Anwendungen in der Physik

Wir haben mehrfach erwähnt, dass es nicht das primäre Ziel der Integralrechnung ist, Inhalte von krummlinig begrenzten Flächen zu bestimmen. Vielmehr ist es so, dass solche Flächeninhalte ganz konkrete, oft naturwissenschaftlich relevante Bedeutungen haben. In diesem Lesetext wollen wir diesen Aspekt in den Vordergrund stellen, indem wir drei besonders schöne physikalische Beispiele untersuchen.

Wann landet David Scotts Hammer am Boden?

Am 31. Juli 1971 betrat David Randolph Scott als siebter Mensch den Mond, nachdem er kurz zuvor als Mitglied der Apollo-15-Crew dort gelandet war. Als er einmal mit einem Hammer in einer Höhe von 1.2 m über Boden arbeitete, liess es den Hammer aus Versehen fallen und dieser fiel mit einer Beschleunigung von 1.62 $\mathrm{m/s^2}$ dem Boden zu. Nach wie vielen Sekunden erreichte der Hammer den Boden?

Nennen wir die Beschleunigungsfunktion $a(t)$. Hier ist $a(t)=a=1.62$. Wir wissen, dass

$$\int_{t_0}^{t_1} a \; \mathrm{d}t = v(t_1)-v(t_0)$$

ist. Ist $t_0=0$ und $v(0)=0$, was wir hier annehmen wollen, und ersetzen wir t_1 durch einen beliebigen Zeitpunkt *t*, so erhalten wir wenig überraschend:

$$v(t)=a\cdot t$$

Nun wissen wir weiter, dass

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) \; \mathrm{d}t = s(t_1)-s(t_0)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} a\cdot t \; \mathrm{d}t = s(t_1)-s(t_0)$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}a\cdot t_1^2-\tfrac{1}{2}a\cdot t_0^2 = s(t_1)-s(t_0)$$

Wir wählen weiterhin $t_0=0$ und denken uns die Positionsachse lotrecht zur Mondoberfläche und so, dass $s(0)=0$ ist, dann folgt:

$$s(t)=\tfrac{1}{2}a\cdot t^2$$

Wir sehen einmal mehr, dass man durch zweifaches Integrieren von der Beschleunigung zur Position gelangt, was in der Physik überaus wertvoll ist.

Da nun der Hammer aus einer Höhe von 1.2 m fiel, können wir leicht nach der gesuchten Zeit auflösen:

$$1.2=\tfrac{1}{2}a\cdot t^2$$

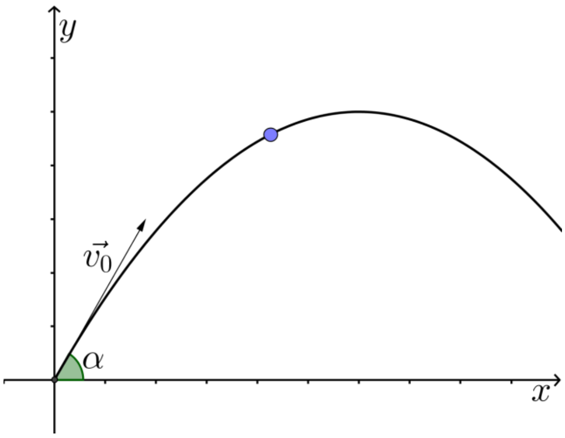
$$\Rightarrow 1.2=\tfrac{1}{2}\cdot 1.62\cdot t^2$$

$$\Rightarrow t=1.22$$

David Scotts Hammer erreichte also nach 1.22 Sekunden den Boden.

Unter welchem Winkel fliegt das Handy am weitesten?

Eine der verrücktesten Weltmeisterschaften ist wohl die jährlich in Finnland stattfindende *Mobile Phone Throwing World Championship*. Angenommen, ein Teilnehmer vermag dem Handy eine Startgeschwindigkeit von $\overrightarrow{v_0}$ zu erteilen; in welchem Winkel muss er das Gerät dann wegschleudern, damit es möglichst weit fliegt? (Der bisherige Rekord liegt bei 85 m.)



Nun, zum Zeitpunkt t ist das Handy in x-Richtung der Kraft $F_x = 0$ und in y-Richtung der Kraft $F_y = -m \cdot g$ ausgesetzt. Dabei verzichten wir bewusst auf die Luftreibung, um die Rechnungen einfach zu halten. Unter Verwendung der Newtonschen Axiome erhalten wir somit:

$$\left| \begin{array}{c} m \cdot x''(t) = 0 \\ m \cdot y''(t) = -m \cdot g \end{array} \right|$$

Und nach Division durch m:

$$\left| \begin{array}{c} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{array} \right|$$

Ein erster Integrationsprozess berechnet daraus die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\left| \begin{array}{c} x'(t) = const. = v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ y'(t) = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right|$$

Ein zweiter Integrationsprozess macht daraus die Positionskomponenten:

$$\left| \begin{array}{c} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0 \end{array} \right|$$

Zur Vereinfachung nehmen wir noch an, dass $x_0 = y_0 = 0$ ist und erhalten.

$$\left| \begin{array}{c} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{array} \right|$$

Nun, da wir die komponentenweise Bewegung des Handys kennen, können wir uns fragen, wie weit – gemessen auf der x-Achse – es fliegen wird. Beim Aufschlag auf dem Boden ist $y = 0$. Wir setzen also die y-Komponente mit 0 gleich und lösen nach t auf:

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t = 0 \\ \Leftrightarrow t \cdot \left(-\frac{1}{2} g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha) \right) = 0 \end{array}$$

Die Lösung $t = 0$ interessiert uns nicht, und der Klammerausdruck wird 0 für

$$t = \frac{2v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$$

Nun kennen wir den Zeitpunkt, zu dem das Handy auf dem Boden landet. Indem wir diesen Zeitpunkt in die x-Komponenten einsetzen, finden wir schliesslich die Flugweite:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g} \\ &= \frac{2v_0^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) =: f(\alpha) \end{aligned}$$

Diese nun vom Winkel abhängige Flugweite können wir maximieren, indem wir die Funktion ableiten und die Ableitung 0 setzen. Tun wir das, so finden wir:

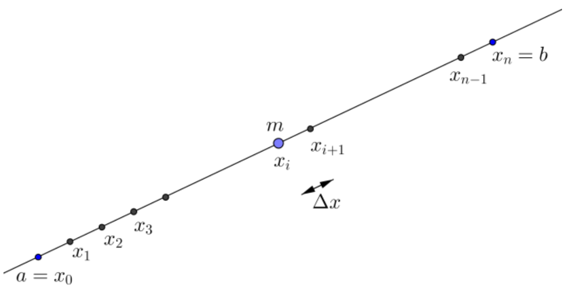
$$\frac{df}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = 45^0$$

Die Flugweite ist also maximal, wenn man das Handy unter einem Winkel von 45° wegschleudert. Zu diesem Ergebnis gelangte bereits Nicolò Tartaglia (1500-1557), allerdings im Zusammenhang mit Kanonenkugeln anstelle der Handys. Mit seinem 1537 veröffentlichten Buch *Nova Scientia* begründete er die moderne Wissenschaft der Ballistik.

Welche Arbeit ist nötig, um einen Satelliten aus dem Schwerefeld der Erde zu bringen?

Hierzu ist etwas mehr Arbeit nötig. Zunächst fragen wir uns, wie wir physikalische Arbeit durch eine Formel erfassen können.

Stellen wir uns vor, wir sollen eine Masse m entlang eines geraden Pfades von einer Stelle a zu einer Stelle b verschieben. An jeder Position x entlang dieses Weges müssen wir gegen eine dort herrschende Kraft $F(x)$ „ankämpfen". Welche Arbeit leisten wir dabei?

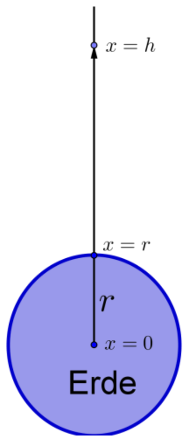


Wir unterteilen $[a,b]$ in n Teilintervalle der Länge Δx unter Verwendung von Unterteilungsstellen $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ .Um das Objekt von der Stelle x_i zur Stelle x_{i+1} zu bewegen, ist ungefähr die Arbeit $F(x_i)\cdot\Delta x$ nötig – nur ungefähr, weil wir dazu annehmen müssen, dass die Kraft innerhalb des Teilintervalls konstant ist, was ja meistens nicht der Fall ist.

Die gesamte (exakte) Arbeit, um das Objekt von a nach b zu verschieben, ist daher

$$A = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)\cdot\Delta x\right) = \int_a^b F(x)\ \mathrm{d}x$$

Soweit so gut. Jetzt versuchen wir, diese Erkenntnis auf das Satellitenproblem zu übertragen.



Wir legen die x-Achse so wie in de Abbildung. Dann geht es nun darum, eine Masse m zu der Stelle h zu befördern und dann $h \to \infty$ streben zu lassen. Dabei müssen wir an jeder Stelle x Arbeit leisten gegen die Gravitationskraft, welche den Betrag

$$F(x) = G\cdot\frac{m\cdot M}{x^2}$$

hat, wenn M die Erdmasse und G die Gravitationskonstante bezeichnen.
$M = 5.972...\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $G = 6.674...\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$

Gemäss der vorher erarbeiteten Integralformel müssen wir also ein uneigentliches Integral berechnen, nämlich dieses:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_r^\infty F(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\int_r^b \mathrm{G}\cdot\frac{m\cdot M}{x^2}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= G\cdot m\cdot M\cdot\lim_{b\to\infty}\left(\int_r^b x^{-2}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= G\cdot m\cdot M\cdot\lim_{b\to\infty}\left(-x^{-1}\Big|_r^b\right) \\
&= G\cdot m\cdot M\cdot\lim_{b\to\infty}\left(-\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{r}\right) \\
&= \frac{G\cdot m\cdot M}{r}
\end{aligned}
$$

Es ist geschafft. Dies ist also die Arbeit, welche nötig ist, um den Satelliten der Masse m aus dem Schwerefeld der Erde zu befördern. Nehmen wir beispielsweise einen Satelliten der Masse 1000 kg, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{6.674\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\cdot 1000\ \mathrm{kg}\cdot 5.972\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6.371\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}} \\
&= 6.26\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

Auf welche Geschwindigkeit müssen wir den Satelliten bringen, damit er das Gravitationsfeld der Erde verlassen kann? Diese Geschwindigkeit wird **Fluchtgeschwindigkeit** v_F genannt; es ist die Geschwindigkeit, die gerade nötig ist für eine nicht zurückkehrende Flugbahn.

Um diese Geschwindigkeit zu bestimmen, müssen wir uns nur vor Augen führen, dass die Arbeit, die wir in den Satelliten stecken, als kinetische Energie gespeichert wird. Es ist also

$$
\frac{G\cdot m\cdot M}{r} = \tfrac{1}{2}\,m\cdot v_F^2
$$

Daraus finden wir sofort:

$$
\boxed{v_F = \sqrt{\frac{2G\cdot M}{r}}}
$$

Für die Erde ergäbe das eine Geschwindigkeit von $11.2\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, für die Sonne eine Geschwindigkeit von $617.3\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.