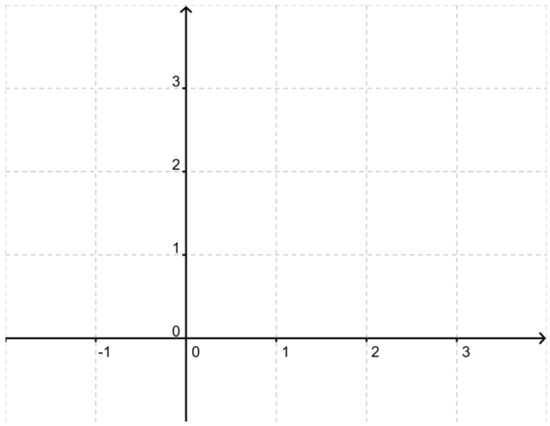
Wichtige Eigenschaften des bestimmten Integrals

1) Anna arbeitet gerade mit der Funktion $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ falls } x \le 1 \\ x, \text{ falls } x > 1 \end{cases}$. Sie möchte das Integral $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen.

a) Skizzieren Sie den Graphen, und machen Sie das fragliche Integral sichtbar.



b) Welchen Rat würden Sie Anna geben, wie sie ihr Integral berechnen soll? Führen Sie die Berechnung auch durch, indem Sie das Vorwissen $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ benutzen.

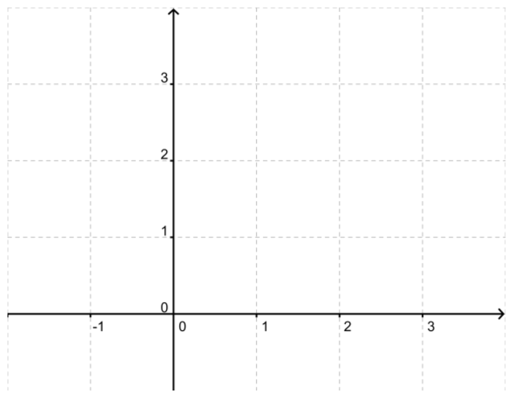
c) Nehmen Sie dieses Beispiel zum Anlass, um eine allgemeine Eigenschaft bestimmter Integrale zu vermuten:

<u>Eigenschaft 1</u>

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ definiert und stetig ist und wenn $a<c<b$ ist, dann gilt wohl: …

2) Beat weiss auch schon, dass $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ gilt. Er soll nun aber das Integral $\int_0^1 \frac{5}{3}\cdot x^2\,\mathrm{d}x$ berechnen und fragt sich, ob und wie er sein Vorwissen dazu benutzen kann.

a) Skizziere Sie die Graphen der Funktionen $f(x)=x^2$ und $g(x)=\frac{5}{3}\cdot x^2$ in untenstehendes Koordinatensystem, und machen Sie auch die beiden Integrale sichtbar.



b) Was meinen Sie, wie hängt der Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{5}{3} \cdot x^2 \, \mathrm{d}x$ mit dem Wert des Integrals $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ zusammen? Und wie kann man das plausibel machen?

c) Nehmen Sie dieses Beispiel zum Anlass, um eine weitere allgemeine Eigenschaft bestimmter Integrale zu vermuten:

<u>Eigenschaft 2</u>

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ integrierbar ist und wenn für eine weitere Funktion $g(x)$ gilt: $g(x) = k \cdot f(x)$ für irgendeine reelle Konstante k, dann trifft wohl Folgendes zu: …

3) Céline steht vor der Aufgabe, das Integral $\int_0^1 \left(x^2 + e^x\right) \mathrm{d}x$ zu berechnen. Sie weiss auch schon, dass $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ ist, und sie hat irgendwo gelesen, dass $\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e - 1$ ist.

a) Wie könnte sie dieses Vorwissen benutzen, um das eingangs notierte Integral zu berechnen?

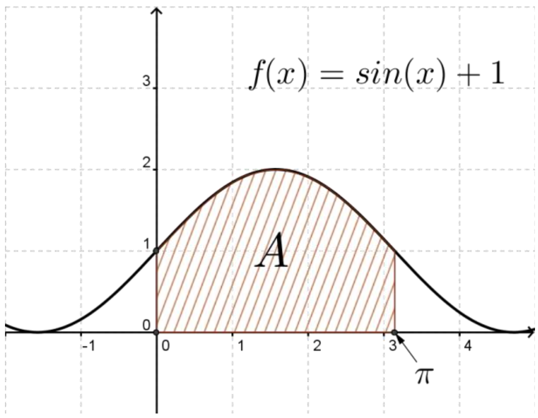
b) Wie könnte man diese Vorgehensweise allgemein (also unabhängig von der Wahl der Funktionen) plausibel machen?

c) Nehmen Sie dieses Beispiel zum Anlass, um eine weitere allgemeine Eigenschaft bestimmter Integrale zu vermuten:

Eigenschaft 3 Wenn die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a,b]$ integrierbar sind, dann trifft wohl Folgendes zu: …

d) Gilt ein analoges Gesetz auf für andere Operationen als die Addition?

4) Daniel beschäftigt sich mit der Funktion $f(x) = \sin(x) + 1$ und denkt über den Inhalt A des schraffierten Gebietes nach.



a) Helfen Sie Daniel zu verstehen, dass ganz sicher $A > 1 \cdot \pi$ ist.

b) Und wie kann er einsehen, dass ganz sicher $A < 2 \cdot \pi$ ist?

c) Gibt es eine Stelle ξ im Intervall $[a,b]$, so dass $A = f(\xi) \cdot \underbrace{(b-a)}_{=\pi}$ ist? Warum? Woran genau liegt das? Können Sie diese Stelle ungefähr lokalisieren?

d) Nehmen Sie dieses Beispiel zum Anlass, um eine weitere allgemeine Eigenschaft bestimmter Integrale zu vermuten:

Eigenschaft 4