

Selber erklären...

- 1.) Die folgende Definition der Integralfunktion enthält einige Lücken. Können Sie diese Lücken füllen, ohne im Lesetext nachzuschauen?

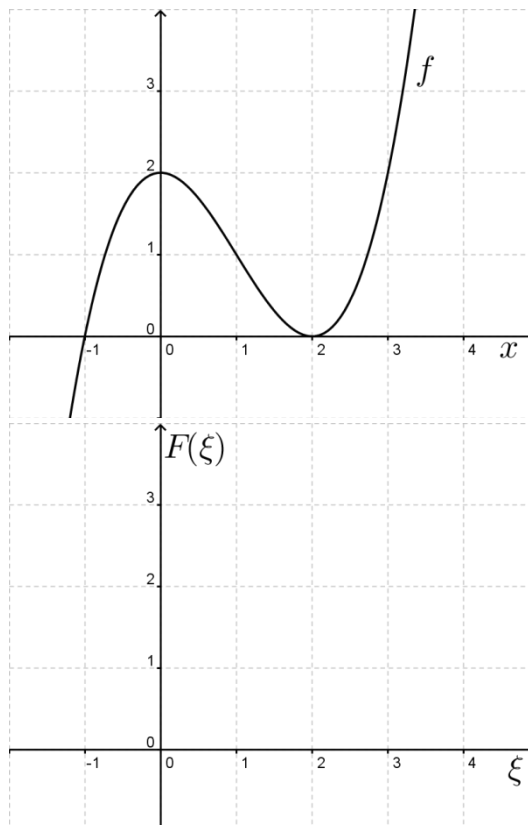
Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  Funktion, die auf einem Intervall  $I$  definiert ist.  
 Sei  $a$   eine fest gewählte Untergrenze, und sei  eine variable Obergrenze.

Die Funktion  $F$ , die jedem solchen  $\xi$  das bestimmte Integral

$$F(\xi) := \text{$$

zuordnet, heisst **Integralfunktion von  $f$**

- 2.) Im ersten Koordinatensystem sehen Sie einen Ausschnitt des Graphen einer stetigen Funktion. Versuchen Sie bitte, im zweiten Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Integralfunktion  $F(\xi)$  mit Untergrenze  $a = 0$  zu skizzieren.



3.) Erklären Sie einem fiktiven Laien, was man unter einer Integralfunktion versteht, indem Sie mit dem folgenden Beispiel arbeiten und die einzelnen (hier nur angedeuteten) Erklärungsschritte vervollständigen:

- Sei  $f(x) = \frac{1}{2}x$  mit  $a = 0$ .
- Die Integralfunktion ordnet ...
  
- Bei diesem Beispiel ist  $F(\xi) = \dots$
  
- Das lässt sich geometrisch mit Hilfe der folgenden Skizze verdeutlichen:
  
  
  
  
- Leitet man nun die Integralfunktion nach der Variablen  $\xi$  ab, so erhält man  $\frac{dF}{d\xi} = \dots$  und dies ist gerade gleich ...
- Das ist wenig überraschend, weil ...

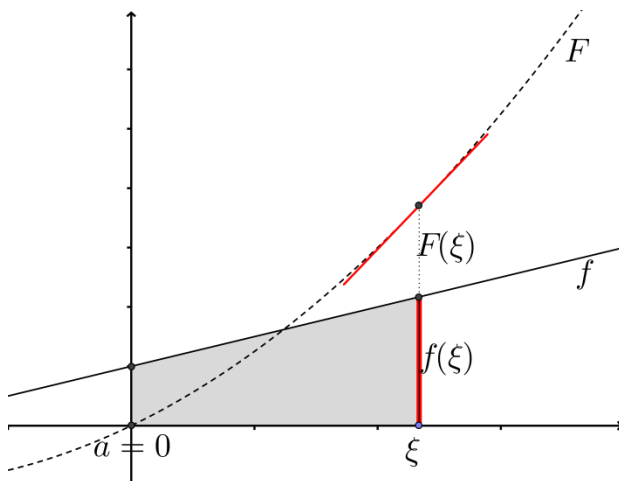
4.) Bitte erklären Sie in einem Satz, was man unter einer *Stammfunktion* einer gegebenen Funktion  $f$  versteht.

5.) Hier sehen Sie eine Menge von Funktionen. Welche dieser Funktionen ist Stammfunktion von welcher anderen Funktion?

$f(x) = \frac{1}{2}x$	$g(x) = \sin(x)$	
$b(x) = 0$		$i(x) = e^x$
	$j(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$	
$k(x) = 5$		$l(x) = \cos(x)$
	$m(x) = 2\sqrt{x}$	$n(x) = \frac{1}{2}$
$o(x) = 5x$		$p(x) = -\cos(x) + 1$
	$q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	

- 6.) Versuchen Sie, möglichst ohne die Vorlage zu konsultieren, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in seiner ersten Fassung anzugeben und zwar
- indem Sie seine Kernaussage in präzise Worte fassen,
  - indem Sie ihn formal notieren.

- 7.) Hier sehen Sie erneut eine Abbildung, die wir herangezogen haben, um die Hauptsatz (in seiner ersten Fassung) plausibel und nachvollziehbar zu machen. Bitte versuchen Sie, die im Unterricht gegebene Erklärung anhand dieser Abbildung zu rekonstruieren. Sie müssten also verständlich machen können, dass der in 6b) notierte Satz tatsächlich gilt.



- 8.) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in seiner ersten Fassung besagt ja, dass die Ableitung der Integralfunktion  $F(\xi) := \int_a^\xi f(x) dx$  gerade die Ausgangsfunktion, ausgewertet an der Stelle  $\xi$ , ergibt. Um das beweisen zu können, muss man also die Ableitung von  $F(\xi)$  nach  $\xi$  berechnen.

Wie genau lautet der Differentialquotient von  $F(\xi)$ ? Welchen Term muss man also genau untersuchen, wenn man den Hauptsatz beweisen will?

- 9.) Versuchen Sie bitte, die einzelnen Schritte des Beweises des Hauptsatzes zu rekonstruieren. Zur Unterstützung sind diese Schritte hier angedeutet, aber nicht vollständig ausgeführt:

Gemäss Definition der Ableitung ist  $\frac{dF}{d\xi} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \left( \frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi} \right)$ . Wir untersuchen diesen Term schrittweise:

- (1) Zuerst nur der Zähler des Bruches:  $F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)$

Durch welches Integral lässt sich dieser Term ausdrücken? Was ist seine Bedeutung?

- (2) Welche Aussage über das Integral aus (1) erlaubt uns der Mittelwertsatz der Integralrechnung?

- (3) Was folgt aus (2) über den Term  $\frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi}$ ?

- (4) Welche Erkenntnis stellt sich ein, wenn man bei der Gleichung aus (3) beidseitig den Grenzwert für  $\Delta\xi \rightarrow 0$  anwendet?

- 10.) Der Hauptsatz in seiner zweiten Fassung zeigt uns sehr genau, wie wir bestimmte Integrale berechnen können. Wie genau lautet der Hauptsatz in dieser zweiten Fassung? Und wie leitet man ihn aus der ersten Fassung her?

11.) Zeigen Sie für jedes der folgenden Beispiele, wie das Integral mit Hilfe des Hauptsatzes in seiner zweiten Fassung berechnet werden kann:

a)  $\int_0^5 x^3 - 25x \, dx =$

b)  $\int_1^8 \frac{3}{x^2} \, dx =$

c)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^x \, dx =$

d)  $\int_0^{\pi/2} \cos(x) + 1 \, dx =$

e)  $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \, dx =$

12.) Hier sehen Sie eine Zeile aus Hugos Arbeitsheft:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^1 = \left( -\frac{1}{1} \right) - \left( -\frac{1}{-1} \right) = -1 - 1 = \underline{\underline{-2}}$$

Hugo wundert sich sehr über dieses Resultat, denn er weiss, dass der Graph der Funktion  $\frac{1}{x^2}$  überall oberhalb der x-Achse verläuft. Es sollte also eigentlich nicht möglich sein, dass das untersuchte Integral einen negativen Wert liefert.

Können Sie den Fehler entdecken und Hugo für spätere Integrationen einen ganz wichtigen Rat mit auf den Weg geben?