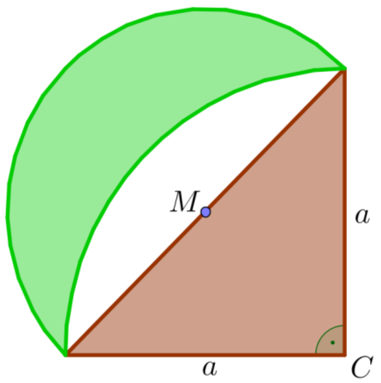
Möndchen-Mathematik

Es ist eine beachtliche Leistung einiger antiker Mathematiker, die Frage nach dem Flächeninhalt krummlinig begrenzter Figuren gestellt und teilweise auch beantwortet zu haben. Während der Flächeninhalt eines Rechtecks, Dreiecks, Parallelogramms, Trapezes und so weiter eher einfach bestimmt werden kann, war es ein grosser Schritt hin zu den Figuren mit krummliniger Berandung.

Der vielleicht erste Mensch, der sich mit der Inhaltsbestimmung bei solchen Figuren beschäftigt hat, war der griechische Mathematiker Hippokrates von Chios (um 450 v. Chr.). Er hat zum Beispiel Folgendes zeigen können:



Errichtet man ein „Möndchen“ (grün) über der Hypotenuse eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecks wie in der Abbildung, dann lässt sich der Flächeninhalt des Möndchens einfach berechnen: Er entspricht nämlich gerade dem Flächeninhalt des Dreiecks. Das Möndchen entsteht dadurch, dass man einen Viertelkreis mit Mittelpunkt C und Radius a zeichnet und dann einen Halbkreis mit Mittelpunkt M (Mitte der Hypotenuse) und der halben Hypotenuse als Radius ergänzt.

Warum ist das so?

Die halbe Hypotenuse hat die Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Daher ist der Flächeninhalt des Möndchens gleich

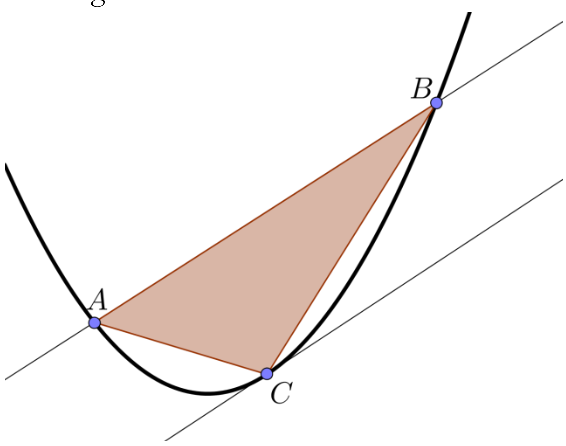
$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\pi\cdot\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\left[\tfrac{1}{4}\pi\cdot a^2-\tfrac{1}{2}a^2\right]\\
&=\tfrac{1}{4}\pi\cdot a^2-\tfrac{1}{4}\pi\cdot a^2+\tfrac{1}{2}a^2\\
&=\underline{\underline{\tfrac{1}{2}a^2}}
\end{aligned}$$

Also trifft die Behauptung zu.

Kurze Zeit später machte die Inhaltsbestimmung bei krummlinig berandeten Flächen enorme Fortschritte, als die **Exhaustions-Methode** erfunden wurde.

Archimedes und die Exhaustion

Die Exhaustion ist geprägt von der ebenso raffinierten wie überzeugenden Idee, Flächeninhalte oder Volumina krummlinig begrenzter Figuren oder Körper durch einfache Figuren *auszuschöpfen*. Die Methode ist eine frühe Vorläuferin der modernen Integralrechnung. Archimedes benutzte sie, um mittels eines 96-Ecks den Inhalt eines Kreises in guter Näherung zu bestimmen, aber eben auch, um den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes zu berechnen:

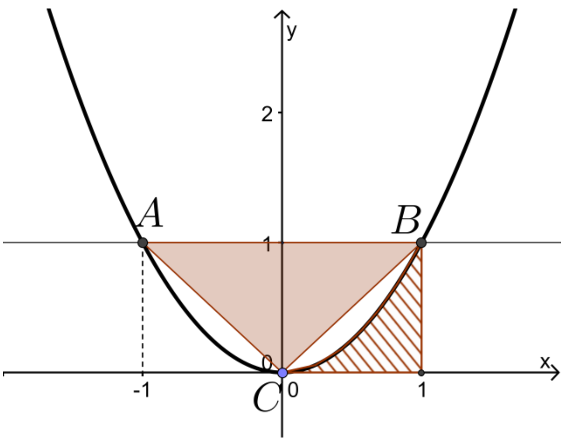


Er konnte nämlich Folgendes nachweisen: Wählt man auf einer Parabel zwei Punkte A

und B, so schneidet die Sehne AB ein Segment von der Parabel ab. Der Flächeninhalt dieses Segmentes ist dann exakt $\frac{4}{3}$ mal so gross wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, wenn C derjenige Punkt auf der Parabel ist, in welchem die Tangente parallel zur Sehne AB verläuft.

Da die Strecken AC und CB auch wieder Sehnen sind, die je ein Parabelsegment wegschneiden, kann man diese Idee fortgesetzt auf die kleineren Segmente anwenden und so fort.

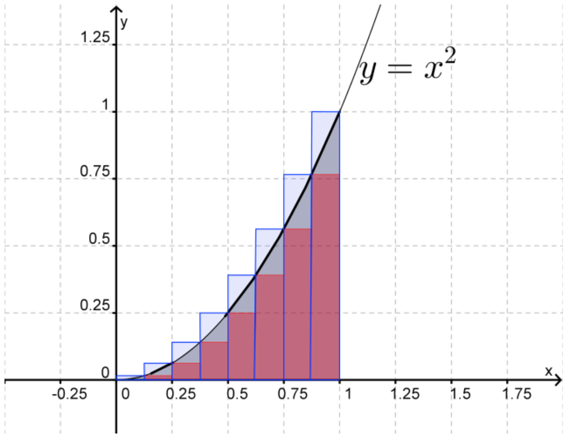
Wendet man Archimedes' Erkenntnis speziell auf die Normalparabel und die beiden Punkte $A(-1, 1)$ und $B(1, 1)$ an, so erhält man dies:



Das Dreieck ABC hat natürlich den Flächeninhalt 1, das Parabelsegment somit den Flächeninhalt $\frac{4}{3}$. Daher ist der Inhalt des schraffierten Gebietes exakt $\frac{1}{3}$. Dies haben wir ja bereits im Arbeitsblatt 1.3 in guter Näherung erhalten, freilich auf ganz anderem Weg.

Mit Rechtecken ausschöpfen

So toll und bewundernswert Archimedes' Idee auch ist, so wenig ist sie doch übertragbar auf andere Kurven. Sie geht eben davon aus, dass es sich um den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ handelt. Würde man den Graphen einer ganz anderen Funktion (mit einer ähnlichen Fragestellung) betrachten, würde die Idee sofort versagen. Es lohnt sich daher, eine Methode zu studieren, die möglichst allgemein anwendbar ist. Das Ausschöpfen mit Rechtecken, wie wir es in den Arbeitsblättern getan haben, ist eine solche Methode:



Wir unterteilen das Intervall [0, 1] in n Teilintervalle gleicher Breite, indem wir Unterteilungspunkte an den Stellen

$$x_i = i \cdot \tfrac{1}{n} \quad (\forall i = 0, 1, ..., n)$$

setzen. Insbesondere ist natürlich $x_0 = 0$ und $x_n = 1$. Zudem sei $\Delta x := x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$. Für die Untersumme U_n (rote Rechtecke) müssen wir jeweils den kleinsten Funktionswert innerhalb des Intervalls, also den Funktionswert am linken Rand, wählen:

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \cdot \tfrac{1}{n}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{n}$$
$$= \tfrac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

Für die Obersumme (blaue Rechtecke) müssen wir jeweils den grössten Funktionswert innerhalb des Intervalls, also den Funktionswert am rechten Rand, wählen:

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(i \cdot \tfrac{1}{n}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{n}$$
$$= \tfrac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$$

In beiden Fällen entsteht eine Summe von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen. Für eine solche Summe gibt es eine hilfreiche Formel, beweisbar etwa mit vollständiger Induktion:

Hilfsformel:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Dank dieser Formel können wir nun die Unter- und die Obersumme effizienter darstellen:

$$U_n = \tfrac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3}$$
$$= \tfrac{1}{6} \cdot \frac{(n-1) \cdot (2n-1)}{n \cdot n}$$
$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{6} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \tfrac{1}{n}\right)}}$$

und

$$O_n = \tfrac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$$
$$= \tfrac{1}{6} \cdot \frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{n \cdot n}$$
$$= \underline{\underline{\tfrac{1}{6} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \tfrac{1}{n}\right)}}$$

Für $n = 8$ kleine Teilintervalle erhalten wir somit die folgenden Näherungswerte für den gesuchten Flächeninhalt:

$$U_8 = \tfrac{1}{6} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{8}\right) \cdot \left(2 - \tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{35}{128} = 0.273...$$
$$O_8 = \tfrac{1}{6} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{8}\right) \cdot \left(2 + \tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{51}{128} = 0.398...$$

Bezeichnen wir den gesuchten Flächeninhalt mit I, so wissen wir dank dieser Abschätzung, dass

$$\boxed{0.273... \le I \le 0.398...}$$

ist. Das ist natürlich viel zu ungenau. Probieren wir es also mit $n = 20$ Teilintervallen

$$U_{20} = \tfrac{1}{6} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{20}\right) \cdot \left(2 - \tfrac{1}{20}\right) = \tfrac{247}{800} = 0.308...$$
$$O_{20} = \tfrac{1}{6} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{20}\right) \cdot \left(2 + \tfrac{1}{20}\right) = \tfrac{287}{800} = 0.358...$$

Damit erfahren wir immerhin, dass

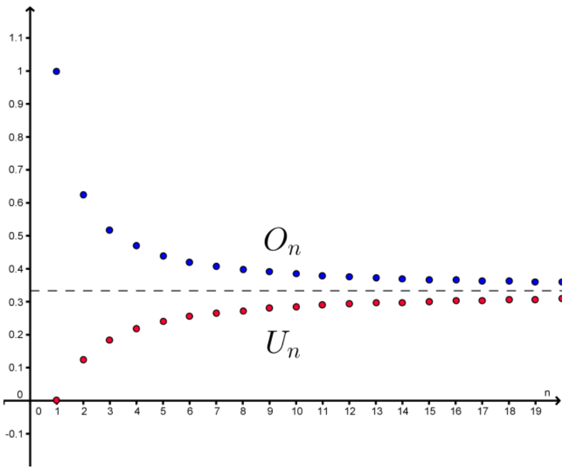
$$\boxed{0.308... \le I \le 0.358...}$$

Mit $n = 100$ Teilintervallen erhalten wir schon eine recht genaue Abschätzung des gesuchten Flächeninhaltes, nämlich:

$$\boxed{0.328... \le I \le 0.338...}$$

Insgesamt können wir also sagen, dass das Ausschöpfen mit immer mehr und immer dünneren Rechtecken uns eine immer genauere Vorstellung vom tatsächlichen Flächeninhalt liefert.

Nun können wir aus obigen Überlegungen eine aufschlussreiche Schlussfolgerung ziehen: Aus den Termen für die Unter- und die Obersumme wird klar, dass $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende und dass $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge ist, und dass beide Folgen denselben Grenzwert, nämlich $\tfrac{1}{3}$, haben. Die folgende Abbildung zeigt das sehr deutlich:



Es würde also genügen, allein mit den roten Rechtecken, der Untersumme, zu arbeiten. Mit wachsender Anzahl nähert sich die Summe ihrer Flächeninhalte dem gesuchten Flächeninhalt I im Sinne eines Grenzwertes. Und genauso würde es genügen, nur mit den blauen Rechtecken, der Obersumme, zu arbeiten.

Eine einfache Grenzwertberechnung führt zudem auf

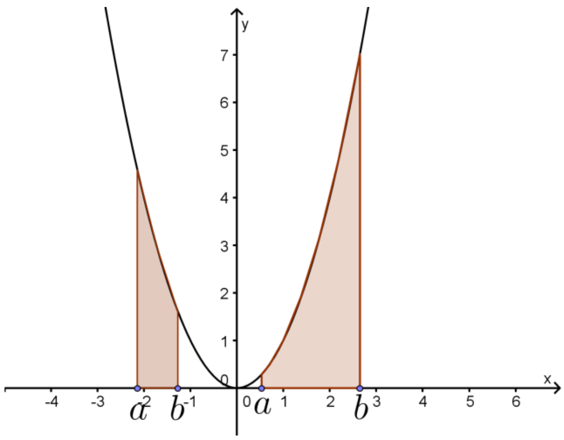
$$\lim_{n\to\infty}\left(U_n\right)=\tfrac{1}{3}=\lim_{n\to\infty}\left(O_n\right),$$

also gerade auf die Zahl, die Archimedes damals auch gefunden hatte, wenn auch mit einer anderen Methode.

Die Idee verallgemeinern

Während Archimedes‘ Weg sich nicht ohne weiteres auf andere Kurven übertragen lässt, haben wir die Hoffnung, dass die soeben erläuterte Idee mit den Rechtecken noch immer zum Ziel führt, wenn wir nicht die Normalparabel betrachten, sondern einen anderen Funktionsgraphen. Wir dürfen allerdings nicht unvorsichtig sein; es ist durchaus fraglich, ob sich die Methode einfach auf Graphen beliebiger Funktionen übertragen lässt. Das muss und wird noch Gegenstand von interessanten Untersuchungen sein. Wir versuchen daher nun, die Idee mit den Rechtecken vorsichtig und schrittweise zu verallgemeinern.

In unserem obigen Beispiel haben wir die Fläche untersucht, die von der Abszisse und der Normalparabel zwischen $x=0$ und $x=1$ begrenzt war. Eine erste Verallgemeinerung könnte darin bestehen, diese Stellen zu variieren. Allgemein sprechen wir dann von der **Untergrenze** $x=a$ und der **Obergrenze** $x=b$. Und natürlich soll im Allgemeinen $a\le b$ gelten.



Es ist klar, dass wir Inhalte von Flächen, die oben durch einen Funktionsgraphen krummlinig begrenzt sind, auch dann mit derselben Methode approximieren können, wenn die Untergrenze nicht 0 und die Obergrenze nicht 1 ist.

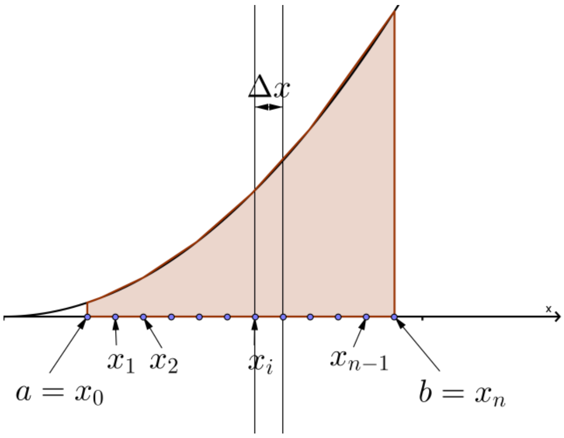
Im Allgemeinen wollen wir also ein Intervall $[a,\ b]$ betrachten, welches Teilmenge des Definitionsbereichs einer Funktion f ist. Dieses Intervall unterteilen wir in n gleich grosse Teilintervalle, indem wir die Unterteilungsstellen

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

wählen, die äquidistant sind, für die also

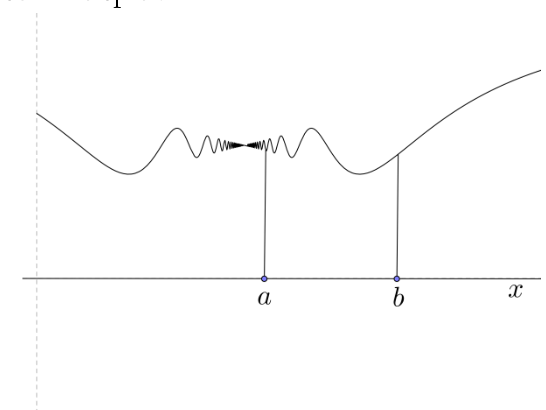
$$\Delta x := x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} = \text{konst.}$$

gilt für alle $i = 0, 1, ..., n-1$.



(Wir werden später sehen, dass man das Intervall oft auch durch *nicht*-äquidistante Punkte unterteilt, so dass die einzelnen Teilintervalle also nicht alle dieselbe Breite haben. Das wäre eine weitere Verallgemeinerung unserer Methode, mit der wir uns aber an dieser Stelle nicht belasten wollen.)

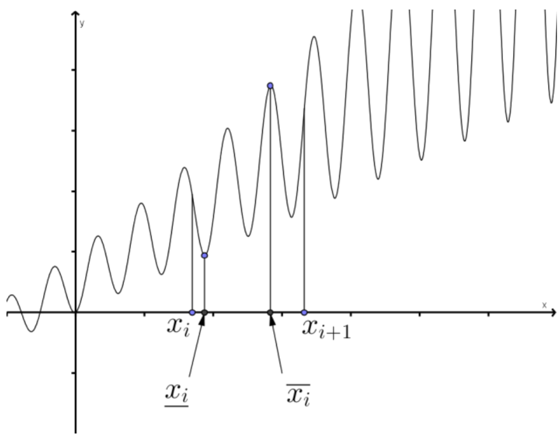
Nun folgt ein weiterer wichtiger Verallgemeinerungsschritt: In den bisherigen Beispielen waren die untersuchten Kurven im betrachteten Intervall entweder streng monoton fallend (Viertelkreis) oder streng monoton wachsend (Parabel); in jedem Fall haben wir den kleinsten und den grössten Funktionswert pro Intervall am Rand gefunden. Aber natürlich könnte sich die Kurve auch ganz anders verhalten wie etwa in diesem Beispiel:



Wir dürfen im Allgemeinen also nicht davon ausgehen, dass der kleinste respektive grösste Funktionswert innerhalb eines Teilintervalls Δx automatisch am Rand erscheint. Daher führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

Es sei $\underline{x_i}$ diejenige Stelle im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, an welcher die Funktion den kleinesten Funktionswert innerhalb dieses Intervalls annimmt. Und es sei entsprechend $\overline{x_i}$ diejenige Stelle im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, an welcher die Funktion den grössten Funktionswert innerhalb dieses Intervalls annimmt.

Beim Viertelkreis-Beispiel war $\underline{x_i} = x_{i+1}$ und $\overline{x_i} = x_i$, beim Parabel-Beispiel war es gerade umgekehrt. Im Allgemeinen können wir natürlich nicht so einfach sagen, wo sich diese beiden Stellen genau befinden. Die folgende Abbildung, bei der wir ein einzelnes Teilintervall Δx einer komplizierten Funktion hervorgehoben haben, illustriert diesen Sachverhalt gut: Diese Stellen können *irgendwo* innerhalb des Intervalls sein.



Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die Funktion „brav genug“ ist, dass es also in jedem Teilintervall Δx solche Stellen $\underline{x_i}$ und $\overline{x_i}$ gibt.

Dann sind die folgenden Terme wohldefiniert:

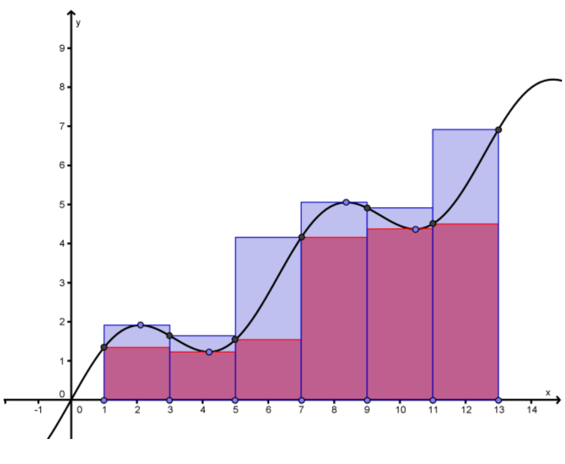
$$U_n := \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\underline{x_i}\right)\cdot \Delta x \quad \textbf{Untersumme}$$

$$O_n := \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\overline{x_i}\right)\cdot \Delta x \quad \textbf{Obersumme}$$

Falls der Graph der Funktion *f* im Intervall $\left[a,b\right]$ oberhalb der x-Achse verläuft, ist U_n auf alle Fälle ein Wert, der kleiner oder höchstens gleich gross ist wie der Inhalt *I* der zwischen Graph und x-Achse eingeschlossenen Fläche. Und O_n ist ein Wert, der auf alle Fälle grösser oder mindestens so gross ist wie *I*. Es ist also

$$U_n \le I \le O_n \quad \forall n\,.$$

Die folgende Abbildung zeigt diese Situation beispielhaft für $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x+\sin(x)$ sowie $a=x_0=1$, $b=x_n=13$ und $n=6$. Es wird ganz deutlich, dass $\underline{x_i}$ beziehungsweise $\overline{x_i}$ nicht unbedingt am Rand des jeweiligen Teilintervalls sein muss:



Im Allgemeinen (aber nicht generell!) ist $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und $\left(O_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Funktion, so dass der gesuchte Flächeninhalt *I* also von oben durch die Obersumme und von unten durch die Untersumme mit wachsendem *n* immer genauer approximiert wird. Und „am Ende" dieses Grenzwertprozesses ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\underline{x_i}\right)\cdot \Delta x}_{U_n}\right) = I = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\overline{x_i}\right)\cdot \Delta x}_{O_n}\right)$$

Wir können also sagen, dass die zu Beginn dieser Sequenz formulierte Problemstellung für viele Fälle gelöst ist: Entsteht eine krummlinig berandete Figur dadurch, dass man die Fläche bildet, welche der Graph einer positiven Funktion zusammen mit der x-Achse zwischen zwei Stellen *a* und *b* einschliesst, so kann man mit der soeben entwickelten Methode den Flächeninhalt beliebig genau approximieren – vorausgesetzt, die Funktion ist „brav genug". Darüber müssen wir später unbedingt mehr sagen.