Elsbeth Stern/Fritz Staub

Mathematik lernen und verstehen: Anforderungen an den Unterricht

1. Ziele des Mathematikunterrichtes

Nicht zuletzt angesichts des enttäuschenden Abschneidens der deutschen Schüler/innen in der Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) in der Mittelstufe (Baumert 1998) muss auch der Mathematikunterricht der Grundschule kritisch überdacht werden. Lassen sich zumindest einige Ursachen für das ungünstige Abschneiden der Schüler/innen der Sekundarstufe damit erklären, dass Grundschüler/innen nicht optimal auf die Anforderungen des späteren Mathematikunterrichtes vorbereitet werden? Da Deutschland nicht an der internationalen Vergleichsstudie für die Grundschule (Mullis/Martin/Beaton/Gonzalez/Kelly/Smith 1997) teilnahm, lassen sich suboptimale Unterrichtserfolge im mathematischen Grundschulunterricht gegenwärtig nur vermuten.

In diesem Beitrag wird einerseits Fragen nach der Funktion des Mathematikunterrichtes in der Grundschule nachgegangen, und andererseits werden Befunde diskutiert, die Aufschluss darüber geben können, in welchem Maße der gegenwärtige Mathematikunterricht seiner Bestimmung nachkommt. Dabei werden insbesondere die in der Zeit von 1988 bis 1991 am Münchener Max-Plack-Institut für psychologische Forschung durchgeführten Studien herangezogen. Unter der Leitung von Prof. Dr. mult. Franz E. Weinert wurde von 1988 bis 1991 die Längsschnittstudie SCHOLASTIK (Schulorganisierte Lernangebote und Sozialisation von Talenten, Interessen und Kompetenzen) durchgeführt, die eine Ergänzung der individuellen Längsschnittstudie LOGIK (Longitudinalstudie zur Genese individueller Kompetenzen) (Weinert/Schneider 1999) darstellt. In der SCHOLASTIK-Studie wurden in 54 Grundschulklassen im Raum München und Fürstenfeldbruck in jedem Schuljahr mehrere Leistungsmessungen durchgeführt (Weinert/Helmke 1997). Elsbeth Stern war als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für die Leistungsmessung in Mathematik zuständig und führte zudem an Münchener Kinderhorten experimentelle Studien zum Umgang mit mathematischen Textaufgaben durch. Fritz Staub führte als Forschungsstipendiat am Institut vertiefende Studien zum Unterrichten von Textaufgaben und zu Lehrerüberzeugungen zum Lernen und Lehren durch. Vor diesem Forschungshintergrund konnten Stärken und Schwächen des gegenwärtigen Mathematikunterrichtes beleuchtet werden.

2. Welche mathematischen Kompetenzen sollten aufgebaut werden?

Mathematik im Allgemeinen, und insbesondere die so genannte höhere Mathematik, wird selbst von Erwachsenen häufig als Selbstzweck angesehen. Zur Bewältigung von Alltagsanforderungen reichen die Grundrechenarten sowie Bruch- und Prozentrechnung meist aus. Dass Mathematik in den Natur- und Ingenieurwissenschaften benötigt wird, ist zwar allgemein akzeptiert; wenige Menschen hingegen vergegenwärtigen sich, dass Mathematik darüber hinaus auch als ein Werkzeug gesehen werden kann, welches dem menschlichen Geist erlaubt, nicht direkt wahrnehmbare Aspekte der Welt fassbar zu machen. Mit mathematischen Symbolen lassen sich nicht nur konkrete Handlungen wie die Vergrößerung oder Verkleinerung von Mengen abbilden, sondern auch geistige Handlungen durchführen, die in der materiellen Welt nicht möglich sind. Materialeigenschaften wie das spezifische Gewicht, psychometrische Konstrukte wie die allgemeine Intelligenz und der Umgang mit Unsicherheiten basieren maßgeblich auf einer formalen Modellierung und sind ohne Mathematik nicht denkbar. Während Ressourcen der physikalischen Welt endlich sind, können Zahlen unendlich vergrößert werden. Ebenso gilt, dass in der materiellen Welt Gegenstände durch permantes Halbieren ihren Charakter verlieren, während Zahlen auch nach unendlich häufigem Teilen nicht verschwinden. Mathematik kann als ein formales System verstanden werden, in dem durch symbolische Operationen neue Konzepte kreiert werden können. Auf der Grundlage dieser Konzepte können dann in Verbindung mit sprachlich repräsentierten Ideen neue Wissensdomänen erschlossen werden (dazu: Staub/Stern 1997a). Dass selbst die Mehrzahl der Gymnasiasten in der elften Klasse kein derartiges Verständnis von Mathematik hat, zeigten Ergebnisse der Nacherhebung der LOGIK-Studie (Stern 1999a). Ein von Köller, Baumert und Neubrand (in Druck) entwickelter Fragebogen zu »mathematischen Weltbildern«, der auf den Arbeiten von Schoenfeld (1983) basiert, ergab, dass 57 % der Gymnasiasten in der 11. Klasse der Aussage zustimmten: »Die Herleitung oder der Beweis der Formel ist mir unwichtig: Entscheidend ist, dass ich sie anwenden kann.« Sogar 90 % der Stichprobe stimmten der Aussage zu: »Mathematik betreiben heißt: allgemeine Gesetze und Verfahren auf spezielle Probleme anwenden«. Offensichtlich ist selbst der Mehrheit der Gymnasiasten nicht bewusst, dass Mathematik nicht nur das korrekte Anwenden von Regeln ist, sondern dass sie auch genutzt werden kann, um sich anders nicht zugängliche Welten zu erschließen. Dass bereits im Grundschulunterricht die Grundlagen für ein erweitertes Verständnis der Mathematik geschaffen werden können, soll in diesem Artikel gezeigt werden.

3. Das eingeschränkte Verständnis von Zahlen und mathematischen Operationen

Spektakuläre Ergebnisse der Säuglings- und Kleinkindforschung der letzten Jahre sprechen dafür, dass Menschen mit spezifischem Wissen ausgestattet sind, welches ihnen die Orientierung in der belebten und unbelebten Natur erleichtert. So muss Wissen über die Eigenschaften von Objekten nicht durch persönliche Erfahrung erworben werden, sondern scheint genetisch verankert zu sein (dazu: Krist/Natour/Jäger/Knopf 1998). Insbesondere die Arbeiten von Wynn (1992) sprechen dafür, dass Wissen zur Quantifizierung sowie zur Vergrößerung und Verkleinerung von Mengen angeboren ist. Dass darüber hinaus auch der Erwerb von Zählkompetenzen ähnlich wie der Spracherwerb durch angeborenes Wissen unterstützt wird, ist allgemeiner Konsens in der Entwicklungspsychologie. Zwischen drei und vier Jahren werden bei Kindern offensichtlich die Prinzipien des Zählens aktiviert, und es müssen nur noch die muttersprachlichen Zahlnamen in dieses konzeptuelle System integriert werden (Details können bei Stern 1998 nachgelesen werden). So lernen Kinder bereits in der Vorschulzeit das Zählen, ohne dass es professioneller systematischer Instruktion bedarf (Resnick 1989). Auch ein Grundverständnis von Addition und Subtraktion liegt vor. Deshalb können erfahrungsnahe Situationen wie

> 5 Vögel haben Hunger.
> Sie finden 3 Würmer.
> Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?

bereits von der großen Mehrheit der Vorschulkinder mathematisch modelliert werden (Stern 1994 a, 1998). Gleichzeitig bereitet aber das Verständnis von Situationen zum quantitativen Vergleich noch Grundschulkindern der dritten Klasse große Schwierigkeiten. Endet o.g. Textaufgabe mit der Frage

> Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?

bereitet sie selbst einigen Drittklässlern noch Schwierigkeiten, die nicht allein mit sprachlichen Problemen zu erklären sind (Staub/Reusser 1995; Stern 1994b; Stern/Lehrndorfer 1992). Vielmehr gibt es gute Gründe für die Annahme, dass die mathematischen Grundlagen für das Verständnis des quantitativen Vergleichs fehlen. So zeigte sich bei Stern (1993), dass Kinder der zweiten Klasse noch nicht verstehen, dass die Sätze: »Hans hat 5 Murmeln weniger als Peter,« und: »Peter hat 5 Murmeln mehr als Hans,« äquivalent sind. Konfrontiert mit den Sätzen: »Susanne hat 7 Murmeln mehr als Petra«, »Hans hat 3 Murmeln mehr als Erwin,« antwortet die gleiche Altersgruppe auf die Frage: »Wer hat die meisten Murmeln?« mehrheitlich ohne zu zögern »Susanne« (Stern 1999b). Offensichtlich haben Kinder noch eine sehr starke Tendenz, Zahlen ausschließlich als Zählinstrumente, d. h. als

Kardinalzahlen zu interpretieren. Dies entspricht der so genannten »natürlichen«, zumindest teilweise auf genetischen Grundlagen beruhenden Mathematik. Erst im Laufe der kulturellen Entwicklung wurde die Funktion von Zahlen erweitert, z. B. indem sie als Bruch- oder Dezimalzahlen die Beziehung zwischen Mengen abbilden. Nicht-natürliche Zahlen unterliegen bekanntlich anderen Möglichkeiten und Einschränkungen als natürliche Zahlen: Es gibt eine kleinste natürliche, nicht aber eine kleinste nicht-natürliche Zahl. Wenn man sich im Bereich der natürlichen Zahlen bewegt, kann man ermitteln, wie viele Zahlen zwischen zwei Zahlen liegen. Bewegt man sich dagegen im Bereich der nicht-natürlichen Zahlen, so ist dies nicht möglich. Stern und Mevarech (1996) untersuchten mathematische Fehlvorstellungen der Grundschulkinder, wenn diese mit Aufgaben konfrontiert wurden, in denen mathematische Anforderungen und Alltagserfahrung im Widerspruch waren. So sollten die Kinder sagen, was passiert, wenn man ein Glas Orangensaft sehr häufig halbiert. Die häufigste Antwort von Viertklässlern lautete: »Erst wird es 1/2, dann 1/4, dann 1/8 und dann ist es null. Die Hälfte von 1/8 ist null.« Die Kinder haben offensichtlich bereits die erwähnten Bruchzahlen kennen gelernt, integrieren sie aber in ihr System von natürlichen Zahlen und nehmen damit an, dass zwischen der kleinsten ihnen bekannten Zahl und Null keine weiteren Zahlen liegen. In dieser Fehlvorstellung zeigen sich Parallelen zu den bekannten Fehlvorstellungen aus der Physik, über die z. B. Vosniadou (1991) berichtet: Die Kinder versuchen, Ungereimtheiten in ihr bisheriges Wissenssystem zu integrieren. Wird ihnen z. B. gesagt, dass die Erde eine Kugel sei, integrieren sie diese Information in ihre Vorstellung von der Erde als Scheibe, indem sie das Modell einer Halbkugel kreieren, auf deren Fläche die Menschen leben.

Bereits vor der Einschulung liegt bei den Kindern ein weit reichendes mathematisches Verständnis vor: Sie verfügen über Konzepte vom Zählen, vom Verkleinern und Vergrößern von Mengen sowie vom Teilen und Vermehren durch wiederholte Addition. In der Grundschule erwerben sie vor allem Strategien zum schriftlichen Umgang mit großen Zahlen. Auch wenn das Rechnen mit sechsstelligen Zahlen mühsam und fehleranfällig ist und deshalb intensiver Übung bedarf, stellt es keine besonders hohen Anforderungen an das konzeptuelle Wissen, da dieses auf der »natürlichen« Mathematik beruht: Zahlen sind zum Zählen da, und Addition und Subtraktion beschreiben die Vergrößerung bzw. Verkleinerung von Mengen. Die eigentliche konzeptuelle Herausforderung im Mathematikunterricht besteht darin, zu erkennen, dass Zahlen nicht nur zum Zählen da sind, und dass mathematische Gleichungen nicht immer als Handlungsaufforderungen zu verstehen sind, sondern auch Beziehungen beschreiben können, die nur innerhalb des numerischen Systems sinnvoll sind. Kommt es in der Grundschulzeit nicht zu dieser Erweiterung des mathematischen Verständnisses, fällt es in der Sekundarstufe schwer, zu verstehen, dass die Multiplikation mit Zahlen, die kleiner als 1 sind, zu einer Verkleinerung einer Menge führt, während eine Division mit einer derartigen Zahl diese vergrößert. An anderer Stelle (Stern 1994b; 1995; 1998) wurde ausführlich diskutiert, dass mit mathematischen Textaufgaben zum quantitativen Vergleich eine Erweiterung des mathematischen Verständnisses bereits in der Grundschule erreicht werden könnte. Im Gegensatz zum Grundschulunterricht in osteuropäischen und ostasiatischen Ländern kommen jedoch Vergleichsaufgaben im deutschen Grundschulunterricht so gut wie nicht vor. In ihrer Staatsexamensarbeit verglich Heike Sommer (1995) die in der früheren DDR und der Sowjetunion benutzten Grundschul-Rechenbücher (2. Klassenstufe) mit den in Westdeutschland üblichen Büchern. Es zeigte sich, dass in den Büchern der DDR und der Sowjetunion ca. zehnmal so viele Textaufgaben vorkamen wie in westdeutschen Büchern. Zudem handeln in allen westdeutschen Büchern weniger als 10 % der Textaufgaben vom einfachen quantitativen Vergleich, während dies im DDR-Buch 22 % und im sowjetischen Buch 37 % waren. Noch krasser wird der Unterschied bei komplexen, mehrstufigen Aufgaben, wie sie z. B. weiter hinten in diesem Artikel genannt werden. In vielen westdeutschen Büchern kommen derartige Aufgaben gar nicht vor; in anderen Büchern wurden maximal vier Aufgaben dieser Art angeboten. Im DDR-Buch kamen immerhin 12 komplexe Vergleichsaufgaben vor und im Rechenbuch der Sowjetunion 33. Leider wurde nach der Wiedervereinigung der beiden deutschen Staaten nicht an diese Tradition des Grundschul-Mathematikunterrichtes angeknüpft.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass im gegenwärtigen Grundschulunterricht das Potenzial, das Textaufgaben zur Erweiterung des mathematischen Verständnisses bieten, nur suboptimal genutzt wird. Im Folgenden wird über Studien berichtet, die einerseits den positiven Einfluss der Lehrer/innen auf ein erweitertes mathematisches Verständnis belegen und andererseits Nachholbedarf in der Lehrer/innenausbildung aufzeigen.

4. Verständnisfördernde Merkmale: Auf die Lehrer/innen kommt es an

In seiner im SCHOLASTIK-Projekt angesiedelten Doktorarbeit beobachtete Alexander Renkl den Mathematikunterricht mehrerer Grundschulklassen über einen längeren Zeitraum (Renkl 1991). Ihn interessierte insbesondere, welche Arten von Übungsaufgaben die Lehrer/innen vorgaben. Es zeigte sich, dass mathematische Textaufgaben sehr selten vorkamen. Gleichzeitig unterschieden sich die Lehrer/innen aber deutlich darin, ob sie vorwiegend strukturorientierte oder performanzorientierte Arithmetikaufgaben vorgaben. Während erstere auf die Vermittlung mathematischer Prinzipien wie Kommutativität oder die reziproke Beziehung zwischen Addition und Subtraktion abzielten, dienten letztere der Automatisierung bereits verfügbarer Rechenstrategien. Da die untersuchten Klassen an der Leistungsmessung des SCHOLASTIK-Projektes teilnahmen, konnten Effekte auf den Lerngewinn beim Lösen von Textaufgaben und Arithmetikaufgaben erfasst werden. Tatsächlich zeigte sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen der Vorgabe von strukturorientierten Aufgaben und dem Leistungszuwachs von der zweiten zur dritten Grundschulklasse, insbesondere beim Lösen von Textaufgaben (Renkl/Stern 1994). Obwohl Textaufgaben in der Schule nur selten vorkommen, gibt es indirekte Übungseffekte durch anregende Arithmetikaufgaben. Es konnte etwa ein Drittel der zwischen den Klassen zu beobachtenden Leistungsvarianz im Lösen von Textaufgaben durch die Häufigkeit, mit der strukturorientierte Aufgaben vorgegeben wurden, erklärt werden.

Diese beeindruckenden Effekte veranlassten uns, die Unterschiede zwischen den Lehrer/innen genauer zu untersuchen. Wir versandten an die am SCHOLASTIK-Projekt beteiligten Lehrerinnen der 3. und 4. Klasse einen in der Arbeitsgruppe von Elizabeth Fennema entwickelten Fragebogen zu fachspezifisch-pädagogischen Überzeugungen im Bereiche der mathematischen Grundoperationen (Peterson/Fennema/Carpenter/Loef 1989). Da die Fragebogenerhebung drei Jahre nach Abschluss des Projektes erfolgte, waren nur 27 der 54 Lehrer/innen erreichbar. In dem Fragebogen wird erfasst, ob Lehrer/innen eine eher konstruktivistische oder eine eher rezeptive Grundhaltung zum Mathematiklernen haben. Eine konstruktivistische Grundhaltung, die z. B. in der Zustimmung zum Item: »Auch Schüler/innen, die noch kein solides numerisches Faktenwissen erworben haben, können erfolgreich Probleme lösen« zum Ausdruck kommt, basiert auf der Annahme, dass Schüler/innen sukzessive durch eigene Lernaktivitäten zu einem mathematischen Verständnis kommen und die zentrale Rolle der Lehrer/innen in der Auslösung und Begleitung dieser Lernaktivitäten besteht. Eine rezeptive Einstellung beruht dagegen auf der Überzeugung, dass mathematisches Verständnis vor allem durch das Nachvollziehen von Darstellungen und Erklärungen der Lehrer/innen gewonnen wird. Diese Grundhaltung zeigt sich z. B. in der Zustimmung zur Aussage: »Den meisten Grundschüler/innen muss man zeigen, wie einfache Textaufgaben zu lösen sind.« Während Lehrer/innen mit konstruktivistischer Grundauffassung die Vorgabe von Aufgaben, für die die Kinder noch nicht explizit alle Voraussetzungen erworben haben, für wichtig halten, ziehen Lehrer/innen mit rezeptiver Grundhaltung Aufgaben vor, die bereits im Unterricht behandelt wurden.

Aus der Sozialpsychologie wissen wir, dass der Zusammenhang zwischen Einstellung und Verhalten selten eng ist. Dass die im Fragebogen gemessene konstruktivistische Grundeinstellung der Lehrer/innen mit der Vorgabe bestimmter Aufgaben im Unterricht oder sogar mit Leistungsfortschritten der Schüler/innen zusammenhängt, ist keinesfalls zwingend. Die von uns im SCHOLASTIK-Projekt gefundenen Ergebnisse übertrafen jedoch alle Erwartungen. Da an bayerischen Grundschulen zwischen der zweiten und der dritten Klasse ein Lehrerwechsel stattfindet, konnte der Einfluss der konstruktivistischen Grundeinstellung der in der dritten Klasse eingesetzten Lehrer/innen auf den zwischen der zweiten und dritten Klasse zu verzeichnenden Lernfortschritt der Schüler/innen erfasst werden. In der SCHOLASTIK-Studie wurden am Ende der zweiten und der dritten Klasse vier identische Textaufgaben zum quantitativen Vergleich sowie einige identische Additions- und Subtraktionsaufgaben im zweistelligen Zahlenbereich vorgegeben. Die Textaufgaben zum quantitativen Vergleich waren recht anspruchsvoll, wie die folgenden Beispiele zeigen:

> Claudia hat 7 Kugeln.
> Sie hat 2 Kugeln mehr als Thomas.
> Oliver hat 3 Kugeln mehr als Thomas.
> Wie viele Kugeln hat Oliver?

> Jan hat 7 Hasen.
> Er hat 4 Hasen mehr als Thomas.
> Wie viele Hasen haben Jan und Thomas zusammen?

Die Lösungsrate (richtige Antwortzahl) für die Kugelaufgabe betrug 39 % am Ende der zweiten und 54 % am Ende der dritten Klasse. Für die Hasenaufgabe waren es 34 % und 54 %.

Da zu keinem Zeitpunkt ein Boden- oder Deckeneffekt zu beobachten war, konnte der individuelle Lernfortschritt ermittelt werden. Die statistische Auswertung mit Hierarchischen Linearen Modellen ergab, dass die konstruktivistische Grundeinstellung der Lehrer/innen nicht mit dem Lernfortschritt bei Arithmetikaufgaben, hingegen in beachtlichem Maße mit dem Lernfortschritt bei Textaufgaben zusammenhing. So lassen sich 32 % der zwischen den Klassen auftretenden Varianz des Lerngewinns im Lösen von Textaufgaben mit der konstruktivistischen Grundeinstellung der Lehrer/innen erklären. Zudem zeigte sich eine Korrelation von .43 ($p<.05$) zwischen der im Fragebogen geäußerten konstruktivistischen Grundeinstellung und der Vorgabe strukturorientierter Aufgaben – ein beachtlicher Wert für eine Einstellungs-Verhaltens-Korrelation. Diese Ergebnisse zeigen eindrucksvoll, dass die Lehrer/innen den Lernfortschritt gerade auch bei Aufgaben, die das Verstehen mathematischer Grundprinzipien erfordern, beeinflussen können.

Obwohl Textaufgaben zum quantitativen Vergleich gegenwärtig im Unterricht sehr selten vorkommen, entwickeln die meisten Kinder im Laufe der Grundschulzeit ihre eigenen Lösungsstrategien. Lehrer/innen, die eigenständiges Lernen für bedeutsam halten und gleichzeitig ihre Schüler/innen mit Arithmetikaufgaben konfrontieren, die die Anwendung von grundlegenden mathematischen Prinzipien herausfordern, fördern offensichtlich ein erweitertes mathematisches Verständnis. Der plausibel klingende Einwand, wonach ein derartiger Unterricht zwar leistungsstärkere Schüler/innen unterstützt, den Bedürfnissen der leistungsschwächeren aber nicht gerecht

wird, konnte durch unsere Daten ausgeräumt werden. Schon bei Renkl und Stern (1994) fanden sich keine Anhaltspunkte für einen derartigen ATI-Effekt (Aptitude-Treatment-Interaktionen). In einer neueren Analyse berücksichtigten wir nur die Lernfortschritte derjenigen Schüler/innen, die bei den Textaufgaben am Ende der 2. Klasse keine oder eine einzige Aufgabe gelöst hatten. Es zeigte sich, dass auch bei dieser Gruppe 20 % der zwischen den Klassen gefundenen Varianz im Lerngewinn durch die konstruktivistische Grundeinstellung der Lehrer/innen erklärt werden konnte. Ein am Verständnis mathematischer Prinzipien orientierter Unterricht hilft offensichtlich Schüler/innen unabhängig von ihren Eingangsvoraussetzungen beim Aufbau eines erweiterten mathematischen Verständnisses.

5. Optimierungspotenziale im Unterricht

Die SCHOLASTIK-Studie ist für die Unterrichtsforschung insbesondere deshalb interessant, weil die an ihr beteiligten Schulklassen eine relativ repräsentative Stichprobe darstellen. Es wurden nicht Klassen einbezogen, deren Lehrer/innen besonderes Interesse an der Studie zeigten, sondern Klassen, deren Kinder der LOGIK-Stichprobe angehörten. Dank der Heterogenität der Lehrer/innen konnten die im vorangegangenen Abschnitt geschilderten Befunde zum Einfluss von Lehrervariablen auf den Lerngewinn abgesichert werden. In einer vertiefenden Studie wollten wir herausfinden, wie als besonders erfolgreich ausgewiesene Lehrer/innen bestimmte Textaufgaben im Rahmen individueller Betreuung von Einzelschüler/innen behandeln.

Fünf so genannte Expertenlehrer/innen, die im SCHOLASTIK-Projekt durch besonders große Lernfortschritte ihrer Klassen auffielen, wurden fünf Referendar/innen, also Novizenlehrer/innen, gegenübergestellt. Zwischen den Expert/innen und den Noviz/innen zeigten sich bezüglich der mit oben genanntem Fragebogen gemessenen konstruktivistischen Grundeinstellung keine signifikanten Mittelwertsunterschiede. Die Aufgabe der Lehrer/innen bestand darin, einzelnen Schüler/innen oder einer Gruppe von drei Schüler/innen während einer halben Stunde beim Lösen schwieriger Textaufgaben zu assistieren, etwa bei der komplexen Vergleichsaufgabe:

> Roland hat 19 Vögel.
> Im großen Käfig sind 5 Vögel mehr als im kleinen Käfig.
> Wie viele Vögel sind im kleinen Käfig?

Dabei waren die Lehrer/innen völlig frei bezüglich der Wahl und der Nutzung von didaktischen Hilfsmitteln (z. B. schriftliche Aufzeichnungen, Skizzen oder externe Modellierung mittels Gegenständen).

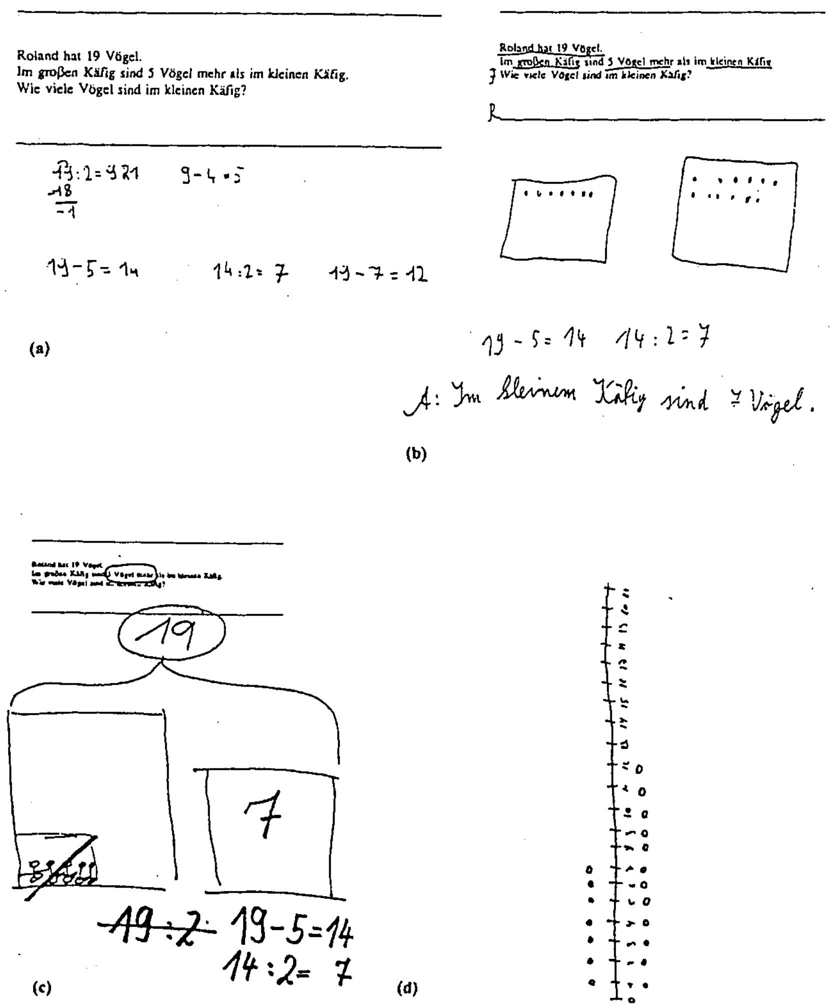

Abb. 1: Mögliche Repräsentation für die Vogelaufgabe. Die Abbildungen (a) bis (c) wurden von den Lehrer/innen gewählt. Die Abbildung (d) stammt von den Autoren.

Die Teilnehmer der Trainingsstudie wurden aus Grundschulklassen der vierten Jahrgangsstufe rekrutiert. In diesen Klassen wurde ein Test zum Lösen von Textaufgaben vorgegeben, die vorwiegend vom quantitativen Vergleich handelten. Eine Kontrollgruppe von Schüler/innen wurde gebildet, die kein Training erhielten, in ihrer Testleistung aber den zu trainierenden Kindern entsprachen, und an denen deshalb in einem Nachtest Lernfortschritte der

trainierten Schüler/innen gemessen werden konnten. Der Vergleich zwischen Kindern der Kontrollgruppe und den trainierten Kindern in einem zwei Wochen nach dem Training stattfindenden Test ergab, dass die trainierten Kinder deutliche Lernfortschritte gemacht hatten. Allerdings zeigten sich keine Unterschiede zwischen den von Expert/innen und Noviz/innen trainierten Kindern. Eine detaillierte Analyse (Staub/Stern 1997b) ergab, dass die Expertenlehrer/innen ähnliche Schwierigkeiten bei der Vermittlung von Kompetenzen im Umgang mit komplexen Vergleichsaufgaben hatten wie die Noviz/innen. Aufgaben wie die oben genannte erfordern die Zerlegung in Teilschritte und die adäquate grafisch-visuelle Repräsentation von Mengenvergleichen. Hier zeigten sich Defizite gleichermaßen bei den Expert/innen und bei den Noviz/innen. Wie weiter oben ausführlich behandelt wurde, unterliegt die Nutzung von Zahlen zur Abbildung konkreter Mengen (Kardinalzahlfunktion) anderen Prinzipien als die Nutzung von Zahlen zu Abbildung von Beziehungen zwischen Mengen (Relationszahlfunktion). Die Darstellung der Differenzmenge als konkrete, unabhängige Menge, z. B. mit Plättchen, ist inadäquat. Eine angemessenere grafisch-visuelle Repräsentation des Mengenvergleichs erfordert einen Referenzrahmen, wie z. B. den Zahlenstrahl, auf dem ein Abschnitt als Differenzmenge markiert werden kann. Der Zahlenstrahl wurde jedoch von keiner Lehrer/in genutzt. Die Abbildungen 1 a bis 1 c geben die von den Expertenlehrer/innen gewählten Repräsentationsformen wieder. Bei Abbildung 1 c handelt es sich um die unserer Meinung nach beste Repräsentationsform einer Lehrer/in.

Abbildung 1 d stammt von uns, und obwohl ihre Wirksamkeit bisher nicht ausgetestet wurde, stellt dies unserer Meinung nach die einzig angemessene Repräsentationsform dar. Die Beziehung zwischen dem kleinen und dem großen Käfig wird am Zahlenstrahl abgebildet. 19 Plättchen können zunächst am Zahlenstrahl angelegt werden. Dann werden die Plättchen so um den Zahlenstrahl verschoben, dass links die kleine und rechts die große Menge abgebildet ist und zudem die Differenzmenge von 5 Elementen sichtbar wird. Ideal wären für diese Art der Repräsentationsform Plättchen, die sich zu einer Kette verknüpfen lassen. Die angemessene Nutzung einer derartigen Repräsentation setzt natürlich ein hohes Maß an Vertrautheit im Umgang mit dem Zahlenstrahl sowohl von Seiten der Lehrer/innen als auch von Seiten der Schüler/innen voraus. Dieser Umgang könnte zunächst mit einfachen Vergleichsaufgaben, z. B. mit unbekannter Referenzmenge, geübt werden:

> Hans hat 5 Murmeln.
> Er hat 3 Murmeln weniger als Peter.
> Wie viele Murmeln hat Peter?

Diese Aufgabe ist im Allgemeinen sehr schwer, weil die im zweiten Satz genannte Differenzmenge nicht direkt modelliert werden kann. Es besteht eine sehr starke Tendenz der Kinder, die im zweiten Satz genannte Menge von der im ersten Satz genannten zu subtrahieren. Die Abbildung der Mengen am Zahlenstrahl könnte diese Tendenz verhindern.

Die Ergebnisse dieser quasi-experimentellen Studie zeigen also, dass es erfahrenen wie auch weniger erfahrenen Lehrer/innen durchaus gelingt, das Lösen komplexer Textaufgaben zum quantitativen Vergleich zu verbessern, wie Vergleiche zur Kontrollgruppe zeigen. Gleichzeitig zeigen die Ergebnisse aber auch, dass in der Ausbildung zum/r Grundschullehrer/in für das Fach Mathematik bisher die Vermittlung eines erweiterten, d. h. über das Kardinalzahlverständnis hinausgehenden numerischen Verständnisses fehlt.

6. Konklusion

In diesem Artikel wollten wir Defizite und Potenziale des gegenwärtigen Mathematikunterrichtes in der Grundschule aufzeigen. Die Ergebnisse zum Einfluss der konstruktivistischen Grundhaltung auf den Lernfortschritt in Mathematik zeigen, dass Lehrer/innen zu einem erweiterten mathematischen Verständnis beitragen können. Gleichzeitig zeigt der Experten-Novizen-Vergleich aber auch, dass Lehrer/innen mehr Anregung in der grafisch-visuellen Veranschaulichung komplexer mathematischer Sachverhalte benötigen, die die Schüler/innen dann zur Erweiterung ihres mathematischen Verständnisses nutzen können.