10. Kapitel

Mathematik

Elsbeth Stern

Neben dem Erwerb der Schriftsprache gehört der Erwerb mathematischer Kompetenzen zu den wichtigsten schulischen Lernzielen. Mathematik begleitet die Schüler während der gesamten Schulzeit und wird in allen Schultypen gelehrt. Mathematische Kompetenzen werden in einer modernen technischen Gesellschaft zur Bewältigung zahlreicher Anforderungen benötigt. Ohne Kenntnis der Prozentrechnung kann nicht verstanden werden, wieviel Geld bei Sonderangeboten gespart wird. Das Lesen von Kontoauszügen setzt die Kenntnis von negativen Zahlen voraus. Das Prinzip des Versicherungswesens kann nur durchschaut werden, wenn Wissen über Wahrscheinlichkeitsrechnung vorliegt. Mathematisches Wissen wird zur Modellierung von Situationen oder Gesetzmäßigkeiten und zur Vorhersage von Ereignissen benötigt. In der Berufsausbildung wird in vielen Fällen eine Erweiterung der Schulmathematik verlangt. Der Banklehrling muß Bilanzrechnung lernen, der Psychologie- oder Soziologiestudent muß Kenntnisse in Statistik erwerben. Das Ziel schulischen Mathematikunterrichtes sollte es sein, flexibel einsetzbare Basiskonzepte und Problemlösekompetenzen zu vermitteln, die in konkreten Anforderungssituationen genutzt und ausgebaut werden können. Dieses Ziel wird jedoch bestenfalls bei einem Teil der Schüler erreicht. Für viele Schüler ist das Lösen mathematischer Probleme Selbstzweck, sie verstehen mathematische Symbole nicht als Werkzeuge zur Modellierung von Symbolen und Ereignissen. Diese Auffassung ist keinesfalls auf das Kindesalter beschränkt. Crawford, Gordon, Nicholas und Prosser (1994) zeigten, daß die meisten Studenten Mathematik als die Manipulation von Zeichen verstehen, nicht aber als Möglichkeit zur Simulation von Situationen und Ereignissen.

Bei der Suche nach Ursachen für die Probleme der Schüler mit dem Erwerb mathematischer Kompetenzen ist die kognitive Psychologie gefordert. In den letzten Jahren sind zum Teil in Zusammenarbeit mit Mathematikdidaktikern zahlreiche Arbeiten zum Erwerb und der Anwendung mathematischen Wissens entstanden. Die neueste und wohl auch umfangreichste Zusammenfassung findet sich bei De Corte, Verschaffel und Greer (in Druck). Einflußreiche Bücher zum Erwerb mathematischer Kompetenzen aus psychologischer Sicht wurden von Ginsburg (1983), Hiebert (1986), Lesh und Landau (1983), Sloboda und Rogers (1987), Schoenfeld (1985), Hiebert und Behr (1988), Campbell (1992), Bideaud, Meljac und Fischer (1992) sowie Leinhardt, Putnam und Hattrup (1992) herausgegeben.

In diesem Beitrag werden psychologische Arbeiten diskutiert, die das Bearbeiten mathematischer Probleme zum Gegenstand haben. Arbeiten aus der Mathematikdidaktik werden nur behandelt, wenn ihnen die in der Psychologie üblichen Methoden zugrundeliegen. Der überwiegende Teil der psychologischen Arbeiten setzt sich mit den mathematischen Kompetenzen von Vorschulkindern sowie von Schülern im Grundschulalter und der Sekundarstufe I auseinander. Diese Altersstufen stehen auch in diesem Beitrag im Mittelpunkt, werden aber durch einige wenige Arbeiten zu mathematischen Kompetenzen im Erwachsenenalter ergänzt.

Der Beitrag besteht aus drei Schwerpunkten. Im Abschnitt 1 *Mathematische Kompetenzen und Inkompetenzen* werden Modelle des Erwerbes und der Nutzung mathematischen Wissens dargestellt, die gleichzeitig Erklärungen für Fehlentwicklungen geben können. Im Abschnitt 2 *Determinanten interindividueller Kompetenzunterschiede* wird nach Ursachen für die große Varianz in mathematischen Leistungsmessungen gesucht. Versuche, psychologische Erkenntnisse in die Schulpraxis umzusetzen, werden im Abschnitt 3 *Ansätze zur Förderung mathematischer Kompetenzen in der Schule* dargestellt.

1 Mathematische Kompetenzen und Inkompetenzen

Mathematisches Wissen ist durch ein hohes Maß an Abstraktheit und Formalität gekennzeichnet. In jedem Inhaltsgebiet erfordert der Erwerb von Konzepten eine Abstraktionsleistung. Bei den konkreten Instanzen der Konzepte anderer Inhaltsgebiete handelt es sich jedoch meist um konkrete Objekte oder Ereignisse. Dem Konzept „Stuhl" sind konkrete Sitzgelegenheiten zugeordnet, auf die man zeigen kann. Selbst schwer definierbare Begriffe wie „Gerechtigkeit" kann man verdeutlichen, indem man konkrete Situationen heranzieht. In der Mathematik hingegen sind die konkreten Instanzen des Basiskonzeptes „Zahl" selbst bereits abstrakte Einheiten. Man kann die Bedeutung der Zahl „fünf" nicht erklären, indem man das Zahlzeichen „5" aufschreibt oder indem man auf fünf Gegenstände zeigt. Da die Alltagssprache zu ungenau ist, um mathematische Inhalte zu beschreiben, wurden formale Systeme zu deren Darstellung entwickelt. Mathematischen Symbolen kommt eine *duale Funktion* zu (Resnick, 1992): Einerseits werden sie zur Bezeichnung von Bedeutungen herangezogen, andererseits kommt ihnen aber auch eine eigene Bedeutung zu. Mathematische Symbolsysteme sind das Ergebnis kultureller Entwicklung, sie sind Menschenwerk. Gleichzeitig ergeben sich aus den Symbolsystemen Konzepte und Gesetzmäßigkeiten, die nicht von ihren Konstrukteuren intendiert wurden. Primzahlen wurden nicht erfunden, sondern sie werden vorgefunden. Mathematische Konzepte wie z. B. Infinität und Limes ergeben sich aus einem auf einem Stellenprinzip basierenden Symbolsystem.

1.1 Die Genese numerischer Kompetenzen

1.1.1 Der Ursprung mathematisch-numerischen Wissens

Obwohl mathematisches Verständnis eine beachtliche Abstraktionsleistung erfordert, erwerben die meisten Vorschulkinder weitgehend spontan Zählfertigkeiten (Starkey, Spelke & Gelman, 1990) sowie einfache Additions- und Subtraktionsstrategien (Carpenter & Moser, 1983). Was versetzt Kinder in die Lage, die genannten Kompetenzen „nebenbei" zu erwerben? In der kognitiven Entwicklungspsychologie zeichnen sich neue Erkenntnisse bezüglich des Ursprungs mathematischen Wissens ab. In der Tradition von Piaget wurde angenommen, daß der neugeborene Mensch mit den inhaltsunspezifischen Mechanismen Assimilation, Akkommodation und Äquilibration ausgestattet ist und diese allein den Erwerb von Kompetenzen steuern. Dieser konstruktivistischen Theorie werden inzwischen nativistische Theorien des Wissenserwerbes gegenübergestellt, die davon ausgehen, daß der Mensch bereits von Geburt an mit inhaltsspezifischem Wissen ausgestattet ist, das ihm die Bewältigung bestimmter Anforderungen ermöglicht. Bei Karmiloff-Smith (1992) sowie bei Carey und Gelman (1991) werden Möglichkeiten einer inhaltsspezifischen Entwicklung diskutiert. In den letzten Jahren häufen sich Befunde, die dafür sprechen, daß Menschen (und in eingeschränktem Maße auch Tiere) mit der Fähigkeit ausgestattet sind, quantitative Information zu verarbeiten. Bei Karmiloff-Smith (1992) finden sich Zusammenfassungen der eindrucksvollen Belege für die Fähigkeit von Säuglingen, quantitative Information zu verarbeiten. Bereits Säuglinge können die Anzahl der Elemente im kleinen Zahlenbereich erfassen (Antell & Keating, 1983) und Veränderungen in der Größe einer Menge registrieren (Wynn, 1992). Die Sensibilität des Menschen für quantitative Veränderungen in der Umgebung bildet möglicherweise die Grundlage für den Erwerb der Zählfertigkeit und der Ausführung von Additions- und Subtraktionsoperationen. Für die Annahme, daß die Fähigkeit zur Verarbeitung basaler quantitativer Information allen Menschen gegeben wurde, sprechen auch kulturvergleichende Studien (Damerow, 1988). Selbst in „primitiven" Kulturen, die nicht über eine Schriftsprache verfügen, existieren Zahlwörter, die zur Beschreibung von Situationen und Vorgängen der Umgebung herangezogen werden können, und Additions- und Subtraktionsoperationen im kleinen Zahlenbereich sind ebenfalls universell verfügbar (Resnick, 1986). Kontrovers diskutiert wird gegenwärtig die Frage, ob alle fünf dem Zählen zugrundeliegenden Prinzipien ((1) Kardinalität, (2) Eins-zu-eins-Zuordnung von Zahlwörtern zu Quantitäten, (3) stabile Reihenfolge der Zählwörter, (4) Unabhängigkeit der Reihenfolge, in der die Objekte gezählt werden, (5) Abstraktion von konkreten Einheiten) bereits verfügbar sind, bevor das Kind zu zählen beginnt (nativistischer Ansatz), wie Gelman (1990) annimmt, oder ob diese erst aus der Erfahrung mit dem Zählen erschlossen werden, wie Wynn (1990) behauptet (konstruktivistischer Ansatz).

Während in allen bekannten Kulturen *Zahlwörter* zur Verfügung stehen, trifft dies nicht auf Zahlsymbolsysteme zu. Nicht alle Kulturen mit Schriftsprache verfügen über ein Zahlsymbolsystem (Damerow, 1988). Die in verschiedenen Kulturen entwickelten Zahlsymbolsysteme unterscheiden sich in der Möglichkeit ihrer konzeptuellen Erweiterbarkeit (Ifrah, 1989). Das Zahlsymbolsystem der Römer beschränkte sich auf natürliche Zahlen, ließ sich nicht unendlich erweitern und ermöglichte weder schriftliche Multiplikation noch Division. Demgegenüber hatten bereits die Mesopotamier ein Zeichensystem entwickelt, das die Bruchschreibweise ermöglichte (Damerow, 1988). Nur Zahlzeichen, die auf einem Stellensystem beruhen, ermöglichen mehrstellige schriftliche Rechenoperationen. Erst die Einführung der Zahl Null, die aus Indien übernommen wurde, ermöglichte eine unendliche Erweiterung des Zahlenraumes. Bei der Entwicklung mathematischer Konzepte kommt dem Zahlzeichensystem eine besondere Bedeutung zu. Bei Gelman (1991), Hiebert und Wearne (1992) wird gezeigt, daß sich das Verständnis von Dezimalzahlen, Brüchen und der Konzepte Infinität und Limes in der Auseinandersetzung mit Zahlzeichen entwickelt.

Festzuhalten bleibt also, daß Zählkompetenzen und einfache mathematische Operationen universell verfügbar sind, während höhere mathematische Kompetenzen das Produkt einer kulturellen Entwicklung sind. Dieser Entwicklung ist es zu verdanken, daß mathematische Konzepte und Operationen, deren Entwicklung Jahrhunderte in Anspruch nahm, von Mitgliedern eines Kulturkreises in wenigen Jahren erworben werden können.

1.1.2 Die Entwicklung mathematischer Strategien

Die Manipulation von Symbolen ist ein wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichtes. Im Arithmetikunterricht und im Algebraunterricht geht es

darum, symbolische Darstellungen zu vereinfachen. Der Term „7 + 2" soll in „9" umgewandelt werden. Nach Bisanz und LeFevre (1990) kann man bei der Manipulation mathematischer Symbole zwischen Faktenwissen, Prozedurenwissen und Strategiewissen unterscheiden. So kann die Aufgabe „5 + 8 = " durch den Abruf eines Faktums aus dem Gedächtnis gelöst werden, sofern das Ergebnis in einem arithmetischen Netzwerk gespeichert ist. Bei Ashcraft und Battaglia (1978) finden sich Belege für den Gedächtnisabruf von arithmetischem Wissen.

Prozedurenwissen beschreibt die Verfügbarkeit von Handlungskompetenzen beim Lösen von Aufgaben. Die Anwendung der Aufzählprozedur ermöglicht das Ausrechnen der Aufgabe „3 + 5 = ", indem die zweite Zahl auf die erste Zahl gezählt wird, z. B. 4,5,6,7,8. Die genannte Additionsaufgabe könnte aber auch durch die Ausführung einer Prozedur gelöst werden, bei der die 3 auf die 5 aufgezählt wird. Die Verfügbarkeit mehrerer Prozeduren ermöglicht strategisches Vorgehen. Während man unter einer Prozedur die sukzessive Abfolge festgelegter Handlungsfolgen versteht, die keine Variation zuläßt, ist eine Strategie durch Flexibilität gekennzeichnet. Strategisches Vorgehen beim Lösen von Rechenaufgaben bedeutet z. B., daß man die Auswahl der Prozedur von den Zahlen abhängig macht. Bei der Subtraktionsaufgabe „7–2 = " wird man rückwärts zählen, während man bei der Aufgabe „7–5 = " ergänzt. Auch in der Algebra zeichnet sich strategisches Verhalten durch die Verfügbarkeit mehrerer Prozeduren aus, z. B. das Ausklammern von Variablen oder das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken.

Bisanz und LeFevre (1990) verdeutlichen den Unterschied zwischen Strategie und Prozedur am Beispiel des Eishockeyspieles. Das Heranpirschen an den Puck ist Teil des strategischen Vorgehens: Man hat viele Möglichkeiten, die gegnerischen Spieler zu überlisten. Das Ausholen zum optimalen Schlag hingegen wird als Prozedur bezeichnet, da es nur eine optimale Möglichkeit gibt, den Puck zu befördern. Mathematische Prozeduren sind an bestimmte Aufgabentypen gebunden, die lediglich den Nah-Transfer auf ähnliche Aufgabentypen bewirken. Strategisches Vorgehen besteht in der auf die Bewältigung der Anforderung optimal abgestimmten Auswahl von Prozeduren.

In Modellen der Veränderung kognitiver Strukturen wird häufig implizit oder explizit die Ablösung veralteter Strukturen durch neue angenommen. Robert Siegler hat in zahlreichen Arbeiten Belege gegen diese vereinfachende Vorstellung geliefert. Für alle Grundrechenarten konnte Siegler zeigen, daß eine neu erworbene anspruchsvolle Strategie keinesfalls die älteren Strategien ersetzt, sondern daß verschiedene Strategien parallel eingesetzt werden. In einer mikrogenetischen Längsschnittstudie (kurze Abstände zwischen den Meßzeitpunkten, so daß Veränderungen im Verhalten auf „mikroskopischer" Ebene untersucht werden können) haben Siegler und Jenkins (1989) dargestellt, wie die Min-Strategie in der Addition erworben und angewendet wird. Eines ihrer wichtigsten Ergebnisse war, daß Kinder, die entdeckt hatten, daß man Additionsaufgaben lösen kann, indem man die kleinere Zahl auf die größere Zahl aufzählt, diese Strategie keinesfalls durchgängig anwendeten. Vielmehr zogen die Kinder umständlichere, aber sehr viel vertrautere Strategien vor, wie z. B. von eins aufzählen. Die strikte Trennung zwischen Strategieentdeckung und Strategieanwendung wurde nahegelegt durch die Tatsache, daß die Präsentation von „Herausforderungsaufgaben" in keinem einzigen Falle zur Entdekkung einer Strategie führte. Lediglich die häufigere Anwendung einer bereits entdeckten Strategie konnte durch die Präsentation von Herausforderungsaufgaben (z. B. 2 + 23 =) gefördert werden. Es zeigte sich mithin, daß die Entstehung neuer elaborierter Strategien keineswegs ein Alles-oder-Nichts Vorgang ist, sondern ein kontinuierlicher.

1.1.3 Der Aufbau von Faktenwissen

Wie bereits erwähnt, verfügen geübte Rechner über ein Faktennetzwerk, in dem die Ergebnisse aus Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division einstelliger Zahlen gespeichert sind (Ashcraft & Battaglia, 1978). Die Verfügbarkeit von Faktenwissen macht den mathematischen Problemlöseprozeß weniger störanfällig, weil für den Faktenabruf weniger Zeit und Arbeitsspeicherkapazität benötigt wird als für die Durchführung einer Rechenprozedur (Van Lehn, 1990). Der Aufbau eines sicher verfügbaren Faktennetzes der Ergebnisse aller vier Grundrechenarten im Zahlenbereich bis 100 ist wesentlicher Bestandteil des Mathematikunterrichtes in der Grundschule. Siegler (Zusammenfassung in Siegler, 1991) hat detaillierte Vorstellungen zur Entwicklung des arithmetischen Netzwerkes der Ergebnisse von Addition und Subtraktion ausgearbeitet. Die zentrale Annahme seiner Theorie ist, daß eine Person fast immer mehrere Strategien zur Lösung einer Aufgabe verfügbar hat, die miteinander konkurrieren. So kann die Additionsaufgabe „3 + 5 = " u. a. gelöst werden durch eine Reihe einfacher Zählstrategien, wie z. B. „1,2,3, 1,2,3,4,5, 1,2,3,4,5,6,7,8,", oder aber mit Hilfe der „Min-Strategie", d. h. durch Aufzählen der kleineren Zahl auf die größere. Jedes korrekte Ausführen einer Rechenaufgabe führt zu einem Anstieg der Assoziationsstärke zwischen der Aufgabe und deren Lösung. Jeder Fehler führt zu einem Anstieg der Assoziationsstärke zwischen der Aufgabe und dem falschen Ergebnis. Damit sinkt die Assoziationsstärke zwischen der Aufgabe und dem richtigen Ergebnis. Hat die Assoziationsstärke zwischen der Aufgabe und einer Antwortzahl (falsch oder richtig) einen gewissen Grad überschritten, wird die Antwort bereits aktiviert und ist abrufbar, bevor eine Zählstrategie einsetzt. Das Faktennetzwerk ist also das Ergebnis des prozeduralen Wissens. Als pädagogische Konsequenz

läßt sich aus Sieglers Modell ableiten, daß Fehler beim Aufbau eines Faktennetzwerkes möglichst zu vermeiden sind. Fehler können bei Überforderung durch den Lehrer entstehen, wenn dieser z. B. die Anwendung einer noch nicht zuverlässig beherrschten Strategie bei schwierigen Aufgaben verlangt. So kann das generelle Verbot, mit Fingern zu rechnen, die Fehlerwahrscheinlichkeit erhöhen und damit den Aufbau eines elaborierten Faktennetzwerkes verhindern. Das Netzwerk für Ergebnisse von Multiplikations- und Divisionsoperationen kann ebenfalls über die häufige Durchführung von Strategien und Prozeduren aufgebaut werden, wird jedoch meist im Schulunterricht direkt gelernt (Campbell, 1987).

1.1.4 Die Entstehung konzeptuellen Wissens

Mathematisches Verständnis zeigt sich in der Anwendung elaborierter Strategien und in der Verfügbarkeit von Konzepten. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob die explizite Verfügbarkeit von mathematischen Konzepten die Voraussetzung für die Strategieanwendung ist, oder ob sich explizit verfügbare Konzepte erst aus der Bearbeitung mathematischer Aufgaben ergeben (Hiebert & LeFevre, 1986). In unterschiedlichsten Altersstufen und mathematischen Anforderungen zeigt sich, daß der expliziten Verfügbarkeit mathematischer Konzepte die implizite Nutzung beim Lösen von Aufgaben vorangeht (dazu: Stern, 1994). Baroody und Ginsburg (1986) zeigten, daß dem expliziten Verständnis des Kommutativgesetzes die Nutzung dieses Prinzips beim Lösen von Additionsaufgaben voranging. Kinder zählten die kleinere Zahl auf die größere Zahl auf, obwohl sie das Kommutativgesetz nicht explizieren konnten (Siegler und Jenkins, 1989). Dies konnte auch am Beispiel des Erwerbs der Abkürzungsstrategie bei der Bearbeitung von Inversionsaufgaben (z. B. 18 + 8–8 =) gezeigt werden. In einer Untersuchung von Bisanz und LeFevre (1990) zeigte sich, daß die Mehrheit der Kinder unter zehn Jahren die gleichen Rechenstrategien anwendeten wie bei Standardaufgaben (z. B. 19 + 4–7 =). Stern (1992) berichtet, daß bereits Siebenjährige die Abkürzungsstrategie anwendeten, wenn Inversionsaufgaben nicht mit Standardaufgaben gemischt wurden. In diesem Falle mußte die Abkürzungsstrategie nicht mit konventionellen Rechenstrategien „konkurrieren" und konnte deshalb, einmal entdeckt, durch kontinuierliche Anwendung gefestigt werden.

1.1.5 Mathematische Mißkonzepte

Defizite im mathematischen Verständnis zeigen sich in systematischen Fehlern, die von Flüchtigkeitsfehlern, die z. B. beim Ausführen von Prozeduren auftreten, zu unterscheiden sind. In den letzten Jahren wurden zahlreiche systematische Fehler identifiziert, die sich aus der Vernachlässigung bestimmter mathematischer Prinzipien im Problemlöseprozeß ergeben. So treten systematische Fehler bei der Bruchrechnung auf (Resnick, 1986). Kinder gehen davon aus, daß gilt: *5/4 < 5/6*. Der Grund für dieses fehlerhafte Konzept liegt in einem eingeschränkten Zahlverständnis: Zahlen werden ausschließlich als Instrumente zur Abbildung von Mengen verstanden. Daraus ergibt sich, daß größere Zahlen auch größere Mengen abbilden. In die ähnliche Richtung geht ein bei Hiebert (1992) beobachteter Fehler, wonach Kinder der Sekundarstufe häufig annehmen, daß gilt: *1.24 < 1.198.*

Sehr detaillierte Ergebnisse zu systematischen Fehlern liegen zur schriftlichen Subtraktion vor. In den sehr bekannten Studien von Brown und Burton (1978) und van Lehn (1983, 1990) wurde dokumentiert, daß unter bestimmten Bedingungen bereits verfügbare Prinzipien des Zehnersystems vernachlässigt werden. Wenn die Ziffer im Subtrahenden kleiner ist als im Minuenden, wird addiert statt subtrahiert, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{array}{r} 328 \\ -\ 246 \\ \hline 162 \end{array}$$

Ein häufig vorkommender Fehler ist die Vernachlässigung der „geborgten" 1, wenn bei der Zehnerstelle eine Null auftritt:

$$\begin{array}{r} 702 \\ -\ 108 \\ \hline 604 \end{array}$$

Obwohl unter bestimmten Bedingungen das Prinzip des Zehnerübergangs beherrscht wird, kann dieses nicht angewendet werden, wenn im Minuenden und/oder im Subtrahenden eine Null vorkommt. Unberücksichtigt bleibt der Zehnerübergang auch bei Aufgaben, in denen eine Zehnerzahl von einer Hunderterzahl zu subtrahieren ist:

$$\begin{array}{r} 744 \\ -\ 83 \\ \hline 761 \end{array}$$

Van Lehn (1990) hat die Vorgehensweisen der Schüler beim Lösen von schriftlichen Subtraktionsaufgaben als „Flickwerk" bezeichnet. Die Lösungen basieren nicht auf einem elaborierten Verständnis des Zehnersystems, sondern es werden einzelne „Wissensfetzen" relativ willkürlich herangezogen.

1.2 Die mathematische Modellierung von Situationen und Ereignissen

Wie bereits in der Einleitung dargestellt, kann das Verstehen alltäglicher Situationen die Berücksichtigung mathematischen Wissens erfordern. In der Schule wird die Nutzung mathematischen Wissens zur Lösung von Alltagsproblemen mit Hilfe von Textaufgaben überprüft. Textaufgaben bereiten nicht nur Kindern Schwierigkeiten. Soloway, Lochhead und Clement (1982) konnten zeigen, daß mehr als ein Drittel der untersuchten Collegestudenten, die erfolgreich Algebrakurse absolviert hatten, die Aussage „Auf jeden Professor (P) kommen 6 Studenten (S)" mit „P = 6S" formalisierten. Bei diesem Fehler handelt es sich um die Wahl der falschen Rechenoperation, der auch bei Additions- und Subtraktionsaufgaben recht häufig vorkommt (Cummins, Kintsch, Reusser & Weimer, 1988).

Eine Ursache für den „Falsche-Operation-Fehler" ist die sogenannte Schlüsselwortstrategie (Nesher & Teubal, 1975; Schoenfeld, 1982): Eine Aufgabe wird nach sprachlichen Hinweisen abgesucht, die auf eine bestimmte mathematische Operation hinweisen. Wenn „mehr" oder „zusammen" vorkommen, wird addiert, wenn „weniger" oder „bleibt übrig" vorkommen, wird subtrahiert. Zu welchen absurden Anwendungen es kommt, wenn – wie teilweise in den USA – Schlüsselwortstrategien im Unterricht gelehrt werden, konnte Schoenfeld (1982) zeigen. Kinder, die gelernt hatten, daß man subtrahieren soll, wenn das Wort „left" vorkommt, subtrahierten sogar, wenn ein „Mr Left" in der Aufgabe erwähnt wurde. Die Tendenz von Kindern, sich bei fehlendem mathematischen Verständnis von Oberflächenmerkmalen der Aufgaben leiten zu lassen, kann zu dauerhaften Defiziten führen, die dem Lehrer möglicherweise verborgen bleiben.

Schwierigkeiten beim Lösen mathematischer Aufgaben zeigen sich nicht nur in fehlerhaften, sondern auch in suboptimalen Vorgehensweisen. Brasilianische Kinder, die als Straßenverkäufer arbeiten, rechnen den Preis ihrer Waren nicht auf der Grundlage des in der Schule gelernten Zehnersystems aus, sondern auf der Grundlage eines von ihnen selbst entwickelten Dreiersystems (Carraher, Carraher & Schliemann, 1985). Erwachsene Teilnehmer eines Diätprogrammes, die 2/3 des Quarks einer 3/4 gefüllten Dose entnehmen sollten, multiplizierten nicht die Brüche, sondern wendeten Probierverfahren an (Collins, Brown & Newman, 1989). Lochhead (1983) berichtet, daß nur 27 % der untersuchten *Ingenieurstudenten* dazu in der Lage waren, unter Verwendung der Variablennamen C und S eine Gleichung zu folgender Aufgabe aufzustellen: „In Mindys Restaurant kommen auf vier Gäste, die Käsekuchen bestellen, fünf Gäste, die Strudel bestellen. C soll die Anzahl der bestellten

Käsekuchen sein und S die Anzahl der bestellten Strudel." Die beschriebenen Probleme in der Bewältigung mathematischer Anforderungssituationen zeigen, daß in vielen Fällen lediglich situationsspezifische Mathematisierungen entwikkelt werden, weil flexibel und vielseitig anwendbare mathematische Prinzipien und Konstrukte nicht verfügbar sind.

Der Schwierigkeitsgrad der in Text eingekleideten mathematischen Aufgaben wird nicht durch die zugrundeliegende Gleichung determiniert, wie die meisten Lehrer annehmen (Peterson, Fennema & Carpenter, 1989). Vielmehr konnte bei einfachen Arithmetikaufgaben, bei Algebraaufgaben und bei Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gezeigt werden, daß in bezug auf die ihnen zugrundeliegende Gleichung isomorphe Aufgaben sich vehement in ihrem Schwierigkeitsgrad unterscheiden können. Dieses in unterschiedlichen Altersgruppen gefundene Ergebnis ist für die Schulmathematik von großer Bedeutung, hat aber bisher wenig Beachtung gefunden (Cummins, Kintsch, Reusser & Weimer, 1988; Riley & Greeno, 1988; Greer, 1992b; Greeno, Moore & Smith, 1993; Reusser, 1992; Stern, 1994). Im folgenden wird für Textaufgaben zur (a) Addition und Subtraktion, (b) Multiplikation und Division und (c) zur Algebra gezeigt, daß das einer Aufgabe zugrundeliegende Situationsmodell den Schwierigkeitsgrad entscheidend determiniert.

(a) *Textaufgaben zur Addition und zur Subtraktion*

Textaufgaben, die die Addition oder die Subtraktion zweier Zahlen erfordern, liegen vier mögliche logisch-mathematische Situationstypen zugrunde: der Austausch, der Vergleich, die Angleichung und die Kombination von Mengen. Weiterhin kann in einer Aufgabe variiert werden, welche Menge gesucht wird und welche Mengen bekannt sind. Riley, Greeno und Heller (1983) haben 16 Prototypen von einfachen Textaufgaben entwickelt, die in den darauffolgenden Jahren in mehreren Studien auf ihre Schwierigkeit hin getestet wurden (Cummins, Kintsch, Reusser & Weimer, 1988; Riley & Greeno, 1988; Stern, 1993, 1994). Tabelle 1 enthält die 16 prototypischen Aufgaben zusammen mit den bei Stern (1994) berichteten Lösungsraten für Erstkläßler.

In allen Studien zeigte sich, daß Aufgaben zum Vergleich von Mengen erheblich schwieriger waren als Aufgaben zur Kombination, zur Angleichung und dem Austausch von Mengen.

Nach Riley und Greeno (1988) unterscheiden sich die in Tabelle 1 aufgeführten Textaufgaben in den Anforderungen an das mathematische Wissen. Während einfache Austauschaufgaben (2.1.1, 2.1.2) durch sukzessive Modellierung mit Hilfe von Gegenständen gelöst werden können, erfordern Austauschaufgaben mit unbekannter Startmenge (2.3.1, 2.3.2), sowie alle Typen von Vergleichsaufgaben, die Verfügbarkeit eines *abstrakten Problemmodells*, das auf dem mathematischen Teil-Ganzes-Schema beruht. Der Begriff „Teil-Ganzes-Schema" be-

Tabelle 1: Sechzehn Prototypen von Textaufgaben. Prozentsatz deutscher Erstkläßler (aus Stern, 1994), die die Aufgabe lösten.

1. Kombinationsaufgaben	in %
1.1 Gesamtmenge unbekannt	
Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln haben die beiden zusammen?	87
1.2 Teilmenge unbekannt	
Maria und Hans haben zusammen 8 Murmeln. Maria hat 7 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans?	55
2. Austauschaufgaben	in %
2.1 Endmenge unbekannt	
2.1.1 Maria hatte 3 Murmeln. Dann gab ihr Hans 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	89
2.1.2 Maria hatte 6 Murmeln. Dann gab sie Hans 4 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Maria jetzt?	95
2.2 Austauschmenge unbekannt	
2.2.1 Maria hatte 2 Murmeln. Dann gab ihr Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 9 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans ihr gegeben?	52
2.2.2 Maria hatte 8 Murmeln. Dann gab sie Hans einige Murmeln. Jetzt hat Maria 3 Murmeln. Wie viele Murmeln hat sie Hans gegeben?	49
2.3 Startmenge unbekannt	
2.3.1 Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab ihr Hans 3 Murmeln. Jetzt hat Maria 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?	49
2.3.2 Am Anfang hatte Maria einige Murmeln. Dann gab sie Hans 2 Murmeln. Jetzt hat Maria 6 Murmeln. Wie viele Murmeln hatte sie am Anfang?	38
3. Vergleichsaufgaben	in %
3.1 Differenzmenge unbekannt	
3.1.1 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans mehr als Maria?	28
3.1.2 Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Hans weniger als Maria?	32
3.2 Vergleichsmenge unbekannt	
3.2.1 Maria hat 3 Murmeln. Hans hat 4 Murmeln mehr als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?	53
3.2.2 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 3 Murmeln weniger als Maria. Wie viele Murmeln hat Hans?	58
3.3 Referenzmenge unbekannt	
3.3.1 Maria hat 9 Murmeln. Sie hat 4 Murmeln mehr als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?	22
3.3.2 Maria hat 4 Murmeln. Sie hat 3 Murmeln weniger als Hans. Wie viele Murmeln hat Hans?	16
4. Angleichungsaufgaben	in %
4.1 Maria hat 5 Murmeln. Hans hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln muß Maria noch bekommen, damit sie genauso viele Murmeln hat wie Hans?	96
4.2 Maria hat 6 Murmeln. Hans hat 2 Murmeln. Wie viele Murmeln muß Maria abgeben, damit sie genauso viele Murmeln hat wie Hans?	96

schreibt die Flexibilität im Umgang mit Quantitäten (Resnick, 1986, 1989), die sich in der Verfügbarkeit mathematischer Prinzipien wie Kommutativität oder Komplementarität zwischen Addition und Subtraktion zeigt. Addition und Subtraktion werden nicht allein unter dem Aspekt der Ausführung einer Rechenoperation gesehen, sondern als Möglichkeiten, die Beziehungen zwischen Zahlen zu beschreiben. *5 + 2 =* ist ein anderer Name für *7*.

Kleine sprachliche Veränderungen können sich in beachtlicher Weise auf die Lösungsrate von Textaufgaben auswirken. Wie Tabelle 1 zu entnehmen ist, sind Angleichungsaufgaben (4.1, 4.2) deutlich einfacher als Vergleichsaufgaben mit unbekannter Differenzmenge (3.1.1, 3.1.2). Beide Aufgabentypen unterscheiden sich lediglich in der Formulierung der Frage. Dieser Reformulierungseffekt wurde erstmals bei Hudson (1983) berichtet. Während die Vergleichsaufgabe „5 Vögel haben Hunger. Sie finden 3 Würmer" von weniger als 20 % der Kinder gelöst wurde, wenn die Frage lautete: „Wieviel mehr Vögel als Würmer gibt es?", lösten fast 100 % der gleichen Kinder die Aufgabe mit der reformulierten Frage „Wie viele Vögel bekommen keinen Wurm?". Stern und Lehrndorfer (1992) konnten zeigen, daß dieser Reformulierungseffekt nicht mit sprachlichen, sondern mit mathematischen Erleichterungen zu erklären ist. In reformulierten Aufgaben wird ein einfacheres Problemmodell angesprochen, da die Vergleichsaufgabe zu einer Angleichungsaufgabe wird. In der Angleichungsaufgabe wird nicht die abstrakte Beziehung zwischen Mengen beschrieben, sondern eine konkrete, zählbare Menge. Es zeigte sich in den o. g. Arbeiten, daß die nicht reformulierten Vergleichsaufgaben sehr viel einfacher wurden, wenn diesen eine Geschichte vorangestellt wurde, in der der Wunsch nach Angleichung zweier Mengen im Mittelpunkt stand. Ohne den Bezug auf die Mengenangleichung setzt das Verständnis des quantitativen Vergleiches voraus, daß Zahlen nicht ausschließlich als Zählinstrumente aufgefaßt werden, sondern auch als Möglichkeiten zur Beschreibung der Beziehung zwischen Mengen. Bei Stern (1994) wird ausführlich erörtert, warum das frühe Verständnis des quantitativen Vergleiches den späteren Erwerb der sogenannten höheren Mathematik fördern kann. Erste Ergebnisse aus Längsschnittuntersuchungen unterstützen diese Annahme. In westlichen Ländern werden Vergleichsaufgaben nur selten im Schulunterricht behandelt. Bei dem überwiegenden Teil der Aufgaben handelt es sich um Austausch-, Angleichungs- und Kombinationsaufgaben (Fuson, 1992).

(b) *Textaufgaben zur Multiplikation und Division*
Auch Multiplikation und Division können zur Beschreibung unterschiedlicher Situationen herangezogen werden. Klassifikationssysteme für Textaufgaben wurden von Greer (1987, 1992 a, 1992 b), Nesher (1988, 1992) und Vergnaud (1983, 1988) erarbeitet. Wie bei Additions- und Subtraktionsaufgaben, gibt es auch hier große Differenzen in den Schwierigkeiten der Aufgabentypen.

Bei Aufgaben vom Typ „Gleichverteilung", wie z. B.

> Es gibt 5 Kinder. Jedes Kind soll 4 Kekse bekommen. Wie viele Kekse werden benötigt?

kann Multiplikation als wiederholte Addition aufgefaßt werden. Die entsprechende Divisionsaufgabe

> 20 Kekse sollen unter 5 Kinder zu gleichen Teilen verteilt werden. Wie viele Kekse bekommt jedes Kind?

basiert auf dem einfachen Problemmodell der sukzessiven Korrespondenz, das den Kindern früh vertraut ist: in der ersten Runde wird jedem Kind ein Keks zugeordnet, in der zweiten Runde ein weiterer, usw. Beide Aufgabentypen können bereits von Erstkläßlern gelöst werden.

Größere Schwierigkeiten treten hingegen bei Aufgaben zum multiplikativen Vergleich auf, wie z. B.

> Hans hat 12 Kekse. Peter hat doppelt (halb) so viele Kekse wie Hans. Wie viele Kekse hat Peter?

Aufgaben, denen das Kartesische Produkt zugrundeliegt, wie z. B.

> Es gibt 4 Wege von A nach B und 3 Wege von B nach C. Wie viele Wege gibt es von A nach C, die über B führen?

bereiten Kindern noch in der sechsten Klasse Schwierigkeiten (Greer, 1992 a). Die Schwierigkeitsunterschiede zwischen den Aufgabentypen sind ähnlich wie bei Additions- und Subtraktionsaufgaben damit zu erklären, daß die mathematische Modellierung der jeweiligen Situationen „Gleichverteilung", „Multiplikativer Vergleich" und „Kartesisches Produkt" unterschiedliche Anforderungen an das mathematische Wissen stellt. Der Situation „Gleichverteilung" liegt die wiederholte Addition bzw. die sukzessive Zuordnung von Objekten zu Subjekten zugrunde. Aufgaben zum multiplikativen Vergleich erfordern nach Nesher (1988, 1992) ein „Beziehungsmodell": der Multiplikator beschreibt die Beziehung zwischen zwei Mengen. Aufgaben zum Kartesischen Produkt verlangen ein mathematisches Modell, in dem jedes Element mit jedem verbunden wird, dasselbe Modell also, welches auch der Matrizenrechnung zugrundeliegt.

In den Schulbüchern und im Unterricht dominieren Gleichverteilungsaufgaben (Nesher, 1992; Vergnaud, 1992). Die Beschränkung auf diesen Aufgabentyp kann zu einem eingeschränkten Verständnis von Multiplikation und Division führen, was sich erst beim Rechnen mit rationalen Zahlen zeigt. Mit der Repräsentation von Multiplikation als wiederholter Addition und Division als sukzessiver Zuordnung gehen die Vorstellungen einher, daß das Ergebnis einer Multiplikation immer größer ist als deren Multiplikatoren und daß ein Quotient kleiner ist als dessen Dividend, was tatsächlich nur für Zahlen größer als 1 gilt. Die in Gleichverteilungsaufgaben geschilderten Situationen ergeben nur mit natürlichen Zahlen einen Sinn. Aufgaben zum multiplikativen Vergleich hingegen können auch rationale Zahlen enthalten. Nesher (1992) konnte zeigen, daß Kinder, die in der Grundschulzeit vorwiegend mit Aufteilungs-Textaufgaben konfrontiert wurden, später große Schwierigkeiten mit dem Rechnen von Brüchen hatten, während Kinder, die in der Grundschule Vergleichsaufgaben gerechnet hatten, diese Schwierigkeiten in weitaus geringerem Maße hatten.

(c) *Textaufgaben zur Algebra*
Auch Erwachsene haben noch Probleme mit sprachlich eingekleideten Aufgaben, die das Aufstellen einer komplexen Algebragleichung erfordern. Sie lassen sich ähnlich wie Kinder häufig von Oberflächenmerkmalen einer Aufgabe leiten (Reed, 1987, 1993; Ross, 1984) oder sie wählen suboptimale Vorgehensweisen.

Daß auch Algebraaufgaben unterschiedliche Problemmodelle zugrundeliegen, wurde bei Bassok und Holyoak (1989) verdeutlicht. Mathematisch überdurchschnittlich leistungsstarke Neuntkläßler zeigten keinen spontanen Transfer von Lösungsstrategien bei Aufgaben mit derselben zugrundeliegenden Gleichung. Wurde die Akzelerationsformel

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

am Beispiel der Aufgabe

> Ein Schnellzug fährt 3 Sekunden nach dem Start 30 Stundenkilometer (a1). Danach nimmt die Geschwindigkeit konstant um 5 Stundenkilometer pro Sekunde (d) zu. Wie schnell wird der Zug nach 9 Sekunden fahren?

erworben, wurde sie nicht auf die Aufgabe

> Ein Junge bekommt an seinem sechsten Geburtstag ein wöchentliches Taschengeld von 50 Cents (a1). An jedem folgenden Geburtstag wird sein Taschengeld um 25 Cents (d) erhöht. Wie hoch wird sein wöchentliches Taschengeld an seinem 15. Geburtstag sein?

übertragen. Wurde die Formel hingegen am Beispiel der zweiten Aufgabe (Taschengeldaufgabe) geübt, konnte ein Transfer auf die erste Aufgabe (Zugaufgabe) beobachtet werden. Obwohl beiden Aufgaben die gleiche Formel zugrundeliegt, unterscheiden sie sich im mathematischen Wissen, das dem abstrakten Problemmodell zugrundeliegt. In der Taschengeldaufgabe werden

extensive Quantitäten beschrieben, während in der Zugaufgabe intensive (auf proportionale Einheiten bezogene) Quantitäten vorkommen. Extensive Quantitäten können addiert werden. Man kann die Gesamtsumme an Taschengeld, die der Junge in seinem bisherigen Leben erhalten hat, ausrechnen. Die Addition intensiver Quantitäten ist hingegen nicht sinnvoll.

Nach Greeno, Moore und Smith (1993) ist die asymmetrische Transferleistung damit zu erklären, daß in der Zugaufgabe kontinuierliche und in der Taschengeldaufgabe diskrete Größen vorkommen. Diskrete Größen können in kontinuierliche Größen umgewandelt werden, während der umgekehrte Vorgang keinen Sinn macht. Die Versuchspersonen interpretieren die Aufgabe mit den kontinuierlichen Größen als einen Spezialfall der Aufgabe mit diskreten Größen.

2 *Determinanten interindividueller Kompetenzunterschiede*

Vergegenwärtigt man sich, daß mathematische Inhalte eine Kulturleistung darstellen, deren Entwicklung mehrere Jahrhunderte in Anspruch nahm, ist der individuelle Aufwand beim Erwerb mathematischer Kompetenzen als ausgesprochen gering einzuschätzen. Basale mathematische Fertigkeiten, wie das Zählen, werden von den meisten Kindern in der Vorschulzeit ohne großen Aufwand erworben. Fast alle Menschen, die eine Schule besucht haben, verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten in den Grundrechenarten. Große interindividuelle Unterschiede gibt es jedoch in der zum Erwerb dieser Kompetenzen benötigten Zeit, was bereits zu Beginn der Grundschulzeit zu beobachten ist (Stern, 1994). In diesem Abschnitt werden drei mögliche Quellen für interindividuelle Unterschiede in der Mathematikleistung erörtert: (1) Primärfähigkeiten, (2) Geschlecht und (3) kulturelle Einflüsse. Da kulturellen Einflüssen in neuerer Zeit besondere Beachtung geschenkt wird, und zudem sehr interessante Ergebnisse zu diesem Thema vorliegen, werden diese besonders ausführlich behandelt.

2.1 Primärfähigkeiten

Zwischen mathematischen Kompetenzen und der allgemeinen Intelligenz lassen sich bereits in der Vorschulzeit substantielle Zusammenhänge beobachten (Snow & Swanson, 1992; Stevenson & Newman, 1986; Stern, 1994). Zieht man in Längsschnittstudien jedoch zusätzlich zur allgemeinen Intelligenz das zu einem früheren Zeitpunkt erfaßte mathematische Vorwissen zur Vorhersage mathematischer Kompetenzen heran, zeigt sich, daß die allgemeine Intelligenz einen geringen spezifischen Beitrag zur Varianzaufklärung leistet (Weinert, Helmke & Schneider, 1990; Renkl & Stern, 1994). Bei Renkl und Stern (1994) wurde der Einfluß der schulischen Lerngelegenheiten in Abhängigkeit vom Intelligenzniveau der Schüler untersucht. Es zeigte sich, daß die Schüler unabhängig vom Intelligenzniveau von anspruchsvollem, auf das Verständnis von Zusammenhängen ausgerichtetem Unterricht profitierten.

Schoenfeld (1991) betonte die Bedeutung metakognitiver Kompetenzen beim erfolgreichen Lösen mathematischer Aufgaben. Er konnte zeigen, daß schwächere Schüler Problemlösevorgänge unangemessen einschätzten. So meinten sie, daß man nur mathematische Probleme bewältigen könne, deren Lösung man auf den ersten Blick sehe. Kompetentere Schüler hingegen wußten, daß man erst nach einer längeren Problemanalyse eine angemessene Lösung findet.

2.2 Geschlecht

Systematische Geschlechtsunterschiede zugunsten männlicher Probanden in der Mathematikleistung werden in unterschiedlichsten Studien berichtet (Zusammenfassungen bei Hyde, Fennema & Lamon, 1990). In einigen Studien werden die Unterschiede erst mit Eintritt in die Pubertät gefunden, während andere Studien bereits in der Vor- und Grundschulzeit eine Überlegenheit der Jungen berichten (Tiedemann & Faber, 1994). Übereinstimmend wird berichtet, daß männliche Probanden insbesondere bei Aufgaben überlegen sind, die mathematisches Verständnis prüfen, wie z. B. Textaufgaben. Übereinstimmung besteht auch in der Leistungsverteilung: zu den Mittelwertsunterschieden zugunsten männlicher Probanden kommt es, weil diese im oberen Leistungsbereich stärker vertreten sind. Metaanalysen von in den letzten zwanzig Jahren durchgeführten Arbeiten zu geschlechtsspezifischen Leistungsunterschieden zeigen, daß die Unterschiede im Laufe der Jahre immer geringer wurden, jedoch auch in neueren Untersuchungen noch immer zu finden sind (Hyde, Fennema & Lamon, 1990). Zur Erklärung der Leistungsunterschiede können genetisch determinierte Ursachen sowie Ursachen, die im gesellschaftlichen Umfeld liegen, herangezogen werden. Lesern, die sich von der Komplexität der Fragestellung und der Fülle der Befunde überzeugen möchten, sei die Arbeit von Benbow (1988) empfohlen, der sich mehr als 40 Kommentare von Fachkollegen anschließen. Die weit verbreitete Auffassung, wonach Geschlechtsunterschiede in der Mathematikleistung mit Unterschieden in der Hemisphärendominanz sowie mit Unterschieden im räumlichen Vorstellungsvermögen zu erklären sind, ist umstritten. Unumstritten ist hingegen, daß trotz aller Bemühungen um Gleichbehandlung Eltern und Lehrer unterschiedliche Erwartungen an Jungen und Mädchen stellen (Fennema & Leder, 1990). Klauer (1992) konnte zeigen, daß Lehrer, Eltern und Schüler geschlechtsspezifische Leistungsunterschiede in Mathematik größer einschätzten, als sie tatsächlich sind. Aus den vermuteten geschlechtsspezifischen Leistungsunterschieden werden möglicherweise unterschiedliche Erwartungen an Jungen und Mädchen abgeleitet, die insbesondere Mädchen im oberen Leistungsbereich davon abhalten, ihre optimale Leistung zu erreichen. Deutliche Geschlechtsunterschiede sind im Attributionsstil und im Interesse an Mathematik zu beobachten, wobei diese Variablen keine kausalen Schlüsse zulassen. Mädchen sind weniger an Mathematik interessiert und neigen eher dazu, Mißerfolg mit mangelnden Fähigkeiten zu erklären, während Jungen mangelnde Anstrengung als Ursache sehen (Leder, 1990). Zum gegenwärtigen Zeitpunkt läßt der Stand der Forschung bestenfalls den lapidaren Schluß zu, daß sich bei Vermeidung aller die Mädchen benachteiligenden Umweltbedingungen die Leistungen zwischen den Geschlechtern noch stärker angleichen würden.

2.3 Interkulturelle Unterschiede

Wissenschaftlich fundierte Belege für interkulturelle Unterschiede in der Mathematikleistung wurden von der Arbeitsgruppe um James Stigler (Stigler & Baranes, 1988; Stigler, Lee & Stevenson, 1987) geliefert. Vergleiche zwischen Schülern in den USA und Schülern in Korea, China und Japan zeigen, daß die ostasiatischen den amerikanischen Schülern in den unterschiedlichsten mathematischen Leistungstests um etwa zwei Standardabweichungen überlegen sind. Der Unterschied zwischen japanischen und amerikanischen Schulklassen war in fast allen Tests bereits in der ersten Klasse gravierend: Die beste amerikanische Schulklasse war noch schlechter als die schlechteste japanische. Die Leistungen der chinesischen und der taiwanesischen Kinder waren schlechter als die der japanischen, aber deutlich besser als die der amerikanischen.

Im folgenden werden einige Ursachen für die interkulturellen Leistungsunterschiede diskutiert.

2.3.1 Zahlensymbolsysteme

Eine mögliche Ursache für die Überlegenheit ostasiatischer Kinder beim Erwerb des Zehnersystems ist, daß in deren Muttersprache die Zahlennamen logischeren Regeln folgen als in westeuropäischen Sprachen. Im Chinesischen heißen elf und zwölf wörtlich übersetzt „zehn-eins" und „zehn-zwei", zwanzig heißt „zwei-zehn". Im Deutschen stellen die Namen für die Zahlen 11, 12 und 20 Ausnahmen von der Regel dar, im Englischen kommen noch 13, 15 (fifteen statt fiveteen) sowie 30 und 50 dazu. Außerdem wird nicht „ten" sondern „teen" an Zahlwörter im Bereich der Zahlen 13 bis 19 angehängt. Im Französischen erfordert das Verstehen von Zahlen ab 80 (quatre-vingt) sogar das Verstehen der Multiplikation. Die Tatsache, daß ausgerechnet die Zahlwörter im kleinen Zahlenbereich, mit dem Kinder zuerst konfrontiert werden, nicht nach konsistenten Regeln aufgebaut sind, erschwert möglicherweise ganz erheblich das Verständnis des Zehnersystems, auf dem die meisten unserer Rechenstrategien aufbauen (Fuson & Kwon, 1992; Miller & Zhu, 1991).

Auch wurden in kulturvergleichenden Studien immer wieder Unterschiede in der Zahlspanne nachgewiesen. Ellis und Hennelley (1980) konnten zeigen, daß Kinder, die mit Walisisch als Muttersprache aufwuchsen, schlechter abschnitten als englischsprachige Kinder. Ostasiatische Kinder sind amerikanischen Kindern in der Zahlspanne überlegen, sie können sich im Durchschnitt zwei Zahlen mehr merken (Miller & Stigler, 1987). Eine Analyse der verwendeten Ziffernnamen ergab, daß walisische Ziffernwörter länger sind als englische und diese wiederum länger sind als die der ostasiatischen Sprachen. Im interkulturellen Vergleich gibt es also einen umgekehrten Zusammenhang zwischen der Anzahl der gemerkten Ziffern und der Länge der Ziffernnamen. Baddeley (1986) zieht diese Befunde als Beleg für die von ihm angenommene Artikulationsspanne im Arbeitsgedächtnis heran. Je kürzer die Zahlennamen sind, um so mehr Zahlen können innerhalb einer Zeiteinheit wiederholt werden. Ein Zusammenhang zwischen der Zahlspanne und Rechenfertigkeit wurde bei Hitch (1978) nachgewiesen.

2.3.2 *Unterschiede im Unterrichtsstil*

Stigler und seine Mitarbeiter (Stigler, Lee & Stevenson, 1987; Stigler & Perry, 1988) fanden deutliche Unterschiede im Unterrichtsstil zwischen US-amerikanischen und ostasiatischen Schulen. Während im amerikanischen Schulunterricht die Interaktion zwischen Schülern und Lehrer im Mittelpunkt steht, d.h. der Lehrer stellt den Schülern Übungsaufgaben und erteilt ihnen Rückmeldung über ihre Antworten, ist der japanische Unterricht vorwiegend Frontalunterricht. Der Lehrer demonstriert sehr sorgfältig und strukturiert Lösungsansätze, die die Schüler mitschreiben. Die Schüler werden ermutigt, Fragen zu stellen. Während in einer amerikanischen Unterrichtsstunde sehr viele Aufgaben behandelt werden, werden in japanischen Schulstunden wenige Aufgaben sehr intensiv besprochen. Alternative Lösungswege werden erörtert und konzeptuelles mathematisches Wissen wird im Zusammenhang mit Lösungsstrategien vermittelt.

Durch die Wahl der Aufgaben sowie durch deren Darbietung und die Art der Rückmeldung kann gesteuert werden, ob prozedurales oder konzeptuell-strategisches Wissen gelernt wird. Auch hier findet die Arbeitsgruppe interkulturelle Unterschiede: Japanische Lehrer strukturieren ihren Unterricht nicht nur klarer als amerikanische, sondern sie machen die Struktur auch den Schülern transparent und fördern damit konzeptuelles Verständnis. Die klare Strukturierung des Unterrichts und die Transparenz ermöglichen es den Kindern, ihre Aufmerksamkeit auf die für den Stoff wesentlichen Faktoren zu lenken. Daß Kinder, die einen transparenten und klaren Unterricht genossen haben, ihre Aufmerksamkeit unter gleichen Bedingungen auf andere Dinge lenken, konnten Fernandez, Yoshida und Stigler (1992) zeigen: Japanischen und amerikanischen Kindern wurden Videos vorgespielt, in denen eine Mathematikstunde im Klassenkontext gezeigt wurde, und anschließend sollten sich die Kinder an möglichst viele Sequenzen aus dem Film erinnern. Japanische Kinder erinnerten sich häufiger an den Unterrichtsstoff, während sich die amerikanischen Kinder häufiger an soziale Aktivitäten erinnerten. Bei Fragen, die der Lehrer an die Klasse stellte, erinnerten sich die amerikanischen Kinder an die Umstände, unter denen die Frage gestellt wurde, während die japanischen Kinder vor allen Dingen die Antwort auf die Fragen registrierten. Gleichzeitig konnten die Autoren zeigen, daß amerikanische Kinder, die nach japanischem Vorbild unterrichtet wurden, sich häufiger an inhaltlich relevante Ereignisse erinnerten.

2.3.3 *Unterschiede in den Lernaufgaben*

Die Bedeutung bestimmter Textaufgaben für die Erweiterung des mathematischen Verständnisses wurde bereits erörtert. Es wurde erwähnt, daß in westlichen Ländern Vergleichsaufgaben, welche das Verständnis von Addition und Subtraktion erweitern können, nur sehr selten vorgegeben werden. Von den in deutschen Schulbüchern vorkommenden Textaufgaben sind weniger als 5% Vergleichsaufgaben (Stern, 1994). Stigler, Fuson, Ham und Kim (1986) zeigten, daß derartige Aufgaben in russischen Grundschulen sehr viel häufiger vorkommen. Auch sogenannte komplexe Vergleichsaufgaben, die bereits den weiter oben erwähnten Algebraaufgaben ähneln, wie z.B.

> Hans hat 5 Murmeln.
> Peter hat 4 Murmeln mehr als Hans.
> Wie viele Murmeln haben Hans und Peter zusammen?

wurden bereits Grundschülern vorgegeben.

2.3.4 Unterschiede im Attributionsstil

Stevenson, Lee und Stigler (1986) zeigten, daß in Amerika und in Japan unterschiedliche Ursachen für die Erklärung von Leistungsunterschieden herangezogen wurden. Amerikanische Schüler, Eltern und Lehrer schätzten den Einfluß angeborener Begabungsunterschiede auf die Unterschiede in der Mathematikleistung weit höher ein als die entsprechenden Ostasiaten. Daraus ergaben sich Unterschiede in der Bewertung von Lehrer- und Unterrichtsmerkmalen. Amerikaner hielten das Eingehen auf interindividuelle Unterschiede im Schulunterricht durch den Lehrer für sehr wichtig, während auf japanischer Seite diesem Faktor keinerlei Bedeutung beigemessen wurde. Hingegen wurde die Fähigkeit des Lehrers, einen klaren und transparenten Unterricht zu gestalten, als *die* entscheidende Variable in Japan gesehen, während nach amerikanischer Ansicht dieser Fähigkeit eine untergeordnete Bedeutung beigemessen wurde.

3 Ansätze zur Förderung mathematischer Kompetenzen in der Schule

Welche Konsequenzen ergeben sich aus den bisherigen Ausführungen für den schulischen Mathematikunterricht? Weiter vorn wurde erörtert, daß mathematische Defizite sich insbesondere im mangelnden Transfer von Wissen zeigen. Die Schüler verfügen lediglich über aufgabenspezifische Prozeduren, sie ziehen einzelne „Wissensfetzen" zur Lösung heran, ohne über eine elaborierte mathematische Wissensbasis zu verfügen. Eingeschränktes numerisch-mathematisches Verständnis verhindert eine adäquate mathematische Modellierung von Situationen, also das Lösen mathematischer Textaufgaben.

In welcher Weise kann die Genese eines elaborierten mathematischen Verständnisses gefördert werden? In diesem Abschnitt werden einige unter Mitarbeit von Psychologen entwickelte Ansätze zur Verbesserung des mathematischen Verständnisses erörtert. Die im folgenden dargestellten Arbeiten basieren auf dem Ansatz des *Konstruktivismus* (von Glasersfeld, 1991). Dieser Ansatz distanziert sich entschieden von einem Sender-Empfänger-Modell des Wissenserwerbes. Mathematische Konzepte, Prinzipien und Problemlösekompetenzen werden nicht erworben, indem die vom Lehrer dargebotene Information in die Köpfe der Schüler kopiert und in Problemlöseverhalten umgesetzt wird, sondern müssen in der aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Anforderungssituationen *konstruiert* werden. Zuvor wurde bereits erörtert, daß elaborierte, auf konzeptuellem Verständnis beruhende mathematische Strategien in der Auseinandersetzung mit konkreten Aufgaben entstehen.

Dank der Verbreitung elektronischer Rechenhilfen hat Rechenkompetenz an Bedeutung verloren. Der Aufbau eines umfangreichen Faktennetzwerkes arithmetischer Operationen steht nicht länger im Mittelpunkt des Mathematikunterrichtes. Statt dessen kann der überwiegende Teil der Unterrichtszeit auf das Verständnis mathematischer Konzepte und Kompetenzen zur Modellierung von Situationen verwendet werden. Dessen ungeachtet bleibt die Behandlung schriftlicher Rechenoperationen im Unterricht bedeutsam, da mathematisches Verständnis nur in der Auseinandersetzung mit Aufgaben entstehen kann.

Hinsichtlich der Auswahl und Präsentation von Lernaufgaben im Mathematikunterricht lassen sich aus den vorangegangenen Darstellungen wichtige Hinweise ableiten.

3.1 Darbietung von Aufgabenfolgen

Es wurde bereits ausgeführt, daß neue, elaborierte Rechenstrategien eher an einfach strukturierten Aufgaben entdeckt werden, schwierigere Aufgaben hingegen die Anwendung einer bereits entdeckten Strategie fördern können. Die blockweise Darbietung von Aufgaben, deren Lösungen die Berücksichtigung eines bereits verfügbaren Prinzips erfordern, kann ebenfalls die assoziative Stärke einer Strategie erhöhen (Stern, 1992). So schlägt van Lehn (1990) vor, schriftliche Subtraktionsaufgaben vom gleichen Typ blockweise vorzugeben. Ist das Prinzip hingegen noch nicht verfügbar, kann die blockweise Vorgabe von Aufgaben des gleichen Typs die Entwicklung von Oberflächenstrategien fördern (Stern, 1992; Wittmann, 1990). Bei der Auswahl und der Präsentation von Aufgaben muß der Lehrer also berücksichtigen, ob die Schüler bereits über ein Prinzip verfügen, das noch gefestigt werden muß, oder ob das Prinzip erst entdeckt werden muß.

3.2 Vorgabe mathematischer Textaufgaben

Mathematische Textaufgaben kommen im schulischen Mathematikunterricht sehr viel seltener vor als numerische Aufgaben (Renkl & Stern, 1994). Es wurde in Abschnitt 1.2 bereits betont, daß das Lösen von Textaufgaben nicht als die einseitige Folge des numerisch-mathematischen Verständnisses gesehen werden kann, sondern daß auch das Bearbeiten von Textaufgaben die Entwicklung eines elaborierten mathematischen Verständnisses fördert. Am Beispiel von Textaufgaben zu den vier Grundrechenarten und der Algebra wurde die Bedeutung des der Aufgabe zugrundeliegenden Situationsmodelles für die Erweiterung des mathematischen Verständnisses verdeutlicht.

Mit einer gezielten Auswahl von Textaufgaben können in allen Altersstufen mathematische Kompetenzen verbessert werden.

3.3 Die Bedeutung der direkten Instruktion

Vertreter radikal konstruktivistischer Positionen bezweifeln, daß der schulische Mathematikunterricht über die Auswahl und die Anordnung von Aufgaben hinaus das mathematische Verständnis fördern kann. Die Aktivitäten des Lerners können durch die Außenwelt angeregt, aber nicht direkt beeinflußt werden. Dieser Position wird eine gemäßigt konstruktivistische Auffassung gegenübergestellt, wonach auch der Darbietung der Lernaufgaben eine besondere Bedeutung zukommt (Cobb, 1990). Wie dargestellt, werden im ostasiatischen Mathematikunterricht anhand von wenigen Beispielaufgaben mathematische Prinzipien erläutert. Dieses offensichtlich erfolgreiche Vorgehen ist nicht mit einer radikal konstruktivistischen Auffassung vom Kompetenzerwerb vereinbar, wonach der Lernende sich jeden Schritt selbst erarbeiten muß. Im folgenden werden Möglichkeiten der Gestaltung von Lehr-Lern-Umwelten diskutiert, die den Erwerb von transferierbarem mathematischen Wissen fördern.

3.4 Die Entwicklung graphischer Repräsentationshilfen

Das Verstehen mathematischer Konzepte und Gesetze zeigt sich in der Fähigkeit zur Flexibilität der Darstellungsweise. Eine Förderung des mathematischen Verständnisses kann durch die Explikation unterschiedlicher Repräsentationsformen erfolgen. In den letzten Jahren wurden zahlreiche Möglichkeiten der graphischen Darstellung mathematischer Inhalte entwickelt und überprüft (Schoenfeld, 1991). Bei Lorenz (1992) sind Veranschaulichungsmittel zur Vermittlung arithmetischer Prinzipien in der Grundschule dargestellt, die insbesondere für leistungsschwache Kinder hilfreich sein können. Nesher (1988) hat die Multiplikation und Division mit Brüchen in einer Weise graphisch veranschaulicht, die es ermöglicht, Mißkonzepte wie „Die Multiplikation zweier Zahlen führt immer zu einer größeren Zahl, das Ergebnis einer Division ist immer kleiner als der Dividend" aufzugeben. Steiner (1991) möchte in seinem „Networking-Ansatz" im Algebraunterricht die multiple Repräsentation mathematischen Wissens unterstützen, indem die Beziehung zwischen Variablen als Formel, als Graph und als Situationsmodell einer Textaufgabe dargestellt wird.

Zur Vermittlung des Verständnisses von linearen Funktionen hat die Arbeitsgruppe um Greeno (1991) eine Spule mit zwei Kurbeln entwickelt, die ein mit

Marken versehenes Seil durch zwei Meßlatten ziehen. Die Meßlatten entsprechen den Koordinaten, die Marken den Variablen einer Funktionsgleichung. Da sich durch das Drehen an *einer* Kurbel *beide* Variablen verändern, wird die Beziehung zwischen den Variablen verdeutlicht. Bei Schoenfeld (1991) finden sich ähnliche Ansätze.

Versuche der Lehrer, Schüler beim Lösen von Textaufgaben zur Anfertigung von Zeichnungen zu bewegen, schlagen häufig fehl. Lehrer beklagen sich darüber, daß die Schüler sich auf unwichtige Aspekte konzentrieren, wie z. B. das detaillierte Zeichnen von Gegenständen. Da jedoch die meisten Lehrenden nicht für die unterschiedlichen den Textaufgaben zugrundeliegenden Situationsmodelle sensibilisiert sind, können sie den Schülern keine wirksamen Hilfestellungen geben (Fuson, 1992). Fuson und Willis (1989) haben für Aufgaben zur Addition und zur Subtraktion Repräsentationshilfen entworfen, in denen die Unterschiede zwischen Austauschaufgaben und Vergleichsaufgaben verdeutlicht werden. Bei Greer (1992 b) finden sich Anregungen für die Repräsentation unterschiedlichster Situationen, die mit Hilfe von Multiplikationsgleichungen beschrieben werden können. Weaver und Kintsch (1992) haben Möglichkeiten der graphischen Verdeutlichung von Situationen mit extensiven und mit intensiven Größen erarbeitet und erprobt.

3.5 Computergesteuerte tutorielle Systeme

Die im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Repräsentationshilfen können im Schulunterricht herangezogen werden. Dem Lehrer bleibt die Aufgabe, die Hilfen in den Unterricht zu integrieren. Da jedoch der Schulunterricht nur wenig Gelegenheit für die aktive Teilnahme aller Kinder bietet, können die Repräsentationshilfen meist nur zur Demonstration im Frontalunterricht herangezogen werden. Der computergestützte Unterricht hingegen bietet allen Kindern die Gelegenheit zu aktivem Lernen. Zum Verstehen und Lösen von Textaufgaben haben die Arbeitsgruppe um Reusser (1992) sowie Nathan, Kintsch und Young (1992) Tutoren entwickelt, welche die Möglichkeit bieten, die in der Textaufgabe enthaltene Information in Einzelteile zu zerlegen und mit Hilfe mathematischer Operationen zu verknüpfen. Zudem besteht die Möglichkeit zum Abruf von aufgabenspezifischem Wissen, wie z. B. Wissen über komplexe physikalische Zusammenhänge. Die detaillierte Rückmeldung erlaubt eine Korrektur von Fehlern.

3.6 Im erfahrungsnahen Kontext verankerte Instruktionsprogramme

In der „Cognition and Technology Group“ an der Vanderbilt University in Tennessee werden auf der Grundlage psychologischer Erkenntnisse zur Informationsverarbeitung Unterrichtseinheiten entwickelt, die unter dem Namen „Jasper Series“ bekannt wurden (Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1992; Van Haneghan, Barron, Young, Williams, Vye & Bransford, 1992). In einem Videofilm wird ein komplexes Problem in einem ansprechenden Kontext geschildert. Das Problem muß in Teilschritte zerlegt werden, die alle eine mathematische Lösung erfordern. Die Lösung jedes Teilproblems erfordert die Berücksichtigung anspruchsvoller mathematischer Konzepte. Diese werden in der problemorientierten Diskussion in kleinen Gruppen und mit dem Lehrer vermittelt. In einer für die frühe Sekundarstufe konstruierten Unterrichtseinheit soll der Umgang mit proportionalen Größen und mit Grundbegriffen der Statistik vermittelt werden. Auch wenn eine direkte Übernahme der auf den US-amerikanischen Kontext zugeschnittenen Unterrichtseinheiten nicht sinnvoll erscheint, bieten die Programme doch Anregungen für einen anspruchsvollen und dennoch interessanten Mathematikunterricht. Empirische Evaluationen der Instruktionsprogramme durch nicht zur Arbeitsgruppe gehörende Wissenschaftler stehen allerdings noch aus.

Literatur

Antell, E. & Keating, D.P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development, 54*, 695–701.

Ashcraft, M.H. & Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory, 4*, 527–538.

Baddeley, A.D. (1986). *Working memory.* Oxford: Oxford University Press.

Baroody, A.J. & Ginsburg, H.P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.75–112). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bassok, M. & Holyoak, K.J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 15*, 153–166.

Benbow, C.P. (1988). Sex differences in mathematical reasoning ability in intellectually talented preadolescents: Their nature, effects, and possible causes. *Behavioral and Brain Sciences, 11*, 169–232.

Bideaud, J., Meljac, C. & Fischer, J.P. (Eds.). (1992). *Pathways to number. Children's developing numerical abilities.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bisanz, J. & LeFevre, J. (1990). Strategic and nonstrategic processing in the development of mathematical cognition. In D. Bjorklund (Ed.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (pp.213–244). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brown, J.S. & Burton, R.B. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2*, 155–192.

Campbell, J.I.D. (1987). The role of associative interference in learning and retrieving arithmetic facts. In J.A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp.107–122). New York: Oxford University Press.

Campbell, J.I.D (Ed.). (1992). *The nature and origins of mathematical skills.* Amsterdam: Elsevier.

Carey, S. & Gelman, R. (Eds.). (1991). *The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.7–44). New York: Academic Press.

Carraher, T.N., Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*, 21–29.

Cobb, P. (1990). A constructivist perspective on information-processing theories of mathematical activity. *International Journal of Educational Research, 14*, 67–92.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1992). The Jasper Experiment: An exploration of issues in learning and instructional design. *Educational Technology Research and Development, 40*, 65–80.

Collins, A., Brown, J.S. & Newman, S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp.453–494). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J. & Prosser, M. (1994). Concepts of mathematics and how it is learned: The perspectives of students entering university. *Learning and Instruction, 4*, 313–330.

Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K. & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology, 20*, 405–438.

Damerow, P. (1988). Individual development and cultural evolution of arithmetical thinking. In S. Strauss (Ed.), *Ontogeny, phylogeny, and historical development* (Human development series, Vol.2, pp.125–152). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corp.

De Corte, E., Verschaffel, L. & Greer, B. (in press). Mathematics. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology.* New York: Macmillan.

Ellis, N.C. & Hennelley, R.A. (1980). A bi-lingual word-length effect – implications for intelligence testing and the relative ease of mental calculation in Welsh and English. *British Journal of Psychology, 71*, 43–52.

Fennema, E. & Leder, G.C. (Eds.). (1990). *Mathematics and gender.* New York: Teachers College Press.

Fernandez, C., Yoshida, M. & Stigler, J.W. (1992). Learning mathematics from classroom instruction: On relating lessons to pupils' interpretations. *The Journal of the Learning Sciences, 2*, 333–365.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243–275). New York: Macmillan.

Fuson, K.C. & Kwon, Y. (1992). Learning addition and subtraction: Effects of number words and other cultural tools. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds.), *Pathways to number. Children's developing numerical abilities* (pp. 283–306). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, K.C. & Willis, G.B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 81*, 514–520.

Gelman, R. (1990). First principles organize attention to and learning about relevant data: Number and the animate-inanimate distinction as examples. *Cognitive Science, 14*, 79–106.

Gelman, R. (1991). Epigenetic foundations of knowledge structures: Initial and transcendent constructions. In S. Carey & R. Gelman (Eds.), *The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition* (pp. 293–322). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ginsburg, H.P. (Ed.). (1983). *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press.

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, 170–218.

Greeno, J.G., Moore, J.L. & Smith, D.R. (1993). Transfer of situated learning. In D.K. Detterman & R.J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 99–167). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corp.

Greer, B. (1987). Understanding of arithmetical operations as models of situations. In J. Sloboda & D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 60–80). Oxford: Clarendon Press.

Greer, B. (1992a). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Honel & T. Confrey (Eds.), *Multiplicative concepts.* New York: Suny Press.

Greer, B. (1992b). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on learning and teaching mathematics.* New York: Macmillan/Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Hiebert, J. (Ed.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leinhardt, R. Putnam & R.A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 283–322). Hilldale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. & Behr, M. (Eds.). (1988). *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2). Hillsdale, NJ: Erlbaum/National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. & LeFevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics;

An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 98–122.

Hitch, G.J. (1978). The role of short-term working memory in mental arithmetic. *Cognitive Psychology, 10*, 302–323.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development, 54*, 84–90.

Hyde, J.S., Fennema, E. & Lamon, S.J. (1990). Gender differences in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin, 107*, 139–155.

Ifrah, G. (1989). *Universalgeschichte der Zahlen.* Frankfurt: Campus.

Karmiloff-Smith, A. (1992). *Beyond modularity. A developmental perspective on cognitive science.* Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology.

Klauer, K.J. (1992). In Mathematik mehr leistungsschwache Mädchen, im Lesen und Rechtschreiben mehr leistungsschwache Jungen? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 24*, 48–65.

Leder, G.C. (1990). Gender differences in mathematics: An overview. In E. Fennema & G.C. Leder (Eds.), *Mathematics and gender* (pp. 10–26). New York: Teachers College Press.

Leinhardt, G., Putnam, R. & Hattrup, R.A. (Eds.). (1992). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lesh, R. & Landau, M. (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York: Academic Press.

Lochhead, J. (1983). The mathematical needs of students in physical sciences. In A. Ralston & G.S. Young (Eds.), *The future of college mathematics* (pp. 55–70). New York: Springer.

Lorenz, J.H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht.* Göttingen: Hogrefe.

Miller, K.F. & Stigler, J.W. (1987). Counting in Chinese: Cultural variation in a basic cognitive skill. *Cognitive Development, 2*, 279–305.

Miller, K.F. & Zhu, J. (1991). The trouble with teens: Accessing the structure of number names. *Journal of Memory and Language, 30*, 48–68.

Nathan, M.J., Kintsch, W. & Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction, 9*, 329–389.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19–40). Hillsdale, NJ/Reston, VA: Erlbaum/NCTM.

Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. In G. Leinhardt, R. Putnam &

R.A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189–219). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Nesher, P. & Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 41–51.

Peterson, P., Fennema, E., Carpenter, T. (1989). Teacher's pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction, 6*, 1–40.

Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition, 13*, 124–139.

Reed, S.K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D.K. Detterman & R.J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 39–67). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Renkl, A. & Stern, E. (1994). Die Bedeutung von kognitiven Eingangsvoraussetzungen und Lernaufgaben für das Lösen von einfachen und komplexen Textaufgaben. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 8*, 27–39.

Resnick, L.B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *The Minnesota Symposia on Child Psychology: Vol. 19. Perspectives on intellectual development* (pp. 159–194). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L.B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*, 162–169.

Resnick, L.B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam & R.A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373–429). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Reusser, K. (1992). Tutoring systems and pedagogical theory: Representational tools for understanding, planning, and reflection in problem-solving. In S. Lajoie & S. Derry (Eds.), *Computers as cognitive tools.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Riley, M.S. & Greeno, J.G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction, 5*, 49–101.

Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.H. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153–196). New York: Academic Press.

Ross, B.H. (1984). Remindings and their effects in learning a cognitive skill. *Cognitive Psychology, 16*, 371–416.

Schoenfeld, A.H. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In F.K. Lester, Jr. & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues and research* (pp. 27–37). Philadelphia: The Franklin Institute Press.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J.F. Voss, D.N. Perkins & J.W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311–343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Siegler, R.S. (1991). Strategy choice and strategy discovery. *Learning and Instruction, 1*, 89–102.

Siegler, R.S. & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sloboda, J.A. & Rogers, D. (1987). *Cognitive processes in mathematics.* New York: Oxford University Press.

Snow, R.E. & Swanson, J. (1992). Instructional psychology: Aptitude, adaptation, and assessment. *Annual Review of Psychology, 43*, 583–626.

Soloway, E., Lochhead, J. & Clement, J. (1982). Does computer programming enhance problem-solving ability? Some positive evidence on algebra word problems. In R.J. Seidel, R.E. Anderson & B. Hunter (Eds.), *Computer literacy* (pp. 171–185). New York: Academic Press.

Starkey, P., Spelke, E.S. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition, 36*, 97–127.

Steiner, G. (1991). Mathematisches Denken unter der Lupe: Methodologische Überlegungen über das Erfassen mathematischer Denkschritte. In U. Gerhard (Hrsg.), *Psychologie zwischen Anthropologie und Empirie: Festschrift zum 60. Geburtstag von Victor Hobi.* Bern: Huber.

Stern, E. (1992). Spontaneous use of conceptual mathematical knowledge in elementary school children. *Contemporary Educational Psychology, 17*, 266–277.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so hard for children? *Journal of Educational Psychology, 85*, 7–23.

Stern, E. (1994). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter.* Habilitationsschrift, Ludwig-Maximilians-Universität München.

Stern, E. & Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development, 7*, 259–268.

Stevenson, H.W., Lee, S.Y. & Stigler, J.W. (1986). Mathematics achievement of Chinese, Japanese, and American children. *Science, 231*, 693–699.

Stevenson, H.W. & Newman, R.S. (1986). Long-term prediction of achievement and attitudes in mathematics and reading. *Child Development, 57*, 646–659.

Stigler, J.W. & Baranes, R. (1988). Culture and mathematics learning. *Review of Research in Education, 15*, 253–305.

Stigler, J.W., Fuson, K.C., Ham, M. & Kim, M. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in U.S. and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction, 3*, 153–171.

Stigler, J.W., Lee, S.Y. & Stevenson, H.W. (1987). Mathematics classrooms in Japan, Taiwan and the United States. *Child Development, 58*, 1272–1285.

Stigler, J.W. & Perry, M. (1988). Mathematics learning in Japanese, Chinese, and American classrooms. In G.B. Saxe & M. Gearhart (Eds.), *Children's mathematics* (pp. 27–54). San Francisco: Jossey-Bass.

Tiedemann, J. & Faber, G. (1994). Mädchen und Grundschulmathematik: Ergebnisse einer vierjährigen Längsschnittuntersuchung zu ausgewählten geschlechtsbezogenen Unterschieden. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 2,* 101–111.

Van Haneghan, J., Barron, L., Young, M., Williams, S., Vye, N. & Bransford, J. (1992). The Jasper Series: An experiment with new ways to enhance mathematical thinking. In D. F. Halpern (Ed.), *Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics* (pp. 15–38). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Van Lehn, K. (1983). On the representation of procedures in repair theory. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 197–252). New York: Academic Press.

Van Lehn, K. (1990). *Mind bugs. The origins of procedural misconceptions.* Cambridge: MIT Press.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141–161). Reston, VA/Hillsdale, NJ: National Council of Teachers of Mathematics/Erlbaum.

Vergnaud, G. (1992). The appropriation of the concept of number: a lengthy process. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds.), *Pathways to number* (pp. 219–227). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Von Glasersfeld, E. (Ed.). (1991). *Radical constructivism in mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Weaver III, C.A. & Kintsch, W. (1992). Enhancing students' comprehension of the conceptual structure of algebra word problems. *Journal of Educational Psychology, 84,* 419–428.

Weinert, F.E., Helmke, A. & Schneider, W. (1990). Individual differences in learning performance and in school achievement: Some plausible parallels and some unexplained discrepancies. In H. Mandl, E. de Corte, N. Bennett & H.F. Friedrich (Eds.), *Learning and instruction: Vol. 2.1. Social and cognitive aspects of learning and instruction* (pp. 461–479). Oxford: Pergamon.

Wittmann, E. Ch. (1990). Wider die Flut der „bunten Hunde" und der „grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen: Bd. 1. Vom 1+1 zum 1×1.* Stuttgart: Klett.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36,* 155–193.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358,* 749–750.