Selbsterklärungsaufträge zu Normalvektoren:

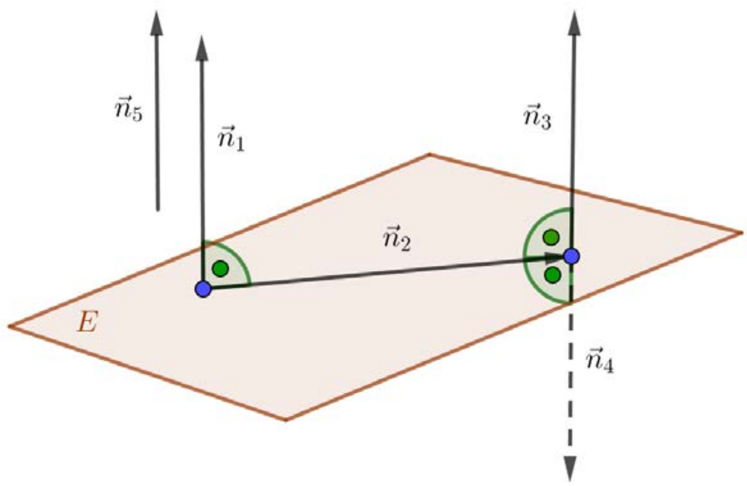
1. Erklären Sie einem fiktiven Laien in eigenen Worten, was ein Normalvektor einer Geraden und einer Ebene ist. Verwenden Sie dazu eigene Beispiele und Skizzen.

2. Wie kann der Normalvektor einer Geraden in der Ebene bzw. einer Ebene im Raum bestimmt werden?

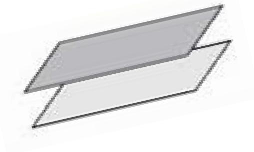
   Begründen Sie zudem den Satz über Normalvektoren. Sie können den Beweis im Lesetext als Hilfsmittel verwenden. Wichtig dabei ist aber, dass Sie den Beweis einem fiktiven Laien in eigenen Worten erklären können und dabei den Steigungsbegriff einer Geraden und das Skalarprodukt an der Koordinatengleich einer Ebene anwenden.

3. Hugo berechnet den Normalvektor einer Ebene $E: 3x - 2y + 4z - 5 = 0$ mit Hilfe des Vektorprodukts und erhält den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$. Dies entspricht so aber gar nicht den Koeffizienten der Koordinatengleichung der Ebene, so wie es die Lehrerin erklärt hat. Hat Hugo einen Fehler gemacht? Oder steht auch Hugos Vektor $\vec{n}$ senkrecht zur Ebene E ? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. In der folgenden Abbildung sind verschiedene Vektoren skizziert. Welche dieser fünf Vektoren sind mögliche Normalvektoren zur Ebene E ? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.



5. Zwei Ebenen E und F liegen parallel im Raum, siehe Abbildung rechts. Welche der folgenden Paare kommen als mögliche Gleichungen für diese beiden Ebenen in Frage? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils genau. Es können mehrere Optionen aus a) - e) richtig sein.



a) $E: 3x - y + 4z - 1 = 0$ und $F: 3x - y + 4z + 7 = 0$.

b) $E: 5x + 2y - 7z + 3 = 0$ und $F: 2x + 5y - 7z + 3 = 0$.

c) $E: -x + 2y - 3z + 10 = 0$ und $F: 2x - 4y + 6z = 0$

d) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $F: 12x + 4y - 20z + 5 = 0$

e) $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $F: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

6. Hugo möchte den Normalvektor der Ebene $E: 3x - 2y + z - 5 = 0$ direkt mit Hilfe des Satzes für Normalvektoren bestimmen und findet damit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Erklären Sie, welcher Fehler Hugo dabei unterlaufen ist.

7. Hugo möchte den Normalvektor der Ebene $E: 3x - 2y - 5 = 0$ direkt mit Hilfe des Satzes für Normalvektoren bestimmen, behauptet dann aber felsenfest, dass es sich bei dieser Gleichung gar nicht um eine Ebene im Raum handeln kann, sondern um eine Gerade im Raum. Hat Hugo Recht? Begründen Sie Ihre Antwort.

8.

a) Skizzieren Sie alle Punkte im Raum mit der Eigenschaft $z = 3$. Auf welchem geometrischen Objekt befinden sich all diese Punkte?

b) Hugo behauptet, dass $z = 3$ eine Ebene im Raum beschreibt und dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Normalvektor dieser Ebene ist. Hat Hugo Recht?
Begründen Sie Ihre Antwort anhand einer geeigneten Skizze und mit Hilfe des Satzes über Normalvektoren.