Was könnte 3^0, was könnte 3^{-5} sein?

Bisher haben wir intensiv über Potenzen mit natürlichen Exponenten ≥ 1 nachgedacht. Der Ausdruck a^n ist einfach nur eine Abkürzung und kann bei Bedarf wieder ausgeschrieben werden als $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$, also als eine Produktbildung, an der n Faktoren a beteiligt sind.

Oder, wie es der grosse Leonhard Euler in seiner „Vollständigen Anleitung zur Algebra" (Seite 64) aus dem Jahr 1770 ausdrückte:

> Nach dieser Art deutet also a^2, oder a elivirt zu 2, die zweyte Potestät von a an, und pflegt bisweilen auch aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schrei– ben, und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potestät aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Ebenso drückt a^4 die vierte Potestät, a^5 die fünfte, a^6 die sechste Potestät von a aus.

Offenbar ist damit aber ein Term wie 3^0 oder 3^{-5} nicht erklärt; wir können ja nicht sagen, er sei einfach eine Abkürzung für die Produktbildung, bei der 0 respektive –5 Faktoren 3 beteiligt sind. Es wäre ganz unklar, was damit genau gemeint sein könnte. Wenn wir einen Term wie 3^0 oder 3^{-5} benutzen wollen, dann müssen wir ihm also zuerst einen Sinn *geben*. Wir müssen definieren, was wir unter einem solchen Term verstehen wollen. Wie also sollen wir a^0 (für irgendeine reelle Zahl) definieren? Und wie sollen wir a^{-n} (für ein $n \in \mathbb{N}$) definieren?

Notieren Sie die aus Ihrer Sicht naheliegenden Definitionen:

<u>Definitions-Versuch:</u> Für irgendeine reelle Zahl sei $a^0 :=$.

<u>Definitions-Versuch:</u> Für irgendeine natürliche Zahl n sei $a^{-n} :=$

Begründen Sie Ihre Wahl:

Schauen wir einmal, wie Euler das in seinem oben erwähnten Buch ausführt: Er notiert zuerst die folgende Reihe von Potenzen (oder „Potestäten", wie er sich ausdrückt):

$$a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, \ldots$$

und schreibt dann (Seite 65):

Wie in dieser Reihe von Potestäten ein jedes Glied gefunden wird, wenn man das vorhergehende mit a multipliciert, wodurch der Exponent um eins grösser wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wenn man jenes durch a dividiert, als wodurch der Exponent um eins vermindert wird. Hieraus sehen wir, dass das dem ersten Glied a^1 vorhergehende $\frac{a}{a}$ seyn müsse, das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe seyn a^0, als woraus diese merckwürdige Eigenschaft folgt, dass a^0 allezeit 1 seyn müsse (…)

Wir können diese Reihe von Potestäten noch weiter rückwärts fortsetzen…

Was denken Sie, was genau meint Euler mit „rückwärts fortsetzen"? Was würde daraus für eine Antwort auf unsere eingangs gestellten Fragen entstehen? (Bitte blättern Sie nicht um, bevor Sie dazu einen detaillierten Eintrag geschrieben haben.)

Euler stellt seine Überlegung auf Seite 66 durch die folgende Tabelle dar:

$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a	aa	aaa
$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$				
a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1	a^2	a^3

Bitte erläutern Sie die Bedeutung dieser Tabelle in wenigen Sätzen oder Stichworten:

Wir schlagen hier noch einen leicht anderen Weg ein, um diese neuen Potenzen gut verstehen zu können:

Grundsätzlich kann man ja definieren, was man will, aber natürlich sollte die Definition die erwünschte Wirkung haben; und sie sollte das früher Erarbeitete in einer konsistenten Weise ausbauen und fortsetzen. Wir haben (unter anderem) schon gewisse Potenzgesetze erarbeitet, zum Beispiel das Gesetz $\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ worin $n > m$ gelten muss. Sicherlich wäre es wünschenswert, wenn dieses Gesetz auch ohne die lästige Einschränkung „$n > m$" funktionieren würde, insbesondere dann, wenn $m = n$ ist. Aber genau dann entsteht eine Potenz der Art a^0. Es stellt sich also die Frage, ob die obige Definition tatsächlich die erwünschte Wirkung hat und die Gültigkeit dieses Gesetzes auf eine neue Situation ausweitet oder nicht.

Überprüfen Sie also, ob Ihre obige Definition mit dem Gesetz $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ für den Fall $m = n$ vereinbar ist oder nicht:

Noch schöner wäre, man könnte bei dem erwähnten Potenzgesetz ganz auf Einschränkungen verzichten. Dann müsste es aber auch für den Fall „$n < m$" funktionieren. Es stellt sich also die Frage, ob Ihre Definition auch hierbei die gewünschte Wirkung hat und sogar die Allgemeingültigkeit des Gesetzes ermöglicht.