Flugdistanz $\langle \Delta s \rangle$ eines solchen Myons nur ca. 600 m, was natürlich niemals reicht, um aus einer Höhe von ca. 9 - 12 km ü.M. auf Meereshöhe gelangen zu können.

- Aus Sicht der SRT aber ist alles bestens verständlich: Weil die oben zitierte Halbwertszeit $T_{1/2} \approx 2 \mu s$ in Tat und Wahrheit die im Ruhesystem eines Myons gemessene Zerfallszeit ($T_{1/2}R$) ist, muss zuerst einmal, via (16) mit $\Delta t_R \equiv (T_{1/2})_R \approx 2 \mu s$, die Myonen-Halbwertszeit aus Sicht eines Beobachters auf der Erde, d.h. $(T_{1/2})_{\text{Erde}}$, berechnet werden. Weil v fast gleich c ist, ergibt sich dadurch eine gewaltige Vergrößerung der typischen Lebensdauer eines Myons: $(T_{1/2})_{\text{Erde}} = \gamma (T_{1/2})_R \approx 30 \mu s$. Und daraus folgt, dass

aus Sicht eines irdischen Beobachters $\langle \Delta s \rangle \cong 9 \text{ km}$ ist, was nun bestens reicht, dass viele der Myonen „ganz legal“ auf Meereshöhe gelangen können !

3. Experimente an Teilchenbeschleunigern (CERN, ...):

- Seit mehr als 50 Jahren werden in Teilchenbeschleunigern routinemässig Elektronen, Protonen und schwerere Ionen auf nahezu Lichtgeschwindigkeit beschleunigt und dann zur Kollision gebracht, um dergestalt die inneren Strukturen dieser Teilchen zu untersuchen.
- Die Theorieüberlegungen, welche verwendet werden, um sowohl das Beschleunigungs- als auch das Kollisionsverhaltens dieser Teilchen zu beschreiben, beruhen ganz wesentlich auf der SRT; daher ist die Zeitdilatation (wenn nicht explizit, so doch implizit) immer ein Bestandteil solcher Berechnungen.
- In all diesen Jahren stimmten die an den Teilchenbeschleunigern erhaltenen experimentellen Resultate mit jeweils hervorragender Genauigkeit mit den entsprechenden Theorie-Berechnungen überein; Widersprüche zur SRT (implizit und insbesondere also zur Zeitdilatation) wurden nie festgestellt !

Zwillingsparadoxon:

- Die Zeitdilatation kann zu durchaus paradox anmutenden Situationen führen. Die vielleicht berühmteste davon ist unter dem Namen „Zwillingsparadoxon“ bekannt geworden. In der üblichen (und leider allzu schwammigen) Erzähl-Version passiert dabei Folgendes:

Die Zwillinge Z und Z' leben auf der Erde. Nun unternimmt Z' (per Auto, Flugzeug, Rakete, ...) eine Reise, und zwar mit Geschwindigkeit v relativ zu dem zu Hause verbliebenen Zwilling Z . Bei Rückkehr von Z' ist aus Sicht von Z die Zeit Δt vergangen, aus Sicht von Z' aber die Zeit $\Delta t'$. Aufgrund von (16) ist nun aber $\Delta t > \Delta t'$, d.h. die ursprünglich gleich alten Zwillinge sind nicht mehr gleich alt, wobei der Altersunterschied umso grösser ist, je mehr sich v der Grenzgeschwindigkeit c genähert hat ! Mit andern Worten, und etwas plakativ: Je rascher du reist, desto weniger alterst du ! - Weil diese letztlich unterschiedlichen Alter von Z und Z' unserem gesunden Menschenverstand deutlich widersprechen / als paradox erscheinen, heisst diese Geschichte das „Zwillingsparadoxon“. Und das obige ist eine häufig anzutreffende Erzähl-Version.

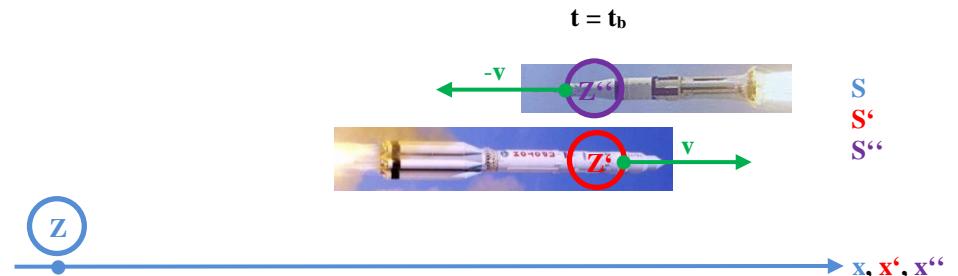
- Nun, paradox (im Sinne von „spontan nicht erwartet“) sind nicht nur die letztlich unterschiedlichen Alter von Z und Z' , sondern paradox (jetzt aber im Sinne von „widersprüchlich“) ist bei erstem genauerem Nachdenken auch Folgendes: Statt wie oben die Reisegeschichte letztlich aus Sicht von Z zu schildern (welcher sich in Ruhe wähnt) und daher zu schliessen, dass $\Delta t > \Delta t'$ ist, hätten wir die Situation auch aus Sicht von Z' schildern können (welcher sich doch auch in Ruhe wähnt, nicht wahr ?; und relativ zu dem sich Z mit Geschwindigkeit ($-v$) bewegt), was nun aber zum Schluss führt, dass $\Delta t' > \Delta t$ ist ! - Weil es wirklich unmöglich ist, dass sowohl $\Delta t > \Delta t'$ als auch $\Delta t' > \Delta t$ gilt, haben wir's jetzt nicht nur mit einer gefühlsmässig unerwarteten Situation zu tun, sondern (scheinbar) mit einem handfesten Widerspruch innerhalb der SRT ...
- Die Auflösung dieses (scheinbaren) Widerspruchs ergibt sich erst, wenn man Folgendes bemerkt:
 - Die SRT macht per Definition nur Aussagen über Beobachter in IS, speziell also über die relativen Sichtweisen von Beobachtern, die sich geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ relativ zueinander bewegen. Alle solchen Beobachter empfinden sich selbst in Ruhe und sind, gemäss SRT, physikalisch gleichberechtigt.
 - Ein Beobachter, welcher sich relativ zu einem dieser IS-Beobachter mit $v \neq \text{konst.}$, also beschleunigt, bewegt, wird sich selbst nicht mehr als in Ruhe befindlich wahrnehmen. Sein Beschrieb der physikalischen Umwelt kann echt anders sein als aus Sicht der IS-Beobachter, und à priori macht die SRT keinerlei Aussagen über seinen Beschrieb der physikalischen Umwelt (dies ist dann das Thema der ART ...).
 - Wie immer annehmend, dass Z ein Beobachter in einem IS ist, sehen wir nun Folgendes: Wenn sich Z' relativ zu Z immer geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ bewegen würde, so könnte Z' niemals zu Z zurückkehren. Abgesehen von der zur Erreichung der Reisegeschwindigkeit v nötigen Anfangsbeschleunigung wird also eine mindestens kurzzeitig wirkende Beschleunigungsphase (zur Richtungsumkehr) nötig sein, damit Z' überhaupt zu Z zurückkehren kann. Weil Z immer in einem IS lebt, Z' zwischenzeitlich aber sicherlich nicht, wird die (gemäss obiger Erzähl-Version scheinbar vorhandene) physikalische Gleichberechtigung / Symmetrie zwischen Z und Z' gebrochen.

Insbesondere ist klar, dass sich das Geschehen eigentlich ausserhalb des Kompetenzbereichs der SRT abspielt.

- Das Thema des „Zwillingsparadoxons“ kann aber durchaus gänzlich innerhalb der SRT behandelt werden (d.h. im Rahmen von Beobachtern / Bezugssystemen, welche sich wirklich nur geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen), sofern man bereit ist, an anderer Stelle der Geschichte einen kleinen Preis zu bezahlen. Den Preis nämlich, dass
 - zu Beginn der Geschichte, d.h. zur Zeit $t = t' = 0$, Z' sich nicht von Z verabschiedet und dann (von $v = 0$ auf $v > 0$ beschleunigend) auf die Reise macht, sondern zu dieser Zeit geradlinig und mit $v = \text{konst.}$ fahrend / fliegend Z einfach nur begegnet:



- der Zwilling Z' nie mehr selbst zu Z zurückkehrt, sondern nur eine Kopie Z'' von ihm, welcher Z' zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_b$ begegnet:



- die Kopie Z'' von Z' zum Zeitpunkt $t = t_r$ zu Z „zurückkehrt“:



Dergestalt den Ablauf des „Zwillingsparadoxons“ präzisierend, können wir jetzt problemlos sehen, dass $\Delta t \equiv t_r$ tatsächlich grösser ist als die Summe $\Delta t' + \Delta t''$, wobei $\Delta t' :=$ (Zeit, welche aus Sicht von Z' zwischen der Begegnung mit Z und derjenigen mit Z'' vergeht) und $\Delta t'' :=$ (Zeit, welche aus Sicht von Z'' zwischen der Begegnung mit Z' und derjenigen mit Z vergeht) ist: Weil $\Delta t'$ die im Ruhesystem von Z' gemessene Zeit zwischen den aus Sicht von Z' am selben Ort stattfindenden Ereignissen „Begegnung mit Z'' und „Begegnung mit (Z'') “ ist, gilt gemäss (16) für den „Hinflug“ $t_b = \gamma \Delta t'$; und analog für den „Rückflug“ $t_b = \gamma \Delta t''$. Wegen $\gamma > 1$ folgt daher

$$\underline{\Delta t} \equiv t_r = t_b + t_b = \gamma \Delta t' + \gamma \Delta t'' = \gamma (\Delta t' + \Delta t'') \geq \underline{\Delta t'} + \underline{\Delta t''} .$$

- Als Schlussbemerkungen noch dies:
 - Das Duo Z' / Z'' , d.h. „derjenige Zwilling, welcher das IS wechselt / zwischenzeitlich beschleunigt wird“, bleibt aus Sicht von Z also tatsächlich jünger als Z selbst !
 - Diese Einsicht stimmt mit einer allgemeinen Einsicht der ART überein: Uhren in beschleunigten Bezugssystemen (resp. in Gravitationsfeldern) laufen langsamer !

5.2. Längenkontraktion

Ein Beispiel:

- In Kap. 5.1. haben wir uns u.a. Gedanken zu den atmosphärischen Myonen gemacht. Dabei haben wir Folgendes festgestellt:
 - Aus Sicht der Erde beträgt die Myonen-Halbwertszeit $(T_{1/2})_{\text{Erde}} \cong 30 \mu\text{s}$, was bedeutet, dass die typische Flugdistanz $\langle \Delta s \rangle$ eines solchen Myons ca. 9 km beträgt.
 - Aus Sicht eines Myons aber sieht es so aus: Seine typische Lebensdauer beträgt nur ca. $2 \mu\text{s}$, und während dieser Zeit sieht es die Erde mit einer Geschwindigkeit von ca. $0.998 c$ auf sich zu rasen; die Erde legt in dieser Zeit also lediglich eine Distanz von ca. 600 m zurück.
 - Die aus Erdsicht ca. 9 km lange Myonen-Flugstrecke schrumpft also aus Sicht der Myonen auf läppische ca. 600 m !

Definition:

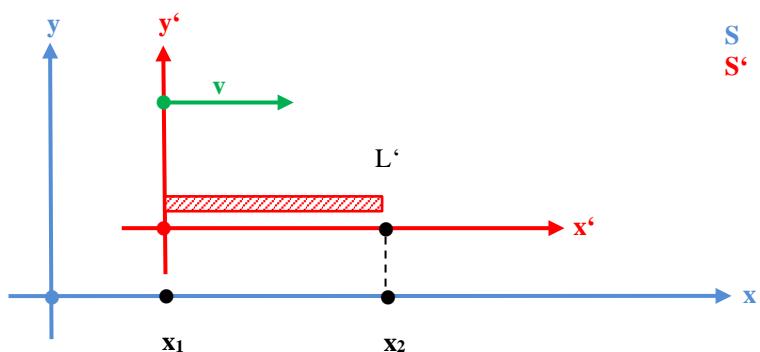
Dieses paradox anmutende (und in diesem Falle recht dramatische) Schrumpfen / Zusammenziehen / Kontrahieren einer Streckenlänge ist (nach der Zeidilatation ein zweiter berühmter, grundlegender Effekt der SRT und ist) unter dem Namen Längenkontraktion berühmt geworden.

Bemerkung:

Im Folgenden möchten wir den Effekt der Längenkontraktion genauer untersuchen, insbesondere ohne auf ein konkretes Beispiel bezugzunehmen, d.h. ganz allgemein. Dazu werden wir zuerst festhalten müssen, welches eigentlich die betrachtete Situation ist, und daraus wollen wir dann insbesondere das Ausmass der Längenkontraktion berechnen.

Allgemein:

- Aus Sicht des IS S betrachten wir einen Stab, der entlang der x -/ x' -Achse positioniert ist und der sich mit Geschwindigkeit v bewegt. Das Ruhesystem des Stabes nennen wir wie üblich S' . Die „wahre“ Länge des Stabes, d.h. die Länge L_R aus Sicht des Ruhesystems des Stabes, ist daher per Definition gleich L' . - Die Frage ist nun die: Als wie lang erscheint der Stab aus Sicht von S ?



- Aus Sicht von S' sieht die Situation also so aus: Die Enden des Stabes befinden sich zu allen Zeiten bei $x' = 0$ resp. bei $x' = L'$.
- Der Beobachter im IS S sagt sich Folgendes: Um die Länge des Stabes aus Sicht von S zu bestimmen, müssen einfach zu einem beliebig gewählten Zeitpunkt T gleichzeitig die Endpositionen x_1 und x_2 des Stabes festgestellt werden, womit sich dann $L = x_2 - x_1$ ergeben wird. Aufgrund der Lorentz-Transformationsformel (8) erhalten wir daher:

$$\begin{array}{rcl}
 L' & = & \gamma \cdot (x_2 - v \cdot T) \\
 0 & = & \gamma \cdot (x_1 - v \cdot T) \\
 \hline
 L' & = & \gamma \cdot L
 \end{array} \quad (17)$$

Folgerung: Die in (17) steckende Aussage können wir wie folgt formulieren:

Wenn wir die „wahre“ Länge eines Stabes, d.h. die Länge des Stabes aus Sicht seines Ruhesystems, mit L_R bezeichnen, so kann die Stablänge L aus Sicht eines andern IS, welches sich mit Geschwindigkeit v am Ruhesystem vorbeibewegt, wie folgt berechnet werden:

$$L = \frac{1}{\gamma} \cdot L_R \quad (18)$$

Weil für $v \neq 0$ der Faktor $\gamma > 1$ ist, kann die Bedeutung von (18) wie folgt weiter kommentiert werden: Aus Sicht des „andern“ IS erscheint der Stab verkürzt zu sein. Und dieser Effekt wird umso dramatischer, je mehr sich v der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c nähert! Insbesondere sehen wir: Nicht nur zeitliche Abstände sind aus Sicht der SRT keine absoluten Größen, sondern auch räumliche Abstände!

Mit wieder andern Worten: Der räumliche Abstand zweier Ereignisse ist in demjenigen IS am grössten, in welchem sich die beiden Ereignisse in Ruhe befinden ($\rightarrow L_R$). Aus Sicht jedes andern relativ dazu bewegten IS ist der räumliche Abstand L der beiden Ereignisse kleiner und kann gemäss (18) berechnet werden

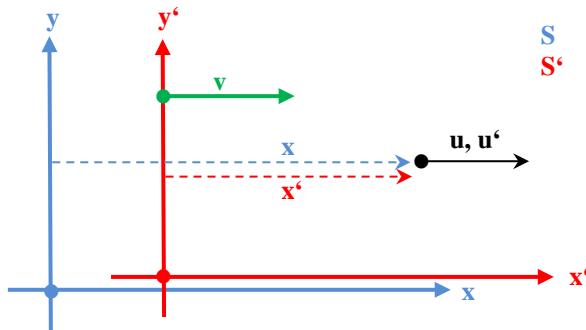
5.3. Überlagerung / Addition von Geschwindigkeiten

- Fragestellung:
- Zu Beginn von Kap. 3 hatten wir uns u.a. die folgende Frage gestellt (vgl. unten stehendes Diagramm): Wir betrachten einen Gegenstand, welcher sich entlang der x/x' -Achse bewegt, und zwar aus Sicht des IS S mit der Geschwindigkeit u ; als wie gross erscheint nun seine Geschwindigkeit u' aus Sicht eines IS S' , welches sich mit der Geschwindigkeit v relativ zu S bewegt?
 - Wir hatten gesehen, dass im Rahmen der klassischen Physik die Antwort wie folgt lautet:

$$u' = u - v$$

Diese einfache Berechnungsformel (genannt Formel zur „Addition von Geschwindigkeiten“) wiederum hat uns dann zum Schluss geführt, dass im Rahmen der klassischen Physik die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit aus Sicht unterschiedlich bewegter IS auch unterschiedliche Werte annehmen müsse.

- Weil nun aber die Absolutheit der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit per Definition ein Grundpfeiler der SRT ist, kann diese klassische Formel zur Addition von Geschwindigkeiten unmöglich auch in der SRT gültig sein. Die Frage ist: Wie sieht denn nun das Pendant dazu in der SRT aus?



Überlegung:

- Aus Sicht des IS S bezeichnen wir die Position zur Zeit t des sich bewegenden Gegenstandes mit $x(t)$, womit u via $u = \frac{dx(t)}{dt}$ berechnet werden kann.
- Aus Sicht des IS S' ist's analog: Mit $x'(t')$ bezeichnen wir die Position zur Zeit t' des sich bewegenden Gegenstandes, sodass also $u' = \frac{dx'(t')}{dt'}$ ist.
- Anhand der Lorentz-Transformationsformeln (8) und (9) kann jetzt u' wie folgt durch u ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{dx'(t')}{dt'} \equiv \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta[\gamma(x-v \cdot t)]}{\Delta[\gamma(t - \frac{v}{c^2}x)]} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\gamma(\Delta x - v \cdot \Delta t)] \frac{1}{\Delta t}}{[\gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x)] \frac{1}{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - v \right)}{\gamma \left(1 - \frac{v \Delta x}{c^2 \Delta t} \right)} \\
 &= \frac{(u-v)}{\underline{\underline{\left(1 - \frac{v}{c^2} u \right)}}} \tag{19}
 \end{aligned}$$

Folgerung:

Die klassisch-physikalische Formel zur Addition der Geschwindigkeiten, d.h. $u' = u - v$, muss in der SRT durch die folgende Formel ersetzt werden:

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{vu}{c^2}} \tag{20}$$

Beispiel:

Wir wollen uns anhand von (20) davon überzeugen, dass wenn $u = c$ ist, auch u' wirklich gleich c ist, so wie's die SRT ja eigentlich verlangt. - Na gut: Indem wir also in (20) für u den Wert c einsetzen, erhalten wir:

$$\underline{\underline{u'}} = \frac{c-v}{1-\frac{vc}{c^2}} = \frac{c-v}{1-\frac{v}{c}} = \frac{c-v}{\frac{c-v}{c}} = \underline{\underline{c}}$$

Aufgaben:

- 5** Geg.: Astronauten in einem Raumschiff, welches mit der Geschwindigkeit $0.99 c$ auf die Erde zufliegt, teilen der Bodenstation auf der Erde mit, dass sie noch rasch ein (gemäss Borduhr) 1-stündiges Nickerchen einlegen und sich danach wieder melden werden.
Ges.: Wie lange werden sie aus Sicht der Bodenstation schlafen ?
- 6** Geg.: Ein Bus der „wahren“ Länge 10 m (also gemessen im Ruhesystem des Buses) fährt mit der Geschwindigkeit v an dir vorbei.
Ges.:
 - Wie gross muss v sein, damit aus deiner Sicht dieser Bus exakt in eine nur 8 m lange Parklücke passen würde ?
 - Wie lässt sich diese scheinbar paradoxe Situation aus Sicht des Buschaufieurs erklären / begreifen ?
- 7** Geg.: Zwei Beobachter bewegen sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander.
Ges.: Unter welchen Bedingungen an die Positionen und Zeitpunkte zweier verschiedener Ereignisse finden diese zwei Ereignisse für beide Beobachter gleichzeitig statt ?

- 8** Geg.: Ein Überschallflugzeug fliegt mit 1 km/s (d.h. ca. 3-facher Schallgeschwindigkeit) über deinen Kopf. Ein zweites Flugzeug bewegt sich in die gleiche Richtung wie (und noch rascher als) das Überschallflugzeug, und relativ zu diesem erreicht es eine Geschwindigkeit von 500 m/s .
Ges.: Wie gross ist die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeuges aus deiner Sicht ?
- 9** Ges.: Nochmals **8** , jetzt aber betragen beide Relativgeschwindigkeiten je 0.8 c !
- 10** Geg.: Ein Raumschiff verlässt die Erde in Richtung desjenigen Sternes, welcher der Sonne am nächsten liegt, d.h. in Richtung des Sternes Alpha Centauri, welcher ca. 4 Lichtjahre von der Erde entfernt ist. Die Geschwindigkeit des Raumschiffs (ist leider sehr unrealistisch gross und) beträgt 0.75 c .
Ges.: Wie lange dauert diese Reise
a) aus Sicht der Astronauten ?
b) aus Sicht der Erdbewohner ?
- 11** Ges.: Zeige, dass im klassisch-physikalischen Grenzfall (d.h. für $v/c \rightarrow 0$) die SRT-Formeln zur Berechnung der Zeitdilatation, der Längenkontraktion resp. der Addition von Geschwindigkeiten genau die entsprechenden, altbekannten klassisch-physikalischen Formeln ergeben !
- 12** Ges.: Wie lange muss aus Sicht der Bodenkontrollstelle ein Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von 2'000 km/h fliegen, bis eine im Flugzeug mitgeführte Uhr aufgrund der Zeitdilatation 1 Sekunde „verliert“ ?
- 13** Geg.: Im Bezugssystem S findet ein Ereignis B 2 μs nach dem Ereignis A statt, und der räumliche Abstand der beiden Ereignisse beträgt 1.5 km .
Ges.: a) Wie schnell muss sich ein Beobachter entlang der Geraden AB bewegen, damit A und B für ihn gleichzeitig stattfinden ?
b) Gibt es einen Beobachter, für den B vor A stattfindet ? - Begründung !
- 14** Ges.: Lies den auf den folgenden 2 Seiten eingefügten Artikel „Achtung auf die Höchstgeschwindigkeit“, geschrieben von George Gamow (1904 - 1968, russischer Physiker, ab 1934 in den USA tätig; George Gamow trug Wesentliches zur Atomphysik und zur Urknall-Theorie bei und sagte bereits 1946 die kosmische Hintergrundstrahlung (als ein Relikt des Urknalls) voraus, also 18 Jahre bevor sie messtechnisch nachgewiesen wurde !).

Achtung auf die Höchstgeschwindigkeit!

Von George Gamow

Mr. Tompkins gefielen seine Träume, und er wartete schon begierig darauf, sich in der kommenden Woche neuen Stoff für seine nächtlichen Abenteuer zu holen. Seine Enttäuschung war gross, als er sah, dass der Vortrag über Quantentheorie der letzte gewesen war und dass die Reihe erst im nächsten Jahr fortgesetzt wurde. Erst als es ihm gelang, sich ein Manuskript des ersten Vortrags zu verschaffen, den er ver säumt hatte, tröstete er sich ein wenig. (*Hier wäre noch nachzutragen, dass Mr. Tompkins vor einiger Zeit begonnen hätte sich am Abend an der Universität allgemeinverständliche Vorträge über die neue Physik anzuhören.*)

An diesem Morgen war der grosse Saal der Bank fast menschenleer. Mr. Tompkins, der gut versteckt hinter seinem kleinen Fenster sass, öffnete das dicke Manuskript und versuchte, sich durch das undurchdringliche Gestrüpp von Formeln und geometrischen Figuren hindurchzuarbeiten, mit dessen Hilfe der Professor seinen Studenten die Relativitätstheorie erklären wollte. Aber er verstand nur, dass das Wesentliche in diesem Vortrag die Tatsache war, es gebe eine Höchstgeschwindigkeit, die Lichtgeschwindigkeit, die von keinem Körper übertroffen werden kann. Dies führte zu sehr sonderbaren und ungewöhnlichen Folgen. Da die Lichtgeschwindigkeit 300 000 km pro Sekunde beträgt, können Relativitätseffekte im täglichen Leben kaum je beobachtet werden, wurde in dem Manuskript behauptet. Aber das Wesen dieser ungewöhnlichen Effekte war noch viel schwieriger zu verstehen, und Mr. Tompkins fand, all dies widerspreche dem gesunden Menschenverstand. Er versuchte sich die Verkürzung von Massstäben vorzustellen und das seltsame Verhalten der Uhren — all das würde eintreten, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegten — aber sein Kopf sank langsam auf die mit Maschinenschrift bedeckten Seiten.

★

Als er die Augen wieder aufschlug, stand er in einer wunderschönen alten Stadt an einer Strassenecke. Er hatte den lebhaften Verdacht, zu träumen, aber zu seiner Überraschung ereignete sich in seiner Umgebung nichts Ungewöhnliches; selbst der Polizist an der gegenüberliegenden Ecke sah aus, wie eben Polizisten immer ausschen. Die Zeiger der grossen Turmuhr wiesen auf zwölf, und die Strassen waren fast leer. Ein einzelner Radfahrer fuhr langsam die Strasse hinunter. Als er näherkam, riss Mr. Tompkins die Augen vor Erstaunen weit auf, denn in Richtung der Bewegung waren das Fahrrad und der junge Mann unglaublich flachgedrückt, so, als sähe man sie durch eine Zylinderlinse. Die Uhr vom Turm schlug zwölf, und der Radfahrer, der offenbar in Eile war, trat kräftiger in die Pedale. Mr. Tompkins bemerkte nicht, dass er schneller fuhr, aber als Resultat seiner Bemühungen verflachte der Mann noch stärker. Wie er so die Strasse entlang fuhr, sah er genau so aus, als wäre er aus einem Stück Pappe ausgeschnitten. Mr. Tompkins bekam Hochachtung vor sich selbst, denn plötzlich verstand er, was mit dem Radfahrer geschehen war — das war einfach die Verkürzung bewegter Körper, von der er erst unlängst gelesen hatte. «Anscheinend liegt die Geschwindigkeitsgrenze der Natur hier niedriger», überlegte er. «Deshalb sieht auch der Polizist an der Ecke so faul aus, denn er muss nicht auf Schnellfahrer lauern.» Tatsächlich fuhr ein Taxi, das eben die Strasse entlang kam, nicht viel rascher als der Radfahrer, obwohl es einen Höllenlärm verursachte. Es kroch geradezu dahin. Der Radfahrer hatte freundlich ausgesehen, und Mr. Tompkins entschloss sich, ihn einzuholen und darüber zu befragen. Mit einem raschen Blick vergewisserte er sich, dass der Schutzmann nach der anderen Seite sah, ließ sich ein

Fahrrad, das jemand an den Randstein gelehnt hatte, und raste die Strasse hinunter. Nun würde er wohl sofort verflachen, dachte er glücklich, denn sein zunehmender Umfang hatte ihm in letzter Zeit grosse Sorge bereitet. Zu seiner grössten Überraschung jedoch veränderte er sich ebensowenig wie sein Fahrrad. Aber seinen Augen bot sich ein völlig verändertes Bild. Die Strassen verkürzen sich, die Auslagen der Geschäfte sahen wie schmale Schlitze aus, und der Polizist an der Ecke wurde der dünnste Mensch, den er je gesehen hatte.

«Aha!» rief Mr. Tompkins erregt, «jetzt verstehe ich, was dahintersteckt! Das macht die Relativität. Alles, was sich relativ zu mir bewegt, erscheint mir verkürzt, gleichgültig, wer die Pedale tritt!» Er war ein guter Radfahrer und gab sein Bestes, um den jungen Mann einzuholen. Aber er musste bald einsehen, dass es gar nicht so leicht war, mit diesem Fahrrad rasch zu fahren. Obwohl er mit aller Kraft die Pedale trat, steigerte sich seine Geschwindigkeit nur ganz unwesentlich. Schon begannen die Beine zu schmerzen, aber dennoch wollte es ihm nicht gelingen, viel schneller an einer Laterne an der Strassenecke vorbeizukommen als zu Beginn der Fahrt. Es sah aus, als wären alle seine Anstrengungen, rascher zu fahren, vergeblich. Nun verstand er wohl, weshalb sich der Radfahrer und das Taxi nicht schneller bewegt hatten, und er erinnerte sich der Worte des Professors, es sei unmöglich, die Grenzgeschwindigkeit des Lichtes zu übertreffen. Er bemerkte jedoch, dass sich die Häuserblocks noch stärker verkürzt hatten, und der Radfahrer vor ihm schien nicht mehr so weit entfernt zu sein wie vorher. An der zweiten Strassenecke holte er ihn schliesslich ein, und als sie einen Augenblick lang Seite an Seite fuhren, sah er zu seinem Erstaunen, dass der junge Mann ganz normal und kräftig aussah. «Aha, das muss wohl daher kommen, dass wir uns relativ zueinander nicht bewegen», schloss er; dann sprach er den jungen Mann an.

«Verzeihen Sie», sagte er, «finden Sie es nicht unangenehm, in einer Stadt mit so niedriger Höchstgeschwindigkeit zu leben?»

«Höchstgeschwindigkeit?» erwiderte der andere erstaunt. «Hier gibt es keine Höchstgeschwindigkeit. Ich kann überallhin so rasch fahren, wie ich will, das heisst, ich könnte es, wenn ich ein Motorrad anstelle dieses hoffnungslos alten Rades besäss!»

«Aber als Sie vor einigen Minuten an mir vorüberfuhrten, bewegten Sie sich sehr langsam», sagte Mr. Tompkins. «Das ist mir besonders aufgefallen.»

«Na, so was!» sagte der junge Mann offenbar beleidigt. «Sie haben wohl nicht bemerkt, dass wir fünf Blocks weitergekommen sind, seit Sie mich angesprochen haben? Ist Ihnen das nicht schnell genug?»

«Aber die Strassen sind so kurz geworden», wandte Mr. Tompkins ein.

«Na und? Ist es nicht egal, ob wir uns schneller bewegen oder ob die Strasse kürzer wird? Ich muss bis zum Postamt zehn Blocks fahren, und wenn ich schneller trete, verkürzen sich die Blocks, und ich bin rascher dort. Da sind wir schon», sagte der junge Mann und stieg von seinem Fahrrad.

Mr. Tompkins sah auf die Uhr des Postamts, die halb eins zeigte. «Ich wusste es ja!» rief er triumphierend, «Sie haben für diese zehn Blocks eine halbe Stunde gebraucht — als ich Sie das erstmal sah, war es genau zwölf Uhr!»

«Und haben Sie bemerkt, wie diese halbe Stunde verging?» fragte sein Gefährte. Mr. Tompkins musste zugeben, dass ihm die Zeit wirklich nur wie ein paar Minuten erschienen war. Als er nun auf seine Armbanduhr sah, entdeckte er, dass sie fünf Minuten nach zwölf zeigte. «Cho», sagte er, «geht die Uhr im Postamt vor?» «Selbstverständlich, oder Ihre Uhr geht nach, denn Sie sind zu rasch gefahren. Was ist denn los mit Ihnen? Kommen Sie vom Mond?» Mit diesen Worten ging der junge Mann in das Postamt.

Mr. Tompkins erkannte nach diesem Gespräch, wie unglücklich es sich traf, dass sein alter Freund, der Professor, nicht hier war. Er hätte ihm sicher alle diese sonderbaren Geschehnisse erklärt. Der junge Mann musste wohl ein Eingeborener sein und war von frühesten Jugend an derlei Dinge gewöhnt. Mr. Tompkins sah sich also gezwungen, auf eigene Faust diese seltsame Welt zu erforschen. Er stellte seine Uhr nach der des Postamtes und wartete zehn Minuten, um sicher zu sein, dass sie richtig ging. Seine Uhr blieb nicht zurück. Mr. Tompkins setzte seine Reise fort, und beim Bahnhof entschloss er sich, noch einmal die Zeit zu vergleichen. Zu seiner Überraschung ging seine Uhr wieder nach. «Nun, das muss wohl auch irgendwie mit der Relativitätstheorie zusammenhängen», schloss Mr. Tompkins und entschied sich, jemand Intelligenteren als den jungen Radfahrer um Auskunft zu bitten.

Die Gelegenheit dazu kam bald. Ein Herr von ungefähr vierzig Jahren entstieg dem Zug und ging auf den Ausgang zu. Eine sehr alte Dame erwartete ihn und sprach ihn zu Mr. Tompkins' grösstem Erstaunen mit «lieber Grossvater» an. Das ging Mr. Tompkins aber doch über die Hutschnur. Unter dem Vorwand, beim Tragen des Gepäcks behilflich zu sein, begann er ein Gespräch.

«Entschuldigen Sie, wenn ich mich in Ihre Familiangelegenheiten mische», sagte er, «aber sind Sie tatsächlich der Grossvater dieser freundlichen alten Dame? Wissen Sie, ich bin hier fremd, und ich hätte nie...» «Ach, ich verstehe», sagte der Herr, und sein Schnurrbart verzog sich, als er lächelte. «Sie halten mich wahrscheinlich für Ahasverus. Aber die Erklärung ist wirklich ganz einfach. Ich bin aus geschäftlichen Gründen gezwungen, einen Grossteil meines Lebens in der Eisenbahn zu verbringen, und deshalb ältere ich natürlich viel langsamer als meine Verwandten, die in der Stadt leben. Ich freue mich ja so, dass ich rechtzeitig zurückgekommen bin, um mein liebes kleines Enkeltöchterchen noch am Leben zu treffen. Aber Sie müssen mich entschuldigen, ich muss sie zum Taxi führen.» Er eilte fort und liess Mr. Tompkins mit seinen Problemen abermals allein. Einige belegte Brötchen aus dem Bahnhofsbüfet belebten seinen Geist wieder, ja, er verstieg sich sogar dazu, zu glauben, er hätte einen Widerspruch in der berühmten Relativitätstheorie entdeckt.

«Natürlich», dachte er, während er genüsslich seinen Kaffee trank, «wäre alles relativ, dann müsste der Reisende seinen Verwandten als Greis erscheinen und sie ihm sehr alt, obwohl alle in Wirklichkeit ziemlich jung sein könnten. Aber das ist ja ein ausgemachter Unsinn, was ich da denke: man kann doch nicht einen relativen Vollbart tragen!» Er entschloss sich also, einen letzten Versuch zu wagen, die Wahrheit zu ergründen, und wandte sich an einen einsamen Mann in Eisenbahneruniform, der im Bahnhofrestaurant sass.

«Würden Sie die besondere Güte haben, mein Herr», begann er, «mir zu sagen, wer dafür verantwortlich ist, dass die Fahrgäste im Zug so viel langsamer altern als Menschen, die an Ort und Stelle leben?»

«Ich», sagte der Mann schlicht.

«Siel! rief Mr. Tompkins. «Sie haben also den Stein der Weisen gefunden, den die alten Alchimisten so lange vergeblich gesucht haben. Sie müssen ein sehr berühmter Mann in medizinischen Kreisen sein. Lehren Sie an der hiesigen Universität?»

«Nein», antwortete der Mann verdutzt, «ich bin nur ein einfacher Bremser bei der Eisenbahn.»

«Bremser! Haben Sie Bremser gesagt?...» rief Mr. Tompkins, der seinen Ohren nicht trauen wollte. «Sie meinen, Sie — ziehen einfach die Bremsen an, sobald ein Zug in die Station einfährt?»

«Ja, genau das: und jedesmal, wenn der Zug seine Fahrt verlangsamt, altern die Fahrgäste relativ zu den anderen Menschen langsamer. Freilich», fügte er bescheiden hinzu, «der Maschinist, der den Zug beschleunigt, hat auch einen gewissen Anteil daran.»

«Aber was hat das damit zu tun, dass die Leute jung bleiben?» fragte Mr. Tompkins ganz erstaunt.

«Nun, genau weiss ich das auch nicht», erwiderte der Bremser. «Aber so ist es eben. Ich frage einmal einen Universitätsprofessor, der zufällig in meinem Zug fuhr. Er hielt mir sofort eine sehr lange und unverständliche Rede darüber. Schliesslich behauptete er, es wäre das gleiche wie die „Rotverschiebung“ bei der Sonne. Ich glaube zumindest, er nannte es so. Haben Sie schon einmal etwas von einer Rotverschiebung gehört?»

«Nei-ein», sagte Mr. Tompkins nachdenklich; der Bremser entfernte sich kopfschüttelnd. Ein athletisch gebauter, schwermütig dreinschauender Kellner kam mit der Rechnung auf Mr. Tompkins zu, und er begann in allen Taschen nach Geld zu suchen. Da seine Suche vergeblich blieb, fragte er den missmutig ausschenden Kellner, ob er ihm einen Check geben dürfe.

«Nein», fuhr ihn der Kellner an, «ich will Bar geld!»

«Aber ich habe kein Geld», sagte Mr. Tompkins, den die Furcht packte.

«Geld! schrie der Kellner. «Geld!... Mein Geld, bitte!» sagte die ärgerliche Stimme wieder, und Mr. Tompkins hob den Kopf von seinem Tisch. Ihm gegenüber stand nicht der missmutige Kellner, sondern sein alter Freund, der Professor, und hielt ihm energisch einen Check unter die Nase.

«Sie sind es! Ich freue mich wirklich, Sie zu sehen!» rief Mr. Tompkins. «Ich wollte Sie eben fragen, ob man ewig leben kann, einfach weil man immer herumläuft?»

«Bedauere, ich verstehe wirklich nicht, wovon Sie sprechen», sagte der Professor. «Würden Sie wohl so freundlich sein, diesen Check einzulösen? Ich muss zu einer Sitzung und bin in Eile.»

Ja, im Leben war der alte Professor viel unfreundlicher als in Mr. Tompkins' Träumen. Er seufzte und begann die Banknoten abzuzählen.

6. Zwischenhalt: Rückschau, Ausblick

6.1. Rückschau auf die Einstein'schen Postulate

- Bemerkungen:
- In Kap. 4 haben wir untersucht, welche Konsequenzen die Einstein'schen Postulate 1 und 2 für die Wahrnehmung von Raum und Zeit haben. Insbesondere haben wir gesehen, in welcher Art und Weise die Positions- und Zeit-Wahrnehmungen eines IS S in diejenigen eines andern IS S' (welches sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu S bewegt) transformiert werden müssen.
 - Aufgrund dieser beiden Postulate sind die beiden IS S und S' mindestens insofern physikalisch gleichberechtigt / physikalisch ununterscheidbar, als aus Sicht beider IS die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit genau denselben Wert hat.
 - Das 3. Einstein'sche Postulat verlangt nun aber noch mehr: Es verlangt, dass die beiden IS nicht nur in Bezug auf die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit physikalisch ununterscheidbar sind, sondern bezüglich aller physikalischer Gesetze. Dies drückt sich dadurch aus, dass verlangt wird, dass die (z.T. sicherlich nicht mehr klassisch-physikalischen, dafür aber korrekten) Gleichungen der Physik in beiden IS dieselbe Form annehmen müssen.

- Die Forderung, dass die Gleichungen der Physik in beiden IS dieselbe Form annehmen müssen, tönt auf den ersten Blick vielleicht eher harmlos. Sie ist es aber keineswegs, denn aufgrund der Lorentz-Transformation wissen wir mittlerweile, dass und wie Positions- und Zeit-Beobachtungsdaten des einen IS ins andere IS umgerechnet werden müssen. Dies erlaubt es z.B., Geschwindigkeitsdaten vom einen IS ins andere IS umzurechnen, d.h. mindestens Teilbereiche von physikalischen Gleichungen umzurechnen. Wenn nun eine aus Sicht von S scheinbar sinnvolle physikalische Gleichung durch solche Umrechnungen ins Bezugssystem S' dort eine gänzlich andere Form erhalten würde, würde die Forderung des 3. Postulates nicht erfüllt, womit die anfänglich scheinbar sinnvolle physikalische Gleichung gemäß SRT unzulässig wäre !

- Dazu ein (bereits in Kap. 3 thematisiertes, jetzt aber etwas allgemeiner formuliertes) Beispiel aus der klassischen Physik:
 - Wir nehmen an, dass die klassisch-physikalischen Gleichungen der Physik in S und S' dieselbe Form annehmen.
 - Aus Sicht von S ist die Situation folgende: Eine „Perlenkette“ von elektrisch geladenen Teilchen bewegt sich mit Geschwindigkeit v entlang der x/x' -Achse; diese erzeugen sowohl ein elektrisches Feld \vec{E} als auch einen elektrischen Strom der Stärke I , dieser wiederum ein magnetisches Feld \vec{B} . Am Orte \vec{r} befindet sich ein elektrisch geladenes Teilchen der Masse m und der Ladung q , welches sich mit der Geschwindigkeit \vec{u} bewegt. Gemäß Newton'scher Bewegungsgleichung und gemäß dem Kraftgesetz von Lorentz gilt daher für die Beschleunigung \vec{a} des Teilchens:

$$m \vec{a} = q \vec{E}(\vec{r}) + q (\vec{u} \times \vec{B}(\vec{r})) \quad (21)$$

- Weil gemäß Annahme die klassisch-physikalischen Gleichungen in S und S' dieselbe Form annehmen, gilt also aus Sicht von S' die analoge Gleichung:

$$m \vec{a}' = q \vec{E}'(\vec{r}') + q (\vec{u}' \times \vec{B}'(\vec{r}')) \quad (22)$$

- Soweit, so (scheinbar) gut. Nun ist aber der weiter oben angesprochene Umstand zu beachten, dass die in (21) und (22) auftretenden Größen \vec{a} , \vec{a}' , ... nicht gänzlich unabhängig voneinander sind, sondern gemäß klassisch-physikalischem Denken eine ganz bestimmte Beziehung zueinander aufweisen:

- Im 1-dimensionalen Fall gilt bekanntlich, dass $u' = u - v$ ist. Dies bedeutet, dass $\Delta u' = \Delta u$ ist. Analoges gilt im 3-dimensionalen Fall: Es ist $\Delta \vec{u}' = \Delta \vec{u}$; wegen $\Delta t' = \Delta t$ folgt damit sofort, dass $\vec{a}' = \vec{a}$ ist.
- Weil Distanzen und elektrische Ladungen absolute Größen sind, ist $\vec{E}'(\vec{r}') = \vec{E}(\vec{r})$.
- Weil aus Sicht von S' die elektrische Stromstärke $I' = 0$ ist, ist $\vec{B}'(\vec{r}') = \vec{0}$.
- Folgerung: (22) ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$m \vec{a} = q \vec{E}(\vec{r}) . \quad (23)$$

- Wir sehen: Wenn die klassisch-physikalischen Gleichungen in S und S' dieselbe Form annehmen und die klassisch-physikalischen Vorschriften zur Umrechnung der S -Größen in die S' -Größen gelten, so müssen gleichzeitig (21) und (23) erfüllt sein, was nun aber wirklich unmöglich ist! Mit andern Worten: Im Rahmen der klassischen Physik und betr. der ED sind die IS physikalisch nicht gleichberechtigt / nehmen die Gleichungen der Physik in den verschiedenen IS nicht dieselbe Form an!

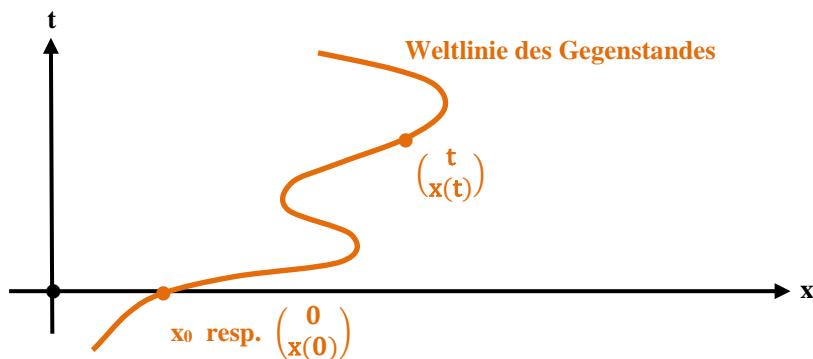
6.2. Ausblick auf die Analyse des 3. Postulates von Einstein

- Bemerkungen:
- In den mir bekannten populär-wissenschaftlichen oder gymnasialen Darstellungen der SRT wird die an sich höchst bedeutsame, mathematisch aber nicht ganz harmlose Frage nach den mit der SRT verträglichen Strukturen und Umrechnungen von physikalischen Gleichungen ausgeklammert. Stattdessen wird mit vielleicht plausiblen Ansätzen - deren Selbstkonsistenz aber gänzlich unklar bleibt - versucht, einige der bekannten revolutionären Antworten zu erraten. So z.B. gibt es Überlegungen, die suggerieren, dass es vernünftig ist zu erwarten, dass im Rahmen der SRT
 - die berühmte Beziehung $E = m c^2$ zwischen Masse m und Energie E gilt;
 - die Masse eines Gegenstandes als geschwindigkeitsabhängige Größe wahrgenommen werden kann.
 - In unserem Kurs möchten wir versuchen, einen Schritt über solche rein heuristischen und letztlich unkontrollierten Argumentationen hinaus zu unternehmen. D.h. wir werden (in Kap. 7) tatsächlich wesentliche Schritte zur Untersuchung der Strukturen und Umrechnungen von physikalischen Gleichungen im Rahmen der SRT vornehmen, um darauf basierend unsere Schlüsse zu ziehen. Zu diesem Zweck ist es nun aber sehr sinnvoll, eine kleine Vorbereitung zu treffen; und zwar werden wir als Nächstes (in Kap. 6.3.) im Rahmen der klassischen Physik und so kurz wie irgend möglich auf die analogen Fragen zu Strukturen und Umrechnungen eingehen.

6.3. Klassische Physik: Kinematik, Dynamik

- Vorbemerkung:
- Zum Ablauf: In einem ersten Teil werden wir uns die kinematischen Aspekte der klassischen Physik vor Augen führen, d.h. den Beschrieb von Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Anschliessend werden wir uns der Dynamik und in diesem Zusammenhang den eigentlich interessierenden Gleichungen der Physik widmen.
 - Wie üblich legen wir unseren Betrachtungen ein IS S und ein sich entlang der x/x' -Achse mit konstanter Geschwindigkeit v bewegendes IS S' zugrunde.
 - Der Einfachheit halber werden wir nur Gegenstände (und ihre Bewegung) untersuchen, die sich geradlinig bewegen, und zwar ebenfalls entlang der x/x' -Achse. Ihre Position und Geschwindigkeit aus Sicht des IS S nennen wir $x(t)$ und $u(t)$, aus Sicht des IS S' nennen wir sie wie üblich $x'(t')$ und $u'(t')$.
 - Wahrscheinlich ziemlich unerwartet, als Vorbereitung auf die SRT aber von grossem Nutzen, ist, dass wir die Betrachtung von Kinematik und Dynamik nicht nur innerhalb des üblichen / gewohnten 1-dimensionalen Raumes (entspricht der x/x' -Achse) vornehmen, sondern auch aus Sicht der 2-dimensionalen Raum-Zeit, welche bildlich dadurch zustande kommt, dass wir der Raum-Achse (entspricht der x/x' -Achse) noch eine Zeit-Achse beifügen (und zwar senkrecht dazu).

- Die in der 2-d Raum-Zeit resultierende graphische Darstellung der Position x zur Zeit t eines Gegenstandes nennt man dessen Weltlinie; sie könnte z.B. so aussehen:



Beachte Folgendes: Es ist (zwar nicht für dich, aber) in diesem Zusammenhang üblich, dass

- die „obere“ Komponente eines Raum-Zeit-Vektors (wie z.B. $\begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$) dessen zeitlicher Komponente entspricht und im Koordinatensystem in „vertikaler“ Richtung dargestellt wird;
- die „untere“ Komponente eines Raum-Zeit-Vektors dessen räumlicher Komponente entspricht und im Koordinatensystem in „horizontaler“ Richtung dargestellt wird.

Kinematik:

- Aus Sicht von S werden Position $x(t)$, Geschwindigkeit $u(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ wie folgt definiert und innerhalb der 2-d Raum-Zeit durch Raum-Zeit-Vektoren beschrieben:

	konventionelle, d.h. 1-d Beschreibung	Beschreibung innerhalb der 2-d Raum-Zeit, d.h. via 2-d Raum-Zeit-Vektoren
Position	$x(t)$	2-er-Position: $\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$
Geschwindigkeit	$u(t) := \dot{x}(t)$	2-er-Geschw.: $\boldsymbol{u} := \frac{d}{dt} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ u(t) \end{pmatrix}$
Beschleunigung	$a(t) := \ddot{u}(t)$	2-er-Beschl.: $\boldsymbol{a} := \frac{d}{dt} \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ a(t) \end{pmatrix}$

- Aus Sicht von S' ist alles analog.

Dynamik:

- Aus Sicht von S werden der Impuls $p(t)$ und die Newton'sche Bewegungsgleichung wie folgt definiert und innerhalb der 2-d Raum-Zeit durch Raum-Zeit-Vektoren beschrieben:

	konventionelle, d.h. 1-d Beschreibung	Beschreibung innerhalb der 2-d Raum-Zeit, d.h. via 2-d Raum-Zeit-Vektoren
Newton'sche Bewegungsglg.: „übliche“ Form	$m a = F$	2-er-Kraft $\boldsymbol{F} := \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \Rightarrow m \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$
Impuls	$p(t) := m u(t)$	2-er-Impuls: $\boldsymbol{p} := m \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} m \\ p(t) \end{pmatrix}$
Newton'sche Bewegungsglg.: „Impuls-Form“	$\dot{p} = F$	$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$

- Aus Sicht von S' ist alles analog.

Erhaltungs-sätze:

- Zu den vielleicht bedeutsamsten Konsequenzen der Newton'schen Bewegungsgleichung zählen die Erhaltungssätze der klassischen Physik. Die prominentesten sind sicherlich der Energie- und der Impulserhaltungs-Satz. Im Folgenden wollen wir kurz ihre in typischen Fällen zutreffenden Aussagen resümieren:

- Energieerhaltungs-Satz:

- Z.B.: Für ein Teilchen im EM-Feld ist $E_{kin} + E_{pot} = \text{konst.}$.
- Wichtige Anwendung: Bei idealen (d.h. sog. „elastischen“) Stößen der zwei Teilchen 1 und 2 ist die kinetische Gesamtenergie konstant, d.h.

$$(E_{kin,1} + E_{kin,2})_{\text{Anfang}} = (E_{kin,1} + E_{kin,2})_{\text{Ende}} . \quad (24)$$

- Impulserhaltungs-Satz:

- Falls die gesamte auf ein System einwirkende äussere Kraft $F_{tot} = 0$ ist, so ist der Gesamtmpuls p_{tot} des Systems konstant.
- Wichtige Anwendung: Bei Stößen der zwei Teilchen 1 und 2 ist der Gesamtmpuls konstant, d.h.

$$(p_1 + p_2)_{\text{Anfang}} = (p_1 + p_2)_{\text{Ende}} . \quad (25)$$

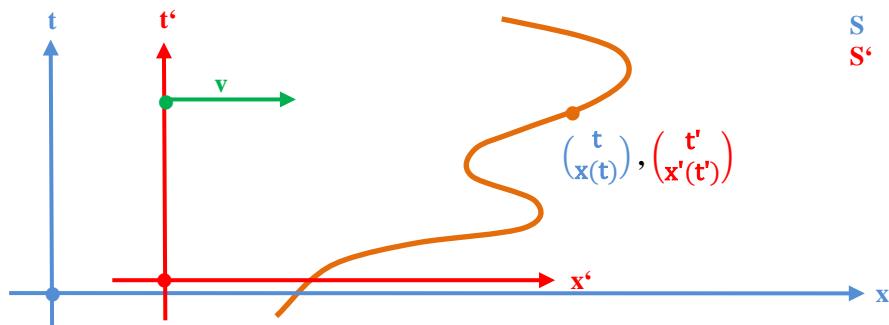
- Wichtige Ergänzung:

- Im Rahmen der 2-d Raum-Zeit-Vektoren wird der Gesamtmpuls des Systems zweier Teilchen natürlich wie folgt definiert: $\mathbf{p}_{tot} := \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$.
- Analog ist's mit der auf das System einwirkenden Gesamtkraft \mathbf{F}_{tot} .
- Weil die Masse m konstant ist, kann der Impulserhaltungs-Satz auch und wie folgt mittels 2-er-Impuls und 2-er-Kraft formuliert werden:

$$\text{Falls } \mathbf{F}_{tot} = \mathbf{0} \text{ ist, dann ist } \mathbf{p}_{tot} = \text{konst.} \quad (26)$$

Umrechnung $S \leftrightarrow S'$:

- Um die Struktur(un)gleichheit von physikalischen Gleichungen aus Sicht der IS S und S' erkennen zu können, ist es, wie weiter oben erläutert, von grosser Wichtigkeit zu wissen, wie die kinematischen und dynamischen physikalischen Grössen von S nach S' (oder umgekehrt) umgerechnet werden. Diese Umrechnungen aufzuzeigen, ist das Ziel des jetzigen Abschnittes.
- Diese Umrechnungen von S nach S' (oder umgekehrt) werden wir sowohl 1-dimensional als auch, als Hauptzielsetzung, innerhalb der Darstellung in der 2-d Raum-Zeit vornehmen. Der Grund für letzteres ist, dass auf diese Weise sowohl die Transformationsstrukturen am klarsten dargelegt werden können als auch wir uns eine wertvolle Grundlage für die spätere Diskussion der analogen Fragen innerhalb der SRT erwerben.



- Position: $\underline{\underline{x'}} \equiv \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x - vt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \equiv \underline{\underline{\Gamma(v)}} \underline{\underline{x}}$

Galilei-Transformation (1)

Galilei-Transformations-Matrix $\Gamma(v) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix}$

- Geschw.: $\Rightarrow \underline{\underline{\underline{u' \equiv \frac{d}{dt'} \underline{x'}}}} = \frac{d}{dt} \Gamma(v) \underline{x} = \Gamma(v) \frac{d}{dt} \underline{x} \equiv \underline{\underline{\underline{\Gamma(v) u}}} \quad (\Rightarrow u' = u - v \text{ } ^{19})$

- Impuls: $\Rightarrow \underline{\underline{\underline{p' \equiv m \underline{u'}}}} = m \Gamma(v) \underline{u} = \Gamma(v) m \underline{u} \equiv \underline{\underline{\underline{\Gamma(v) p}}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\underline{\dot{p}' \equiv \frac{d}{dt'} \underline{p'}}}} = \frac{d}{dt} \Gamma(v) \underline{p} = \Gamma(v) \frac{d}{dt} \underline{p} \equiv \underline{\underline{\underline{\Gamma(v) \dot{p}}}} \quad (\Rightarrow \dot{p}' = \dot{p} \text{ } ^{20}) \quad (27)$$

Folgerung:

- Die Raum-Zeit-Vektoren $\underline{x}, \underline{u}, \underline{p}, \underline{\dot{p}}$ haben ein-und-dasselbe Transformationsverhalten beim Übergang $S \leftrightarrow S'$! Insbesondere transformieren sie sich beim Übergang $S \rightarrow S'$ anhand der Galilei-Transformations-Matrix $\Gamma(v) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix}$. (28)

Äquivalenz
der IS in der
klass. Physik:

- Satz: Wir betrachten eine Kraft, welche aus Sicht des IS S den Wert \underline{F} und aus Sicht des IS S' den Wert $\underline{F'}$ hat. Sofern nun gilt, dass

$$F' = \Gamma(v) F \quad (\Rightarrow F' = F \text{ } ^{21}) \quad (29)$$

ist, wird die Wirkung dieser Kraft in S wie in S' in formgleicher Weise beschrieben, d.h. S und S' nehmen dieselbe physikalische Wirkung dieser Kraft war, d.h. S und S' sind bezgl. dieser Kraft physikalisch gleichberechtigt.

- Beweis: Wenn in S gemäss Newton'scher Bewegungsgleichung $\dot{p} = F$ gilt, so gilt dank (27) und (29) die analoge Gleichung auch aus Sicht von S' , denn es ist

$$\underline{\dot{p}'} = \Gamma(v) \underline{\dot{p}} = \Gamma(v) \underline{F} = \underline{F'} \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Die Transformationsbedingung (29) wird von den elektrostatischen und den Gravitationskräften erfüllt (vgl. Kap. 2), nicht aber von der Lorentzkraft (vgl. Kap. 6.1., wo gemäss (21) - (23)

$$F = q \vec{E}(\vec{r}) + q(\vec{u} \times \vec{B}(\vec{r}))$$

und aber

$$F' = q \vec{E}'(\vec{r}') \text{ , mit } \vec{E}'(\vec{r}') = \vec{E}(\vec{r}) \text{ , } \\ \text{war).}$$

¹⁹ Durch Betrachten der räumlichen Komponente dieser Umrechnungs-Formel, wobei uns das erwähnte Resultat $u' = u - v$ natürlich schon längst bekannt ist.

²⁰ Durch Betrachten der räumlichen Komponente dieser Umrechnungs-Formel.

²¹ Durch Betrachten der räumlichen Komponente dieser Umrechnungs-Formel.

7. SRT: Relativistische Mechanik

Absicht:

- Das Ziel dieses Kapitels ist es, (der Einfachheit halber nur) im Rahmen der Mechanik ²²
 - die vielleicht wesentlichsten Schritte zur Realisierung des 3. Einstein'schen Postulates zu unternehmen;
 - einige der wichtigsten daraus sprissenden Konsequenzen zu erkennen, so z.B. die bereits mehrfach erwähnte Formel $E = m c^2$.
- Aufbauend auf unseren Überlegungen und Erfahrungen von Kap. 6 werden wir dabei wie folgt vorgehen:
 - Zuerst studieren wir das Transformationsverhalten (beim SRT-Übergang $S \leftrightarrow S'$) von Position, Geschwindigkeit, ...
 - Aufgrund dieser Einsichten und der Struktur der klassisch-physikalischen Newtonschen Bewegungsgleichung werden wir schliesslich in der Lage sein, eine SRT-kompatible Version der Newton'schen Bewegungsgleichung zu erraten (welche also insbesondere formgleich in S und S' gilt).
- Einstein folgend werden wir postulieren, dass diese SRT-kompatible Version der Newton'schen Bewegungsgleichung genau diejenige physikalische Gleichung ist, die das reale Naturgeschehen korrekt beschreibt. Ob diese SRT-Bewegungsgleichung tatsächlich diese Erwartung erfüllt, kann natürlich - und im Gegensatz zur rein mathematisch-theoretischen Herleitung der SRT-Bewegungsgleichung - nicht auf mathematisch-theoretischem Wege entschieden werden. Entscheiden müssen letztlich geeignete physikalische Experimente resp. deren Resultate; denn sie zeigen, ob die aufgrund der SRT-Bewegungsgleichung vorgenommenen Berechnungen mit dem realen Naturgeschehen übereinstimmen. Weil seit Erfindung der SRT keinerlei Widersprüche zwischen der SRT-Bewegungsgleichung und den experimentellen Befunden festgestellt wurden, ist unser theorie-geleitetes Vorgehen letztlich also gerechtfertigt !
- Schliesslich werden wir, als wichtige Konsequenz der SRT-Bewegungsgleichung, auch auf die SRT-Erhaltungssätze für Energie und Impuls und deren Implikationen zu sprechen kommen.

Anmerkung:

Analog zum Vorgehen in Kap. 6 werden wir die SRT-Umrechnungen $S \leftrightarrow S'$ der kinematischen und dynamischen Größen sowohl 1-dimensional als auch (und vorwiegend) innerhalb der 2-d Raum-Zeit vornehmen. Denn einmal mehr werden durch die 2-d Darstellung die Transformationsstrukturen am klarsten zutage treten und auswertbar sein.

7.1. SRT-Umrechnung $S \leftrightarrow S'$: Kinematik, Dynamik

Kinematik:

- Position: • Definition der relativistischen 2-er-Position (aus Sicht von S ²³):

$$\mathbf{x}_{rel} := \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix}$$

(30)

Bemerkung: Offenbar unterscheidet sich (30) dahingehend von der klassisch-physikalischen Version von Kap. 6.3., als die relativistische Zeit-Komponente noch den zusätzlichen Faktor c aufweist. Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass dadurch (und als Vorteil gegenüber der klassisch-physikalischen Version) beide Komponenten von \mathbf{x}_{rel} dieselbe Einheit (und zwar m) haben !

²² Die analogen Überlegungen zur Entwicklung der relativistischen ED sind das Thema von Kap. 8.

²³ Aus Sicht von S' ist alles analog.

- Namensgebung / Schreibweise: Es ist üblich, die Zeit-Komponente von \mathbf{x}_{rel} als seine 0-Komponente zu bezeichnen und als $x_{rel}^{(0)}$ zu schreiben; analog wird die Raum-Komponente von \mathbf{x}_{rel} als seine 1-Komponente bezeichnet und als $x_{rel}^{(1)}$ geschrieben²⁴, d.h.

$$\mathbf{x}_{rel} \equiv \begin{pmatrix} x_{rel}^{(0)} \\ x_{rel}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} . \quad (31)$$

Wie bereits erwähnt ist $[x_{rel}^{(0)}] = [x_{rel}^{(1)}] = m$.

- Transformationsverhalten für $S \rightarrow S'$: Gemäss (8) - (9) und (30) gilt offenbar

$$\mathbf{x}_{rel}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \mathbf{x}_{rel} \equiv \Lambda(v) \mathbf{x}_{rel} \quad (32)$$

Lorentz-Transformations-Matrix
 $\Lambda(v) := \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix}$

- Geschwind.: • Postulat: Wir verlangen (motiviert durch die klassisch-physikalische Struktur (28)), dass die physikalisch relevante relativistische 2-er-Geschwindigkeit \mathbf{u}_{rel} so definiert werden soll, dass sie beim Übergang $S \rightarrow S'$ ebenfalls via $\Lambda(v)$ transformiert wird.
- Folgerung: Die auf der nächsten Seite durchgeführte, konkrete Umrechnung $S \rightarrow S'$ zeigt, dass aus diesem Grunde \mathbf{u}_{rel} nicht so definiert werden darf, wie es uns der klassisch-physikalisch geschulte „gesunde Menschenverstand“ eingeben würde, d.h. nicht via $\mathbf{u}_{rel} := \frac{d}{dt} \mathbf{x}_{rel}$, sondern als eine relativistische Verallgemeinerung davon (und wie üblich aus Sicht von S)²³:

$$\mathbf{u}_{rel} := \gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{x}_{rel} \quad \text{mit} \quad \gamma(u) := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (33)$$

In Komponenten ausgedrückt heisst dies:

$$\mathbf{u}_{rel} \equiv \begin{pmatrix} u_{rel}^{(0)} \\ u_{rel}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u) c \\ \gamma(u) u \end{pmatrix} \quad (34)$$

²⁴ Wenn sich unsere Überlegungen auf den üblichen 3-dimensionalen (statt der Einfachheit halber auf den 1-dimensionalen) Raum beziehen würden, hätten wir's mit einem insgesamt 4-dimensionalen Raum-Zeit-Vektor \mathbf{x}_{rel} zu tun, dessen räumliche Komponenten die 1-, 2- resp. 3- Komponenten genannt würden.

- Transformationsverhalten für $S \rightarrow S'$: 1. Berechnungs-Methode: Hier möchte ich anhand einer abstrakt-strukturellen und kurzen (da nicht alle Details ausführenden und daher auch an die mathematische Intuition appellierenden) Überlegung aufzeigen, dass man tatsächlich erwarten kann, dass der via Vorfaktor $\gamma(u)$ modifizierte Vektor $\frac{d}{dt} \mathbf{x}_{rel}$ genau das gewünschte Transformationsverhalten zeigen wird. - Also:
 - Gemäss (32) transformiert sich \mathbf{x}_{rel} via $\Lambda(v)$, und dasselbe gilt daher auch für die Differenz $\Delta \mathbf{x}_{rel}$.
 - Natürlich hängt die ausdrücklich im Ruhesystem des Gegenstandes gemessene Zeitdifferenz Δt_R in keiner Weise davon ab, ob der Gegenstand resp. seine Bewegung aus Sicht von S oder von S' beobachtet und beschrieben wird; d.h. Δt_R ändert sich nicht beim Übergang $S \rightarrow S'$. Dies bedeutet, dass sich der Quotient $\Delta \mathbf{x}_{rel} / \Delta t_R$ via $\Lambda(v)$ transformiert.
 - Gemäss (16) gilt ja $\Delta t = \gamma(u) \cdot \Delta t_R$, d.h. der Quotient $\Delta \mathbf{x}_{rel} / \Delta t_R$ kann auch als $\gamma(u) \cdot \Delta \mathbf{x}_{rel} / \Delta t$ geschrieben werden.
 - Wenn wir jetzt $\Delta t \rightarrow 0$ streben lassen, ergibt sich aus diesen Überlegungen, dass der Vektor $\gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{x}_{rel}$ via $\Lambda(v)$ transformiert wird.

- Transformationsverhalten für $S \rightarrow S'$: 2. Berechnungs-Methode: Weil die obigen Überlegungen vielleicht allzu abstrakt waren, möchten wir sie jetzt noch mittels einer alternativen, sehr direkten und leider aber auch langwirigen Berechnung bestätigen: Gemäss (32) - (33) gilt

Kettenregel der Differentialrechnung

Gemäss (12) ist

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma(v) + \gamma(v) \frac{v}{c^2} u' .$$

Dank (20) folgt nun:

$$\begin{aligned}
 &= \gamma(v) + \gamma(v) \frac{v}{c^2} \cdot \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \\
 &= \gamma(v) \left[1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \right] \\
 &= \gamma(v) \left[\frac{\frac{uv}{c^2} + \frac{vu}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{uv}{c^2}} \right] \\
 &= \gamma(v) \left[\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{uv}{c^2}} \right] \\
 &= \gamma(v) \cdot \frac{1}{\gamma(v)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{uv}{c^2}} \\
 &= \frac{1}{\gamma(v)} \cdot \frac{1}{1-\frac{uv}{c^2}}
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\mathbf{u}_{rel}'}} &\equiv \gamma(u') \cdot \frac{d}{dt'} \mathbf{x}_{rel}' \\
 &= \gamma(u') \cdot \frac{d}{dt'} [\Lambda(v) \mathbf{x}_{rel}] \\
 &\stackrel{=} \gamma(u') \cdot \frac{d}{dt} [\Lambda(v) \mathbf{x}_{rel}] \cdot \frac{dt}{dt'} \\
 &= \gamma(u') \cdot \Lambda(v) \frac{d}{dt} \mathbf{x}_{rel} \cdot \left(\frac{1}{\gamma(v)} \cdot \frac{1}{1-\frac{uv}{c^2}} \right) \\
 &= \Lambda(v) \cdot \gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{x}_{rel} \equiv \underline{\underline{\Lambda(v) \mathbf{u}_{rel}}}
 \end{aligned}$$

Eine an sich einfache, aber etwas längliche Rechnung anhand von (20) zeigt:

$$\begin{aligned}
 \gamma(u') \cdot \frac{1}{\gamma(v)} \cdot \frac{1}{1-\frac{uv}{c^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\gamma(v)} \cdot \frac{1}{1-\frac{uv}{c^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(u-v)^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1} \cdot \frac{1}{1-\frac{uv}{c^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(u-v)^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{1-\frac{uv}{c^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(u-v)^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{1-\frac{uv}{c^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{c^2 \left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2 - (u-v)^2}{c^2}}} \\
 &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{u^2 v^2}{c^4} - \frac{u^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 &= \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}}
 \end{aligned} \tag{37}$$

- Interpretation der ...
 - ... räumlichen Komponente von \mathbf{u}_{rel} , d.h. von $u_{rel}^{(1)} \equiv \gamma(u) u$: Offenbar ist dies eine via $\gamma(u)$ relativistisch modifizierte Version der ganz normalen Geschwindigkeit $u(t)$.
 - ... zeitlichen Komponente von \mathbf{u}_{rel} , d.h. von $u_{rel}^{(0)} \equiv \gamma(u) c$: Offenbar ist's eine via $\gamma(u)$ relativistisch modifizierte Version der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c .

- Dynamik: - Impuls:
- Postulat: Der physikalisch relevante relativistische 2-er-Impuls \mathbf{p}_{rel} soll in Analogie zum klassischen 2-er-Impuls und so definiert werden, dass er beim Übergang $S \rightarrow S'$ ebenfalls via $\Lambda(v)$ transformiert wird.
 - Folgerung: Die weiter unten gezeigte, sehr einfache Rechnung (40) zeigt, dass aus diesem Grunde \mathbf{p}_{rel} wie folgt definiert werden muss (wie üblich aus Sicht von S ²³):

$$\boxed{\mathbf{p}_{rel} := m \cdot \mathbf{u}_{rel}} \quad (38)$$

In Komponenten ausgedrückt heisst dies:

$$\boxed{\mathbf{p}_{rel} = \begin{pmatrix} p_{rel}^{(0)} \\ p_{rel}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(u) m c \\ \gamma(u) m u \end{pmatrix}} \quad (39)$$

- Transformationsverhalten für $S \rightarrow S'$: Gemäss (35) und (38) ist

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{p}_{rel}'} &\equiv m \cdot \underline{\mathbf{u}_{rel}'} = m \cdot \underline{\Lambda(v)} \mathbf{u}_{rel} \\ &= \underline{\Lambda(v)} m \cdot \underline{\mathbf{u}_{rel}} = \underline{\Lambda(v)} \mathbf{p}_{rel} \end{aligned}} \quad (40)$$

- Interpretation der ...
 - ... räumlichen Komponente von \mathbf{p}_{rel} , d.h. von $p_{rel}^{(1)} \equiv \gamma(u) m u$: Offenbar ist dies eine via $\gamma(u)$ relativistisch modifizierte Version des ganz normalen, klassisch-physikalischen Impulses $p = m u$ (des sich mit Geschwindigkeit u bewegenden Gegenstandes der Masse m). Mehr dazu in Kap. 7.2.
 - ... zeitlichen Komponente von \mathbf{p}_{rel} , d.h. von $p_{rel}^{(0)} \equiv \gamma(u) m c$: Wir werden sehen (vgl. Kap. 7.2.) dass, im Gegensatz zur klassischen Physik, in der SRT auch die 0-Komponente des 2-er Impulses eine - und sogar höchst bemerkenswerte ! - physikalische Bedeutung hat.

- Ableitung des Impulses: • Bemerkung: In gleicher Weise wie bei (35) kann man einsehen, dass sich nicht nur der relativistische 2-er-Impuls \mathbf{p}_{rel} via $\Lambda(v)$ transformiert, sondern auch die geeignet modifizierte zeitliche Ableitung von \mathbf{p}_{rel} , d.h. der folgende Raum-Zeit-Vektor:

$$\boxed{\gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{rel}} \quad (41)$$

- Bewegungs-gleichung: • Postulat: In Verallgemeinerung der klassisch-physikalischen (d.h. Newton'schen) Bewegungsgleichung hat die physikalisch relevante relativistisch-mechanische Bewegungsgleichung (in S²³) die folgende Form:

$$\gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{rel} = \mathbf{F}_{rel} \quad (42)$$

wobei wir annehmen, dass sich die physikalisch relevante relativistische 2-er-Kraft \mathbf{F}_{rel} ebenfalls via $\Lambda(v)$ transformiert, d.h. gemäss Annahme gilt Folgendes:

$$\mathbf{F}_{rel}' = \Lambda(v) \mathbf{F}_{rel} \quad (43)$$

- Interpretation der ...
 - ... räumlichen Komponente von (42): Diese heisst ja

$$\gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} p_{rel}^{(1)} = F_{rel}^{(1)} \quad (44)$$

und ist offenbar eine via $\gamma(u)$ relativistisch modifizierte Version der Newton'schen Bewegungsgleichung $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$.

- ... zeitlichen Komponente von (42): Diese heisst ja

$$\gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} p_{rel}^{(0)} = F_{rel}^{(0)} \quad (45)$$

und ist momentan noch schwer verständlich. Dies wird sich in Kap. 7.4. bessern.

7.2. Interpretation von $p_{rel}^{(1)}$ und $p_{rel}^{(0)}$

Interpretation von $p_{rel}^{(1)}$: - Wie erwähnt, ist $p_{rel}^{(1)} \equiv \gamma(u) m u$ offenbar eine via $\gamma(u)$ relativistisch modifizierte Version des ganz normalen, klassisch-physikalischen Impulses $p = m u$ des sich mit Geschwindigkeit u bewegenden Gegenstandes der Masse m .

- In Ergänzung dazu lässt sich nun noch Folgendes feststellen: Zum besseren Vergleich mit dem klassisch-physikalischen Impulsterm $m u$ lässt sich der relativistische Impulsterm $\gamma(u) m u$ auch als $[\gamma(u) m] u$ schreiben. Die konventionelle Deutung der Schreibweise $[\gamma(u) m] u$ (im Vergleich mit $m u$) ist, dass in der relativistischen Mechanik die klassisch-physikalische Masse m offenbar durch eine geschwindigkeitsabhängige Masse $m(u) := [\gamma(u) m]$ ersetzt wird!

Um die klassisch-physikalische Masse m und die geschwindigkeitsabhängige Masse $m(u)$ auch sprachlich klar zu unterscheiden, wird m häufig als Ruhemasse (und mit dem Symbol m_0) bezeichnet.

Die (wahrscheinlich überraschende) Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse in der relativistischen Mechanik haben wir ja anhand von Überlegungen entdeckt, welche strukturorientiert und eher abstrakt waren. Es gibt nun aber auch alternative, physikalisch-intuitive Möglichkeiten, die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse zwar nicht hieb-und-stichfest herzuleiten, wohl aber wenigstens plausibel zu machen. Das in Kap. 7.5. dargelegte Gedankenexperiment soll genau eine solche Möglichkeit darlegen.

Interpretation von $p_{rel}^{(0)}$: - Absicht: Wir werden die physikalische Bedeutung von $p_{rel}^{(0)} \equiv \gamma(u) m c$ so erkunden, dass wir den Term $\gamma(u) m c$ im Falle „kleiner Geschwindigkeiten“ u untersuchen. Dabei wollen wir aber nicht (wie bisher immer) in grösster Näherung arbeiten, d.h. nicht einfach u/c durch Null ersetzen, denn diese Näherung würde uns nicht weiterbringen. Nein, wir wollen eine etwas verfeinerte Näherung, welche auch in einer etwas grösseren Umgebung von $u/c = 0$ Sinn macht.

- Vorgehen: • Wie du in Aufgabe **2.0** zeigen wirst, gilt Folgendes: Je kleiner der Betrag von u/c ist, umso genauer stimmt die Ungefähr-Gleichung

$$\gamma(u) \cong 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2} . \quad (46)$$

- Daraus schliessen wir, dass die Grösse $c p_{rel}^{(0)} \equiv \gamma(u) mc^2$ für „kleine Geschwindigkeiten“ u wie folgt (in immer besserer Genauigkeit, je kleiner der Betrag von u/c ist) geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{c p_{rel}^{(0)}}} &\equiv \gamma(u) mc^2 \\ &\cong \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2}\right) mc^2 \\ &= \underline{\underline{mc^2 + \frac{1}{2} mu^2}} \end{aligned} \quad (47)$$

- Folgerung: (47) können wir wie folgt lesen:
 - Das Produkt $c p_{rel}^{(0)}$ ist eine relativistisch modifizierte Version der klassischen kinetischen Energie $\frac{1}{2} mu^2$ (des sich mit Geschwindigkeit u bewegenden Gegenstandes der Masse m)!
 - Insbesondere wird die klassische kinetische Energie durch den Summanden mc^2 ergänzt, welcher auch für $u = 0$ bestehen bleibt.

Wir gelangen damit zur folgenden Interpretation (vgl. nächste Seite):

- Interpret: $c p_{rel}^{(0)}$ entspricht der relativistischen Gesamtenergie²⁵ $E_{rel,ges}$ des sich bewegenden Gegenstandes. D.h.:

$$E_{rel,ges} \equiv c p_{rel}^{(0)} = \gamma(u) m c^2 \quad (48)$$

- Ergänzungen:
- Für $u = 0$ ist, in fundamentalem Unterschied zur klassischen Physik, $E_{rel,ges}$ nicht gleich Null, sondern gemäss SRT ist

$$E_{rel,ges}(u = 0) = m c^2 . \quad (49)$$

Den Wert $m c^2$ nennt man dementsprechend die Ruheenergie des Gegenstandes !

- Der Formel (49) entnehmen wir ausserdem: Grundsätzlich sind Masse und Energie physikalisch gesehen äquivalente Größen. Insbesondere entspricht auch ein ruhendes Massestück einem Energiebetrag, nämlich dem Energiebetrag

$$E = m c^2 . \quad (50)$$

Und umgekehrt, d.h. auch jeder Energiebetrag ist einer Masse gemäss (50) äquivalent.

- Unter Verwendung der geschwindigkeitsabhängigen Masse $m(u) \equiv [\gamma(u) m]$ schreibt man (48) manchmal auch als $E_{rel,ges} = m(u) c^2$, um so noch deutlicher auszudrücken, dass (48) als geschwindigkeitsabhängige Verallgemeinerung von (49) aufgefasst werden kann !
- Wegen $E_{rel,ges} = \gamma(u) m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ sehen wir (wieder): Wenn wir einen Gegenstand der Masse $m > 0$ auf die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c beschleunigen möchten, so müssten wir dazu unendlich viel Energie aufbringen, d.h. für Gegenstände der Masse $m > 0$ ist es unmöglich, die Geschwindigkeit c zu erreichen (geschweige denn zu überschreiten) !
- Nebst der in (48) verwendeten Schreibweise für $E_{rel,ges}$ gibt es mindestens noch eine zweite sehr gebräuchliche, welche dadurch erreicht wird, dass man die rechte Seite von (48) als den Ruheenergie-Term $m c^2$ plus den übrigbleibenden Rest schreibt (welcher, nicht unpassend, als die relativistische kinetische Energie des Gegenstandes bezeichnet wird):

$$\begin{aligned} E_{rel,ges} &= \gamma(u) m c^2 \\ &= mc^2 - mc^2 + \gamma(u) m c^2 \\ &= mc^2 + \gamma(u) m c^2 - mc^2 \\ &= mc^2 + (\gamma(u) - 1) m c^2 \end{aligned} \quad (51)$$

Ruheenergie

relativistische kinetische Energie $E_{rel,kin}$

²⁵ Dies ist der konventionelle, leider aber eher unglücklich gewählte Name. Denn zu einer sinnvollen „Gesamtenergie“ würde normalerweise auch die E_{pot} gehören müssen, was hier aber nicht der Fall ist !

- Definitionsgemäss enthält die relativistische 2-er-Position \mathbf{x}_{rel} sowohl die Orts- als auch die Zeit-Information (über den Gegenstand); wir könnten die 2-er-Position \mathbf{x}_{rel} also auch als den Raum-Zeit-Vektor des Gegenstandes bezeichnen.

Analog steht's mit dem relativistischen 2-er-Impuls \mathbf{p}_{rel} , welcher gemäss unserer Überlegungen sowohl die Impuls- als auch die Energie-Information beinhaltet; daher ist es üblich, diesen Vektor als den Energie-Impuls-Vektor des Gegenstandes zu bezeichnen. Er zeigt eindrücklich, dass relativistisch gesehen Energie und Impuls nicht separate Objekte, sondern auf engste Weise gekoppelt sind (weil sie sich beim Übergang $S \rightarrow S'$ ineinander transformieren) !

- Ähnlich wie bei der Frage nach der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse gibt es auch für die Formel $E = m c^2$ heuristisch-plausible „Herleitungen“ anhand von Gedankenexperimenten. Mindestens aus Vollständigkeitsgründen werden wir in Kap. 7.6. ein solches (von Einstein selbst stammendes) Gedankenexperiment darlegen.

- Experimentelle Tests:
- Da wir die obigen Grundzüge der relativistischen Mechanik anhand strukturtheoretischer Argumentationen erraten haben, ist die Frage sehr berechtigt, ob die so erratene Theorie, z.B. die berühmte Gleichung (50), nur ein mathematisch-nettes Hirngespinst ist, oder ob sie tatsächlich mit dem realen Naturgeschehen in Übereinstimmung steht. Nun: ...
 - ... Wie wir im Rahmen der Kernphysik ausführlich gesehen haben, gelingt anhand von (50) eine überzeugende Interpretation und Auswertung des Massendefektes von Atomkernen, welcher ja bei Kernspaltungs- resp. Kernfusionsprozessen eine zentrale Rolle spielt.
 - ... (48) ist einer der Ausgangspunkte für eine zufriedenstellende (weil mit den Messwerten sehr gut übereinstimmende) quantitative Behandlung diverser quantenphysikalischer Phänomene.
 - ... Die oben dargelegten Grundzüge der Dynamik der SRT sind einer der Ausgangspunkte für die Theorieüberlegungen, welche es erlauben, sowohl das Beschleunigungs- als auch das Kollisionsverhaltens von Elektronen, Protonen und schwereren Ionen an Teilchenbeschleunigern (CERN, ...) in sehr guter Genauigkeit zu beschreiben.

7.3. Intermezzo: Relativistisches Skalarprodukt

Bemerkung: Um uns später (vgl. Kap. 7.4.) auch noch den Erhaltungssätzen der relativistischen Mechanik zuzuwenden, ist es äusserst nützlich, unsere Einsichten in die Strukturen der relativistischen Mechanik beträchtlich zu vertiefen. Dazu dient das jetzige Unterkapitel.

- Einleitung:
- Im Rahmen der klassischen Physik (vgl. Kap. 2) wird ja davon ausgegangen, dass sowohl zeitliche als auch räumliche Abstände absolut sind, d.h. dass sowohl $|\Delta t| = |\Delta t'|$ als auch $|\Delta x| = |\Delta x'|$ gilt. Mit andern Worten, zeitliche als auch räumliche Abstände ändern sich bei Galilei-Transformationen nicht, sind also wie man sagt Galilei-invariante Grössen.
 - Es ist klar, dass in der SRT dies nicht mehr gelten kann. Die Frage ist nun aber: Gibt es trotzdem auch in der SRT Grössen, welche sich im Übergang $S \rightarrow S'$ nicht ändern, d.h. Lorentz-invariant sind ? Nun, sicherlich die (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit c ! Interessanterweise werden wir im Folgenden erkennen, dass es darüber hinaus noch bedeutend mehr Lorentz-invariante Grössen gibt, welche aber nicht mehr (wie in der klassischen Physik) entweder zeitlichen oder räumlichen Charakter haben, sondern wo zeitliche und räumliche Informationen untrennbar miteinander verbunden werden !

- Räumliches Skalarprodukt:
- Es ist dir bekannt, dass wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ zwei beliebige 2-dimensionale räumliche Vektoren sind, das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren wie folgt definiert wird:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y \quad (52)$$

- Bekanntlich ergibt $\vec{\Delta r} \cdot \vec{\Delta r}$ genau das Quadrat $|\vec{\Delta r}|^2$ des entsprechenden räumlichen Abstandes. D.h., der Wert des Skalarproduktes $\vec{\Delta r} \cdot \vec{\Delta r}$ ist eine Galilei-invariante Grösse.
- Ja, es gilt sogar noch Allgemeineres: Weil $\vec{\Delta r}_1 \cdot \vec{\Delta r}_2 = |\vec{\Delta r}_1| |\vec{\Delta r}_2| \cos(\alpha(\vec{\Delta r}_1, \vec{\Delta r}_2))$ ist, und weil sowohl die räumlichen Abstände $|\vec{\Delta r}_1|$ und $|\vec{\Delta r}_2|$ als auch der Zwischenwinkel $\alpha(\vec{\Delta r}_1, \vec{\Delta r}_2)$ Galilei-invariant sind, ist offenbar sogar ...

... der Gesamtwert des Skalarproduktes $\vec{\Delta r}_1 \cdot \vec{\Delta r}_2$ eine Galilei-invariant Grösse !

- Relativist. Skalarprodukt:
- Wie wir gleich sehen werden, kommen die oben erwähnten Lorentz-invarianten Grössen der SRT dadurch zustande, dass man auch im Rahmen der SRT ein invariantes Skalarprodukt zur Verfügung hat. Welches allerdings nicht mehr (wie in der klassischen Physik) den Raum separat behandelt, sondern Zeit und Raum auf eine durchaus gewöhnungsbedürftige Weise miteinander vermischt !

- Definition: Wenn $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^{(0)} \\ a^{(1)} \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^{(0)} \\ b^{(1)} \end{pmatrix}$ zwei beliebige Raum-Zeit-Vektoren sind, so definieren wir das relativistische Skalarprodukt dieser beiden Vektoren wie folgt:

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle := a^{(0)} b^{(0)} - a^{(1)} b^{(1)} \quad (53)$$

- Satz: Wenn sich \vec{a} und \vec{b} beim Übergang $S \rightarrow S'$ via $\Lambda(v)$ transformieren, so ist der Wert des relativistischen Skalarproduktes Lorentz-invariant, d.h. es gilt:

$$\langle \vec{a}' | \vec{b}' \rangle = \langle \vec{a} | \vec{b} \rangle \quad (54)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}' | \vec{b}' \rangle &= (\vec{a}')^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{b}' \\ &\equiv (\Lambda(v) \vec{a})^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda(v) \vec{b} \\ &= (\vec{a})^T (\Lambda(v))^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda(v) \vec{b} \end{aligned}$$

Man kann rasch nachrechnen, dass Folgendes gilt:

$$(\Lambda(v))^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad = (\vec{a})^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{b}$$

$$= \underline{\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle} \quad \blacksquare$$

Erste
Folgerung
aus (54):

Die strukturell tiefliegende Einsicht (54), gepaart mit (32), (35) und (40), führt sofort zu folgendem Schluss:

- Satz:

1. Die Zahlenwerte $\langle \mathbf{x}_{rel} | \mathbf{x}_{rel} \rangle$, $\langle \mathbf{u}_{rel} | \mathbf{u}_{rel} \rangle$ und $\langle \mathbf{p}_{rel} | \mathbf{p}_{rel} \rangle$ sind Lorentz-invariant !
2. Insbesondere gilt aus Sicht von jedem beliebigen IS:

$$\langle \mathbf{p}_{rel} | \mathbf{p}_{rel} \rangle = m^2 c^2 , \quad (55)$$

resp. in Komponenten:

$$(p_{rel}^{(0)})^2 - (p_{rel}^{(1)})^2 = m^2 c^2 \quad (56)$$

Beweis:

Wir müssen nur noch den Teil „2.“ begründen:

- Wenn wir einen Gegenstand mit Geschwindigkeit \mathbf{u} beobachten, so ist natürlich aus Sicht des Ruhesystems dieses Gegenstandes $\mathbf{u}_R = 0$. Gemäss (39) heisst dies, dass $\mathbf{p}_{rel,R} = \begin{pmatrix} m c \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, womit via (53) folgt, dass

$$\langle \mathbf{p}_{rel,R} | \mathbf{p}_{rel,R} \rangle = m^2 c^2 \quad (57)$$

ist.

- Gemäss „1.“ gilt aus Sicht von jedem beliebigen IS:

$$\langle \mathbf{p}_{rel} | \mathbf{p}_{rel} \rangle = \langle \mathbf{p}_{rel,R} | \mathbf{p}_{rel,R} \rangle \quad (58)$$

- Indem wir (57) und (58) kombinieren, gelangen wir sofort zu (55). ■

Anwendung:

Eine z.B. im Rahmen der Quantenphysik gerne verwendete 3. Alternative zu den Schreibweisen (48) und (51) kommt via (56) und (48) zustande und lautet:

$$E_{rel,ges}^2 = (c p_{rel}^{(1)})^2 + (m c^2)^2 \quad (59)$$

7.4. Energie- und Impulserhaltung

Einleitung:

Die bereits erwähnte enge Kopplung von Energie und Impuls in der SRT (versinnbildlicht im Energie-Impuls-Vektor \mathbf{p}_{rel}) äussert sich auch darin, dass es relativistisch gesehen nicht (wie im klassisch-physikalischen Falle) zwei an sich separate Erhaltungssätze für Impuls resp. Energie gibt, sondern nur einen einzigen, nämlich den Energie-Impuls-Erhaltungssatz. Diesen Satz und seinen Beweis wollen wir als Nächstes kennenlernen ...

Energie-
Impuls-
Erhaltungs-
satz:

- Satz:

Wenn die auf einen Gegenstand einwirkende physikalisch-reale Gesamtkraft gleich Null ist, d.h. wenn $F_{rel}^{(1)} = 0$ ist, so gilt

$$\mathbf{p}_{rel} = \text{konst.} \quad (60)$$

resp., in Komponenten,

$$p_{rel}^{(0)} = \text{konst.} \quad \text{und} \quad p_{rel}^{(1)} = \text{konst.} \quad (61)$$

- Beweis:
- Indem wir die linke und die rechte Seite von (55) nach t ableiten (und noch mit $\gamma(u)$ multiplizieren), sehen wir, dass

$$\gamma(u) \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p}_{rel} | \mathbf{p}_{rel} \rangle = 0$$

ist. Auf der linken Seite die auch für das relativistische Skalarprodukt gültige Produktregel beim Ableiten anwendend, erhalten wir:

$$2 \left\langle \gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{rel} \middle| \mathbf{p}_{rel} \right\rangle = 0$$

- Via (42) führt dies sofort zu

$$2 \langle \mathbf{F}_{rel} | \mathbf{p}_{rel} \rangle = 0 ,$$

oder, via (53) in Komponenten und weil der Faktor 2 irrelevant ist,

$$F_{rel}^{(0)} p_{rel}^{(0)} - F_{rel}^{(1)} p_{rel}^{(1)} = 0 .$$

- Wir setzen nun die Voraussetzung $F_{rel}^{(1)} = 0$ in die obige Gleichung ein, was Folgendes ergibt:

$$F_{rel}^{(0)} p_{rel}^{(0)} = 0$$

Weil $p_{rel}^{(0)}$ sicherlich grösser als Null ist (da der Gegenstand wie üblich $m > 0$ haben soll), muss demzufolge $F_{rel}^{(0)} = 0$ sein. Dies bedeutet, dass die gesamte 2-er-Kraft $\mathbf{F}_{rel} = \mathbf{0}$ ist, was via (42) sofort zu (60) führt. ■

- Anmerkung: Es ist vielleicht unnötig, dies noch ausdrücklich zu erwähnen, aber sei's drum: Die Version (61) von (60) drückt genau den Energie- als auch den Impulserhaltungssatz aus !

Anwendung:

- Als wichtige Anwendung der obigen Überlegungen kann Folgendes festgehalten werden: Beim (nicht-notwendigerweise elastischen) Stoss zweier Teilchen 1 und 2 gilt:

$$(\mathbf{p}_{rel,1} + \mathbf{p}_{rel,2})_{\text{Anfang}} = (\mathbf{p}_{rel,1} + \mathbf{p}_{rel,2})_{\text{Ende}} . \quad (62)$$

- Beispiel: Wir betrachten den (vollständig inelastischen) Stossprozess $1 + 2 \rightarrow 3$, wobei das Teilchen 3 in Ruhe sein soll; d.h. die beiden Teilchen 1 und 2 kollidieren so, dass sie „zusammenkleben“ an Ort und Stelle verbleiben:
 - Nun, gemäss Energieerhaltungssatz gilt, dass

$$m_3 c^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2 + E_{rel,kin,1} + E_{rel,kin,2} \quad (63)$$

ist, was u.a. besagt, dass m_3 (im Gegensatz zur klassisch-physikalischen Erwartung) nicht gleich der Summe der Einzelmassen $(m_1 + m_2)$ sein kann, sondern grösser als $(m_1 + m_2)$ ist.

- Diese Massenzunahme (im Vergleich mit $(m_1 + m_2)$) sorgt genau dafür, dass die anfänglichen kinetischen Energien der Teilchen 1 und 2 nicht verloren gehen (sondern eben in die Ruheenergie des Teilchens 3 einfließen).
- Dieser elegante und universelle Mechanismus der Massenzunahme steht in völligem Kontrast zur klassischen Physik, bei welcher der vollständig inelastische Stossprozess deutlich mühseliger behandelt werden muss, nämlich unter Rückgriff auf die etwas vage „Wärme“ oder auf mikroskopische Betrachtungen !

- Ergänzung:
- Im Rahmen der Kernphysik haben wir u.a. Energiebilanzen studiert, so z.B. beim α -Zerfall eines Kernes X ($X \rightarrow \alpha + Y$). Wir haben dabei festgestellt, dass ...
 - ... die bei diesem Zerfall freigesetzte Bindungsenergie ΔE_B via $(M_{\text{Anfang}} - M_{\text{Ende}}) c^2$ berechnet werden kann, also via $(M_X - M_\alpha - M_Y) c^2$;
 - ... demzufolge, sofern keine inneren Anregungszustände berücksichtigt werden müssen, die Summe der (klassischen) kinetischen Energien der freigesetzten Teilchen gleich $(M_X - M_\alpha - M_Y) c^2$ ist, d.h.

$$E_{\text{kin},\alpha} + E_{\text{kin},Y} = (M_X - M_\alpha - M_Y) c^2 . \quad (64)$$

Interessanterweise stimmt diese Berechnungsformel genau mit der Aussage von (63) überein, sofern man in (63) die relativistischen durch die klassischen kinetischen Energien ersetzt und $m_3 = M_X$ und $m_1 = M_\alpha$ und $m_2 = M_Y$ setzt !

Unter der Annahme, dass die oben entwickelten Strukturen der SRT, insbesondere der relativistische Energie-Impuls-Erhaltungssatz, physikalisch Sinn machen, ist diese Übereinstimmung zwischen (64) und (63) nicht gänzlich überraschend, da der α -Zerfall $X \rightarrow \alpha + Y$ als vollständig inelastischer Stoßprozess in (im Vergleich mit oben) umgekehrter Richtung, also als $3 \rightarrow 1 + 2$, verstanden werden kann ! Dergestalt kann die Übereinstimmung zwischen (64) und (63) auch als weiteres Indiz für die physikalische Richtigkeit all der Überlegungen dienen, die schliesslich zum relativistischen Energie-Impuls-Erhaltungssatz geführt haben !

- Weiter oben haben wir, ausgehend von (47), den Schluss (48) gezogen, dass $c p_{\text{rel}}^{(0)}$ als relativistische Gesamtenergie $E_{\text{rel,ges}}$ des sich bewegenden Gegenstandes interpretiert werden soll. Das stimmt zwar letztlich, aber wir waren etwas gar schnell im Ziehen dieses Schlusses. Im Grunde hätten wir ein wenig vorsichtiger zu Werke gehen müssen:
 - Wir hätten uns noch die Frage stellen müssen, ob ...
 - ... der in der klassischen Physik offensichtlich fehlende und ebenso offensichtlich nicht an die Bewegung des Gegenstandes gekoppelte Ruheenergieterm $m c^2$ tatsächlich eine reale physikalisch Bedeutung hat (und daher, wie geschehen, ein legitimer Teil der relativistischen Gesamtenergie sein muss),
 - ... oder ob es sich dabei nicht doch nur um eine Normierungskonstante der Gesamtenergie ²⁶ handelt, welche daher ohne jegliche reale physikalische Bedeutung ist und daher auch weggelassen werden könnte.
 - Nun, wie im Rahmen der obigen Diskussion zum vollständig inelastischen Stoßprozess gesehen, kann es durchaus geschehen, dass der Ruheenergieterm nicht einfach nur der normierenden „Dekoration“ dient, sondern eine sehr bedeutsame physikalische Bedeutung erlangt. Somit rechtfertigt sich im Nachhinein auch dieser Aspekt unserer Interpretation (48).

Aufgaben: **① ⑤** Ges.: Wieviele kg Ruhemasse müssten in Energie umgewandelt werden, um eine 100 W - Zimmerbeleuchtung zehn Jahre (à 365 d) leuchten zu lassen ?

① ⑥ Ges.: Berechne das Verhältnis von relativistischer Gesamtenergie zu Ruheenergie eines Gegenstandes, welcher mit einer Geschwindigkeit von $0.1 c // 0.5 c // 0.8 c // 0.99 c$ vorüberfliegt.

① ⑦ Geg.: Im Linearbeschleuniger in Stanford (im US-Bundesstaat Kalifornien) werden kleine Pakete aus Elektronen und Positronen aufeinander geschossen. Im Labor-System ist (gerade vor der Kollision) jedes Paket etwa 1 cm lang und jedes Teilchen besitzt eine relativistische Gesamtenergie von ca. 50 GeV .

²⁶ Wir erinnern daran, dass die erhaltene Gesamtenergie eines Systems nur bis auf eine an sich beliebig wählbare additive Konstante E_0 bestimmt ist. Denn bei jeder Anwendung der Tatsache, dass diese Gesamtenergie eben erhalten sei, wird ja eine Gleichung der Art hingeschrieben, dass die Anfangs-Gesamtenergie gleich der End-Gesamtenergie ist; und aus dieser Gleichung fällt die additive Konstante E_0 sofort wieder heraus, womit klar wird, dass sie physikalisch gänzlich irrelevant ist.

Ges.: Wie lang ist daher ein solches Paket im Teilchen-Ruhesystem ?

1 8 Ges.: Zeige, dass im klassisch-physikalischen Grenzfall die SRT-Formeln (32), (35), (40), (42) - (43) genau die entsprechenden, altbekannten klassisch-physikalischen Formeln ergeben !

1 9 Geg.: Beim Übergang $S \rightarrow S'$ transformiert sich \mathbf{x}_{rel} bekanntlich gemäss (32), d.h. via $\mathbf{x}_{rel}' = \Lambda(v) \mathbf{x}_{rel}$. Analog ist's beim umgekehrten Übergang $S' \rightarrow S$, d.h. dort heisst es $\mathbf{x}_{rel} = \Lambda(-v) \mathbf{x}_{rel}'$. Wenn die relativistische Welt, die wir mittlerweile entworfen haben, mathematisch widerspruchsfrei ist, so müsste bei der zweifachen Transformation $S \rightarrow S' \rightarrow S$ die relativistische 2-er-Position \mathbf{x}_{rel} natürlich wieder auf sich selbst abgebildet werden, d.h. es müsste so sein, dass $\mathbf{x}_{rel} = \Lambda(-v) \Lambda(v) \mathbf{x}_{rel}$ ist. Die grosse Frage ist nun, ob die Lorentz-Transformations-Matrix Λ diese Gleichung tatsächlich erfüllt ...

Ges.: Zeige durch Berechnen des Matrix-Produktes $\Lambda(-v) \Lambda(v)$, dass $\Lambda(-v) \Lambda(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist (was bedeutet, dass mindestens im Rahmen dieser Fragestellung unsere relativistische Welt mathematisch widerspruchsfrei ist!).

2 0 Geg.: Wir betrachten die Funktion $\gamma(u) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Offensichtlich hängt γ nur vom Quotienten $(u/c)^2$ ab, den wir momentan z nennen und damit γ als Funktion von z betrachten.

Mit $t(z) = az + b$ bezeichnen wir die Gleichung derjenigen Tangente an den Graphen von $\gamma(z)$, welche den Graphen von $\gamma(z)$ bei $z = 0$ berührt.

Es ist bildlich sofort klar, dass die Funktionswerte von $t(z)$ in immer besserer Genauigkeit diejenigen von $\gamma(z)$ ergeben, je kleiner der Betrag von z ist.

Ges.: a) Berechne die Funktionsgleichung von $t(z)$.
b) Beweise damit die Richtigkeit von (46).

7.5. Plausibilitätsüberlegung / Gedankenexperiment zur Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse

Einleitung: Wie erwähnt, haben wir die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse in der relativistischen Mechanik anhand von Überlegungen entdeckt, welche strukturorientiert und eher abstrakt waren. Wie ebenfalls erwähnt, gibt es aber auch alternative, physikalisch-intuitive Möglichkeiten, die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse zwar nicht hieb-und-stichfest herzuleiten, wohl aber wenigstens plausibel zu machen. Im Folgenden soll nun eine solche Möglichkeit dargelegt werden.

Voraussetzung: In unserem baldigen Gedankenexperiment werden wir nicht nur von den bis Kap. 5 entwickelten SRT-Einsichten ausgehen (d.h. wir werden so tun, als wüssten wir nichts über die formalen Strukturüberlegungen von Kap. 6 und 7), sondern auch von den folgenden physikalisch-plausiblen Voraussetzungen:

- Nicht nur in der klassischen Physik, sondern auch in der SRT-Dynamik macht es Sinn, eine Grösse namens Impuls zu definieren. Wenn sich ein Gegenstand mit der klassischen Geschwindigkeit u bewegt, dann wird sein SRT-Impuls $p(u)$ analog zum klassischen Impuls definiert, d.h. als Vielfaches seiner klassischen Geschwindigkeit u , d.h. als

$$p(u) := m(u?) u , \quad (65)$$

- wobei die „Vielfachheitszahl“ $m(u?)$ als die Masse des Gegenstandes bezeichnet wird und - wie die Notation andeutet - möglicherweise von der Geschwindigkeit u abhängt.
- Wie in der klassischen Dynamik gilt auch in der SRT-Dynamik bei Stoßprozessen der Impulserhaltungssatz (und zwar nicht nur aus Sicht von einem einzigen speziellen IS, sondern - angesichts des 3. Einstein'schen Postulates - aus Sicht aller möglichen IS).

Absicht:

- Das Ziel des folgenden Gedankenexperimentes besteht darin einzusehen, dass uns die Zeitdilatation und die obigen physikalisch-plausiblen Voraussetzungen betr. Impuls zu einem Widerspruch führen, sofern wir annehmen, dass $m(u?)$ - wie in der klassischen Dynamik - nicht von der Geschwindigkeit u abhängt! - Auf diese Weise erhalten wir genau die in Aussicht gestellten physikalisch-plausiblen Hinweise zugunsten der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse!
- Zu Beginn des folgenden Gedankenexperimentes werden wir also annehmen, dass $m(u?)$ - wie in der klassischen Dynamik - nicht von der Geschwindigkeit u abhängt; und aus diesem Grunde werden wir dann einfach m statt $m(u?)$ schreiben.

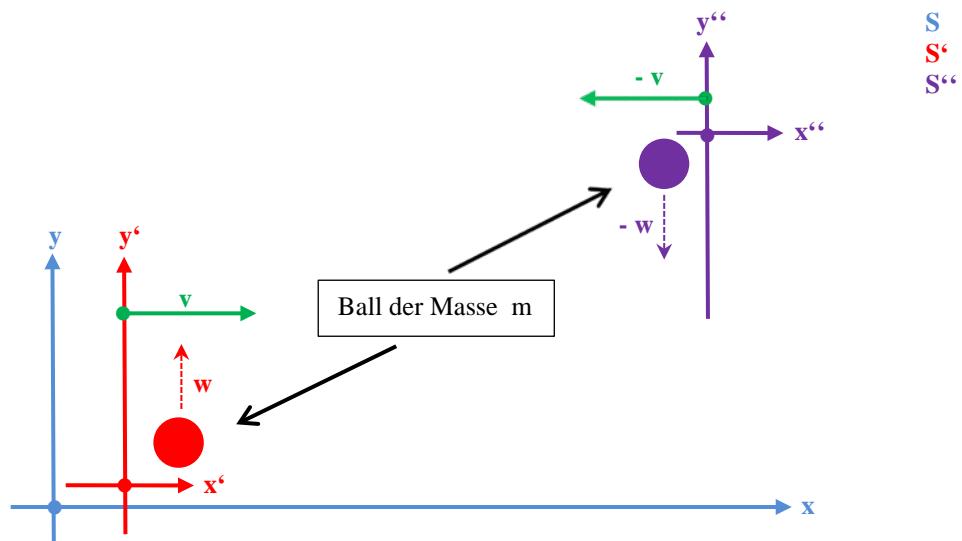
Gedanken-experiment:

So, damit sind wir endlich bereit, unser Gedankenexperiment zu entwickeln:

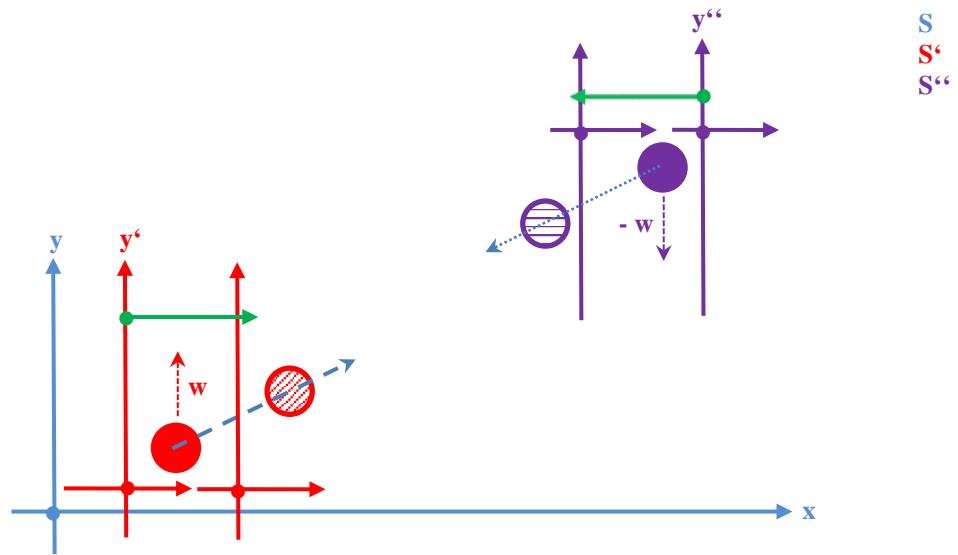
- Wir stehen im IS S , und von links nähert sich das IS S' mit Geschwindigkeit v , und von rechts das IS S'' mit Geschwindigkeit ($-v$) (vgl. unten folgende Graphik).

Ein Beobachter in S' wirft einen **Ball** der Masse m entlang der y' -Achse (in positive y' -Richtung); aus Sicht von S' bewegt sich der Ball daraufhin mit der Geschwindigkeit w entlang der positiven y' -Achse.

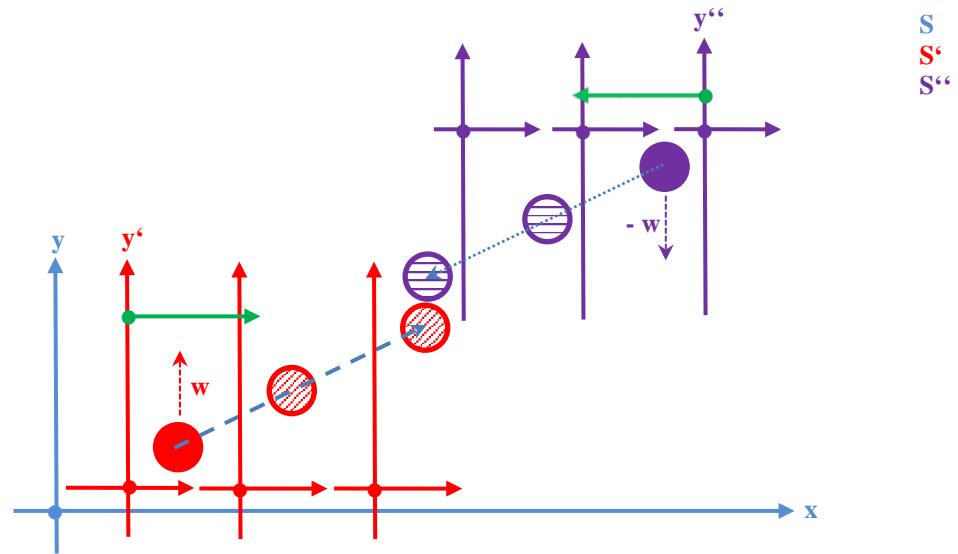
In S'' sieht's analog aus: Ein Beobachter in S'' wirft einen identischen **Ball** entlang der y'' -Achse (in negative y'' -Richtung); aus Sicht von S'' bewegt sich der Ball daraufhin mit der Geschwindigkeit ($-w$) entlang der negativen y'' -Achse.



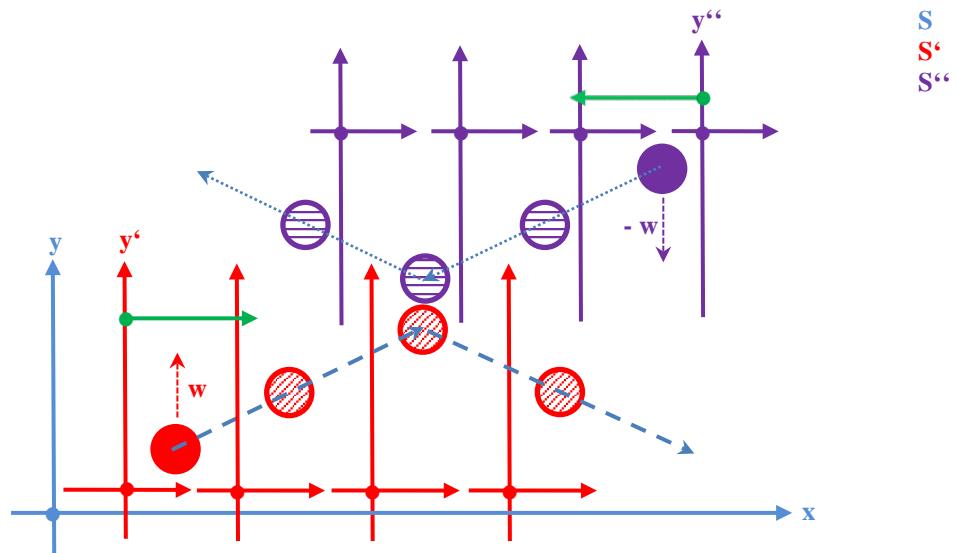
- Wir betrachten jetzt den Flug der beiden Bälle (gestrichelt resp. punktiert gezeichnet) aus unserer Sicht, d.h. aus Sicht von S :
- Zunächst sieht der Flug so aus (vgl. nächste Seite):



- Wir nehmen nun an, dass die beiden Bälle zum „richtigen“ Zeitpunkt abgeworfen wurden, d.h. so, dass sie kollidieren werden, und zwar genau am „obersten“ Punkt des roten resp. „untersten“ Punkt des violetten Balls:



- Annehmend, dass diese Kollision der beiden identischen Bälle „ideal“ verläuft, d.h. vollständig elastisch, wird der weitere „Lebensweg“ der beiden Bälle aus Impulserhaltungsgründen einfach in gespiegelter Weise verlaufen:



- Oben haben wir das Kollisionsgeschehen aus unserer Sicht, d.h. aus Sicht von S , beschrieben. Wie aber präsentiert es sich einem Beobachter aus S' ? - Nun, ein Beobachter aus S' überlegt sich Folgendes:
 - Aufgrund der Überlegungen aus Sicht von S folgt, dass der rote Ball auch nach der Kollision entlang der y' -Achse fliegt, jetzt aber mit Geschwindigkeit $(-w)$. Und analog ist's aus Sicht von S'' bezgl. des violetten Balls.
 - Der Anfangs-/Vor-Kollisions-Impuls des roten Balls ist gleich $m w$, der End-/Nach-Kollisions-Impuls gleich $-m w$.
 - Wenn wir die Anfangs-Geschwindigkeit des violetten Balls entlang der y' -Achse mit $(-u')$ und seine End-Geschwindigkeit mit u' bezeichnen, so ist sein Anfangs-Impuls entlang der y' -Achse gleich $-m u'$ und sein End-Impuls gleich $m u'$.
 - Gemäß Impulserhaltungssatz muss nun gelten, dass insbesondere der Gesamtimpuls in y' -Richtung konstant ist, d.h. dass

$$m w - m u' = -m w + m u' \quad (66)$$

ist. Durch Zusammenfassen gleichartiger Terme erhalten wir

$$2 m w = 2 m u' ,$$

was sofort besagt, dass

$$w = u' , \quad (67)$$

sein muss.

- So weit, so gut. - Andererseits aber gilt doch Folgendes: Die Relativbewegung der IS S' und S'' verläuft ja in $x/x'/x''$ -Richtung; daher
 - sind Streckenlängen in $y/y'/y''$ -Richtung nicht verzerrt;
 - vergeht aufgrund der Zeitdilatation aus Sicht von S' mehr Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden y'' -Positionen des violetten Balles als aus Sicht von S'' (da es sich um zwei Ereignisse handelt, welche aus Sicht von S'' dieselbe x'' -Koordinate haben).

Aus diesen beiden Gründen erscheint dem S' -Beobachter die Geschwindigkeit des violetten Balls in y'/y'' -Richtung betragsmäßig kleiner zu sein als w , d.h. es ist

$$w > u' . \quad (68)$$

- (67) und (68) ergeben nun genau den anfangs angekündigten Widerspruch! D.h., die Folgerungen des Impulserhaltungssatzes, angewandt auf den klassischen Impuls $p = m u$, und die Einsichten der SRT zur Zeitdilatation sind offensichtlich nicht miteinander vereinbar! Damit ist klar, dass in der SRT die Masse eines Gegenstandes eine geschwindigkeitsabhängige Größe sein muss, sofern der Impulserhaltungssatz auch in der SRT-Dynamik gelten soll.

Ergänzung:

Anhand der obigen Auswertung des Gedankenexperimentes haben wir nur eine qualitative Aussage zur Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse erhalten. Interessanterweise kann man aber durch eine kleine Präzisierung auch zur quantitativen Form der Geschwindigkeitsabhängigkeit gelangen. Und das geht so:

- Statt (65) gilt nun die Feststellung $p(u) = m(u) u$.
- Wir treffen die plausible Annahme, dass die Masse m nur vom Betrag der Geschwindigkeit, nicht aber von deren Richtung abhängt.
- Damit erhalten wir statt (66) die Gleichung

$$m(w) w - m(v'', u') u' = -m(w) w + m(v'', u') u' ,$$

resp. via Zusammenfassen gleichartiger Terme und Division durch 2

$$m(w) w = m(v^{..}, u^c) u^c , \quad (69)$$

wobei

- die Schreibweise $m(v^{..}, u^c)$ andeuten soll, dass die Gesamtgeschwindigkeit, von welcher die Masse abhängt, die beiden Komponenten $v^{..}$ (= Betrag der Geschwindigkeit, mit welcher sich S'' aus Sicht von S' gegenüber S' bewegt) und u^c aufweist;
- natürlich $m(0) = m(0, 0) = m := m_0$ gilt.

- Unter Verwendung von (16) sehen wir rasch, dass

$$u^c = \frac{1}{\gamma(v^{..})} w \quad (70)$$

ist.

- Indem wir (70) in (69) einsetzen und durch w dividieren, erhalten wir

$$m(w) = m(v^{..}, \frac{1}{\gamma(v^{..})} w) \frac{1}{\gamma(v^{..})} . \quad (71)$$

- Der Trick besteht nun darin, einen geeigneten Grenzfall von (71) zu betrachten, nämlich den Fall $w = 0$. Weil definitionsgemäß $m(v^{..}, 0)$ einfach gleich $m(v^{..})$ ist, sehen wir auf dieses Weise, dass

$$m_0 = m(v^{..}) \frac{1}{\gamma(v^{..})}$$

ist, d.h. dass

$$m(v^{..}) = \gamma(v^{..}) m_0 \quad (72)$$

ist. Weil v und daher auch $v^{..}$ gänzlich beliebig ist, erhalten wir somit genau die in Kap. 7.2. erwähnte Beziehung zur Berechnung der geschwindigkeitsabhängigen Masse !

7.6. Plausibilitätsüberlegung / Gedankenexperiment zu $E = m c^2$

Einleitung:

Wie erwähnt, gibt es auch für die Formel $E = m c^2$ heuristisch-plausible „Herleitungen“ anhand von Gedankenexperimenten. Ein solches, 1946 von Einstein veröffentlichtes möchten wir im Folgenden präsentieren.

Voraussetzung: In unserem baldigen Gedankenexperiment werden wir nicht nur von den (nur) bis zu Kap. 4 entwickelten SRT-Einsichten ausgehen, sondern auch von den folgenden physikalisch-plausiblen Voraussetzungen:

- Nicht nur in der klassischen Physik, sondern auch in der SRT-Dynamik macht es Sinn, für nicht-masselose Gegenstände eine Grösse namens Impuls zu definieren. Wenn sich ein solcher Gegenstand mit der klassischen Geschwindigkeit u bewegt, dann wird sein SRT-Impuls $p(u)$ analog zum klassischen Impuls definiert, d.h. als Vielfaches seiner klassischen Geschwindigkeit u , d.h. als

$$p(u) := m(u?) u , \quad (73)$$

wobei - wie durch die Notation angedeutet - die Masse des Gegenstandes möglicherweise von der Geschwindigkeit u abhängt.

- Wenn wir einen Lichtpuls betrachten, welcher sich im Vakuum geradlinig ausbreitet, so gilt auch in der SRT-Elektrodynamik die aus der klassischen Elektrodynamik bekannte Beziehung zwischen seiner Energie E_{LP} und seinem Impuls \vec{p}_{LP} :

$$|\vec{p}_{LP}| = E_{LP} / c . \quad (74)$$

- Wie in der klassischen Dynamik gilt auch in der SRT-Dynamik bei Stossprozessen der Impulserhaltungssatz (und zwar nicht nur aus Sicht von einem einzigen speziellen IS, sondern - angesichts des 3. Einstein'schen Postulates - aus Sicht aller möglicher IS).

Absicht:

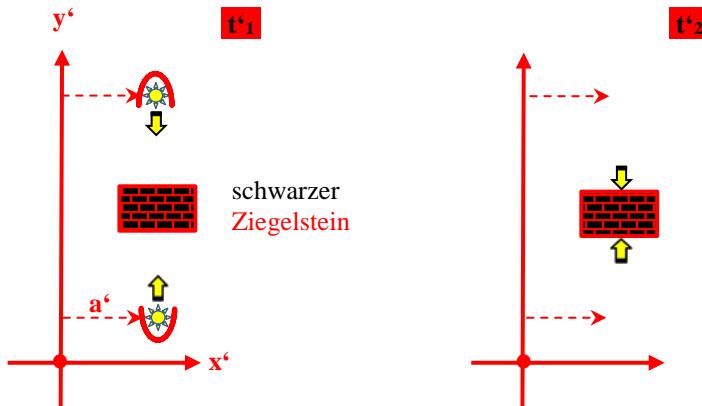
Das Ziel des folgenden Gedankenexperimentes besteht darin einzusehen, dass aufgrund der obigen physikalisch-plausiblen Voraussetzungen zum Impuls / zur Impulserhaltung ...

... der Quotient E_{LP} / c^2 einer Masse entspricht !

Und dies ist genau der versprochene physikalisch-plausible Hinweis zugunsten der Äquivalenz von (elektromagnetischer Strahlungs-)Energie und $(\text{Masse} \times c^2)$!

Gedanken-experiment:

- Wir stehen im IS S' , welches (vgl. unten folgende Graphik) das Ruhesystem zweier identischer Lampen und eines schwarzen Ziegelsteins ist. Die beiden Lampen haben dieselbe x' -Koordinate ($= a'$); die obere Lampe kann Licht nur in die negative y' -Richtung abstrahlen, und die untere Lampe nur in die positive y' -Richtung; der Ziegelstein befindet sich genau mittig zwischen beiden Lampen.

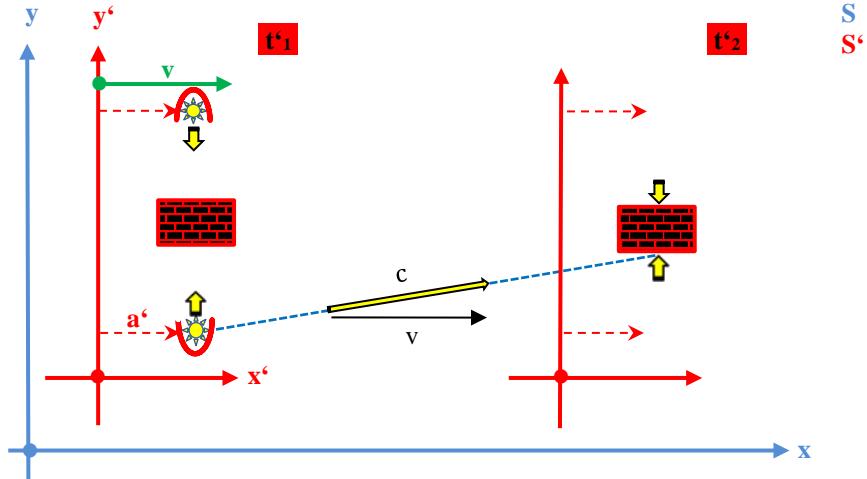


Zur Zeit $t'1$ zünden wir beide Lampen während gleicher (und kurzer) Zeit an; die beiden so produzierten Lichtpulse haben also identische Zeitspanne und daher auch identische Energien ($:= E'_{LP}$) und bewegen sich entlang der y' -Achse gegen den schwarzen Ziegelstein.

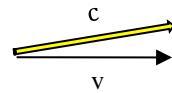
Zur Zeit $t'2$ erreichen die beiden Lichtpulse gleichzeitig den Ziegelstein. Da er schwarz ist, werden die beiden Lichtpulse vollständig absorbiert. Weil gemäss (74) der Vor-Absorptions-Gesamtimpuls von Lichtpulsen und Ziegelstein gleich Null ist, folgt aufgrund der Impulserhaltung, dass der Impuls des Ziegelsteins auch nach der Absorption der Lichtpulse gleich Null ist; d.h., der Ziegelstein bewegt sich auch nach der Lichtabsorption nicht (aber sein Energiegehalt ist gestiegen).

- Wir nehmen nun an, dass S' mit $v = \text{konst.}$ relativ zu einem IS S bewegt (vgl. Graphik auf der nächsten Seite). Ein Beobachter in S , welcher die obigen Ereignisse beobachtet, stellt seinerseits Folgendes fest:

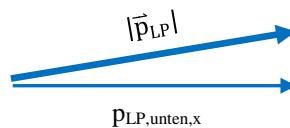
- Die beiden Lichtpulse werden auch aus seiner Sicht sowohl gleichzeitig emittiert als auch gleichzeitig absorbiert (da t' und x' jeweils gleich sind).
- Insbesondere haben die beiden Lichtpulse auch aus Sicht von S die gleiche Zeitspanne. Daher haben sie auch die gleichen Energien ($:= E_{LP}$).
- Der untere Lichtpuls bewegt sich (dank dem 2. Einstein'schen Postulat) mit Geschwindigkeit c schräg nach rechts-oben (Richtung **punktiert** gezeichnet). Analoges gilt für den oberen Lichtpuls.



- Wie gesagt bewegt sich der untere Lichtpuls mit der Gesamtgeschwindigkeit c , wobei (vgl. Graphik) die horizontale Komponente seiner Bewegung die Geschwindigkeit v aufweist. Weil das entsprechende „Geschwindigkeitsdreieck“



ähnlich ist zum „Impulsdreieck“ mit Hypotenuse-Länge $|\vec{p}_{LP}|$ und horizontaler (resp. x-) Komponente $p_{LP,\text{unten},x}$,



folgt sofort, dass

$$\frac{p_{LP,\text{unten},x}}{|\vec{p}_{LP}|} = \frac{v}{c}$$

ist. Aufgelöst nach der x-Komponente des Impulses und via (74) erhalten wir daher

$$p_{LP,\text{unten},x} = v E_{LP} / c^2 . \quad (75)$$

Auf analoge Weise ergibt sich auch

$$p_{LP,\text{oben},x} = v E_{LP} / c^2 . \quad (76)$$

- Betrachten wir jetzt den Ziegelstein und die beiden Lichtpulse, und zwar vor Absorption der Lichtpulse:
 - Der Ziegelstein bewegt sich mit der Geschwindigkeit v ; wenn wir seine zu diesem Zeitpunkt gültige Masse mit M bezeichnen, so ist gemäss (73) sein Impuls gleich $M v$.
 - Daher ist der Gesamtmoment von Ziegelstein und Lichtpulsen aufgrund von (75) - (76) gleich

$$M v + 2 v E_{LP} / c^2 . \quad (77)$$

- So, und jetzt schauen wir uns den Ziegelstein nach Absorption der beiden Lichtpulse an:
 - Gemäss Impulserhaltungssatz hat, erstens, der Nach-Absorptions-Impuls des Ziegelsteines den in (77) notierten Wert.
 - Zweitens ist es ja so, dass sich aus Sicht von S' der Ziegelstein auch nach der Absorption der beiden Lichtpulse nicht bewegt. Daher beträgt seine Nach-Absorptions-Geschwindigkeit relativ zu S immer noch v . Also kann aus Sicht von S sein Nach-Absorptions-Impuls als

$$(Nach-Absorptions-Masse) \times v \quad (78)$$

geschrieben werden.

- Gleichsetzen von (77) und (78) zeigt sofort, dass

$$\text{Nach-Absorptions-Masse} = M + 2 E_{LP} / c^2$$

ist, d.h. dass die Masse des Ziegelsteins um den Wert $2 E_{LP} / c^2$ zugenommen hat.

- Ja, und dies bedeutet nun offenbar, dass die elektromagnetische Strahlungsenergie E_{LP} von jedem der beiden Lichtpulse zu einer Massenzunahme

$$\Delta m = E_{LP} / c^2$$

geführt hat, d.h. dass - wie zu Beginn angekündigt - die (elektromagnetische Strahlungs-)Energie E_{LP} gleich $(\text{Masse} \times c^2)$ ist.

Anhang: Lösungen der Aufgaben

- 1) a) $t' \approx \underline{\underline{5\text{ s}}}$ $x' \approx \underline{\underline{-9\text{ km}}}$
b) $t' \approx \underline{\underline{5\text{ s}}}$ $x' \approx \underline{\underline{-999\text{ km}}}$
c) $t' \approx \underline{\underline{5.01\text{ s}}}$ $x' \approx \underline{\underline{-100.222\text{ km}}}$
d) $t' \approx \underline{\underline{6.71\text{ s}}}$ $x' \approx \underline{\underline{-1.342.392\text{ km}}}$
e) $t' \approx \underline{\underline{-30\text{ s}}}$ $x' \approx \underline{\underline{600.050\text{ km}}}$
f) $t' \approx \underline{\underline{-40.27\text{ s}}}$ $x' \approx \underline{\underline{8.054.361\text{ km}}}$
g) $t' \approx \underline{\underline{-118.36\text{ s}}}$ $x' \approx \underline{\underline{34.323.878\text{ km}}}$
h) t' und x' existieren nicht

Resultate, die aus klassisch-physikalischer Sicht wenig verständlich sind; übrige sind gut verständlich.

$$\begin{array}{l} \text{② Allgemein:} \\ \hline t'_2 = \gamma \cdot \left(T - \frac{v}{c^2} x_2 \right) & \cdot 1 \\ t'_1 = \gamma \cdot \left(T - \frac{v}{c^2} x_1 \right) & \cdot (-1) \\ \hline \Delta t' = \gamma \cdot \left(-\frac{v}{c^2} \Delta x \right) & (\star) \end{array}$$

Folgerung aus (\star) mit $\Delta x = 2d$:

- a) $|\Delta t'| \cong \underline{4.45 \cdot 10^{-12} \text{ s}}$
 b) $|\Delta t'| \cong \underline{5.97 \text{ s}}$
 c) $|\Delta t'| \cong \underline{25.46 \text{ s}}$

$$\underline{\underline{t_2 = \gamma \cdot (t'_2 + \frac{v}{c^2} x') \quad | \cdot 1 \\ t_1 = \gamma \cdot (t'_1 + \frac{v}{c^2} x') \quad | \cdot (-1)}} \\ \Delta t = \gamma \cdot (\Delta t') \quad (\star\star)$$

Folgerung aus (★★) mit $\Delta t' = 60$ s :

- a) $|\Delta t| \cong \underline{\underline{60\text{ s}}}$
 b) $|\Delta t| \cong \underline{\underline{80.54\text{ s}}}$
 c) $|\Delta t| \cong \underline{\underline{236.72\text{ s}}}$

④ a) $(\star\star) \Rightarrow \Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$

b) 1. Methode:

$$\bullet \quad t_1 : \quad v \cdot (t_1 - t_0) + c \cdot (t_1 - t_0) = L \quad \Rightarrow \quad (t_1 - t_0) = \frac{L}{c+v}$$

$$\bullet \quad t_3 : \quad v \cdot (t_3 - t_0) + L = c \cdot (t_3 - t_0) \quad \Rightarrow \quad (t_3 - t_0) = \frac{L}{c-v}$$

$$\bullet \Rightarrow \Delta t \equiv t_3 - t_1 = (t_3 - t_0) - (t_1 - t_0) = \frac{L}{c-v} - \frac{L}{c+v} = \frac{2Lv \cdot \frac{1}{c^2}}{(c^2 - v^2) \cdot \frac{1}{c^2}} = \frac{2L \frac{v}{c^2}}{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{c^2}}$$

$$\bullet \quad \text{④ a) } \Rightarrow \underline{\Delta t^c} = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta t = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{2L \frac{v}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2L \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \underline{\underline{\gamma \cdot 2L \frac{v}{c^2}}}$$

2. Methode:

- Gemäss ② : $\Delta t' := t'(d) - t'(-d) = \gamma \cdot \left(-\frac{v}{c^2} 2d \right)$.
- Für uns gilt also: $\Delta t' \equiv t'(-L) - t'(L) = \gamma \cdot 2L \frac{v}{c^2}$
- Vergleich mit dem Resultat der 1. Methode: Übereinstimmung (wie nicht anders zu erwarten)!

5 $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_R \cong 7.09 \text{ h}$

6 a) $L = \frac{1}{\gamma} \cdot L_R \mid \dots$
 $1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{8}{10}\right)^2 \mid \dots$
 $v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{8}{10}\right)^2} = 0.6c$

b) Aus Sicht von dir / S :

Zur Zeit $t = t_0$ passt der Bus genau in die bei $x = x_0$ beginnende Parklücke, d.h. ins Intervall $[x_0, x_0 + 8]$.

Aus Sicht des Buschauffeurs / S' :

- Die Parklücke ist um den Faktor $1/\gamma = 8/10$ verkürzt, d.h. noch 6.4 m lang. Der 10 m lange Bus hat also keine Chance hineinzupassen. Aber das ist auch kein Problem, denn:
- Das vordere Ende des Buses erreicht das vordere Ende der Parklücke (bei $x = x_0 + 8$, und zur Zeit $t = t_0$) zur Zeit $t'_V = \gamma \cdot (t_0 - \frac{v}{c^2}(x_0 + 8))$.
Das hintere Ende des Buses erreicht das hintere Ende der Parklücke (bei $x = x_0$, und zur selben Zeit $t = t_0$) zur Zeit $t'_H = \gamma \cdot (t_0 - \frac{v}{c^2}x_0)$.
 $\Rightarrow t'_H > t'_V$, d.h. das vordere Ende des Buses erreicht das vordere Ende der Parklücke bevor das hintere Ende des Buses das hintere Ende der Parklücke erreicht hat !

- 7
- Gemäss (★) : $\Delta t = \Delta t' = 0 \Rightarrow \Delta x = 0$.
 - Analog / aus Symmetriegründen: $\Delta t = \Delta t' = 0 \Rightarrow \Delta x' = 0$.
 - \Rightarrow Beide Ereignisse finden aus Sicht beider Beobachter am selben Ort (und, natürlich, gleichzeitig) statt!

8

- (20) für $S' \rightarrow S$: $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v u'}{c^2}}$
- $\Rightarrow u \cong 1500 \text{ m/s}$

9 $u = \frac{1.6c}{1 + \frac{0.64c^2}{c^2}} \cong 0.9756c$ (!)

10 b) $\Delta t = \frac{4ca}{0.75c} \cong 5.33 \text{ a}$
a) $\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta t \cong 3.53 \text{ a}$

11

- $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} [\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_R] = [\Delta t = 1 \cdot \Delta t_R] = [\Delta t = \Delta t_R]$
- $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} [L = \frac{1}{\gamma} \cdot L_R] = [L = 1 \cdot L_R] = [L = L_R]$
- $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \left[u' = \frac{u-v}{1-\frac{vu}{c^2}} \right] = \left[u' = \frac{u-v}{1} \right] = [u' = u-v]$

① ② $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_R$ und $\Delta t_R = \Delta t - 1$ ergeben: $\Delta t = \gamma \cdot (\Delta t - 1) \quad | \quad \dots$

$$\Delta t = \frac{-\gamma}{1-\gamma} \cong \underline{18'653 \text{ a}}$$

- ① ③ a) • Analog zu (\star) : $0 = \gamma \cdot \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)$
 • $\Delta t = 2 \mu\text{s}$, $\Delta x = 1500 \text{ m} \Rightarrow v = c^2 \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cong \underline{119'800 \text{ km/s}}$
 b) • Ja, falls (analog zu a)) $\gamma \cdot \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) < 0$ ist.
 • $\Delta t = 2 \mu\text{s}$, $\Delta x = 1500 \text{ m} \Rightarrow \underline{v > (119'800 \text{ km/s})}$

① ⑤ $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{m c^2}{\Delta t} \Rightarrow m = \frac{P \Delta t}{c^2} \cong \underline{3.51 \cdot 10^{-7} \text{ kg}}$

① ⑥ $\frac{E_{\text{rel,ges}}}{m c^2} = \frac{\gamma(u) m c^2}{m c^2} = \gamma(u) \cong \underline{1.005} // \underline{1.155} // \underline{1.667} // \underline{7.089}$

① ⑦ $L_R = \gamma(u) \cdot L = \frac{\gamma(u) m c^2}{m c^2} \cdot L = \frac{E_{\text{rel,ges}}}{m c^2} \cdot L \cong \underline{978.50 \text{ m}} (!)$

- ① ⑧ • $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} [x_{\text{rel}}' = \Lambda(v)x_{\text{rel}}] \equiv \lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \left[\begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x(t) \end{pmatrix} \right]$
 $= \lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \left[\begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c^2} \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix} \right]$
 $= \left[\begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix} \right] \equiv \underline{\underline{x' = \Gamma(v) x}}$
- $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0, \frac{u}{c} \rightarrow 0} [u_{\text{rel}}' = \Lambda(v)u_{\text{rel}}] \equiv \lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0, \frac{u}{c} \rightarrow 0} \left[\begin{pmatrix} \gamma(u) c \\ \gamma(u) u \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u) c \\ \gamma(u) u \end{pmatrix} \right]$
 $= \lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0, \frac{u}{c} \rightarrow 0} \left[\begin{pmatrix} \gamma(u) \\ \gamma(u) u \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c^2} \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u) \\ \gamma(u) u \end{pmatrix} \right]$
 $= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} \right] \equiv \underline{\underline{u' = \Gamma(v) u}}$
- \Rightarrow Via (38), dass $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0, \frac{u}{c} \rightarrow 0} [p_{\text{rel}}' = \Lambda(v)p_{\text{rel}}] = [\underline{\underline{p' = \Gamma(v) p}}]$ ist.
- $\lim_{\frac{u}{c} \rightarrow 0} [\gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} p_{\text{rel}} = F_{\text{rel}}] \equiv \lim_{\frac{u}{c} \rightarrow 0} \left[\gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma(u) m c \\ \gamma(u) m u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\text{rel}}^{(0)} \\ F_{\text{rel}}^{(1)} \end{pmatrix} \right]$
 $= \lim_{\frac{u}{c} \rightarrow 0} \left[\gamma(u) \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma(u) m \\ \gamma(u) m u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{\text{rel}}^{(0)}/c \\ F_{\text{rel}}^{(1)} \end{pmatrix} \right]$
 $= \boxed{\left[1 \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m \\ m u \end{pmatrix} = \lim_{\frac{u}{c} \rightarrow 0} \begin{pmatrix} F_{\text{rel}}^{(0)}/c \\ F_{\text{rel}}^{(1)} \end{pmatrix} \right]} \equiv \underline{\underline{p' = F}}, \text{ wobei wir die Annahme getroffen haben,}$
- $\boxed{\lim_{\frac{u}{c} \rightarrow 0} \left[\frac{d \gamma(u)}{dt} \right] = \dots = 0}$

dass $\lim_{\frac{u}{c} \rightarrow 0} \begin{pmatrix} F_{rel}^{(0)}/c \\ F_{rel}^{(1)} \end{pmatrix}$ existiert und dass $\lim_{\frac{u}{c} \rightarrow 0} (F_{rel}^{(0)}/c) = 0$ ist.

- $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \left[F_{rel}' = \Lambda(v) F_{rel} \right] \equiv \lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \left[\begin{pmatrix} F_{rel}^{(0)} \\ F_{rel}^{(1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c^2} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{rel}^{(0)} \\ F_{rel}^{(1)} \end{pmatrix} \right]$
 $= \lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \left[\begin{pmatrix} F_{rel}^{(0)}/c \\ F_{rel}^{(1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c^2} \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{rel}^{(0)}/c \\ F_{rel}^{(1)} \end{pmatrix} \right]$
 $= \left[\left(\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} F_{rel}^{(1)} \right)' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \left(\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} F_{rel}^{(1)} \right) \right] \equiv [\underline{\underline{F' = \Gamma(v) F}}] \text{, wobei wir wiederum}$
die Annahme getroffen haben, dass $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \begin{pmatrix} F_{rel}^{(0)}/c \\ F_{rel}^{(1)} \end{pmatrix}$ existiert und dass $\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} (F_{rel}^{(0)}/c) = 0$ ist.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \textcircled{9} \quad \Lambda(-v) \Lambda(v) &\equiv \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma \frac{v}{c} \\ +\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} & -\gamma^2 \frac{v}{c} + \gamma^2 \frac{v}{c} \\ \gamma^2 \frac{v}{c} - \gamma^2 \frac{v}{c} & -\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} + \gamma^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \textcircled{0} \quad \text{a) } \bullet \quad a = \frac{d \gamma(z)}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d (1-z)^{-0.5}}{dz} \Big|_{z=0} = (-0.5) \cdot (1-z)^{-1.5} \cdot (-1) \Big|_{z=0} = \underline{0.5}$$

$$\bullet \quad b = \gamma(z) \Big|_{z=0} = \underline{1}$$

$$\bullet \quad \Rightarrow \quad \underline{t(z) = \frac{1}{2}z + 1}$$

- b) Via a) folgt sofort: Je kleiner der Betrag von z ist, umso genauer stimmt die Ungefähr-Gleichung

$$\gamma(z) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot z \quad .$$

Weil $z \equiv (u/c)^2$ ist, ist daher auch klar: Je kleiner der Betrag von $(u/c)^2$ oder eben von u/c ist, umso genauer stimmt die Ungefähr-Gleichung

$$\gamma(u) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2} \quad . \quad \blacksquare$$