Die Entwicklung des mathematischen Denkens

Viele Menschen haben ungute Erinnerungen an das Schulfach Mathematik. Nur mühsam erschlossen sich ihnen die Inhalte, und sie waren froh, wenn sie in den Klassenarbeiten die Mindestanforderungen erbrachten. Besonders charakteristisch für das Schulfach Mathematik sind die großen Leistungsunterschiede innerhalb einer Klasse. Einige wenige Schüler durchblicken den Stoff weitgehend problemlos und schreiben stets gute oder sehr gute Klassenarbeiten. Die Mehrheit der Schüler hingegen erbringt unter größeren Anstrengungen mittelmäßige Leistungen, und für eine Minderheit bleibt der Gegenstand ein "böhmisches Dorf". In Klassenarbeiten haben diese Schüler ein "Fünfer-Abonnement", wie es mein Mathematiklehrer ausdrückte.

Da sich dieses Kapitel lediglich mit den mathematischen Kompetenzen bis zur 6. Klasse auseinandersetzt, werden Probleme mit der sogenannten höheren Mathematik nicht behandelt. Erst Ergebnisse der gerade gestarteten Fortsetzungsstudie des LOGIK-Projektes ("Follow-Up"-Studie) können Auskunft über den Einfluß der Grundschulmathematik auf die spätere Leistung geben (vgl. Kap. II). In der Fortsetzungsstudie möchten wir untersuchen, ob die Kinder, die in der Grundschulzeit schneller als ihre Klassenkameraden bestimmte mathematische Kompetenzen erwarben, diesen Vorsprung auch bei der höheren Mathematik in der 10. und 11. Klassenstufe halten können. Ein derartiger Stabilitätszusammenhang über so lange Zeit ist nicht selbstverständlich. Obwohl sich Kinder deutlich in der zum Erwerb der Grundrechenarten benötigten Zeit unterscheiden, werden diese letztendlich von so gut wie allen Schülern beherrscht. Es ist deshalb nicht zwingend, daß Kinder, die die schriftliche Subtraktion früher als ihre Klassenkameraden perfekt beherrschten, später auch bessere Leistungen im Bruchrechnen und in Algebra erbringen. Dennoch ist die Annahme plausibel, wonach Leistungsunterschiede auch bei sich ändernden Anforderungen des Mathematikunterrichtes über Jahre hinweg stabil bleiben. Zum einen sprechen motivationale Gründe dafür: Kinder, die bereits in der Grundschule bessere Leistungen als ihre Mitschüler erbringen, entwickeln ein positives mathematisches Fähigkeitsselbstbild und sind weniger von Versagensängsten geplagt. Zum anderen gilt, daß der Erwerb neuen Wissens von dem bereits verfügbaren Wissen abhängt. Im Falle der hierarchisch aufgebauten Mathematik wird dies besonders offensichtlich: Der größere Zahlenraum baut auf dem kleineren auf; ohne die Addition kann die Multiplikation nicht beherrscht werden, und diese ist wiederum Voraussetzung für die Prozentrechnung. Je früher Grundlagenwissen erworben wurde, um so früher kann dieses erweitert und zum Aufbau neuer Kompetenzen genutzt werden. Die mathematische Entwicklung in der Grundschulzeit kann also die weitere Entwicklung entscheidend beeinflussen.

Biologische und kulturelle Grundlagen mathematischen Wissens

Die jüngere entwicklungspsychologische Forschung hat gezeigt, daß alle Menschen in weit stärkerem Maße, als dies noch vor einigen Jahren angenommen wurde, mit genetisch verankerten Grundlagen des Wissenserwerbes ausgestattet sind, welche eine Anpassung an die Umwelt auch ohne allzu zeitaufwendige Lernprozesse erlauben. Ganz offensichtlich ist dies, wenn man sich vergegenwärtigt, daß Kinder innerhalb weniger Jahre ihre Muttersprache weitgehend beherrschen. Natürlich spielt hierbei das Modell-Lernen eine große

Rolle, aber durch Nachahmung kann man ein komplexes Gebilde wie die Sprache nur erlernen, wenn der Informationsverarbeitungsapparat bereits darauf eingestellt ist.

In den letzten Jahren wurde nun gezeigt, daß auch ein gewisses Wissen über Physik und Mathematik angeboren ist. Aus Platzgründen gehe ich auf das Wissen über Physik nicht weiter ein. Daß die Grundlagen mathematischen Denkens angeboren sind, belegen Studien, in denen nachgewiesen wird, daß bereits wenige Tage alte Säuglinge Mengenveränderungen im kleineren Bereich richtig beurteilen können. Belegt wird dies in Studien, die zeigen, daß Säuglinge überrascht reagieren, wenn vorgenommene Mengenveränderungen nicht zum korrekten Ergebnis führen. Es gibt zwei weitere Belege dafür, daß auch mathematisches Wissen auf angeborenen Grundlagen basiert: Zum einen lernen die meisten Kinder bereits im Vorschulalter spontan und ohne systematische Unterweisung im kleinen Zahlenbereich zählen, und zum anderen verfügen alle Kulturen, selbst wenn sie keine Schriftsprache entwickelt haben, über Zählwörter. Natürlich muß man die jeweiligen Zählwörter der Muttersprache lernen, aber dieser Lernvorgang wird unterstützt und beschleunigt durch Wissen über Zählprinzipien, das allen Menschen angeboren ist. So kann man z.B. beobachten, daß das Prinzip der Zuordnung von Zählwörtern zu Mengen von Kindern fehlerfrei beherrscht wird. Bereits dreijährige Kinder wissen, daß man nicht die gleichen Zahlwörter für Mengen unterschiedlicher Größe heranziehen darf. Zwar verwechseln Kinder häufig Zählwörter, aber es kommt so gut wie nie vor, daß unmittelbar hintereinander folgende Zahlwörter wiederholt werden, z.B. 1, 2, 3, 4, 4, 5. "Angeborenes" Wissen hilft, diesen Fehler zu vermeiden.

Es stellt sich nun die berechtigte Frage, warum, wenn doch allen Menschen die Grundlagen des mathematischen Wissens bereits in die Wiege gelegt wurden, die Schulmathematik so große Schwierigkeiten bereitet. Um dies zu erklären, muß man sich vergegenwärtigen, daß die Schulmathematik das Produkt einer sehr langen kulturellen Entwicklung ist. Viele der für uns heute selbstverständlichen Konzepte wurden erst vor wenigen Jahrhunderten entwickelt. Interessierten Lesern kann die gut verständliche Einführungen von Ifrah (1989) empfohlen werden. Im Mathematikunterricht wird verlangt, daß Schüler in wenigen Jahren ein Wissen erwerben müssen, welches das Ergebnis einer Jahrtausende umfassenden kulturellen Entwicklung ist. Diese "kulturelle" Mathematik, auch "höhere Mathematik" genannt, ist nun ziemlich weit entfernt von der "natürlichen" Mathematik, in der Zahlen lediglich als Zählinstrumente genutzt werden und Addition und Subtraktion die Veränderungen von Mengen durch Hinzufügen oder Entfernen von Elementen beschreiben. Um Bruch- und Dezimalzahlen zu verstehen, muß man das Prinzip aufgeben, wonach größere Zahlen immer größere Quantitäten bezeichnen. Wie schwer dies fällt, zeigen typische Fehler von Schülern der Mittelstufe. Kinder dieser Altergruppe behaupten häufig, daß 6/8 größer sei als 6/7, und daß 1.3 kleiner sei als 1.28. Das "natürliche" Verständnis von Division basiert auf dem Prinzip, daß eine Menge durch Teilen kleiner wird. Deshalb ist es zunächst schwer verständlich, daß bei einem Divisor, der kleiner als 1 ist, der Quotient größer ist als der Dividend.

Auch wenn Mathematik von vielen Schülern als "Selbstzweck" erlebt wird und eines der am meisten gefürchteten Fächer ist, ist technischer und wissenschaftlicher Fortschritt ohne sie undenkbar. Erst auf der Grundlage nicht-natürlicher Zahlen konnten für uns heute selbstverständliche physikalische Konzepte wie Geschwindigkeit oder Beschleunigung

entwickelt werden. Viele der für erfolgreiches Planen und Handeln erforderlichen Abstraktionsleistungen werden erst durch Mathematik ermöglicht. Ziel des Mathematikunterrichtes muß es deshalb sein, das "natürliche" numerische Wissen durch kulturelles mathematisches Wissen zu ergänzen.

Fortschritte von der Vorschulzeit bis zur 6. Klasse

Im folgenden wird am Beispiel von Aufgaben, die in der LOGIK-Studie vorgegeben wurden, die Entwicklung des mathematischen Denkens von der Vorschulzeit bis zur 6. Klasse skizziert.

1. Vorschulzeit

Wie bereits angedeutet, lernen Vorschulkinder spontan und ohne systematische Unterweisung die Anzahl der Elemente einer Menge durch Zählen zu bestimmen. Dies zeigte sich auch in der LOGIK-Studie. Bereits in der 1. Welle, also mit 3–4 Jahren, konnten fast alle Kinder die Elemente kleinerer Mengen bestimmen. Trotz dieser Kompetenzen spielt die Quantifizierung im Denken und Wahrnehmen der Kinder zunächst eine untergeordnete Rolle. Dies zeigt sich in der *Zahlinvarianzaufgabe,* die den LOGIK-Kindern in der Vorschulzeit vorgegeben wurde.

Diese Aufgabe wird wie folgt durchgeführt: Man legt eine Reihe mit sieben runden Knöpfen vor das Kind und legt vor jeden dieser Knöpfe einen eckigen Knopf. Anschließend läßt man sich von dem Kind bestätigen, daß in beiden Reihen gleichviel Knöpfe liegen. Daraufhin zieht man, wie in Abbildung V.1 dargestellt, die Reihe der eckigen Knöpfe *vor den Augen des Kindes* auseinander, und fragt, ob es mehr runde oder mehr eckige Knöpfe gibt. Die Mehrzahl der Vorschulkinder wird antworten, es gäbe mehr eckige Knöpfe. Schiebt man die Reihe der eckige Knöpfe vor den Augen der Kinder zusammen, antworten sie, es gäbe weniger eckige als runde Knöpfe. Das Antwortverhalten der Kinder zeigt, daß sie bei ihrer Beurteilung die *räumliche Ausdehnung* und nicht die Quantität zugrunde legen. Erst im Alter von etwa sieben Jahren antworten alle Kinder unabhängig von der räumlichen Ausdehnung, daß es gleichviel runde wie eckige Knöpfe gibt.

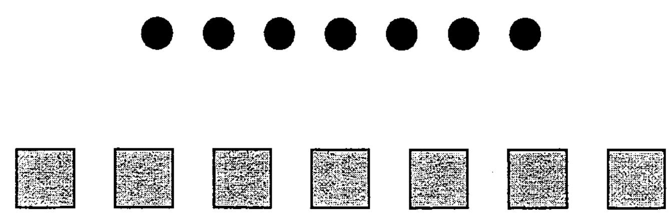

Abbildung V.1: "Gibt es mehr runde oder mehr eckige Knöpfe?"

Die Aufgabe wurde den Kindern in der 1. und 3. Erhebungswelle vorgegeben, also im Alter von 3–4 und 5–6 Jahren. Während in der 1. Welle weniger als 10% der Kinder im Sinne der Erwachsenen korrekt antworteten, war dies in der 3. Welle bei etwa 50% der Fall. Warum weicht das Antwortverhalten der Kinder so frappierend von dem der Erwachsenen ab? Für Erwachsene sind Begriffe wie "mehr" und "weniger" in erster Linie mit der Anzahl der Elemente einer Menge verbunden und nicht mit ihrer räumlichen Ausdehnung. Vorschulkinder hingegen verwenden diese Begriffe in erster Linie zur Beschreibung der räumlichen Ausdehnung einer Menge und erst im Alter von sechs bis sieben Jahren erhält die Anzahl die größere Priorität.

Mit der *Quantifizierungsaufgabe* wurde ein weiterer wichtiger Aspekt der Vorschulentwicklung erfaßt. Wird ein Erwachsener aufgefordert, die Anzahl der in Abbildung V.2 zu sehenden Holzklötze anzugeben, wird er nicht jeden einzelnen Klotz zählen, sondern auf einen Blick sehen, daß es sich um acht Gegenstände handelt. Bei zufällig angeordneten Gegenständen können erfahrene Erwachsene Mengen von teilweise mehr als zehn Gegenständen ohne zu zählen ermitteln. Je häufiger Menschen die Welt quantitativ strukturieren, um so effizienter sind sie dabei. Es ist zu erwarten, daß sich bereits Vorschulkinder in der Quantifizierungsfähigkeit unterscheiden.

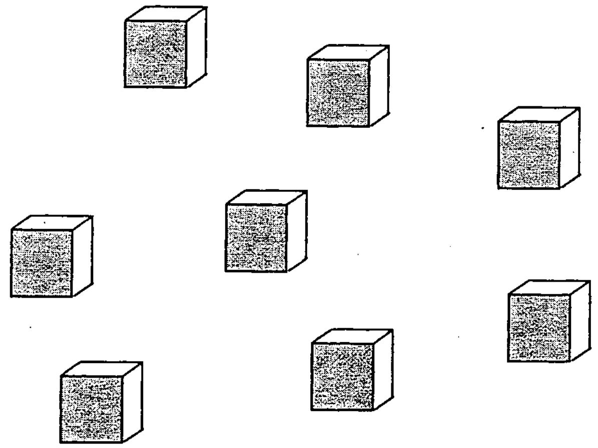

Abbildung V.2: "Wie viele Würfel sind das?"

Den Kindern der LOGIK-Studie wurden im Alter von 5–6 Jahren 3–8 Holzklötze (siehe Abb. V.2) vorgelegt, und sie wurden aufgefordert, die Anzahl anzugeben ohne zu zählen. Es zeigten sich große Unterschiede zwischen den Kindern: Etwa 20% der Kinder konnten nur Mengen bis zu vier, 30% der Kinder hingegen Mengen bis zu acht Gegenständen fehlerfrei ermitteln. Die Leistung der übrigen Kinder lag zwischen fünf und sieben.

Zusammenfassend läßt sich zur mathematischen Entwicklung in der Vorschulzeit sagen, daß Kinder bereits zwischen dem 3. und 4. Lebensjahr kleinere Mengen korrekt zählen können. Allerdings spielt die Quantifizierung zunächst bei der Verarbeitung von Information noch eine untergeordnete Rolle; andere Dimensionen haben eine höhere Priorität. Erst in den folgenden beiden Lebensjahren erlangen Kinder immer mehr Übung darin, die Welt zu quantifizieren, wobei es jedoch große interindividuelle Unterschiede gibt. Inwiefern die Vorschulmathematik die spätere Entwicklung beeinflußt, wird in einem der folgenden Abschnitte behandelt.

2. *Frühe und mittlere Grundschulzeit*

Aus dem vorangegangenen Abschnitt ging hervor, daß für Kinder mit dem Schuleintritt keineswegs die Stunde Null der Mathematik beginnt. Sie verfügen nicht nur über ein Zahlkonzept, sondern verstehen auch die Grundlagen der Addition und Subtraktion. In der Grundschule werden neue Techniken in den Grundrechenarten sowie das Zehnersystem gelernt. Dieses Wissen wird zum Lösen von Textaufgaben und zur Entwicklung von arithmetischem Strategiewissen herangezogen. Beide Anforderungsarten wurden in der LOGIK-Studie getestet.

(a) Textaufgaben

In der Grundschule lernen die Kinder, mathematische Symbole zur Modellierung von Situationen zu nutzen, d.h. sie lösen Textaufgaben. Da diese Aufgaben nicht einfach durch die automatisierte Anwendung vertrauter Rechenstrategien gelöst werden können und deshalb häufig fehlerhaft bearbeitet werden, sind sie vielen Menschen in unguter Erinnerung. Dabei sind manche Textaufgaben recht einfach zu lösen. So kann die Aufgabe:

> "Hans hat 7 Murmeln. Peter hat 4 Murmeln. Wie viele Murmeln muß Peter noch bekommen, damit er genauso viele Murmeln hat wie Hans?"

bereits von mehr als 80% der fünfjährigen Kindergartenkinder gelöst werden, während noch etwa 50% der Drittkläßler die Aufgabe *nicht* lösen können, wenn sie mit der Frage endet

> "Wie viele Murmeln hat Peter weniger als Hans?".

Dieses Ergebnis wurde in unterschiedlichsten Ländern gefunden und auch in der LOGIK-Studie bestätigt. An anderer Stelle (Stern, 1997) wird ausführlich erklärt, warum Textaufgaben zum quantitativen Vergleich so schwer sind. Nicht mangelndes Sprachverständnis hält Kinder davon ab, Aufgaben, in denen Formulierungen wie "wieviel mehr" und "wieviel weniger" vorkommen, zu lösen, sondern ein eingeschränktes mathematisches Verständnis. Die Frage "Wie viele Murmeln hat Hans weniger als Peter?" ist schwer zu verstehen, weil nicht nach einer konkreten Menge, sondern nach einer Beziehung zwischen zwei Mengen gefragt wird. Dies erfordert ein größeres Abstraktionsvermögen als das Verstehen der Frage "Wie viele Murmeln muß Hans noch bekommen, damit er genauso viele hat wie Peter?". Die Menge der zu beschaffenden Murmeln kann man sich als konkretes Bild vorstellen, die Differenz zwischen zwei Mengen hingegen nicht.

Die Kinder der LOGIK-Studie erhielten von der 2. bis zur 4. Klasse mathematische Textaufgaben. Tabelle V.1 gibt die Lösungsraten für zwei exemplarische Textaufgaben wieder. Obwohl beide Textaufgaben mathematisch recht komplex sind, unterscheiden sie sich deutlich in ihrer Schwierigkeit. Der Grund dafür liegt im unterschiedlichen Abstraktionsgrad: Während die "Mohrenkopfaufgabe" von konkreten Mengen handelt, wird in der "Kugelaufgabe" der abstraktere Mengenvergleich verlangt.

Tabelle V.1
Prozentsatz der Kinder, die die jeweilige Textaufgabe korrekt lösten

	KLASSE		
	2	3	4
3 Kinder feiern Geburtstag. Mutter hat 10 Mohrenköpfe gekauft. Jedes Kind ißt 2 Mohrenköpfe. Wie viele Mohrenköpfe bleiben übrig?	61%	70%	79%
Claudia hat 7 Kugeln. Sie hat 2 Kugeln mehr als Thomas. Oliver hat 3 Kugeln mehr als Thomas. Wie viele Kugeln hat Oliver?	30%	49%	63%

Die Ergebnisse zeigen, daß die Kinder in der Grundschule nicht nur die Ausführung komplexer Rechenprozeduren lernen, sondern auch ihr Verständnis von mathematischen Operationen ändern müssen. Wer Addition ausschließlich als Vergrößerung und Subtraktion nur als Verkleinerung von Mengen versteht, ist spätestens mit der Bearbeitung von Algebra-Aufgaben überfordert. Auch das Verständnis von Multiplikation und Division verändert sich im Lauf der Zeit. Intuitiv wird Multiplikation zunächst als wiederholte Addition und Division als die Aufteilung von Mengen in gleiche Teile verstanden. Spätestens beim Rechnen mit nicht-natürlichen Zahlen ist dieses Verständnis unzureichend.

(b) Arithmetisches Strategiewissen

Geübte Rechner sehen auf einen Blick, daß man bei sogenannten Inversionsaufgaben wie "84+32-32=" nicht rechnen muß; sie wenden also die Abkürzungsstrategie an. Die meisten Grundschulkinder hingegen wenden ihre gewohnten Rechenstrategien an. Mit einem Computertest haben wir die Anwendung der Abkürzungsstrategie erfaßt. Auf dem Bildschirm wurden Aufgaben mit Lösungen präsentiert, wie z.B. "32+16-16=16" oder "34+12-19=29". Die Kinder sollten durch einen Tastendruck so schnell wie möglich angeben, ob das angegebene Ergebnis ihrer Meinung nach korrekt war oder nicht. Die Bearbeitungszeit wurde registriert. Kinder, die die Abkürzungsstrategie bereits anwenden, sollten für die Bearbeitung von Inversionsaufgaben nur wenig Zeit brauchen. Es zeigte sich, daß 28% der Kinder in der 2. Klasse und 63% in der 3. Klasse die Abkürzungsstrategie angewendet haben.

3. *Späte Grundschulzeit und frühe Sekundarstufe*

Kinder lieben es, sich gegenseitig mit der Frage "Was ist schwerer, ein Kilogramm Blei oder ein Kilogramm Federn?" auf das Glatteis zu führen. Die korrekte Beantwortung einer derartigen Frage setzt proportionales Denken voraus: Man muß zwei Einheiten hinsichtlich zweier Dimensionen vergleichen. Viele der im Alltag von Erwachsenen selbstverständlichen Konzepte wie "Geschwindigkeit" oder "spezifisches Gewicht" basieren auf proportionalem Denken. Im Falle der Geschwindigkeit muß man bekanntermaßen Weg und Zeit in Beziehung setzen und im Falle des spezifischen Gewichtes sind es Volumen und Gewicht. Es war – natürlich – Piaget, der zeigte, daß sich das proportionale Denken bei der Mehrheit der Kinder erst mit etwa 12 Jahren entwickelt.

In der LOGIK-Studie wurde proportionales Denken u.a. mit folgender Aufgabe getestet:

> "Im Käsegeschäft gibt es zwei Käseräder, die gleichgroß und gleichschwer sind. Ein Käse ist weiß, der andere gelb. Der weiße Käse wurde in 8 Stücke geschnitten, der gelbe Käse wurde in 16 Stücke geschnitten. Frau Müller kauft 3 Stücke von dem gelben Käse, und Herr Maier kauft 2 Stücke von dem weißen Käse. Zu Hause legen beide ihren Käse auf die Waage. Wessen Käse wiegt mehr, der von Frau Müller oder der von Herrn Maier?"

Um sicherzustellen, daß falsche Antworten nicht auf eine Überlastung des Gedächtnisses zurückzuführen sind, wurden Zeichnungen von den geschnittenen Käserädern angefertigt. 73% der LOGIK-Kinder antworteten in der 4. Klasse, daß der Käse von Frau Müller mehr wiegt. Die Lösung der beschriebenen Aufgabe erfordert den Vergleich der Brüche 2/8 und 3/16. Um die Aufgabe richtig zu lösen, muß man verstehen, daß man nicht allein die Anzahl der Käsestücke vergleichen darf, sondern auch deren unterschiedliche Größe mit berücksichtigen muß. Selbst in der 5. und 6. Klasse hatten mehr als 50% der Kinder noch Schwierigkeiten mit einigen Aufgaben zum proportionalen Denken. So wurde den Kindern gesagt, es gäbe zwei Kaugummiautomaten. In einem sei das Verhältnis von roten zu schwarzen Kaugummis 26:24 und im anderen 14:12. Die Kinder sollten angeben, in welchen Apparat man eher sein Geld werfen sollte, wenn man lieber einen roten Kaugummi hätte. Nur 13% der Kinder in der 6. Klasse antworteten korrekt.

Die Entwicklung von Leistungsunterschieden

Aus den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnittes wurde deutlich, daß zu allen Zeitpunkten der LOGIK-Studie große Unterschiede zwischen den Kindern bestanden. Deshalb sind Aussagen wie "Mit sechs Jahren kann das durchschnittliche Kind die Zahlinvarianzaufgabe lösen" oder "Mit 12 Jahren kann das durchschnittliche Kind proportional denken" von begrenztem Nutzen. Will man Leistungsunterschiede zwischen Kindern einer Altersgruppe lediglich beschreiben, reichen weniger aufwendige Querschnittuntersuchungen aus. Vorhersagen kann man hingegen die Entwicklung von Leistungsunterschieden nur, wenn die gleichen Kinder mehrfach untersucht werden. Im folgenden werden drei Fragen zur Entwicklung von Leistungsunterschieden behandelt:

(1) Zeichnet sich bereits in der Kindheit eine stabile mathematische Begabung ab?

(2) Sind Leistungsunterschiede in Mathematik mit der allgemeinen Intelligenz zu erklären?

(3) Treten bereits in der Grundschulzeit Leistungsunterschiede zwischen Jungen und Mädchen auf?

Zeichnet sich bereits in der Kindheit eine stabile mathematische Begabung ab?

Der Begriff "Begabung" bezeichnet im Alltag wie in der Wissenschaft ein zeitlich stabiles Persönlichkeitsmerkmal. Von einer mathematischen Begabung in der Kindheit zu sprechen ist nur sinnvoll, wenn Kinder, die bereits in der Vorschulzeit über ein besseres Zahlverständnis verfügen als ihre Altergenossen, diesen auch bei der Bewältigung von mathematischen Anforderungen der Grundschulzeit und der Sekundarstufe überlegen sind. Mit Hilfe von Korrelationskoeffizienten wird erfaßt, in welchem Ausmaß eine Gruppe von Personen bei zweimaliger Messung in ihren Rangplätzen übereinstimmt. Zu diesem Zweck bringt man für beide Messungen die Personen in eine Rangreihe und ermittelt mit Hilfe einer speziellen mathematischen Formel den Korrelationskoeffizienten, der zwischen −1 und +1 liegt. Ein Korrelationskoeffizient von 0 bedeutet, daß es keinen Zusammenhang zwischen beiden Messungen gibt. Ein Korrelationskoeffizient von +1 gibt einen perfekten Zusammenhang wieder: Jede Person nimmt in beiden Messungen den gleichen Rangplatz ein. Ein Korrelationskoeffizient von −1 gibt einen engen, aber negativen Zusammenhang wieder: Wer in einer Messung einen hohen Rangplatz eingenommen hat, nimmt in der anderen Messung einen niedrigen Rangplatz ein und umgekehrt. Am besten läßt sich die Korrelation graphisch in einem Koordinatensystem abbilden, indem an jeder Achse die Rangplätze in beiden Messungen abgetragen werden. Im Falle einer Korrelation von 1 liegen alle Werte auf einer ansteigenden Geraden, im Falle einer Korrelation von −1 auf einer abfallenden Geraden, und im Falle einer Korrelation von 0 verteilen sich die Werte über die Fläche. Wenn man, wie in diesem Abschnitt beabsichtigt, zeitliche Stabilitäten in Maßen aus dem gleichen Inhaltsgebiet erfassen möchte, findet man meist Korrelationen zwischen .30 und .80. Es gibt einen positiven Zusammenhang, aber die Übereinstimmung der Rangplätze ist nicht perfekt.

Im folgenden werden zwei Ergebnisse der Korrelationsanalysen exemplarisch dargestellt. In Abbildung V.3a ist der Zusammenhang zwischen den beschriebenen Vorschultests (ein Summenwert aus der Zahlinvarianzaufgabe und der Aufgabe zum Schätzen von Mengen wurde gebildet) und der Leistung im Lösen von Textaufgaben wiedergegeben. Die Abbildungen zeigen deutliche, wenn auch nicht perfekte Übereinstimmungen in der Leistung. Mit anderen Worten, die meisten Kinder, die bereits in der Vorschulzeit ihren Altersgenossen überlegen waren, sind dies auch beim Lösen von Textaufgaben in der 2. Klasse. Für die mit Statistik vertrauten Leser sei gesagt, daß der Korrelationskoeffizient .63 beträgt. Die meisten der Kinder, die in der Vorschulzeit schlechter abschnitten als ihre Alterskameraden, zeigen auch in der 2. Schulklasse noch unterdurchschnittliche Leistungen. Natürlich gibt es auch Kinder mit abweichendem Muster. Je weiter die Markierung eines Kindes (also ein Punkt) von der eingezeichneten Geraden abweicht, um so weniger stabil ist seine

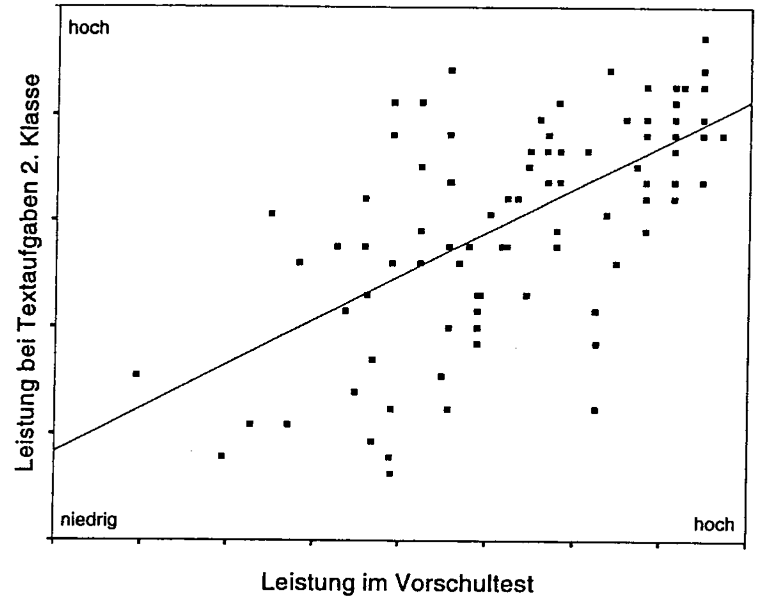

Abbildung V.3a: Der Zusammenhang zwischen der Leistung im Vorschultest und der Leistung beim Lösen von Textaufgaben in der 2. Klasse.

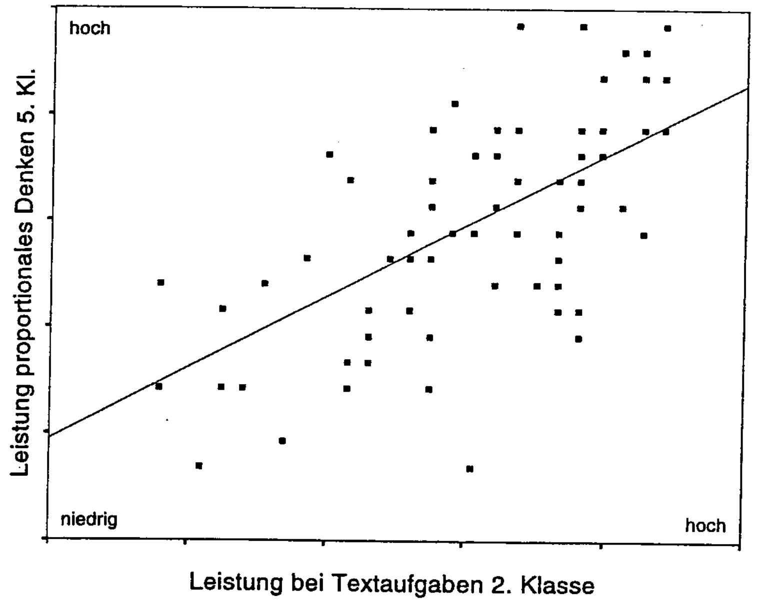

Abbildung V.3b: Der Zusammenhang zwischen der Leistung beim Lösen von Textaufgaben in der 2. Klasse und dem proportionalen Denken in der 5. Klasse.

Leistung. Auch zwischen der Leistung im Vorschultest und dem Lösen von Inversionsaufgaben (16+8-8=) mit Hilfe der Abkürzungsstrategie gab es einen deutlichen Zusammenhang.

Abbildung V.3b zeigt den Zusammenhang zwischen der Leistung im Lösen von Textaufgaben in der 2. Klasse und dem proportionalen Denken in der 5. Klasse. Auch hier zeigt sich ein sehr hoher Zusammenhang: Der Korrelationskoeffizient beträgt .61. Auch die Zusammenhänge zwischen den übrigen mathematischen Leistungsmaßen, die hier nicht dargestellt werden, waren recht ausgeprägt und statistisch bedeutsam, selbst wenn zwischen den Prüfungen eine zeitliche Spanne von mehreren Jahren lag. So zeigte sich zwischen der Leistung im Vorschultest und dem proportionalen Denken in der 5. Klasse noch immer ein substantieller Zusammenhang. Insgesamt sprechen die dargestellten Analysen dafür, daß Leistungsunterschiede in Mathematik nicht nur in der Grundschulzeit stabil sind, sondern sogar schon vor Schulbeginn. Obwohl zu diesem Zeitpunkt noch keine systematische Unterweisung in Mathematik erfolgte, haben einige Kinder bereits erstaunliche Kenntnisse erworben und können diese offensichtlich in der Grundschule nutzen, um ihren Vorsprung auszubauen. Ganz zweifellos zeichnen sich bereits in der Kindheit stabile mathematische Begabungsunterschiede ab.

Sind Leistungsunterschiede in Mathematik mit der allgemeinen Intelligenz zu erklären?

Warum fällt es einigen Kindern so leicht und anderen so schwer, den Anforderungen des Mathematikunterrichtes gerecht zu werden? Zur Erklärung von Leistungsunterschieden bei der Bewältigung *neuer* Anforderungen wird oft die *Intelligenz* herangezogen. Anforderungen sind neu, wenn nicht auf bereits erprobte Lösungsstrategien zurückgegriffen werden kann. Die Forschung der vergangenen Jahre hat allerdings gezeigt, daß nicht nur intellektuelle Fähigkeiten, sondern auch das spezifische Inhaltswissen bei der Bewältigung neuer Anforderungen eine wichtige Rolle spielen. Der Erwerb dieses spezifischen Wissens basiert auf einer längeren Lerngeschichte. In der im folgenden dargestellten Analyse soll untersucht werden, ob die Leistungsunterschiede bei der Bearbeitung einer neuen Mathematikaufgabe eher mit der allgemeinen Intelligenz zu erklären sind oder mit der spezifischen Lerngeschichte. Da die Erfassung der Lerngeschichte eine Längsschnitterhebung voraussetzt, können wir mit Hilfe der LOGIK-Daten dieser Fragestellung nachgehen.

Eine neue Anforderung: Die Konstruktion von Textaufgaben

In der 4. Klasse wurde den Kindern der LOGIK-Studie eine Aufgabe vorgegeben, die den Erfordernissen der "Neuheit" entspricht. Den Kindern wurde zunächst eine typische Frage zu einer mathematischen Textaufgabe gestellt:

"Wieviel Murmeln haben Hans und Peter zusammen?"

Anschließend wurden den Kindern eine Reihe von Sätzen vorgegeben:

Hans hat 5 Äpfel.	Susanne hat 7 Murmeln.
Peter hat 4 Murmeln weniger als Susanne.	Hans hat 8 Murmeln.
Peter hat 6 Murmeln.	Peter hat 3 Murmeln.

Die Aufgabe der Kinder bestand darin, aus den vorgegebenen Sätzen diejenigen auszuwählen, die benötigt werden, um eine sinnvolle Textaufgabe zu konstruieren, zu der die genannte Frage paßt. Obwohl Kinder der 4. Klasse durchaus in der Lage sind, die Textaufgaben zu lösen, ist die Konstruktionsaufgabe schwer, weil sie das Ignorieren der unpassenden Sätze verlangt.

Allgemeine Intelligenz

Die in der 4. Klasse gemessenen Leistungen im nichtsprachlichen Intelligenztest wurden einbezogen.

Lerngeschichte in Mathematik

Die Leistung im Lösen mathematischer Textaufgaben in der 2. Klasse wurde als Indikator für die spezifische Lerngeschichte herangezogen. Für jedes Kind wurde sowohl für den Intelligenztest (I) als auch für das Lösen mathematischer Textaufgaben (M) erfaßt, ob es überdurchschnittliche (+) oder unterdurchschnittliche (–) Leistungen erzielte. Damit ergaben sich vier Gruppen:

I+M+	(Überdurchschnittliche Intelligenz, überdurchschnittliche Mathematikleistung)
I+M–	(Überdurchschnittliche Intelligenz, unterdurchschnittliche Mathematikleistung)
I–M+	(Unterdurchschnittliche Intelligenz, überdurchschnittliche Mathematikleistung)
I–M–	(Unterdurchschnittliche Intelligenz, unterdurchschnittliche Mathematikleistung).

Wenn für die richtige Bearbeitung der für die LOGIK-Kinder neuen Konstruktionsaufgabe eine überdurchschnittliche Intelligenz entscheidend ist, sollten die Kinder der I+M+ und I+M–Gruppen besser abschneiden als die Kinder der I–M+ Gruppe. Abbildung V.4 zeigt,

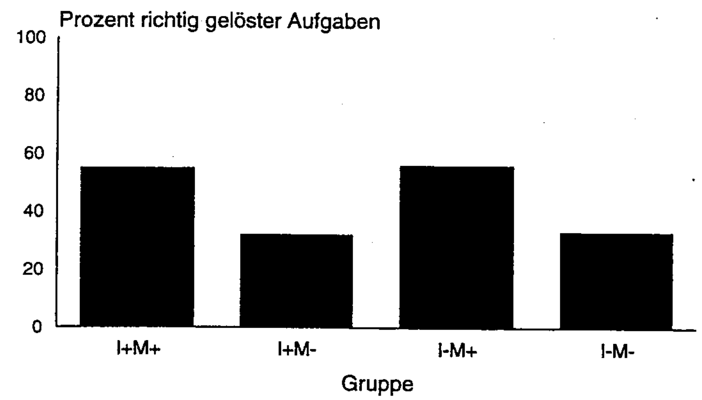

Abbildung V.4: Der Einfluß der allgemeinen Intelligenz und der Lerngeschichte in Mathematik auf die Lösung einer neuen Aufgabe: Mittlere Leistung bei der Bearbeitung der Konstruktionsaufgabe in den vier im Text beschriebenen Gruppen.
Abkürzungen: "I" = Intelligenz, "M" = Mathematikleistung, "+" = überdurchschnittlich, "–" = unterdurchschnittlich.

daß dies nicht der Fall ist. Die besten Leistungen im Lösen der Konstruktionsaufgabe erbrachten die I+M+ und die I-M+ Gruppen. Die I+M- Gruppe zeigte hingegen keine bessere Leistung als die I-M- Gruppe. Überdurchschnittliche Intelligenz ist offensichtlich weder eine notwendige noch eine hinreichende Voraussetzung für die erfolgreiche Bearbeitung einer neuen mathematischen Aufgabe. Hingegen bewältigen Kinder, die auf eine längere erfolgreiche Lerngeschichte in diesem Fach zurückblicken können, selbst wenn sie nicht über eine überdurchschnittliche Intelligenz verfügen, die neue Aufgabe durchaus erfolgreich.

Eine ausführlichere Diskussion dieser Ergebnisse kann bei Stern (1994) nachgelesen werden. Auch andere Ergebnisse der LOGIK-Studie (Stern, in Druck) zeigen, daß die Intelligenz bei der Erklärung von Leistungsunterschieden in Mathematik eher eine untergeordnete Rolle spielt, sobald Mathematiktests mit herangezogen werden. Der spezifischen Begabung und der persönlichen Lerngeschichte scheinen eine wichtigere Rolle zuzukommen.

Treten bereits in der Grundschulzeit Leistungsunterschiede zwischen den Geschlechtern auf?

Ein Blick in die mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweige der gymnasialen Oberstufe und in die mathematischen Fakultäten der Universitäten offenbart männliche Dominanz. Spitzenleistungen in Mathematikwettbewerben werden bereits in der Mittelstufe vorwiegend von männlichen Schülern erbracht. Forschungsergebnisse zu Geschlechtsunterschieden in der Grundschulzeit ergeben bisher kein einheitliches Bild. Während in einigen Veröffentlichungen keine Unterschiede berichtet werden, werden insbesondere in Studien zum mathematischen Verständnis Unterschiede zugunsten der Jungen gefunden. Stehen hingegen Arithmetikaufgaben im Mittelpunkt, die die effiziente Anwendung gelernter Strategien erfordern, sind häufig die Mädchen überlegen.

Längsschnittdaten erlauben Aussagen über die unterschiedliche Entwicklung von Mädchen und Jungen über eine längere Zeit. Machen Mädchen, die zu Beginn der Grundschulzeit gute bis sehr gute Leistungen erbrachten, später weniger Lernfortschritte als Jungen? Haben möglicherweise Jungen, die zu Beginn der Grundschulzeit nicht zu dem oberen Leistungsdrittel zählten, bessere Chancen, dieses Leistungsniveau gegen Ende der Grundschulzeit zu erreichen als Mädchen? Die folgenden Analysen befassen sich mit der Entwicklung einiger Mathematikleistungen von guten bis sehr guten, mittelmäßigen und leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern.

Zur anschaulichen Darstellung der Geschlechtsunterschiede werden die Jungen in Bezug auf ihre Mathematikleistung in drei gleich große Gruppen aufgeteilt. Im unteren Drittel befinden sich die schwachen Schüler, im mittleren Drittel die mittelmäßigen und im oberen Drittel die guten bis sehr guten Schüler. Mit der Aufteilung der Jungen in gleiche Drittel werden für die jeweiligen Aufgaben bestimmte Leistungsgrenzen festgelegt. Im folgenden Auswertungsschritt werden diese Leistungsgrenzen bei der Aufteilung der Mädchen zugrundegelegt. Der prozentuale Anteil der Mädchen innerhalb der drei Leistungsgrenzen wird ermittelt. Wenn es keine Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Jungen gäbe,

befänden sich jeweils 33% der Mädchen in jedem Drittel. Gibt es aber mehr gute und sehr gute Mädchen als Jungen, läge der prozentuale Anteil der Mädchen im oberen Drittel über 33%. Dementsprechend wären weniger als 33% der Mädchen im mittleren und/oder unteren Drittel angesiedelt. Abbildung V.5 zeigt die Ergebnisse für den Vorschultest, für das Lösen von Textaufgaben und für das proportionale Denken. Der aufmerksame Leser erkennt natürlich, daß die über die Jungen gegebene Information eigentlich überflüssig ist, da zu jedem Zeitpunkt die männlichen Schüler in drei gleiche Gruppen aufgeteilt wurden. Die eigentlich redundante Information wurde dennoch gegeben, um die Vergleiche zwischen den Geschlechtern in der graphischen Abbildung zu erleichtern. Es zeigt sich, daß in allen Tests und zu allen Meßzeitpunkten die Jungen bessere Leistungen erbringen als die Mädchen. Im oberen Leistungsdrittel sind bei allen Tests und zu allen Zeitpunkten - mit Ausnahme der Textaufgaben in der 2. Klasse - deutlich weniger als 33% der Mädchen vertreten. Im unteren Drittel hingegen sind durchgehend deutlich mehr als 33% der Mädchen angesiedelt. Im mittleren Leistungsdrittel ist der Anteil von Jungen und Mädchen etwa vergleichbar.

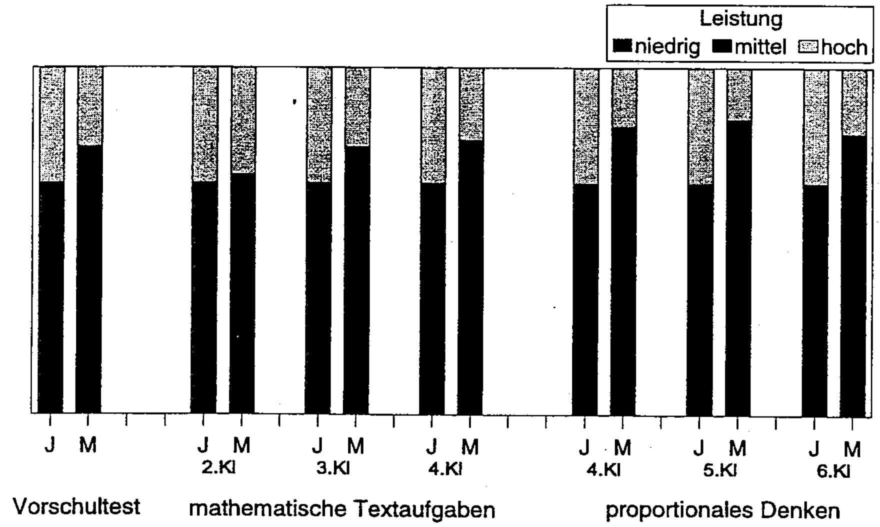

Abbildung V.5: Vergleich der Leistungen von Jungen und Mädchen bei ausgewählten Testleistungen zu unterschiedlichen Erhebungszeitpunkten. Die Jungen wurden in drei gleichgroße Leistungsgruppen aufgeteilt und der Prozentsatz der Mädchen in diesen Leistungsgruppen wurde ermittelt.

Bemerkenswert ist, daß bereits in der Vorschulzeit Leistungsunterschiede zugunsten der Jungen zu beobachten sind. Bevor eine systematische Unterweisung erfolgt, nutzen offensichtlich mehr Jungen als Mädchen Lerngelegenheiten, um Grundlagen des mathematischen Denkens zu erwerben.

Weitere Analysen sollen Auskunft darüber geben, ob die in der Vorschulzeit zu beobachtenden Unterschiede sich bei Mädchen und Jungen in unterschiedlicher Weise auf die spätere mathematische Entwicklung auswirken.

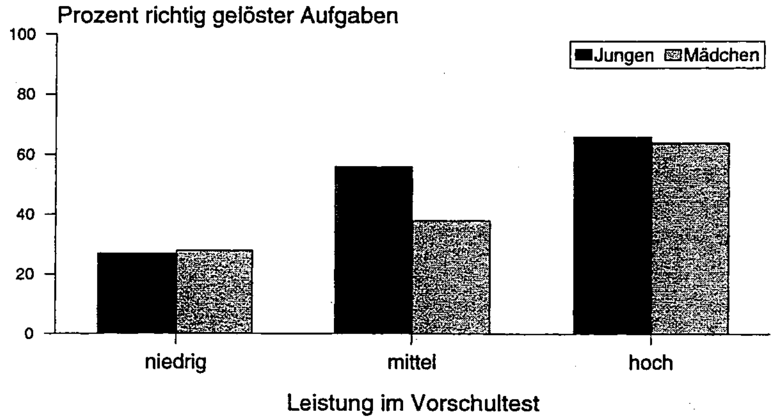

Abbildung V.6: Die Entwicklung des proportionalen Denkens von Jungen und Mädchen in Abhängigkeit von der Leistung im Vorschultest. Auf der vertikalen Y-Achse ist der Prozentsatz der gelösten Aufgaben zum proportionalen Denken in der 5. Klasse abgetragen.

Abbildung V.6 gibt die mittlere Leistung im proportionalen Denken in der 5. Klasse wider, und zwar getrennt für Jungen und Mädchen und in Abhängigkeit von der Vorschulleistung. Es zeigen sich zwei interessante Ergebnisse:

- Sowohl Jungen als auch Mädchen, die sich bereits in der Vorschulzeit im oberen Leistungsdrittel befanden, können ihren Vorsprung bis in die 5. Klasse halten. Die Ergebnisse der gegenwärtig durchgeführten Fortsetzungsstudie müssen zeigen, ob dies auch für höhere Schulstufen gilt. Zumindest für die Grundschulzeit können wir aufgrund der vorliegenden Ergebnisse sagen, daß leistungsstarke Mädchen ihren Startvorteil nicht verlieren.

- Die Ergebnisse zeigen unterschiedliche Entwicklungen von Mädchen und Jungen, die sich in der Vorschulzeit im mittleren Leistungsdrittel befanden. Deutlich mehr Jungen als Mädchen erreichen in der 5. Klasse noch das obere Leistungsdrittel.

Die Ergebnisse widersprechen allen wissenschaftlichen Theorien, denen zufolge Geschlechtsunterschiede in der Mathematikleistung erst während der Pubertät entstehen. Vielmehr scheinen die Unterschiede ihre Wurzeln bereits in der Vorschulzeit zu haben.

Fazit und Schlußfolgerungen für die Praxis

Die wichtigsten Ergebnisse zur längerfristigen Entwicklung von Leistungsunterschieden in der Mathematik lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Obwohl zu unterschiedlichen Alterszeitpunkten verschiedene mathematische Anforderungen zu erfüllen sind, gibt es offensichtlich eine über lange Lebensperioden hinweg stabile mathematische Begabung. Die meisten Kinder, die im Vorschulalter ihren Altersgenossen bei der Quantifizierung überlegen waren, behielten diesen Vorsprung auch bei, wenn später anspruchsvollere mathematische Anforderungen gestellt wurden. Umgekehrt gilt auch, daß Kinder, die im Vorschulalter eher schwächere Leistungen erbrachten, eine deutlich geringere Chance haben, später in der Schule gute Mathematikleistungen zu erzielen.

- Die Ergebnisse der LOGIK-Studie sprechen dafür, daß bereits im Grundschulalter Leistungsunterschiede in der Mathematik eher durch eine spezifische Begabung als mit allgemeinen Intelligenzunterschieden zu erklären sind.

- Es stellte sich heraus, daß in der Vor- und Grundschulzeit Jungen im Durchschnitt in allen Maßen zu mathematischen und numerischen Kompetenzen bessere Leistungen erbrachten als Mädchen. Dies zeigte sich in einem höheren Anteil der männlichen Schüler im oberen Leistungsdrittel und in einem niedrigeren Anteil der Jungen im unteren Drittel. Detaillierte Analysen belegten, daß zwei wichtige Gründe für die Überlegenheit der Jungen verantwortlich waren: Mehr Jungen als Mädchen hatten bereits in der Vorschulzeit mathematisch-numerische Kompetenzen entwickelt, auf denen sie in der Grundschulzeit aufbauen konnten. Darüber hinaus gelang es mehr Jungen als Mädchen aus dem mittleren Leistungsbereich, in das obere Leistungsdrittel aufzusteigen.

Es stellt sich natürlich die Frage nach den Ursachen für die großen Unterschiede zwischen den Kindern, sowohl innerhalb als auch zwischen den Geschlechtern. Eine Längsschnittuntersuchung wie die LOGIK-Studie kann zur Klärung der Erbe-Umwelt-Frage keinen Beitrag leisten; dafür werden Zwillings- und Adoptionsuntersuchungen benötigt. Dennoch sollen an dieser Stelle einige Anmerkungen zu der Frage nach den Ursachen der Geschlechtsunterschiede erfolgen. Noch vor einigen Jahren war man sowohl in der Wissenschaft als auch im Alltag geneigt, das schlechtere Abschneiden der Mädchen eher auf Unterschiede in den Umweltbedingungen als in der genetischen Ausstattung zurückzuführen. Mädchen erhielten lange Zeit eine deutlich schlechtere Ausbildung als Jungen, und es wurden bewußt unterschiedliche Anforderungen an beide Geschlechter gestellt. Dies hat sich jedoch in den letzten Jahren geändert. Angesichts der Bemühungen um Chancengleichheit für Mädchen und Jungen von Seiten der Elternhäuser, Kindergärten und Schulen lassen sich die noch immer zu beobachtenden Leistungsunterschiede zugunsten der Jungen nur noch schwer ausschließlich auf Umweltunterschiede zurückführen.

Natürlich kann man argumentieren, daß trotz oberflächlicher Bemühungen um Gleichbehandlung der Mädchen weiterhin Unterschiede gemacht werden, und dafür gibt es auch überzeugende Belege. Der in Abbildung V.6 dargestellte Befund, wonach für Kinder mit mittleren Eingangsvoraussetzungen gilt, daß Jungen bessere Chancen haben, noch in den oberen Leistungsbereich aufzusteigen als Mädchen, ließe sich in diese Richtung interpretieren. Fraglich geworden ist allerdings, ob das gesamte Ausmaß an Leistungsunterschieden darauf zurückzuführen ist, daß Mädchen in vielen Aspekten anders behandelt werden als Jungen. Die Abneigung, die viele Menschen verspüren, wenn genetische Faktoren zur Erklärung von Unterschieden herangezogen werden, ist auf eine ungerechtfertigte Gleichsetzung von "genetisch determiniert" und "unabänderlich" zurückzuführen. Selbst wenn männliche Personen im Durchschnitt weiblichen Personen in einigen (wissenschaftlich bisher nur vage bestimmbaren) Aspekten der Informationsverarbeitung, die für das mathematische Problemlösen wichtig sein könnten, überlegen sein sollten, bedeutet dies nicht, daß weibliche Personen für alle Zeiten zu einem niedrigeren Leistungsniveau verurteilt sind. Die Psychologie hat sich in den vergangenen zwei Jahrzehnten sehr intensiv mit dem Zustandekommen von Höchstleistungen in unterschiedlichsten Bereichen auseinandergesetzt. Es zeigte sich, daß das Sprichwort "Übung macht den Meister" seine Berechtigung hat. Personen, die in einem Gebiet Höchstleistungen erbringen, unterschieden sich von Personen, die lediglich mittelmäßige Leistungen erbringen, nicht nur in der zu Beginn einer Lernphase gemessenen allgemeinen und spezifischen Begabung, sondern vor allem in der Übungszeit. Personen, die Höchstleistungen erbringen, haben die entsprechende Tätigkeit häufiger und effizienter geübt als Personen, die lediglich mittelmäßige Leistungen erbringen. Auch wenn man für ein bestimmtes Gebiet eine geringere Begabung mitbringt als andere, kann man durch entsprechende Übung beachtliche Leistungserfolge erzielen. Dementsprechend müssen Hinweise auf genetisch determinierte Unterschiede als Aufforderung verstanden werden, durch gezieltes Training eventuelle Benachteiligungen zu kompensieren, – ohne allerdings erwarten zu können, daß begabungsbedingte Leistungsunterschiede verschwinden.

Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen kommt dem Ergebnis der LOGIK-Studie, wonach bereits in der Vorschulzeit Jungen im Durchschnitt bessere mathematische Leistungen erbringen als Mädchen, eine besondere Bedeutung zu. In Deutschland sind die Kinder bei der Einschulung älter als in den meisten anderen Ländern. Wenn Mädchen häufiger als Jungen "von Natur aus" wenig Interesse an Mathematik haben, werden sie seltener Übungsmöglichkeiten nutzen, die ihre Fertigkeiten auf diesem Gebiet verbessern könnten. Damit werden die Unterschiede zwischen den Geschlechtern um so größer, je länger man mit dem Angebot systematischer Lerngelegenheiten wartet. Mit anderen Worten: Würde man bereits vierjährigen Kindern in einem selbstverständlich noch spielerisch zu gestaltenden Vorschulunterricht mathematisch-numerische Lerngelegenheiten anbieten, könnten möglicherweise mehr Mädchen Gefallen an diesen Aktivitäten finden und dabei anfängliche Defizite kompensieren.

Eine weitere Ursache für die wachsende Benachteiligung von Mädchen sei zum Abschluß noch kurz erwähnt. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wurde dem "natürlichen" mathematischen Wissen, das zum Zählen und zur Modellierung von Veränderungen herangezogen wird, die "kulturelle" Mathematik gegenübergestellt, bei der mathematische Symbole zur Modellierung von komplexen und abstrakten Beziehungen genutzt werden. Dieser Vorgang wird in der Mathematik häufig durch räumlich-visuelle Veranschaulichung unterstützt, z.B. durch Verwendung von Graphen. In vielen Bereichen erschließt sich Wissen

nur durch die Möglichkeit, nicht-räumliche Information räumlich abzubilden. Nun zeigen psychologische Tests, daß zahlreiche Menschen, und zudem mehr weibliche als männliche Personen, Schwierigkeiten mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen haben. Zwillings- und Adoptionsstudien sprechen dafür, daß genetische Komponenten teilweise für die Unterschiede verantwortlich sind. Gleichzeitig gilt aber gerade für diesen Bereich, daß die Leistung durch Übung beachtlich gesteigert werden kann. Da im Schulunterricht, insbesondere während der Grundschulzeit, die räumlich-visuelle Veranschaulichung von Information so gut wie nicht geübt wird, wird diese Möglichkeit der Informationsverarbeitung nur von Kindern genutzt, die bereits gute Fähigkeiten mitbringen. In meinen zukünftigen Forschungsarbeiten wird als Konsequenz aus den Ergebnissen der LOGIK-Studie deshalb die Frage im Mittelpunkt stehen, wie man bereits in der Grundschule die graphische Veranschaulichung fördern kann, um damit auch Kindern mit etwas ungünstigeren Eingangsvoraussetzungen im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht zu besseren Lernerfolgen zu verhelfen.