MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PSYCHOLOGISCHE FORSCHUNG

8000 München 40, Leopoldstrasse 24

Warum werden Kapitänsaufgaben "gelöst"?

Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht

Elsbeth Stern

In: Der Mathematikunterricht, 1992, Jg. 38, Heft 5, 7-29.

Reprint 22/1992

MAX-PLANCK-INSTITUTE FOR PSYCHOLOGICAL RESEARCH

Leopoldstrasse 24, D-8000 Munich 40, F.R.G.

Warum werden Kapitänsaufgaben »gelöst«?

Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht

von Elsbeth Stern

1. Einführung

In der kognitiven Psychologie sowie in der Entwicklungspsychologie ist ein zunehmendes Interesse an mathematischen Problemlöseprozessen und am Erwerb mathematischen Wissens zu verzeichnen. Mathematische Aufgaben eignen sich besonders gut zur Untersuchung von Lern- und Denkprozessen; zum einen, weil ihre Lösung eindeutig ist und weil zum anderen der Stoff – zumindest was die Schulmathematik angeht – trotz seiner Komplexität überschaubar ist. Mögliche Lösungsprozesse mathematischer Aufgaben lassen sich exakt modellieren und mit empirischen Daten vergleichen. Insbesondere im Bereich der frühen Grundschulmathematik sind numerische Kompetenzen wie Zählen, Addieren und Subtrahieren auf hohem Präzisionsniveau erforscht. Diese Ergebnisse sind nicht nur interessant im Hinblick auf ihre Verwertbarkeit im Unterricht, sondern geben ganz allgemein Aufschluß über den Ablauf und die Bedingungen von Lern- und Denkprozessen, auch in anderen Gebieten und in höherem Lebensalter. In der Entwicklungspsychologie setzt sich – als Gegenentwicklung zur Theorie von Jean Piaget – die Auffassung durch, daß sich Kinder in ihrer Informationsverarbeitung von Erwachsenen unterscheiden, weil Kinder über weniger *Wissen* verfügen, und nicht weil ihnen bestimmte universelle Mechanismen der Informationsverarbeitung fehlen. Daß sich Kinder und Erwachsene nicht prinzipiell im Denken unterscheiden, wurde in ganz unterschiedlichen Bereichen belegt ([42]; [50]; [7]). Insbesondere unter Zugrundelegung dieser Prämisse bietet es sich an, allgemeine Fragestellungen zum Erwerb von Wissen, z. B. »Wie werden neue Strategien erworben?« oder »Wie vollziehen sich Verstehensprozesse?«, bei jüngeren Kindern zu untersuchen, da diese auch in wenig komplexen und deshalb für den Forscher verhältnismäßig einfach zu überblickenden Inhaltsbereichen Defizite aufweisen. Damit ermöglichen Arbeiten zur Informationsverarbeitung bei Kindern im allgemeinen präzisere Aussagen als Arbeiten mit älteren Probanden.

In diesem Artikel werden am Beispiel von arithmetischen Textaufgaben Verstehens- und Problemlöseprozesse in der Mathematik aus psychologischer Sicht dargestellt. Zunächst wird erörtert, wie in der kognitiven Psychologie der in der Mathematik so wichtige Vorgang des »Verstehens« erfaßt wird. Anschließend wird dies in einer Darstellung der Forschung zum Verstehen und Lösen einfacher Textaufgaben präzisiert. Hierbei wird insbesondere gezeigt, daß das Verstehen von Textaufgaben kein Alles-oder-Nichts-Prozeß ist, sondern daß über einen längeren Zeitraum zwar das zum Verstehen und Lösen von Aufgaben benötigte Wissen bereits repräsentiert ist, aber nicht zuverlässig verfügbar ist. In einer empirischen Originalarbeit zum Umgang mit sogenannten »Kapitänsaufgaben«, also Aufgaben, die keinen Sinn ergeben, wird gezeigt, daß die Verfügbarkeit des benötigten Wissens auch von sozialpsychologischen Faktoren der Lehr-Lern-Situation abhängt. An dieser Stelle findet eine kritische Auseinandersetzung mit der einflußreichen Arbeit von Radatz [31] zum Umgang mit Kapitänsaufgaben statt. Abschließend wird diskutiert, wie die Sicherheit im Umgang mit dem zum Verstehen und Lösen von Textaufgaben benötigten Wissen gefördert werden kann.

2. Verstehen – Alltagsbegriff und wissenschaftliches Konstrukt

Das Ziel jedes Schulunterrichtes, Wissen so zu vermitteln, daß es auch in neuen Situationen anwendbar ist, ist bekanntermaßen ein schwieriges Unterfangen. So wird immer wieder beklagt, daß beispielsweise im Mathematikunterricht die Schüler zwar Fakten reproduzieren und Prozeduren anwenden können, jedoch erhebliche Defizite aufweisen, wenn die Anwendung des Wissens in einem neuen Kontext verlangt wird, ein Umstand, der alltagssprachlich mit »fehlendem Verständnis« ausgedrückt wird.

Die wissenschaftliche Beschäftigung mit mentalen Prozessen, die im Alltag als »Verstehen« bezeichnet werden, bereitet noch immer große Probleme. Jeder weiß aus der Alltagserfahrung, was »Verstehen« bedeutet, ohne jedoch den Begriff definieren zu können. Andere Wissensformen, wie beispielsweise *Prozeduren* und *Faktenwissen* sind einer wissenschaftlichen Betrachtung sehr viel besser zugänglich, sie sind als *prozedurales* und *deklaratives* Wissen zentraler Bestandteil in Modellen menschlicher Informationsverarbeitung, wie z. B. in ACT* [3]. Veränderungen innerhalb und zwischen diesen Wissensarten lassen sich auf hohem Präzisionsniveau modellieren.

Eine wissenschaftliche Beschäftigung mit dem Erwerb von Fähigkeiten und Fertigkeiten in Gebieten wie beispielsweise der Mathematik ist jedoch ohne die Berücksichtigung von *konzeptuellem Wissen,* also Wissen, das das Verstehen von Zusammenhängen impliziert, wenig sinnvoll. Zwar gibt es Modelle zum Erwerb arithmetischen Faktenwissens und arithmetischer Strategien, die auf »Verstehen« als Erklärungsansatz ganz verzichten, wie z. B. Siegler und Shrager [45], Siegler [43; 44] sowie Rabinowitz [30], diese Ansätze sind jedoch in ihrer Erklärungskraft eingeschränkt. Sie können erklären, wie Kinder beim Bearbeiten arithmetischer Aufgaben immer effektiver werden, nicht aber, wie beispielsweise mathematisches Wissen zum Lösen von Textaufgaben herangezogen wird.

Obwohl jeder aus Erfahrung weiß, was es bedeutet, etwas verstanden oder nicht verstanden zu haben, entzieht sich doch der Prozeß des Verstehens weitgehend dem introspektiven Zugang. In der Alltagssprache wird Verstehen häufig mit »der Groschen ist gefallen« beschrieben. Nachdem etwas verstanden wurde, kann man sich selbst nur noch sehr schwer in den Zustand des »Nicht-Verstehens« hineinversetzen, selbst wenn er noch gar nicht lange zurückliegt. In der Psychologie bezeichnete man derartig rigorose Veränderungen in der Wissensrepräsentation mit »Aha-Erlebnis« [5]. Als Beispiel für das »Aha-Erlebnis« wird immer wieder Archimedes' »Heureka«-Erlebnis angeführt: Archimedes, der, in der Badewanne liegend, beobachtete, wie er Wasser verdrängte, entwickelte das Konzept des spezifischen Gewichtes und fand so heraus, wie er die Echtheit einer Goldkrone feststellen konnte, ohne diese zu zerstören. Bezeichnungen wie »Aha-Erlebnis« oder »Groschen gefallen« lassen den Eindruck entstehen, als handele es sich bei Verstehensprozessen um einen radikalen, bewußt erlebten Vorgang, der die Informationsverarbeitung schlagartig verändert. Der Erwerb der zum Lösen einer bestimmten Aufgabe benötigten Kompetenz vollzieht sich nach dieser Vorstellung nicht allmählich, sondern in einem Alles-oder-Nichts-Prozeß. Bevor das bestimmten Aufgaben zugrundeliegende Konzept verstanden ist, kann keine einzige Aufgabe dieser Art gelöst werden, nachdem das Konzept verstanden ist, steigt die Leistung sprunghaft an.

Dieser »Sprung« in der Leistung darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß es völlig unangemessen ist, Verstehensprozesse als spektakuläre Alles-oder-Nichts-Prozesse zu beschreiben [48]. Zwar gibt es durchaus Fälle, in denen sich das Verstehen von Zusammenhängen in einem bewußt erlebten Aha-Erlebnis vollzieht, angesichts der unermeßlich großen Anzahl von Konzepten, die im Laufe unseres Lebens erworben werden, dürfte es sich dabei jedoch eher um die Ausnahme als um die Regel handeln. Die meisten Konzepte, die Verstehen erfordern, werden eher beiläufig erworben. Auch wenn eine bestimmte Aufgabe bis zu dem Zeitpunkt, zu dem das der Aufgabe zugrundeliegende Konstrukt verstanden ist, überhaupt nicht und danach mit großer Sicherheit gelöst werden kann, gehen diesem Zustand Prozesse der Wissensaufnahme und -umstrukturierung voraus, die das Verstehen des zugrundeliegenden Konzeptes erst ermöglichen. Setzt man also voraus, daß Verstehen kein Alles-oder-Nichts-Prozeß, sondern ein kontinuierlicher Vorgang ist, stellt sich die Frage: »Wie muß das Wissen repräsentiert und umstrukturiert werden, damit ein Konzept verstanden werden kann?«

Um die für das Verstehen von Konzepten notwendigen Formen der Wissensrepräsentation präziser beschreiben zu können, wird in der Psychologie der Begriff »Mentales Modell« verwendet. Ein mentales Modell ist die von der sprachlichen Oberflächenstruktur losgelöste Wissensrepräsentation [47], ein »konstruiertes Modell der externen Umgebung« [22]. Gentner und Stevens [16] geben folgende Definition: »A mental model is an internal representation that encodes the world into categories and uses these categories to define an internal transition function that mimics the state changes that unfold the world.«

Den Begriff »Verstehen« im wissenschaftlichen Kontext durch den Begriff »Mentales Modell« zu ersetzen, ist mehr als die »Verwissenschaftlichung« eines Alltagsbegriffs durch die Einführung eines Fremdwortes. Mentale Modelle können mehr oder weniger abstrakt, flexibel und komplex sein und erlauben so eine Beschreibung der Wissensrepräsentation auf unterschiedlichem quantitativem und qualitativem Niveau, während die Verwendung des Begriffes »Verstehen« lediglich die Unterscheidung zwischen »etwas wird verstanden« und »etwas wird nicht verstanden« erlaubt. Die Verwendung des Konstruktes »Mentales Modell« hat sich bewährt, wenn es darum geht, die Wissensrepräsentation zu beschreiben, auf die beim Lösen bestimmter Aufgaben zurückgegriffen wird. Insbesondere in einem Bereich, in dem *Verstehen* eine geradezu prototypische Rolle einnimmt, nämlich dem Lösen *mathematischer Textaufgaben,* läßt sich der Prozeß des Kompetenzerwerbes auf hohem Präzisionsniveau beschreiben. Das Verstehen und Lösen von Textaufgaben erfordert die Abstraktion von den in der Aufgabe vorkommenden konkreten Personen, Gegenständen und Handlungen und die Konstruktion eines mentalen Modelles. Wie dieses mentale Modell aussieht, hängt vom verfügbaren mathematischen Vorwissen ab. Textaufgaben können auf unterschiedlichen Ebenen mental repräsentiert und verstanden werden, es ist deshalb unangemessen, das Verstehen von Textaufgaben als gegeben oder nicht gegeben zu betrachten. Mit welchen Veränderungen in der Wissensrepräsentation wachsende Kompetenz beim Bearbeiten von Textaufgaben einhergeht, wird im folgenden Kapitel dargestellt.

3. Das Verstehen und Lösen einfacher Textaufgaben

Das Verstehen und Lösen von Textaufgaben bereitet vielen Schülern große Schwierigkeiten. Das Scheitern wird oft auf die Unfähigkeit der Lehrer zurückgeführt, Mathematik auf eine Weise zu lehren, die den Kindern über die Vermittlung von Rechenprozeduren hinaus das Verstehen von numerischen Zusammenhängen ermöglicht. Es ist selten das Ausführen der mathematischen Gleichung, das den Schülern schwerfällt. Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist und Reys [6] konnten zeigen, daß ein großer Teil der Kinder eine Textaufgabe nicht lösen konnten, obwohl ihnen die zugrundeliegende mathematische Gleichung, wenn sie in numerischer Form dargeboten wird, keine Schwierigkeiten bereitete. Der entscheidende Schritt beim Verstehen und Lösen von Textaufgaben besteht darin, die in der Aufgabe beschriebene *Situation* zu verstehen und diese in eine mathematische Gleichung umzusetzen. Unter *Situationsverständnis* ist im Textverarbeitungsmodell von Kintsch und van Dijk [25] und Kintsch [23] der Prozeß jenseits der Sprachverarbeitung zu verstehen, der auch als »going beyond the text« bezeichnet wird. Situationsverständnis liegt vor, wenn die in der Textaufgabe beschriebene Handlung oder Zustandsbeschreibung nachvollzogen werden kann, und ist damit an den Erfahrungs- und Erlebnisbereich gebunden. Das Verstehen und Lösen einer Textaufgabe setzt die Repräsentation eines mentalen

Modelles voraus, das mit *Situationsmodell* bezeichnet wird. Die Textaufgabe muß losgelöst von der sprachlichen Oberflächenstruktur mental repräsentiert werden. Von den in der Aufgabe beschriebenen konkreten Subjekten und von den vorkommenden Gegenständen muß abstrahiert werden. Wie das mental repräsentierte Situationsmodell aussieht, hängt sowohl von dem an die Alltagserfahrung geknüpften Wissen über die Handlung in der Textaufgabe ab als auch von der Repräsentation des mathematischen Wissens.

3.1 Die Modellierung von Verstehensprozessen

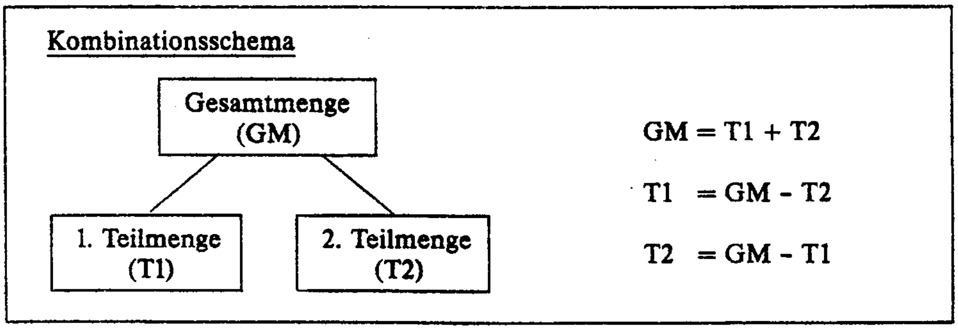
Tabelle 1:
14 Grundtypen von Textaufgaben und Prozentsatz amerikanischer und deutscher Erstkläßler, die die Aufgaben lösten

		deutsch	amerik.
	<u>Kombinationsaufgaben</u>		
	Teilmenge unbekannt		
CB1	Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln haben die beiden zusammen?	87	100
CB2	Maria und Hans haben zusammen 8 Murmeln. Maria hat 7 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?	55	33
	<u>Austauschaufgaben</u>		
	Endmenge unbekannt		
CH1	Maria hatte 3 Murmeln. Dann gab ihr Hans 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	89	100
CH2	Maria hatte 6 Murmeln. Dann gab sie Hans 4 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	95	100
	Austauschmenge unbekannt		
CH3	Maria hatte 2 Murmeln. Dann gab ihr Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 9 Murmeln. Wie viele Murmeln hat ihr Hans gegeben?	52	56
CH4	Maria hatte 8 Murmeln. Dann gab sie einige Hans. Jetzt hat Maria 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat sie Hans gegeben?	49	78
	Startmenge unbekannt		
CH5	Maria hatte einige Murmeln. Dann gab ihr Hans 3 Murmeln. Jetzt hat Maria 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte Maria am Anfang?	49	28
CH6	Maria hatte einige Murmeln. Dann gab sie Hans 2 Murmeln. Jetzt hat Maria 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte Maria am Anfang?	38	39
	<u>Vergleichsaufgaben</u>		
	Differenzmenge unbekannt		
CP1	Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans mehr als Maria?	28	28
CP2	Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans weniger als Maria?	32	22
	Vergleichsmenge unbekannt		
CP3	Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 4 Murmeln mehr als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?	53	17
CP4	Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 3 Murmeln weniger als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?	58	28

	Referenzmenge unbekannt		
CP5	Maria hat 9 Murmeln. Sie hat 4 Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?	22	11
CP6	Maria hat 4 Murmeln. Sie hat 3 Murmeln weniger als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?	16	6

Für Textaufgaben aus allen Bereichen der Mathematik gilt, daß Aufgaben, denen die gleiche mathematische Operation zugrundeliegt, sich deutlich in der Schwierigkeit unterscheiden können. Allein bei einfachen Textaufgaben, so wie sie in den ersten beiden Klassen der Grundschule vorgegeben werden, gibt es 14 Typen von Textaufgaben, in denen Mengen von Objekten ausgetauscht, zusammengefaßt und kombiniert werden. Die Aufgaben sowie der Prozentsatz der deutschen und amerikanischen Erstkläßler, die diese Aufgaben lösen konnten, sind Tabelle 1 zu entnehmen. Die Daten für die amerikanischen Kinder wurden aus Riley und Greeno [38] entnommen. Die Daten für die deutschen Kinder wurden an insgesamt 88 Erstkläßlern aus vier unterschiedlichen Münchener Schulklassen in einem schriftlichen Test erhoben. Es zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen deutschen und amerikanischen Kindern. Es ist keineswegs die Rechenoperation – Subtraktion bzw. Addition –, die die Schwierigkeit einer Textaufgabe determiniert. Große Unterschiede gibt es hingegen zwischen den drei Aufgabenarten. Aufgaben, in denen Mengen ausgetauscht werden, sind einfacher zu lösen als Aufgaben, in denen Mengen verglichen werden. Aber auch innerhalb der Aufgabenarten gibt es große Unterschiede in der Schwierigkeit. So sind Austauschaufgaben mit unbekannter Endmenge (CH1, CH2) erheblich einfacher als Austauschaufgaben mit unbekannter Startmenge (CH5, CH6). Die Schwierigkeitsunterschiede zwischen den 14 Aufgaben zu erklären, ist das Ziel unterschiedlicher Arbeiten. Kintsch und Greeno [24] haben ein Prozeßmodell zum Verstehen und Lösen von Textaufgaben entwickelt. Danach liegen den unterschiedlichen Textaufgaben unterschiedliche Situationsmodelle zugrunde. Darunter sind Wissensstrukturen zu verstehen, in denen losgelöst vom konkreten Kontext, die Beziehungen zwischen den in der Aufgabe vorkommenden Mengen repräsentiert sind. In Abbildung 1 sind die den in Tabelle 1 aufgeführten Textaufgaben zugrundeliegenden mathematischen Situationsmodelle dargestellt. Personen, die über diese Wissensstrukturen verfügen, bereitet das Verstehen und Lösen keiner der 14 Textaufgaben Probleme. Kann jedoch nicht auf mentale Modelle dieser Art zugegriffen werden, muß die in der Textaufgabe beschriebenen Handlung extern modelliert werden, was jedoch nicht bei allen Aufgabentypen möglich ist. Es gibt mehrere auf dem Computer simulierte Modelle zum Verstehen und Lösen der 14 Textaufgaben bei Kindergarten- und Grundschulkindern ([4]; [11]; [12]; [36]; [39]; [38]).

Abb. 1: Mathematische Situationsmodelle für die unterschiedlichen Aufgabentypen



(weiter auf der nächsten Seite!)

Vergleichsschema

große Menge (gM)	
kleine Menge (kM)	Differenzmenge (DM)

gM = kM + DM

kM = gM - DM

DM = gM - kM

Austauschschema

	Zugang	Abgang
Zeitpunkt 1	Startmenge (SM)	Startmenge (SM)
Zeitpunkt 2	Austauschmenge (AM)	Austauschmenge (AM)
Zeitpunkt 3	Endmenge (EM)	Endmenge (EM)
	SM = EM - AM	SM = AM + EM
	AM = EM - SM	AM = SM - EM
	EM = SM + AM	EM = SM - AM

Dem Modell von Riley und Greeno [38] liegt die Annahme zugrunde, daß Vorschulkinder die Aufgaben anders lösen als Kinder, die bereits über arithmetisches Verständnis verfügen. Die Autoren nehmen an, daß das zum Lösen aller 14 Textaufgaben benötigte Wissen in drei Stufen erworben wird:

Stufe 1:
Kinder, die noch nicht über arithmetisches Verständnis verfügen, modellieren die Aufgaben direkt, indem sie sich die Handlung veranschaulichen (mit Gegenständen oder in der mentalen Vorstellung). Die Lösung der Aufgaben auf Stufe 1 setzt voraus, daß jede relevante Informationseinheit (also jede Information über Mengenverhältnisse) einer Textaufgabe in eine Operation (Dazugeben oder Wegnehmen von Objekten einer Menge) umgesetzt werden kann, ohne daß Information über die Beziehung zwischen den Mengen mental repräsentiert sein muß. Dies ist möglich bei Austauschaufgaben, in denen die Endmenge gesucht wird (CH1, CH2) oder bei Kombinationsaufgaben mit unbekannter Gesamtmenge (CB1). Die Aufgabe CB1 kann ohne Kenntnisse in Arithmetik gelöst werden, indem drei Gegenstände als Symbol für Marias anfänglichen Besitz an Murmeln repräsentiert werden. Die im zweiten Satz gegebene Information wird repräsentiert, indem zu den drei Gegenständen fünf weitere hinzugefügt werden. Die Information über Marias anfängliche Besitzverhältnisse muß nicht länger im Arbeitsgedächtnis gespeichert werden. Zur Lösung der

Aufgabe muß nur noch die Gesamtzahl der Gegenstände ermittelt werden. Vergleichsaufgaben mit unbekannter Differenzmenge (CP1, CP2) können mit Hilfe der »Match-Separate-Strategie« [24] gelöst werden: Zwischen den Elementen beider Mengen wird eine Eins-zu-Eins-Zuordnung hergestellt, die überschüssigen Elemente werden gezählt. In Stufe 1 ist also noch kein mathematisches Situationsmodell über die Beziehung zwischen den in der Textaufgabe vorkommenden Mengen repräsentiert.

Stufe 2:
In dieser Stufe haben die Kinder ein rudimentäres Problemmodell repräsentiert: die Beziehung zwischen den an der Aufgabe beteiligten Mengen ist auf qualitativem, aber noch nicht auf mathematischem Niveau gespeichert. Die Aufgaben CH3, CH4, CP3 und CP4 können ohne die Umsetzung in eine mathematische Formel durch die Anwendung von Zählprozeduren gelöst werden. Im Gegensatz zu den auf Stufe 1 lösbaren Aufgaben erfordern die Aufgaben der Stufe 2 jedoch die Speicherung mehrer Informationselemente im Arbeitsgedächtnis.

Stufe 3:
Die Aufgaben CH5, CH6, CP2, CP5 und CP6 können nur verstanden und gelöst werden, wenn die mathematische Beziehung zwischen den Größen verstanden wird, wenn also ein flexibles, mathematisiertes mentales Situationsmodell repräsentiert ist, in dem die in Abbildung 1 dargestellte Information enthalten ist. Die Repräsentation eines flexiblen mathematisierten mentalen Situationsmodelles setzt arithmetisches Verständnis voraus, das sich in der Repräsentation des Teil-Ganzes-Schemas ([32]; [33]; [35]) ausdrückt. Über ein Teil-Ganzes-Schema zu verfügen bedeutet beispielsweise, die Komplementarität von Subtraktion und Addition verstanden zu haben. Erst die Repräsentation des Teil-Ganzes-Schemas ermöglicht die flexible Anordnung der an einer Textaufgabe beteiligten Mengen, wie in Abbildung 1 dargestellt. Bei einer zu lösenden Aufgabe muß lediglich entschieden werden, welchem Aufgabentyp sie angehört (Vergleichs-, Austausch-, oder Kombinationsaufgabe) und welche Größen bekannt sind. Aus dem repräsentierten Wissen kann dann abgeleitet werden, wie aus den bekannten Größen die gesuchte Größe errechnet wird.

Die grundlegende Idee bei Riley und Greeno [38] ist, daß sich das mathematische Denken verändert: aus der handlungsnahen Repräsentation der Addition und Subtraktion als Mengenveränderung entwickelt sich das abstrakte Teil-Ganzes-Schema, und diese Veränderung in der Repräsentationsstruktur ermöglicht das Verstehen von Textaufgaben, die keine externe Modellierung der beschriebenen Situation zulassen.

Die aus dem Modell von Riley und Greeno [38] vorhergesagten Itemschwierigkeiten stimmen nicht immer mit den empirisch gefundenen Schwierigkeiten überein. Insbesondere bei den Vergleichsaufgaben zeigen sich deutliche Abweichungen. Die Aufgaben mit unbekannter Differenzmenge sind schwieriger als die Aufgaben mit unbekannter Vergleichsmenge. Das Modell sagt das Umgekehrte vorher. Für Vergleichsaufgaben konnten Stern und Lehrndorfer [49] sowie Stern [46] zeigen, daß die Schwierigkeiten mit diesen Aufgaben sich aus einer recht komplexen Interaktion zwischen Sprachverständnis (Verstehen von Formulierungen wie »wieviel mehr« oder »x weniger als«) und Situationsverständnis (z. B. was ein Mengenvergleich ist) ergeben.

Cummins, Kintsch, Reusser und Weimer [4] sowie Reusser [36; 37] haben Modelle zum Verstehen und Lösen von Textaufgaben entwickelt, in denen Sprach- und Situationsverstehen und nicht mathematisches Wissen im Mittelpunkt stehen. Reusser unterscheidet zwischen *episodischem Situationsverständnis,* also dem Alltagsverständnis für die in der Aufgabe beschriebene Handlung und dem *mathematischen Situationsverständnis,* das sich in der höchsten Kompetenzstufe in der Repräsentation der in Abbildung 1 dargestellten mathematischen Situationsmodelle ausdrückt. Insbesondere im Modell von Reusser, das bisher für Austauschaufgaben auf dem Computer simuliert ist, steht das Verstehen der in der Textaufgabe beschriebenen Ereignisse und Handlungen im Mittelpunkt. Angemessenes

Situationsverständnis wird ermöglicht, indem Alltagswissen und Alltagserfahrung zur Lösung der Aufgabe herangezogen werden. In Reussers Simulationsmodell zum Verstehen und Lösen von Austauschaufgaben ist dies unter anderem das Wissen über den zeitlichen Ablauf von Handlungen. In den Arbeiten von Cummins et al. [4] und Reusser [36; 37] wird keineswegs die Wichtigkeit des mathematischen Wissens geleugnet, es wird lediglich hervorgehoben, daß die Verfügbarkeit mathematischen Wissens notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Verstehen und Lösen von Textaufgaben ist.

Die Unterscheidung zwischen dem episodischen und dem mathematischen Situationsverständnis wurde insbesondere aufgrund empirischer Ergebnisse zum Lösen von Vergleichsaufgaben getroffen. Es gibt eine Reihe von Untersuchungen, die zeigen, daß Faktoren des Textverstehens die Schwierigkeit einer Textaufgaben beeinflussen. So konnte Hudson [20] zeigen, daß 96 % der Sechsjährigen die Aufgabe

»5 Vögel haben Hunger.
Sie finden 3 Würmer.
Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?«

lösen konnten, aber nur 25 % der Kinder lösten die Aufgabe, wenn sie mit der Frage

»Wieviel mehr Vögel als Würmer gibt es?«

abgeschlossen wurde.

Das Ergebnis wurde von Stern (in Vorbereitung) und Davis-Dorsey, Ross und Morrison [10] repliziert. Letztere Autoren haben auch für Austausch- und Kombinationsaufgaben erhebliche Erleichterungseffekte durch sprachliche Umformulierung nachgewiesen.

Greer ([13; 14; 15]) hat in Anlehnung an das dargestellte Klassifikationssystem von Textaufgaben zur Addition und Subtraktion ein Klassifikationssystem für Multiplikations- und Divisionsaufgaben entwickelt, das insbesondere auf Unterschiede im Situationsverständnis abzielt. Auch bei Divisions- und Subtraktionsaufgaben zeigt sich, daß Aufgaben, deren Lösung gleiche Rechenoperationen erfordern, sich deutlich in der Schwierigkeit unterscheiden. So sind Aufgaben, vom Typ »gleiche Gruppen«, wie z. B. »Es gibt 3 Kinder. Jedes Kind hat 4 Orangen. Wie viele Orangen gibt es insgesamt?« erheblich einfacher als Aufgaben vom Typ »Kartesisches Produkt«, wie z. B. »Wenn es 3 Wege von A nach B gibt und 4 Wege von B nach C, wie viele unterschiedliche Wege gibt es dann von A nach C, wenn man immer über B geht?«, obwohl beide Aufgaben auf gleiche Weise gelöst werden.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß beim Verstehen und Lösen von Textaufgaben der entscheidende Schritt darin besteht, die in der Aufgabe vorkommende Handlung zu verstehen. Dies setzt sowohl Sprachverständnis als auch Vertrautheit mit der in der Aufgabe beschriebenen Situation voraus. Weiterhin muß erfaßt werden, welche Information in der Aufgabe gegeben ist und welche Information gesucht wird. Um aus der vorgegebenen Information die gesuchte Information abzuleiten, ist Wissen über den mathematischen Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Informationselementen notwendig. Aus diesem Wissen wird die mathematische Gleichung abgeleitet. Die Lösung dieser Gleichung ergibt die Antwort auf die Frage.

In der Zeitspanne zwischen der völligen Inkompetenz und der souveränen Lösung einer Aufgabe ist jeder dieser Problemlöseschritte fehleranfällig, weil das zugrundeliegende Wissen noch nicht so sicher beherrscht wird, daß es jederzeit aktiviert werden kann. In der im folgenden Teil dargestellten empirischen Untersuchung soll gezeigt werden, unter welchen Umständen noch unsicher beherrschtes Wissen zum Scheitern oder zum Erfolg führen kann.

3.2 Wie man Textaufgaben löst, ohne sie zu verstehen: der Umgang mit Kapitänsaufgaben

Dem aufmerksamen Leser ist nicht entgangen, daß immer vom *Verstehen und Lösen* von Textaufgaben die Rede war. Lehrerinnen und Lehrern wird dies sofort einleuchten, denn sie wissen aus Erfahrung, daß viele Kinder zu einer Antwort kommen, ohne die Aufgabe verstanden zu haben. Die Kinder verrechnen die in den Aufgaben vorkommenden Zahlen in relativ willkürlicher Weise, z. B. indem sie sich von Oberflächenmerkmalen leiten lassen, ohne daß sie den Inhalt der Aufgabe verstehen [18]. Bei einfachen Textaufgaben, bei denen zwei Zahlen entweder subtrahiert oder addiert werden müssen, beträgt die Ratewahrscheinlichkeit der richtigen Rechenoperation 50 %. Mit etwas mehr Geschick kann man sogar ein noch besseres Ergebnis erreichen. Eine Durchsicht der Rechenbücher für das zweite Schuljahr ergab, daß meistens die etwas schwierigeren Aufgaben Subtraktion verlangen. Ein Kind, das die Regel »Immer wenn ich eine Aufgabe nicht verstehe, subtrahiere ich« befolgt, kann trotz massiver Verständnisschwierigkeiten bis zu 90 % aller Aufgaben richtig lösen.

Ein noch gezielteres Vorgehen stellt die sogenannte »Schlüsselwortstrategie« dar, die in den USA sogar im Unterricht gelehrt wurde [41]. Danach sucht man in der Textaufgabe nach Wörtern, die auf die entsprechende Rechenoperation hinweisen: »mehr« oder »zusammen« auf Addition, »weniger« oder »wegnehmen« auf Subtraktion. Schoenfeld beschreibt die Auswirkungen der Schlüsselwortstrategie: Kinder, die darauf hingewiesen wurden, daß das Wort »left«, z. B. in »How many marbles are left?« auf Subtraktion hindeute, subtrahierten auch, wenn ein »Mr. Left« in der Aufgabe vorkam.

Eine beliebte Methode, das mangelnde Verständnis beim Lösen von Textaufgaben zu demonstrieren, ist die Vorgabe sogenannter »Kapitänsaufgaben«. Dies sind Aufgaben, bei denen aus der gegebenen Information keine neue Information errechnet werden kann, weil die vorgegebene Information unvollständig ist oder nichts mit der Frage zu tun hat, z. B. »Ein Boot ist 13 Meter lang und 5 Meter breit. Wie alt ist der Kapitän?«

Radatz [31] hat in einem unter Mathematikdidaktikern viel beachteten Aufsatz zeigen wollen, daß die Tendenz, unlösbare Aufgabe zu »lösen« mit dem Alter der Kinder zunimmt: Während Kindergartenkinder und Erstkläßler in den überwiegenden Fällen bei unlösbaren Aufgaben sagten, daß sie die Aufgabe nicht lösen können, »lösten« insbesondere Kinder ab der 3. Klasse die unsinnigen Aufgaben anstandslos. Radatz erklärt dies damit, daß die Kinder mit zunehmender Schulerfahrung immer schematischer vorgehen und nicht den Bezug zwischen Mathematik und der außerschulischen Realität herstellen. Bei älteren Schülern habe sich »ein Bild von der Mathematik verfestigt, wonach alles lösbar ist nach bestimmten Regeln und Algorithmen« (S. 216). Diese Auffassung wird auch von Wittmann [54; 55] immer wieder betont.

So plausibel die Auffassung auch sein mag, daß Kinder mit zunehmender Beschulung nicht mehr versuchen, eine Aufgabe zu verstehen, sondern relativ willkürlich einen Lösungsansatz auswählen, die Daten von Radatz lassen eine solch weitreichende Schlußfolgerung nicht zu. Drei Punkte sind an seiner Vorgehensweise zu kritisieren:

1.
Leider beschreibt Radatz seinen Versuchsplan nicht sehr ausführlich, den Darstellungen ist jedoch zu entnehmen, daß die Kinder unterschiedlicher Jahrgangsstufen unterschiedliche Aufgaben erhielten. Bei dieser Vorgehensweise wird nicht beachtet, daß auch unlösbare Aufgaben sich in der Schwierigkeit unterscheiden: eine Aufgabe kann mehr oder weniger offensichtlich absurd und deshalb unlösbar sein. Wenn die wenigen Beispiele, die Radatz angibt, repräsentativ sind, dann sind die unlösbaren Aufgaben, die den älteren Kindern präsentiert wurden, auch relativ gesehen, schwieriger als die den jüngeren Kindern präsentierten Aufgaben. So wurden den Erstkläßlern die Aufgabe »Katja verschickt zum Kindergeburtstag 8 Einladungen. Die Geburtstagsfeier findet in 4 Tagen statt« vorgegeben. Diese Aufgabe enthält zwei unterschiedliche Größen, von denen auch kleine Kinder wissen, daß sie nichts miteinander zu tun haben. Die Aufgabe ermöglicht keinen Aufbau eines episodischen Situationsmodelles, ihre Absurdität ist deshalb schon zu Beginn des Lösungsprozesses recht offensichtlich. Die den Fünftkläßlern vorgegebene Aufgabe »4 Kisten wiegen zusammen 1000 kg. Die beiden schwersten Kisten wiegen gleichviel.

Die leichteste Kiste wiegt 100 kg.« ermöglicht hingegen den Aufbau eines episodischen Situationsmodelles. Es handelt sich bei der Aufgabe um eine komplexe Kombinationsaufgabe mit unbekannter Teilmenge. Würde die Aufgabe lauten: »3 Kisten wiegen zusammen 1000 kg ....« wäre die Frage »Wieviel wiegt jede der schweren Kisten?« beantwortbar gewesen. Die Unlösbarkeit der Aufgabe in der von Radatz dargebotenen Version wird erst beim Aufbau eines mathematischen Situationsmodelles offensichtlich, also zu einem späteren Zeitpunkt des Problemlöseprozesses. Will man zeigen, daß mit zunehmendem Alter die Tendenz zur Lösung unlösbarer Aufgaben steigt, muß man die »Absurdität« der Aufgaben pro Altersgruppe konstant halten, was allerdings ein schwieriges Unterfangen ist.

2.
Die von Radatz gewählte Auswertung, bei der erfaßt wurde, ob das Kind einen Rechenversuch startete oder nicht, ist problematisch. Das Starten eines Rechenversuchs wurde als sinnfreies Anwenden von Rechenprozeduren interpretiert. Aus dem fehlenden Rechenversuch allerdings zu schließen – wie es Radatz zwar nicht explizit aber doch implizit tut – daß die Sinnlosigkeit der Aufgabe erkannt wird, ist nicht gerechtfertigt. Vielmehr ist zu erwarten, daß die leistungsstarken Kinder keinen Rechenversuch starten, weil sie die Sinnlosigkeit der Aufgabe erkennen und daß die leistungsschwachen Kindern keinen Versuch starten, weil sie auch mit einer sinnvollen Aufgabe nichts anfangen könnten. Bei der Auswertung der Daten hätte zumindest der Leistungsstand der Kinder berücksichtigt werden müssen und nur Kinder, die die ebenfalls vorgegebenen sinnvollen Aufgaben lösten, dürften in die Auswertung einbezogen werden.

3.
Bei Radatz wurden die Aufgaben ohne explizite Frage präsentiert. Diese Vorgehensweise, die insbesondere in der 3. und 4. Klasse üblich ist, mag die Lösungsversuche bei den unlösbaren Aufgaben gefördert haben. Mit der Darbietung einer Aufgabe ohne Frage sollen die Kinder veranlaßt werden, darüber nachzudenken, welche neue Information man aus der gegebenen Information errechnen kann. Das Fehlen einer Frage erschwert den Aufbau sowohl des episodischen als auch des mathematischen Situationsmodelles und veranlaßt – möglicherweise insbesondere ältere Kinder – zum Probieren. Wenn bei den unlösbaren Aufgaben in einer expliziten Frage nach einer in der Aufgabe nicht vorkommenden Größe gefragt worden wäre, hätten wahrscheinlich mehr Kinder auf den ersten Blick die Sinnlosigkeit der Aufgabe erkannt und hätten keinen Rechenversuch gestartet.

Die von Radatz angeführten Belege sind wenig geeignet, die allerdings von vielen Seiten geäußerte Vermutung zu überprüfen, daß die Kinder mit zunehmender Beschulung nicht versuchen, eine Textaufgabe zu verstehen, sondern relativ wahllos Lösungsalgorithmen anwenden. In der im folgenden dargestellten Studie soll diese Annahme erneut überprüft werden. Es werden neben kognitiven Merkmalen auch die sozialpsychologischen Besonderheiten der Lehr-/Lernsituation berücksichtigt. Werden die unlösbaren Aufgaben von einem Lehrer oder einer Person, die aufgrund des Kontextes die Rolle eines Lehrers einnimmt, präsentiert, gibt es für die Kinder keinen Grund zu der Annahme, daß es sich um unlösbare Aufgaben handelt. Vielmehr haben die Kinder die Erfahrung gemacht, daß im Zweifelsfalle der Lehrer immer recht hat und werden deshalb, selbst wenn sie verunsichert sind, weil sie einer Aufgabe keinen Sinn entnehmen können, die Ursache hierfür eher der eigenen Unfähigkeit als der Unlösbarkeit des Problems zuschreiben und sich mit einem willkürlich gewählten Lösungsalgorithmus aus der Affäre ziehen. Es kann deshalb angenommen werden, daß Kinder einen Lösungsansatz für sinnlose Aufgaben suchen, wenn zwei Voraussetzungen erfüllt sind: 1. Die Aufgabe wird in einem »seriösen« Kontext präsentiert, in dem nichts auf eine »Glatteissituation« hinweist. 2. Das Lösen einer der sinnlosen Aufgabe ähnlichen sinnvollen Aufgabe bereitet den Kindern noch Schwierigkeiten.

Es soll gezeigt werden, daß nur wenn diese beiden Voraussetzungen erfüllt sind, ein Kind versuchen wird, eine unlösbare Aufgabe zu »lösen«. Will man den Einfluß des Alters auf die »Lösung« unlösbarer Aufgaben erfassen, müssen, wie bereits erörtert, die den unterschiedlichen Altersgruppen vorgegebenen unlösbaren Aufgaben in ihrer »Absurdität« vergleichbar sein. Da die Absurdität unterschiedlicher Aufgaben schwer vergleichbar ist, läßt sich die Vergleichbarkeit zwischen den Altersgruppen durch die Vorgabe identischer Aufgaben realisieren, was allerdings wiederum die älteren Kinder bevorteilt. Um diesem Dilemma zu entkommen, wurden zwei Untersuchungen durchgeführt. In Untersuchung I wurden Zweit- und Drittkläßler in der Bearbeitung von Additions- und Subtraktionsaufgaben verglichen und in Untersuchung II wurden Dritt- und Viertkläßlern Multiplikations- und Divisionsaufgaben vorgegeben.

4. Zum Umgang mit unlösbaren Aufgaben – eine empirische Untersuchung

4.1 Methode

4.1.1 Versuchsmaterial

In jeder Untersuchung wurden 20 Aufgaben vorgegeben, davon waren acht Füllaufgaben. Von den 12 für die Fragestellung relevanten Aufgaben war die Hälfte der dargebotenen Aufgaben lösbar und die andere Hälfte unlösbar. Die lösbaren und die unlösbaren Aufgaben unterscheiden sich lediglich in der Frage. Zu jeder lösbaren Aufgabe wurde eine unlösbare Aufgabe gebildet, indem eine Frage gestellt wurde, die aus der in der Aufgabe vorgegebenen Information nicht beantwortet werden konnte. In Tabelle 2 sind die dargebotenen Aufgabentypen dargestellt, einmal mit beantwortbarer und einmal mit nicht beantwortbarer Frage. Die Namen, die Gegenstände und die Zahlen wurden variiert, so daß die jeweils beantwortbare und die dazugehörige unbeantwortbare Aufgabe in der Oberflächenstruktur keine Ähnlichkeit aufwiesen.

Tabelle 2:
In den Untersuchungen I und II vorgegebene Aufgabentypen

	Addition/Subtraktion	Multiplikation/Division
Kombinationsaufgaben	Peter hat 5 Murmeln. Susanne hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln haben die beiden zusammen? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat Peter Susanne geschenkt? (Nicht sinnvolle Frage)	Es gibt 9 Kinder. Jedes Kind hat 3 Murmeln. Wie viele Murmeln haben die Kinder zusammen? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat jedes Kind verloren? (Nicht sinnvolle Frage)
	Peter und Susanne haben zusammen 8 Murmeln. Peter hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Susanne? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat Peter Susanne geschenkt? (Nicht sinnvolle Frage)	Es gibt 27 Murmeln und 9 Kinder. Die Kinder sollen alle gleich viel Murmeln erhalten. Wie viele Murmeln bekommt jedes Kind? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln verliert jedes Kind? (Nicht sinnvolle Frage)

(weiter auf der nächsten Seite!)

	Addition/Subtraktion	Multiplikation/Division
Austausch-aufgaben	Jonas hatte 6 Äpfel. Beate schenkte ihm noch einige Äpfel. Jetzt hat Jonas 8 Äpfel. Wie viele Äpfel hat Beate Jonas geschenkt? (Sinnvolle Frage) Wie viele Äpfel hat Beate weniger als Jonas? (Nicht sinnvolle Frage)	Jonas hatte 4 Äpfel. Beate schenkte ihm noch einige Äpfel. Jetzt hat Jonas dreimal so viele Äpfel wie am Anfang. Wie viele Äpfel hat Beate Jonas geschenkt? (Sinnvolle Frage) Wie viele Äpfel hat Beate weniger als Jonas? (Nicht sinnvolle Frage)
	Susi hatte 8 Murmeln. Sie schenkte einige Murmeln an Peter. Jetzt hat Susi noch 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Susi an Peter verschenkt? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat Peter weniger als Susi? (Nicht sinnvolle Frage)	Susi hatte 12 Murmeln. Sie schenkte einige Murmeln an Peter. Jetzt hat Susi noch ein Viertel so viel Murmeln wie sie am Anfang hatte. Wie viele Murmeln hat Susi an Peter verschenkt? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat Peter weniger als Susi? (Nicht sinnvolle Frage)
Vergleichs-aufgaben	Peter hat 5 Murmeln. Hans hat 3 Murmeln weniger als Peter. Wie viele Murmeln hat Hans? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat Peter Hans geschenkt? (Nicht sinnvolle Frage)	Peter hat 5 Murmeln. Hans hat dreimal so viele Murmeln wie Peter. Wie viele Murmeln hat Hans? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat Peter Hans geschenkt? (Nicht sinnvolle Frage)
	Peter hat 8 Murmeln. Hans hat 3 Murmeln weniger als Peter. Wie viele Murmeln hat Hans? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat Peter Hans abgenommen? (Nicht sinnvolle Frage)	Peter hat 8 Murmeln. Hans hat ein Viertel von den Murmeln, die Peter hat. Wie viele Murmeln hat Hans? (Sinnvolle Frage) Wie viele Murmeln hat Peter Hans abgenommen? (Nicht sinnvolle Frage)

4.1.2 Variation der Lehr-Lern-Situation

Die Annahme, daß es von der Situation abhängt, ob Kinder versuchen, eine unlösbare Aufgabe zu »lösen«, wurde überprüft, indem die Hälfte der Versuchspersonen in jeder Altersgruppe darauf hingewiesen wurde, daß einige Aufgaben unlösbar seien *(aufgeklärte Bedingung)* und die andere Hälfte nicht *(nicht aufgeklärte Bedingung).*

Unter der nicht aufgeklärten Bedingung wurde die Instruktion vorgegeben: »Auf den nächsten Seiten befinden sich eine ganze Menge Textaufgaben. Versuche, so viele Aufgaben wie möglich zu lösen. Wenn Du eine Aufgabe nicht gleich lösen kannst, gehe erst einmal zur nächsten Aufgabe über und versuche dann ganz zum Schluß noch einmal, die Aufgaben zu lösen, die Du nicht sofort konntest.« Es wurde also nicht erwähnt, daß es unlösbare Textaufgaben gibt. Unter der aufgeklärten Bedingung erhielten die Kinder folgende zusätzliche Instruktion: »... Es gibt ein paar Textaufgaben, die sich gar nicht lösen lassen, weil es auf die Frage keine Antwort gibt. Streiche diese Textaufgaben einfach durch und gehe zur nächsten Aufgabe über.«

Es wurden zwei Untersuchungen durchgeführt. In Untersuchung I wurden Kinder der 2. und 3. Klasse verglichen. Es wurden die in Tabelle 2 dargestellten 12 (sechs lösbar, sechs unlösbar) Additions- und Subtraktionsaufgaben dargeboten.

4.1.3 Versuchspersonen

Versuchspersonen waren 28 Zweitkläßler und 28 Drittkläßler aus Münchener Kinderhorten. Die Hälfte der Kinder einer Klassenstufe wurden der aufgeklärten, die andere Hälfte der nicht aufgeklärten Bedingung zugewiesen.

In Untersuchung II wurden Kinder der 3. und 4. Klasse verglichen. Es wurden die in Tabelle 2 dargestellten 12 (sechs lösbar, sechs unlösbar) Multiplikations- und Divisionsaufgaben dargeboten.

Versuchspersonen waren 23 Drittkläßler und 23 Viertkläßler aus Münchener Kinderhorten. 12 Drittkläßler und 13 Viertkläßler wurden der nicht aufgeklärten Bedingung zugewiesen und 11 Drittkläßler und 10 Viertkläßler der aufgeklärten.

4.1.4 Versuchsablauf

Die Kinder nahmen an der Untersuchung freiwillig teil und erhielten dafür ein kleines Geschenk. Die Probanden wurden nach dem Zufall der aufgeklärten oder der nicht aufgeklärten Bedingung zugewiesen. Die Aufgaben wurden schriftlich im Einzelversuch vorgegeben, in einer Gruppensituation wäre zu befürchten gewesen, daß einzelne Kinder unter der nicht aufgeklärten Bedingung die anderen auf die Unlösbarkeit aufmerksam machen. Die Versuchsleiterin (25jährige Lehramtsstudentin mit Lehrerfahrung) ermunterte die Kinder, sich bei Unklarheiten an sie zu wenden. Diese Aufforderung sollte in der nicht aufgeklärten Bedingung die Kinder ermuntern, die erkannte Unlösbarkeit zu äußern. Erkannte ein Kind, daß die Aufgabe unlösbar war, sollte das Kind einerseits motiviert werden, dies zu äußern, andererseits aber nicht zwangsläufig den Eindruck gewinnen, daß absichtlich unlösbare Aufgaben vorgegeben wurden. Auch sollten die Kinder davon abgehalten werden, sich zu lange mit den unlösbaren Aufgaben zu beschäftigen und dadurch die folgenden Aufgaben zu vernachlässigen. Äußerten die Kinder beim Bearbeiten einer unlösbaren Aufgabe Erstaunen, wurden sie mit den Worten vertröstet: »Versuche, jede Aufgabe zu lösen. Wenn Du mit einer Aufgabe nicht zurecht kommst, gehe erst mal zur nächsten Aufgabe über. Ganz zum Schluß kannst Du ja nochmal versuchen, die Aufgaben zu lösen, die du nicht gleich lösen konntest.« Nach Beendigung der letzten Aufgabe wurden die Kinder über die unlösbaren Aufgaben aufgeklärt.

4.2 Ergebnis

Die Mittelwerte für die Anzahl richtig gelöster lösbarer Aufgaben sind in Tabelle 3 aufgeführt.

Tabelle 3: Mittelwerte der Anzahl gelöster lösbarer Aufgaben

	Additions- und Subtraktionsaufgaben		
	Bedingung		
	aufgeklärt	nicht aufgeklärt	Mittelwert Klasse
Klasse 2	4.50	4.79	4.64
3	5.00	5.29	5.14
Mittelwert Bedingung	4.75	5.04	4.89
	Multiplikations- und Divisionsaufgaben		
	Bedingung		
	aufgeklärt	nicht aufgeklärt	Mittelwert Klasse
Klasse 3	4.70	5.23	5.00
4	4.73	4.75	4.74
Mittelwert Bedingung	4.71	5.00	4.87

Die »Lösungsversuche« für unlösbare Aufgaben, d. h. das Angeben eines Rechenwegs und einer Antwortzahl, sind Tabelle 4 zu entnehmen.

Tabelle 4: Mittelwerte der Anzahl der Lösungsversuche bei unlösbaren Aufgaben

	Additions- und Subtraktionsaufgaben		
	Bedingung		
	aufgeklärt	nicht aufgeklärt	Mittelwert Klasse
Klasse			
2	1.57	3.71	2.64
3	1.29	2.43	1.86
Mittelwert Bedingung	1.43	3.07	2.25
	Multiplikations- und Divisionsaufgaben		
	Bedingung		
	aufgeklärt	nicht aufgeklärt	Mittelwert Klasse
Klasse			
3	1.80	2.62	2.26
4	1.00	1.58	1.30
Mittelwert Bedingung	1.38	2.12	1.78

Zur Signifikanzprüfung wurden zweifaktorielle Varianzanalysen mit den Faktoren Bedingung und Altersstufe durchgeführt. Für die abhängige »Variable Anzahl richtig gelöster lösbarer Aufgaben« ergab sich:
1. In Untersuchung I ist der Alterseffekt signifikant, $F(1,52) = 3.89$, $p < .05$, während der Bedingungseffekt und die Interaktion nicht signifikant wurden. Drittkläßler lösen mehr Textaufgaben, die die Addition oder die Subtraktion zweier Zahlen erfordern als Zweitkläßler.
2. In Untersuchung II wurde kein Effekt signifikant, d. h. Dritt- und Viertkläßler unterscheiden sich nicht in der Anzahl der gelösten Multiplikations- und Divisionsaufgaben.

Man hätte vermuten können, daß die Kinder in der aufgeklärten Bedingung sehr schnell dazu neigen, auch lösbare Aufgaben, die sie nicht sofort verstehen, als unlösbar zu klassifizieren und nicht zu lösen. Da es jedoch keine Unterschiede in der Anzahl der gelösten sinnvollen Aufgaben zwischen den beiden Bedingungen gab, konnte diese Vermutung nicht bestätigt werden.

Für die abhängige Variable »Anzahl der Lösungsversuche bei unlösbaren Aufgaben« ergab sich:
1. In Untersuchung I waren sowohl der Alterseffekt ($F(1,52) = 5.72$, $p < .05$) als auch der Bedingungseffekt ($F(1,52) = 25.0$, $p < .0001$) signifikant. Unter der aufgeklärten Bedingung wurden für weniger unlösbare Aufgaben Lösungsversuche unternommen als in der nicht aufgeklärten Bedingung. Zweitkläßler versuchten häufiger, unlösbare Aufgaben zu lösen als Drittkläßler.
2. In Untersuchung II waren sowohl der Alterseffekt ($F(1,42) = 9.94$, $p < .01$) als auch der Bedingungseffekt ($F(1,42) = 5.61$, $p < .05$) signifikant. Unter der aufgeklärten Bedingung wurden für weniger unlösbare Aufgaben Lösungsversuche unternommen als in der nicht aufgeklärten Bedingung. Drittkläßler versuchten häufiger, unlösbare Aufgaben zu lösen als Viertkläßler.

Abb. 2a und 2b: Zusammenhang zwischen der Lösung einer lösbaren Aufgabe und den Lösungsversuchen bei der entsprechenden unlösbaren Aufgabe

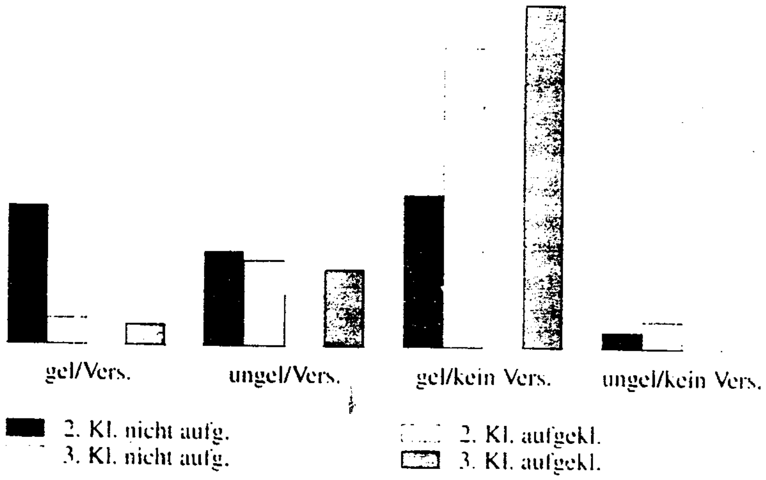


Abb. 2a

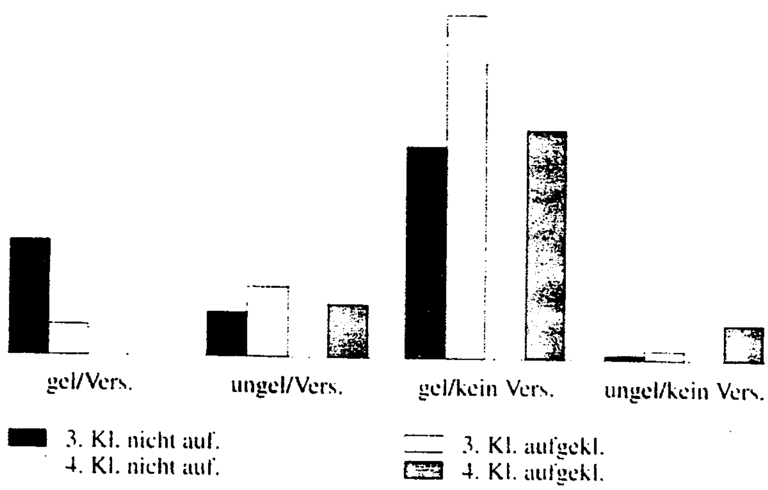


Abb. 2b

gel.: = lösbare Aufgabe gelöst
ungel.: = lösbare Aufgabe nicht gelöst
Vers.: = versucht, unlösbare Aufgabe zu lösen
kein Vers.: = nicht versucht, unlösbare Aufgabe zu lösen
KL.: = Klassenstufe
nicht auf.: = nicht aufgeklärte Bedingung
aufgekl.: = aufgeklärte Bedingung

In den Abbildungen 2a und 2b ist der Zusammenhang zwischen dem Lösen einer Aufgabe und der Behandlung derselben Aufgabe in der unlösbaren Form dargestellt. In allen Altersgruppen und unter allen Bedingungen wurden bei unlösbaren Aufgaben Lösungsversuche unternommen, wenn die entsprechende lösbare Aufgabe nicht gelöst werden konnte. Defizite in der aufgabenspezifischen Problemlösekompetenz, also die Unfähigkeit, ein adäquates episodisches und/oder mathematisches Situationsmodell aufzubauen, sind eine Ursache für die Lösungsversuche bei unlösbaren Aufgaben. Fast ausschließlich unter der nicht aufgeklärten Bedingung und in Untersuchung II auch nur in der jüngeren Altersgruppe versuchen hingegen Kinder, unlösbare Aufgaben zu »lösen«, obwohl sie diese in der lösbaren Darbietungsform korrekt gelöst haben.

4.3 Diskussion der Ergebnisse

Die von Radatz geäußerte Vermutung, daß mit zunehmendem Alter die Tendenz zur Lösung unlösbarer Aufgaben steigt, konnte nicht bestätigt werden. Zudem zeigen die Ergebnisse, daß der Versuch, eine unlösbare Aufgabe zu »lösen« nicht auf völliges Unverständnis der Textaufgabe zurückgeführt werden kann. Erhalten die Kinder einen Hinweis, gelingt es ihnen, mit hoher Treffsicherheit unlösbare und lösbare Aufgaben zu unterscheiden. Die Kinder haben bereits das zum Verstehen der Textaufgaben notwendige Wissen erworben, verfügen aber noch nicht sehr sicher darüber und sind deshalb im Zweifelsfalle geneigt, die Schwierigkeiten mit dem Verstehen der Aufgabe der eigenen Unfähigkeit zuzuschreiben. Die Tendenz, unlösbare Aufgaben zu »lösen« ist nicht die Folge fehlenden Verständnisses, sondern Unsicherheit in der Verfügbarkeit bereits bestehenden Wissens, was wiederum verdeutlicht, daß Verstehen ein kontinuierlicher Prozeß ist.

Unsicherheit im Umgang mit Wissen ist nun keineswegs auf Kinder beschränkt. Auch Erwachsene werden, wenn sie nach der Ursache für das Scheitern an einer Aufgabe suchen, eher die eigene Unfähigkeit als die Unlösbarkeit einer Aufgabe in Betracht ziehen, wenn das Problem von einem ausgewiesenen Experten vorgetragen wurde. Interessant ist deshalb nicht die Tatsache, daß man auf unsinnige Dinge hereinfällt, sondern die Frage, welche Wissensdefizite dazu führen.

Die zweifellos bestehende Tendenz der Kinder, anstatt den Versuch zu unternehmen, eine Textaufgabe zu verstehen, mehr oder weniger willkürlich eine Gleichung auszuwählen, soll mit dieser Untersuchung keineswegs verharmlost werden. Sogenannte Überlebensstrategien, wie das Raten einer Gleichung oder das Anwenden der Schlüsselwortstrategie, sind gefährlich, weil sie so erfolgreich sind, daß dem Lehrer das mangelnde Aufgabenverständnis verborgen bleiben kann. Zu verhindern, daß Überlebensstrategien beim Lösen von Textaufgaben angewendet werden, ist eine Herausforderung für den Mathematikunterricht. Es gilt, die Verfügbarkeit der noch unsicher beherrschten Kompetenzen zu erhöhen. Gelingt dies nicht, weil der Zustand des »Halbwissens« ignoriert oder inadäquat behandelt wird, kann dies zu einer Konsolidierung der Überlebensstrategien führen und langfristige Verständnisdefizite hervorrufen.

Da gute Lehrer um die Anwendung von Überlebensstrategien wissen, verlassen sie sich nicht darauf, daß eine Textaufgabe, für die eine richtige Antwort gefunden wurde, auch verstanden wurde. Es werden zusätzliche Kriterien herangezogen, z. B. das Finden einer angemessenen Frage oder das Formulieren eines Antwortsatzes. Mit Hilfe dieser Methoden läßt sich herausfinden, welche Kinder die richtige Rechenoperation erraten. Ob eine Textaufgabe nicht nur gelöst, sondern auch verstanden wird, kann man auch herausfinden, indem man überflüssige quantitative Information mit in die Aufgabe aufnimmt [21] oder aber, indem man Aufgaben vorgibt, in denen mehr als zwei Zahlen verrechnet werden müssen. Bei Aufgaben, die die Addition und/oder Subtraktion von mehr als zwei Zahlen erfordern, errät man mit geringerer Wahrscheinlichkeit das richtige Ergebnis.

5. Die Förderung von Verstehensprozessen beim Lösen von Textaufgaben

Wichtiger noch als die Frage, wie man Schüler identifiziert, die eine Textaufgabe lösen, aber nicht verstehen, ist die Frage, wie man die Schüler dazu bringen kann, ihre bereits repräsentierten, aber noch nicht sicher abrufbaren episodischen und mathematischen Situationsmodelle zu aktivieren und sich mit der Textaufgabe auseinanderzusetzen, anstatt nur nach einer mathematischen Gleichung zu suchen. Im folgenden soll erörtert werden, wie dies durch Verbesserungen in der Darbietung der Textaufgaben erreicht werden kann. Die dargestellten Befunde beziehen sich vorwiegend auf Untersuchungen mit Grundschulkindern. Es gibt jedoch gute Gründe für die Annahme, daß ältere Kinder ähnliche Schwierigkeiten mit Textaufgaben zur Algebra haben wie jüngere Kinder mit Additions- und Subtraktionsaufgaben ([17]; [19]; [26]: [27; 28]; [29]; [53]). Die im folgenden dargestellten Anregungen können deshalb auch für das Lösen von Textaufgaben zur Algebra hilfreich sein.

5.1 Verbesserungen an der sprachlichen Oberflächenstruktur

Eine uneindeutige oder schwierige sprachliche Formulierung kann trotz vorhandenem mathematischem Wissen den Aufbau eines episodischen Situationsmodelles erschweren oder verhindern und damit die Kinder veranlassen, »blindlings« einen Rechenversuch zu starten.

In mehreren Untersuchungen wurde gezeigt, daß Verbesserung der sprachlichen Oberflächenstruktur das Lösen der Textaufgaben erleichtert. Reusser [36] hat gezeigt, daß Austauschaufgaben sehr viel einfacher werden, wenn man die zeitliche Handlungsabfolge durch den Gebrauch der Wörter »Zuerst, danach, zum Schluß« verdeutlicht. Cummins [8] konnte zeigen, daß Kombinationsaufgaben mit unbekannter Teilmenge vom Typ CB2 (s. Tabelle 1) sehr viel leichter werden, wenn man bei der Aufgabe »Maria und Hans haben zusammen 8 Murmeln. Maria hat 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?« vor der Frage den Satz einfügt »Die restlichen Murmeln gehören Hans.«.

Nicht nur die sprachliche Formulierung, sondern auch die Auswahl der in der Aufgabe vorkommenden Personen und Gegenstände kann das Verständnis der Aufgaben beeinflussen. Aufgaben, in denen der eigene Name der Kinder oder der Name ihrer Tiere vorkommt, erleichtern vor allem leistungsschwachen Kindern das Lösen von Textaufgaben [10]. Neben motivationalen Gründen – den eigenen Namen gedruckt zu sehen wirkt (nicht nur auf Kinder) verstärkend – gibt es auch »kognitive« Gründe: für die Verarbeitung vertrauter Information wird weniger Arbeitsspeicherkapazität benötigt, und es bleibt mehr Kapazität für das Situationsverständnis und die Aktivierung mathematischer Problemlösestrategien. Zu einer Entlastung des Arbeitsspeichers kann auch eine Individuierung der in der Aufgabe vorkommenden Personen beitragen. Die Wahl von männlichen und weiblichen Aktoren einer Textaufgabe kann den Aufbau eines episodischen Situationsmodelles (s. 3.1) erleichtern, weil zusätzliche Anhaltspunkte (z. B. Der Junge hat dem Mädchen etwas gegeben) genutzt werden können. Reusser [37] konnte zeigen, daß Austauschaufgaben erheblich einfacher wurden, wenn die Aktoren Aufgabe nicht durch drei leicht verwechselbare Jungennamen gekennzeichnet wurden, sondern mit »der Junge, die Oma und der Lehrer«.

5.2 Erleichterungen durch die Einbettung von Aufgaben in einen vertrauten situationalen Kontext

Eine eindeutige und klare Sprache ist die Voraussetzung für den Aufbau eines episodischen Situationsmodelles. Die der Textaufgabe zugrundeliegende Situation zu verstehen, bedeutet, zu wissen, in welchen Alltagssituationen der Vergleich, die Zusammenfassung oder der Austausch von Mengen vorkommt und welche Ziele mit diesen Operationen verbunden sind. So ist eine Erklärung für die im ersten Teil beschriebene Schwierigkeit der Kinder mit Vergleichsaufgaben, daß Kinder mit dem quantitativen Vergleich weniger vertraut sind als mit dem Austausch und der Zusammenfassung von Mengen. Zwar stellen Kinder sehr häufig soziale Vergleichsprozesse an, z. B. hinsichtlich der Menge ihrer Besitztümer, aber dabei geht es meistens lediglich um die Frage, wer mehr und wer weniger hat, also um den qualitativen Vergleich und nicht um die Ermittlung der exakten quantitativen Differenz. Resnick und Greeno [35] haben ein Modell zum Erwerb des quantitativen Vergleichsschemas (s. Abb. 1) entwickelt, wonach dieses aus der Integration von Wissen über den qualitativen Vergleich von Mengen (wer hat mehr, wer hat weniger) und von Wissen über Zählen und Zahlen entsteht.

Für die Vermutung, daß Vergleichsaufgaben den Kindern so schwerfallen, weil sie den Sinn des quantitativen Vergleiches nicht verstehen können, spricht der bei Riley, Greeno und Heller [39] berichtete Befund, wonach Vergleichsaufgaben mit unbekannter Differenzmenge (CP1, CP2) erheblich einfacher werden, wenn aus der Frage ein Handlungsziel sichtbar wird. Wird die Frage »Wie viele Murmeln hat Hans weniger als Maria?« ersetzt durch »Wie viele Murmeln muß Hans bekommen, damit er genau so viele Murmeln hat wie Maria?« wird die Aufgabe nicht von 28 %, sondern von 91 % der Erstkläßler gelöst. Dieser Befund konnte mit deutschen Kindern repliziert werden.

Stern und Lehrndorfer [49] haben gezeigt, daß Vergleichsaufgaben deutlich einfacher werden, wenn sie in eine Geschichte eingebettet werden, in der die in der Textaufgabe vorkommenden Kinder bezüglich ihrer Besitztümer verglichen werden. Der gefundene Effekt wird damit erklärt, daß in der Kontextgeschichte der den Kindern sehr vertraute qualitative Vergleich von Mengen aktiviert wird, was wiederum die Aktivierung des aus diesen Wissensstrukturen entstandenen quantitativen Vergleichsschemas erleichtert.

Insbesondere wenn die Aufgaben auch noch ohne Fragen dargeboten werden, reicht die vorgegebene Information möglicherweise nicht zum Aufbau eines episodischen Situationsmodelles aus und veranlaßt die Kinder zum Raten. Wie schwer es ist, ein episodisches Situationsmodell für eine in einem Rechenbuch für die 2. Klasse dargebotene Aufgabe zu finden, zeigt sich an folgendem Beispiel: Für die Aufgabe »Peter bekam 20 DM zum Geburtstag. Er kaufte sich ein Buch für 5 DM und ein Auto für 8 DM.« lassen sich mindestens zwei Fragen beantworten: 1. Wieviel Geld hat Peter ausgegeben? und 2. Wieviel Geburtstagsgeld hat Peter noch? Letztere Frage, die wahrscheinlich vom Autor des Rechenbuches beabsichtigt war, läßt sich strenggenommen nicht beantworten, da nicht gesagt wird, ob Peter das Geburtstagsgeld oder sonstiges Geld für den Kauf des Autos und des Buches verwendet. Die Einbettung in folgenden Kontext hätte diese Mißverständnisse verhindert: »Peter bekommt nur einmal im Monat Taschengeld. In diesem Monat hat er schon in der ersten Woche sein ganzes Taschengeld ausgegeben, deshalb konnte er sich nichts mehr kaufen. Zum Glück hatte er in der zweiten Woche Geburtstag und er bekam 20 DM geschenkt. Er kaufte sich am nächsten Tag ein Buch für 5 DM und ein Auto für 8 DM. Peter würde sich gern noch viele andere Dinge kaufen.« Bei Aebli, Staub und Ruthemann [2] wird erörtert, wie Konflikte zwischen Alltagserfahrungen und den in Textaufgaben dargestellten Situationen das Lösen dieser Aufgaben erschweren.

Die Einbettung einer Aufgabe in einen zielgerichteten Kontext ist keineswegs an das Alter gebunden und deshalb nicht nur bei jüngeren Kindern hilfreich. Resnick, Cauzinille-Marmiche und Mathieu [34] konnten nachweisen, daß Algebraaufgaben von ca. 15jährigen in einem erfahrungsnahen Kontext besser gelöst werden, und Ross [40] konnte gleiches für Studenten zeigen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung lernten. Die Einbettung von Aufgaben in Kontexte ist offensichtlich unabhängig vom Alter immer dann hilfreich, wenn das den Aufgaben zugrundeliegende mathematische Modell noch nicht soweit vertraut ist, daß es ohne den vertrauten Kontext aktiviert werden kann.

5.3 Der Erwerb von mathematischen Situationsmodellen

Eindeutige sprachliche Formulierungen und die Einbettung von Aufgaben in einen anschaulichen, erfahrungsnahen Kontext sind hilfreich, wenn das Kind bereits das nötige mathematische Problemlösewissen repräsentiert hat, dieses Wissen aber noch nicht in jeder Situation problemlos aktivieren kann. Verbesserungen in der Darbietung einer Textaufgabe auf sprachlicher und situationaler Ebene können jedoch nicht fehlendes mathematisches Problemlösewissen ersetzen. Wie im ersten Teil dieses Artikels ausgeführt, sind nach Riley und Greeno [38] einige Aufgaben schwieriger als andere, weil sie die Repräsentation des Teil-Ganzes-Schemas erfordern. Einige Aufgaben sind nicht extern modellierbar und können nicht gelöst werden, wenn die mathematischen Operationen Addition und Subtraktion als handlungsnahe Zähloperationen repräsentiert sind und nicht als Teil-Ganzes

Operationen. So läßt sich bei Austauschaufgaben mit unbekannter Startmenge (CH5, CH6) die im ersten Satz gegebene Information nicht extern repräsentieren. Ein mathematisches Modell für diese Aufgabe kann nur konstruiert werden, wenn der Umgang mit Platzhalteraufgaben (? + 3 = 5) geläufig ist. Auch bei Vergleichsaufgaben mit unbekannter Referenzmenge (CP5, CP6) läßt sich im Gegensatz zu Aufgaben mit unbekannter Vergleichsmenge (CP3, CP4) die im zweiten Satz gegebene Information nicht direkt mit Gegenständen modellieren. Die quantitative Information kann nur verarbeitet werden, wenn ein mathematisches Situationsmodell aufgebaut werden kann, das auf dem Teil-Ganzes-Schema basiert. Dazu muß man wissen, daß im zweiten Satz der Aufgabe die Differenz zwischen zwei Mengen genannt wird und man außerdem diesem Satz entnehmen kann, ob es sich bei der im ersten Satz gegebenen Information um die kleine oder die große Menge handelt. Die hierzu notwendige Repräsentation der Addition und der Subtraktion als komplementäre Teil-Ganzes-Operationen kann jedoch nicht bei allen Grundschulkindern vorausgesetzt werden.

Bereits bevor Kinder in die Schule kommen, haben sie im allgemeinen ein Konzept von den mathematischen Operationen Addition und Subtraktion gebildet. Diese Konzepte sind noch sehr handlungsnah: Addition bedeutet, etwas zu bekommen und Subtraktion bedeutet, daß etwas weggenommen wird. Diese Art der Veranschaulichung mag den Kindern durchaus das Verständnis von Addition und Subtraktion erleichtern, sie birgt aber auch die Gefahr in sich, daß Addition und Subtraktion als etwas Gegensätzliches gesehen wird. Stern [46] konnte zeigen, daß 70 % der untersuchten Erstkläßler noch nicht wissen, daß die Sätze »Hans hat 5 Murmeln mehr als Peter« und »Peter hat 5 Murmeln weniger als Hans« bedeutungsgleich sind. Stern [46] geht davon aus, daß dieses Defizit nicht mit mangelndem Sprachverständnis allein zu erklären ist, sondern mit Defiziten im mathematischen Verständnis: Für die Kinder ist »mehr« mit Addition und »weniger« mit Subtraktion verbunden. Wenn die Kinder die Komplementarität von Addition und Subtraktion nicht verstanden haben, können sie auch nicht wissen, daß man die Differenz zwischen zwei Mengen auf unterschiedliche Weise sprachlich ausdrücken kann.

Die Komplementarität von Addition und Subtraktion verstanden zu haben, heißt, den Zusammenhang zwischen mathematischen Gleichungen zu erkennen. So können die Gleichungen 2 + 4 = 6, 4 + 2 = 6, 6 - 2 = 4 und 6 - 4 = 2 als unterschiedliche Ausprägungen der Beziehung zwischen den Zahlen des Tripels »2, 4, 6« interpretiert werden. Dies setzt voraus, daß Addition und Subtraktion nicht nur als die Handlungen »etwas dazutun« und »etwas wegnehmen« repräsentiert sind, sondern daß erkannt wird, daß mathematische Gleichungen als unterschiedliche Namen für die gleiche Bedeutung aufgefaßt werden können: »5 + 3« ist ein anderer Name für »7 + 1« oder für »8«. Aebli [1], der Piaget-Tradition verpflichtet, wonach Denken abstraktes Handeln ist, warnt entschieden vor einer nicht handlungsorientierten Repräsentation mathematischer Gleichungen bei jüngeren Kindern. Hingegen sehen Resnick und Greeno [35], die sich ausdrücklich zu Piagets Handlungsansatz bekennen, die Notwendigkeit, die handlungsnahe Repräsentation durch eine Teil-Ganzes Repräsentation zu ergänzen. Dies kann nach Auffassung der Autoren unterstützt werden durch die Vorgabe von Aufgaben, in denen die Kinder angeben müssen, aus welchen additiven Kompositionen eine Zahl zusammengesetzt werden kann, z. B. »8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3 ...« (siehe auch [55]). Auch Aufgaben der Art »3 + 5 = ? + 2« oder »2 + 5 = ? - 4« unterstützen nach Resnick und Greeno [35] die Repräsentation von arithmetischen Fakten als Teil-Ganzes-Beziehungen.

Stern (in Vorbereitung) konnte zeigen, daß Grundschulkinder aller Klassenstufen noch erstaunlich unflexibel sind, wenn es darum geht, mehrere angemessene mathematische Gleichungen für eine Aufgabe zu finden. Nur wenige Kinder wissen beispielsweise, daß es für die in Tabelle 1 dargestellten Aufgaben vier mögliche mathematische Gleichungen gibt, z. B. für die Vergleichsaufgabe mit unbekannter Differenzmenge CP2 die Gleichungen 6 - 2 =, 2 + ? = 6, ? + 2 = 6, 6 - ? = 2. Die Aufgaben aus Tabelle 1 wurden den Kindern zusammen mit acht Gleichungen dargeboten, davon vier wie im Beispiel angegeben. Zusätzlich wurden vier Gleichungen dargeboten, die nicht zum richtigen Ergebnis führten (für CP2: $6+2=$, $2+6=$, $?-2=6$, $?-6=2$). Den Versuchsteilnehmern wurde mitgeteilt, daß es sich um Rechenwege von verschiedenen Kindern handele, davon seien einige falsch und einige richtig und sie, die Versuchsteilnehmer, sollten herausfinden, welche Rechenwege richtig seien und welche nicht. Weniger als 10 % der Drittkläßler und weniger als 40 % der Viertkläßler konnten die vier richtigen Rechenwege identifizieren. Die anderen Kinder gaben nur einen oder zwei Rechenwege als adäquat an. Zwischen den Kindern gab es große Unterschiede darin, welcher Rechenweg als adäquat gewählt wurde. Fast immer handelte es sich um die Rechenwege, die die Kinder eine Woche zuvor bei der Lösung der Aufgaben selbst gewählt hatten. Kinder, die z. B. bei der Austauschaufgabe mit unbekannter Startmenge (CH5 in Tabelle 1) den Weg $?+3=5$ gewählt hatten, gaben diesen Weg als den einzig adäquaten an, und für Kinder, die $5-3=?$ wählten, waren alle anderen Gleichungen falsch. Die Ergebnisse dieser Studie sprechen dafür, daß selbst bei vielen Viertkläßlern das mathematische Wissen noch nicht in Form von Teil-Ganzes-Schemata gespeichert ist. Diese Inflexibilität im Umgang mit mathematischem Wissen wird möglicherweise noch gefördert durch die Festlegung der Kinder auf bestimmte Rechenwege, insbesondere bei Austauschaufgaben. Hier wird von den Kindern verlangt, daß sie den zeitlichen Ablauf im Rechenweg modellieren, also für Aufgaben mit unbekannter Startmenge den Rechenweg »$?+a=b$« und bei den Aufgaben mit unbekannter Austauschmenge den Weg »$a+?=b$« wählen. Zum Teil wird die Wahl eines anderen Rechenweges den Kindern sogar als Fehler angerechnet.

5.4 Zusammenfassende Betrachtung

Im Mathematikunterricht, insbesondere beimLösen von Textaufgaben, geht es darum, die Verbindung zwischen abstrakten mathematischen Konzepten und Alltagswissen herzustellen. Dies ist keineswegs auf die Grundschulzeit beschränkt, sondern gilt gerade auch für die in der Mittelstufe auf dem Lehrplan stehenden Inhalte, wie z. B. der Bruchrechnung. Die Herausforderung, die dabei an den Lehrer gestellt wird, besteht darin, das richtige Maß von Veranschaulichung und Abstraktion zu finden. Mathematische Konzepte, die nicht an anschauliche Beispiele geknüpft sind, erschweren das Verständnis, zumindest für die meisten Schüler. Umgekehrt kann eine zu alltagsnahe Einbettung Schwierigkeiten bei der Generalisierung der Konzepte auf neue Aufgabenstellungen verursachen. So konnten Stern und Mevarech [47] zeigen, daß Kinder mathematische Konzepte, die sie am Beispiel von Geld erworben haben, nicht auf andere Gebiete übertragen und umgekehrt ihr bereits vorhandenes mathematisches Wissen über Brüche nicht anwenden können bei Aufgaben, in denen es um Geld geht.

Die Einbettung mathematischer Konzepte in alltagsnahe Kontexte kann kurzfristige Erfolge bringen, die sich langfristig negativ auf den Erwerb anderer mathematischer Konzepte auswirken können. Die Multiplikation und die Division werden in der Grundschule am sogenannten »Verteilungsmodell« erklärt, z. B.: »Es gibt 5 Kinder. Jedes Kind soll 3 Bananen bekommen. Wie viele Bananen werden benötigt?« oder »15 Bananen sollen unter 5 Kindern verteilt werden, so daß jedes Kind die gleiche Anzahl an Bananen bekommt. Wie viele Bananen bekommt jedes Kind?« Mit diesem Situationsmodell geht implizit einher, daß das Ergebnis einer Multiplikation immer größer und das Ergebnis einer Division immer kleiner ist als die verrechneten Zahlen. Wenn diese Regel jedoch zum zentralen Bestandteil der Multiplikations- und Divisionskonzepte gehört, werden beim Verständnis der Multiplikation und Division von Brüchen Schwierigkeiten entstehen [14; 15]. So können in der Grundschulzeit die Grundlagen für Schwierigkeiten gelegt werden, die erst später manifest werden. Guter Mathematikunterricht zeichnet sich unter anderem durch das richtige Ausmaß an Veranschaulichung und Abstraktion aus.

Literatur

[1] *Aebli, H.* (1980/1981): Denken: Das Ordnen des Tuns (Bd. 1 u. 2). Stuttgart: Klett-Cotta

[2] *Aebli, H./Staub, F./Ruthemann, U.* (1991): Textrechnungen im Mathematikunterricht: Wie und wozu? mathematik lehren, 44, 12–17

[3] *Anderson, J. R.* (1987): Skill acquisition: Compilation of weakmethod problem solutions. Psychological Review, 94, 192–210

[4] *Briars, D. J./Larkin, J. H.* (1984): An integrated model of skill in solving elementary word problems. Cognition and Instruction, 1, 245–296

[5] *Bühler, K.* (1908): Tatsachen und Probleme zu einer Psychologie der Denkvorgänge. Teil II: Über Gedankenzusammenhänge. Archiv für die gesamte Psychologie, 12, 1–23

[6] *Carpenter, T. P./Corbitt, M. K./Kepner, H. S./Lindquist, M. M./Reys, R. E.* (1980): Solving verbal problems: Results and implications for National Assessment. Arithmetic Teacher, 28, 8–12

[7] *Chi, M. T. H.* (1978): Knowledge structure and memory development. In: R. S. Siegler (Hrsg.). Children's thinking; What develops?, S. 73–96. Hillsdale, NJ: Erlbaum

[8] *Cummins, D. D.* (1991): Children's interpretations of arithmetic word problems. Cognition and Instruction, 8, 261–289

[9] *Cummins, D./Kintsch, W./Reusser, K./Weimer, R.* (1988): The role of understanding in solving word problems. Cognitive Psychology, 20, 405–438

[10] *Davis-Dorsey, J./Ross, S. M./Morrison, G. R.* (1991): The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. Journal of Educational Psychology, 83, 61–68

[11] *Dellarosa, D.* (1986): A Computer simulation of children's arithmetic word problem solving. Behavior Research Methods, Instruments and Computers, 18, 147–154

[12] *Fletcher, C. R.* (1985): Understanding and solving arithmetic word problems: A computer simulation. Behavior Research Methods, Instruments and Computers, 17, 565–571

[13] *Greer, B.* (1987): Understanding of arithmetical operations as models of situations. In: J. A. Sloboda/D. Rogers (Eds.), Cognitive processes in mathematics (pp. 169–203). Oxford/UK: Oxford University Press

[14] *Greer, B.* (1991a): Extending the meaning of multiplication and division. In: G. Honel/T. Contey (Hrsg.). Multiplicative concepts. New York: Suny Press

[15] *Greer, B.* (1991b): Multiplication and Division as Models of Situations. In: G. Grouws (Hrsg.). Handbook of research on Learning and Teaching mathematics. NCTM Macmillan

[16] *Gentner, D./Stevens, A. L. (Eds.).* (1983): Mental models. Hillsdale, NJ: Erlbaum

[17] *Hall, R.* (1990): Exploring the episodic structure of algebra problem solving. Unveröffentlichte Doktorarbeit. University of California, Irvine, CA

[18] *Hiebert, J. (Ed.).* (1986): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Hillsdale, NJ: Erlbaum

[19] *Hinsley, D. A./Hayes, J. R./Simon, H. A.* (1977): From words to equations: Mening and representation in algebra word problems. In: M. A. Just/P. A. Carpenter (Hrsg.), Cognitive processes in comprehension, S. 89–108, Hillsdale, NJ: Erlbaum

[20] *Hudson, T.* (1983): Correspondences and numerical differences between disjoint sets. Child Development, 54, 84–90

[21] *Jaspers, M. W. M.* (1991): Prototyptes of computer-assisted instruction for arithmetic word-problem solving. Doctoral dissertation, Katholieke Universiteit Nijmegen/NL, Department of Special Education

[22] *Johnson-Laird, P. N.* (1983): Mental models. Cambridge, MA: Harvard University Press

[23] *Kintsch, W.* (1988): The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. Psychological Review, 95, 163–182

[24] *Kintsch, W./Greeno, J. G.* (1985): Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological Review, 92, 109–129

[25] *Kintsch, W./van Dijk, T. A.* (1978): Toward a model of text comprehension and production. Psychological Review, 85, 363–394

[26] *Lewis, C. H.* (1981): Skill in Algebra. In: J. R. Anderson (Hrsg.), Cognitive skills and their acquisition, S. 85–110. Hillsdale, NJ: Erlbaum

[27] *Mayer, R. E.* (1981): Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories and templates. Instructional Science, 10, 135–175

[28] *Mayer, R. E.* (1982): Memory for algebra story problems. Journal of Educational Psychology, 74, 199–216

[29] *Nathan, M. J.* (1991): A theory of word algebra comprehension and its implications for the design of computer-based learning environment. Unveröffentlichte Dissertation. University of Colorado, Boulder, CO
[30] *Rabinowitz, M.* (1985, April): A representation of simple addition knowledge and related processing characteristics. Paper presented at the biennial meeting of the Society for Research in Child Development, Toronto
[31] *Radatz, H.* (1983): Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. Journal für Mathematikdidaktik, 3, 205-217
[32] *Resnick, L. B.* (1983): A developmental theory of number understanding. In: H. P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 109-151). New York: Academic Press
[33] *Resnick, L. B.* (1989): Developing mathematical knowledge. American Psychologist, 44, 162-169
[34] *Resnick, L. B./Cauzinille-Marmech, E./Mathieu, J.* (1987): Understanding algebra. In: J. A. Sloboda/D. Rogers (Eds.), Cognitive processes in mathematics (pp. 169-203). Oxford/UK: Oxford University Press
[35] *Resnick, L. B./Greeno, J. G.* (1990): Conceptual growth of number and quantity. Unpublished manuscript, University of Pittsburgh
[36] *Reusser, K.* (1989): Vom Text zur Situation zur Gleichung. Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben. Universität Bern: Habilitationsschrift/Postdoctoral thesis
[37] *Reusser, K.* (1990): From text to situation to equation: Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. In: H. Mandl/E. De Corte/N. Bennett/H. F. Friedrich (Eds.), Learning and instruction: Vol. 2.2. Analysis of complex skills and complex knowledge domains (pp. 477-498). Oxford: Pergamon Press
[38] *Riley, M. S./Greeno, J. G.* (1988): Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. Cognition and Instruction, 5, 49-101
[39] *Riley, M. S./Greeno, J. G./Heller, J. H.* (1983): Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In: H. P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking (pp. 153-196). New York: Academic Press
[40] *Ross, B. H.* (1989): Distinguishing types of superficial similarities: Different effects on the access and use of earlier problems. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 15, ??
[41] *Schoenfeld, A. H.* (1982): Some thougths on problem-solving research and mathematics education. In: F. K. Lester, Jr./J. Garofalo (Eds.), Mathematical problem solving: Issues and research (pp. 27-37). Philadelphia: The Franklin Institute Press
[42] *Siegler, R. S.* (1984): Mechanisms of cognitive growth: variation and selection. In: R. Sternberg (Hrsg.). Mechanisms of cognitive development. New York: Freeman Company
[43] *Siegler, R. S.* (1987): Strategy choices in subtraction. In: J. A. Sloboda/D. Rogers (Eds.), Cognitive processes in mathematics (pp. 81-106). Oxford: Oxford University Press
[44] *Siegler, R. S.* (1987): The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition. Journal of Experimental Psychology: General, 116, 250-264
[45] *Siegler, R. S./Shrager, J.* (1984): Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In: C. Sophian (Ed.), Origins of cognitive skills (pp. 229-294). Hillsdale, NJ: Erlbaum
[46] *Stern, E.* (1991a): The role of language in solving word problems. Vortrag auf Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), Chicago
[47] *Stern, E.* (1991b): Vom Handeln zur Abstraktion? Wie entwickeln sich mentale Modelle? Vortrag auf der 33. Tagung experimentell arbeitender Psychologen, Gießen
[48] *Stern, E.* (1992): Die spontane Strategieentdeckung in der Arithmetik. In: H. Mandl/H. F. Friedrich (Eds.), Lern- und Denkstrategien – Analyse und Intervention. (pp 101-123) Göttingen: Hogrefe
[49] *Stern, E./Lehrndorfer, A.* (1992): The role of situational context in solving word problems. Cognitive Development, 7, 259-268
[50] *Trabasso, T.* (1977): The role of memory as a system in making transitive inferences. In: R. V. Kail/J. W. Hagen (Hrsg.), Perspectives in the development of memory and Cognition. Hillsdale, NJ: Erlbaum
[51] *Van Lieshout, E. C. D. M.* (in press): Recording of reading behaviour with touch contingent word presentation. Manuscript accepted for publication in »Computers in Psychology«

[52] *Van Lieshout, E. C. D. M./Jaspers, M. W. M.* (1990): A training procedure for children with learning deficiencies to improve their presentation of simple arithmetic word problems. In: H. Mandl/E. De Corte/N. Bennett/H. F. Friedrich (Eds.), Learning and instruction. European research in an international context: Vol. 2.2. Analysis of complex skills and complex knowledge domains (pp. 431–444). Oxford: Pergamon
[53] *Weaver, C.A./Kintsch, W.* (1991): The conceptual structure of word algebra problems. Journal of Educational Psychology
[54] *Wittmann, E. Ch.* (1989, Februar): Mathematiklernen zwischen Skylla und Charbdis. Vortrag im Rahmen des Symposiums »Verstehen lehren«, Universität Bern, Abt. Pädagogische Psychologie
[55] *Wittmann, E. Ch.* (1990): Wider die Flut der »bunten Hunde« und der «grauen Päckchen«: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: E. Ch. Wittmann/G. N. Müller (Eds.), Handbuch produktiver Rechenübungen: Bd. 1 Vom 1 + 1 zum 1 · 1. Stuttgart: Klett